Definição: O máximo divisor comum de dois números inteiros é o maior número inteiro que é fator de cada um deles.

Geralmente o máximo divisor comum é mais útil em Matemática do que os outros fatores comuns. Por isso estamos mais interessados no máximo divisor comum.

Vejamos outro exemplo. Suponha que desejamos achar o máximo divisor comum de 12 e 18. Poderíamos escrever o conjunto de fatores de cada um.

O conjunto de fatores de 12 é {1, 2, 3, 4, 6, 12}

O conjunto de fatores de 18 é {1, 2, 3, 6, 9, 18}

O conjunto de fatores comuns de 12 e 18 é {1, 2, 3, 6}

O maior elemento do último conjunto é 6. Logo, 6 é o máximo divisor comum de 12 e 18. Da mesma maneira, suponha que quiséramos achar o máximo divisor comum de 24 e 60. Escrevendo os fatores de cada um:

O conjunto de fatores de 24 é {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

O conjunto de fatores de 60 é {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

O conjunto de fatores comuns é {1, 2, 3, 4, 6, 12}

O maior deles é 12. Logo, 12 é o máximo divisor comum de 24 e 60.

Exercícios 5-4

1. Escreva o conjunto de fatores de cada um dos números seguintes. Coloque-os numa lista cuidadosamente e depois você terá de usá-los no Problema 2 abaixo.

a. 6 | c. 12 | e. 16
b. 8 | d. 15 | f. 21

2. Usando suas respostas do Problema 1 acima, escreva o conjunto dos fatores comuns em cada um dos seguintes casos:

a. 6, 8 | c. 12, 15 | e. 12, 15, 21
b. 8, 12 | d. 6, 8, 12 | f. 8, 12, 16

3. Escreva o conjunto de todos os fatores para cada um dos números seguintes:

a. 19 b. 28 c. 36 d. 40 e. 45 f. 72

4. Usando suas respostas dos problemas 1 e 3 acima, escreva o conjunto de fatores comuns para cada um dos seguintes casos:

a. 19, 28 | c. 28, 40 | e. 40, 72
b. 16, 36 | d. 36, 45 | f. 19, 36, 45

5. Usando as respostas dos problemas 2 e 4, escreva o máximo divisor comum de cada um dos seguintes casos:

a. 8, 12, 16 | c. 28, 40 | e. 40, 72
b. 16, 36 | d. 36, 45 | f. 8, 12, 16, 36

6. Ache o máximo divisor comum em cada um dos seguintes casos:

a. 15, 25 | f. 15, 30, 36
b. 18, 30 | g. 12, 24, 48
c. 24, 36 | h. 40, 48, 72
d. 25, 75 | i. 15, 30, 45
e. 32, 48 | j. 20, 50, 100

7. a. Qual é o máximo divisor comum de 6 e 6?

b. Qual é o máximo divisor comum de 29 e 29?

c. Qual é o máximo fator comum de a e a, onde a é um número natural qualquer?

8. a. Qual é o máximo divisor comum de 1 e 6?

b. Qual é o máximo divisor comum de 1 e 29?

c. Qual é o máximo fator comum de 1 e a, onde a é um número inteiro qualquer?

9. Sejam a e b dois números inteiros diferentes quaisquer onde $a < b$

a. a e b sempre têm um fator comum? Se tiverem, qual é êsse fator?

b. Seja c o fator comum de a e b. Pode $c = a$? Caso possa, dê um exemplo.

10. Suponha que 1 seja o máximo divisor comum de três números.

   a. Um dos três números deve ser um número primo? Se não, escreva um conjunto de três números compostos cujo máximo divisor comum seja 1.

   b. Dois dos números podem ter máximo divisor comum maior do que 1? Caso possam, dê um exemplo.

11. Seja A o conjunto de todos os fatores de 18. Seja B o conjunto de todos os fatores de 42.

   a. Escreva o conjunto A

   b. Escreva o conjunto B

   c. Qual é a intersecção dos conjuntos A e B?

   d. Quais são os fatores comuns de 18 e 42?

   e. Como podemos comparar as respostas das partes c e d?

12. Se C é o conjunto dos fatores de 30 e C é o conjunto de fatores de 51, qual é a intersecção dos conjuntos C e D?

13. Se E é o conjunto de fatores de 39 e G é o conjunto de fatores de 52, qual é a intersecção de E e G?

14. Às vêzes para acharmos o máximo divisor comum de um conjunto de números é trabalhoso escrevermos todos os fatores. Tente descobrir um processo mais rápido para obter o máximo divisor comum. Suponha que você deseja achar o máximo divisor comum de 36 e 45.

   a. Escreva uma fatoração completa de 36 e de 45 (Mencione todos os fatores primos de 36 e de 45).
   Exemplo: $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$
   $45 = ? \cdot ? \cdot ? \cdot \; = ? \cdot ?$

   b. Qual é o máximo divisor comum de 36 e 45?

   b. Compare a lista dos fatores primos de 36 e 45 e o máximo divisor comum de 36 e 45. Você percebe qual é o processo mais rápido para obtermos o máximo divisor comum?

15. a. Escreva uma fatoração completa para 18 e para 90

   b. Qual é o máximo divisor comum de 18 e 90?

16. Fatore completamente cada um dos números dos conjuntos seguintes e ache o máximo divisor comum para cada conjunto de números

   a. {24, 60}
   b. {36, 90}
   c. {72, 108}
   d. {25, 75, 125}
   e. {24, 60, 84}
   *f. {42, 105, 147}
   *g. {165, 234}
   *h. {306, 1173}
   *i. {2040, 2184}

*17. a. Qual é o máximo divisor comum de 0 e 6?

   b. Qual é o mínimo divisor comum de 0 e 6

   c. Qual é o mínimo divisor comum de dois números inteiros quaisquer?

*18. Você estudou as operações com números inteiros, adição, subtração, multiplicação e divisão. Nesta seção estudamos a operação de achar o máximo divisor comum. As vêzes abreviamos isso para MDC. Neste problema vamos usar o símbolo "Δ" para a operação MDC. Para quaisquer números, a, b e c.

$a \, \Delta \, b$ = M.D.C. de a e b

ou $a \, \Delta \, c$ = M.D.C. de a e c

Exemplo: $12 \, \Delta \, 18 = 6$

$9 \, \Delta \, 15 = 3$

   a. O conjunto dos números inteiros é fechado em relação à operação Δ?

   b. A operação Δ é comutativa, isto é,

   $a \, \Delta \, b = b \, \Delta \, a$?

   c. A operação Δ é associativa, isto é,

   $a \, \Delta \, (b \, \Delta \, c) = (a \, \Delta \, b) \, \Delta \, c$?

5-5. Restos das Divisões

Outra maneira de acharmos o máximo divisor comum é fazendo uso da relação entre as partes de um problema de divisão. Para entender êste método vamos rever o processo da divisão.

A questão "Qual é o resultado da divisão de 16 por 5?" pode ser transformada na pergunta "Quantos cincos estão contidos em 16"? Podemos achar a resposta fazendo subtrações sucessivas como está feito à direita. Contando o número de vêzes que um 5 foi subtraído obtemos a resposta 3 com um resto 1. Temos 16 = (5 + 5 + 5) + 1?

$$\begin{array}{r} 16 \\ -5 \\ \hline 11 \\ -5 \\ \hline 6 \\ -5 \\ \hline 1 \end{array}$$

A maneira comum de achar a resposta dêste problema é a seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 5 \\ \cline{2-2} -15 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Resto: 1

Para conferir a resposta usamos o seguinte processo:

16 = (5 x 3) + 1

Na divisão acima, o 16 é chamado dividendo, 5 divisor, 3 quociente e o 1 é o resto.

Tomemos um outro exemplo: Dividir 205 por 25.

$$\begin{array}{r|l} 205 & 25 \\ \cline{2-2} -200 & 8 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Temos 205 = (25 x 8) + 5

Em geral, numa divisão temos a relação:

dividendo = (divisor x quociente) + resto

Usando símbolos matemáticos, onde

"a" representa o dividendo

"b" representa o divisor

"q" representa o quociente

"R" representa o resto

Esta relação na divisão pode ser expressa assim:

a = (b . q) + R

Consideremos o seguinte exemplo de divisão

$$\begin{array}{r|l} 623 & 25 \\ \cline{2-2} 50 & 24 \\ \hline 123 & \\ 100 & \\ \hline 23 & \end{array}$$

Resto: 23

Podemos escrever êste problema sob a forma

623 = (25 x 24) + 23

Isto segue a forma geral:

dividendo = (divisor x quociente) + resto

ou

a = (b . q) + R

Exercícios 5-5

1. Copie e complete a seguinte tabela. Faça isso cuidadosamente pois você a usará para responder à Questão 2.

	DIVIDENDO =	(DIVISOR	x QUOCIENTE)	+ RESTO
EXEMPLO	9	4	2	1
a.	15	6	?	3
b.	14	5	?	?
c.	20	?	3	2
d.	37	5	?	?
e.	38	9	?	?
f.	41	12	?	?
g.	30	?	5	0
h.	?	11	8	0
i.	77	?	3	17
j.	81	?	?	0

2. Use a tabela do Problema 1, para responder as partes a, b e c.

a. Compare o divisor e o quociente de cada parte. Um dêles sempre tem maior valor do que o outro?

b. Compare o quociente e o dividendo. Qual dêles tem valor maior, se ambos são números naturais?

c. Compare o divisor e o resto. Qual dêles tem sempre um valor maior?

d. O dividendo pode ser zero? Dê um exemplo, caso possa.

e. O divisor pode ser zero? Dê um exemplo, caso possa.

f. O quociente pode ser zero? Caso possa, dê um exemplo.

g. O resto pode ser zero? Dê um exemplo, caso possa.

3. Usando a tabela do Problema 1, responda as seguintes questões:

a. Qualquer número inteiro pode aparecer como um dividendo? Caso contrário, dê um exemplo.

b. Qualquer número inteiro pode ser divisor? Se não puder, dê um exemplo.

c. Qualquer número inteiro pode ser quociente? Caso não possa, dê um exemplo.

d. O resto deve ser sempre algum número inteiro? Por que?

4. Copie e complete a tabela seguinte para a relação da divisão:

$$a = (b \; . \; q) + R$$

	a	b	q	R
a.	15	?	7	?
b.	?	10	9	8
c.	50	12	?	?
d.	100	?	?	0
e.	283	17	?	?
f.	630	?	25	5

5. Usando a tabela acima, responda as seguintes questões:

a. R pode ser maior que b? Caso possa, exemplifique.

b. q pode ser maior que b? Caso possa, dê um exemplo.

c. R pode ser maior do que q? Caso possa, dê um exemplo.

d. Qualquer número inteiro pode ser tomado por b? Explique.

e. Qualquer número natural pode ser um possível valor de b? Explique.

f. Qualquer número inteiro pode ser um possível valor de a? Explique.

6. Usando a relação da divisão $a = (b \; . \; q) + R$, onde $R < b$, responda o seguinte:

a. Se $b = 4$, escreva o conjunto de todos os restos possíveis.

b. Se $b = 11$, descreva o conjunto de todos os restos possíveis.

c. Se todos os restos possíveis em uma divisão são os números inteiros menores que 25, quanto é b?

d. Se $b = K$, quais das expressões seguintes representa o número de todos os restos possíveis?

(K), $(K + 1)$, ou $(K - 1)$.

7. No Capítulo 5, Seção 4, aprendemos a achar o máximo divisor comum de dois números. Usando a relação da divisão temos um outro método para fazer isto.

EXEMPLO: (A) Achar o máximo divisor comum de 12 e 8.

(1) Primeiro, dividimos o número maior pelo número menor:

12 dividido por 8 = 1, Resto 4

(2) Divida o divisor, 8, pelo resto, 4:

8 dividido por 4 = 2, Resto 0

(3) 4 é o último divisor usado que dá um resto zero. O máximo divisor comum de 8 e 12 é 4.

EXEMPLO: (B) Ache o máximo divisor comum de 35 e 56.

(1) Primeiro, divida o número maior 56 pelo número menor 35.

$$\begin{array}{r|l} 56 & 35 \\ \underline{35} & 1 \\ 21 & \end{array} \qquad \text{Resto } 21$$

(2) Segundo, divida o divisor 35, pelo resto 21.

$$\begin{array}{r|l} 35 & 21 \\ \underline{21} & 1 \\ 14 & \end{array} \qquad \text{Resto } 14$$

(3) Em seguida, continue dividindo o último divisor pelo último resto até encontrar o resto 0.

$$\begin{array}{r|l} 21 & 14 \\ \underline{14} & 1 \\ 7 & \end{array} \qquad \text{Resto } 7 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 14 & 7 \\ \underline{14} & 2 \\ 0 & \end{array} \qquad \text{Resto } 0$$

O último divisor usado é o máximo divisor comum. O 7 é o máximo divisor comum de 35 e 56.

Note que quando dividimos 14 por 7 achamos resto 0. O 7 foi o último divisor usado.

Usando o método acima, ache o máximo divisor comum (M. D. C.) de cada um dos seguintes pares de números:

a. 32 e 82
b. 81 e 102
c. 72 e 150
*d. 124 e 836
*e. 336 e 812
*f. 1207 e 1349

5-6. Revisão

1. Efetue cálculos indicados. Confira todos os problemas após a parte a, usando a operação inversa.

a. 13 + 729 + 206 + 48
b. 500 - 399
c. 57 x 69
d. 4269 ÷ 3
e. 1325 - 764
f. 308 x 47
g. 3612 ÷ 4
h. 2344 x 601
i. 445 - 366
j. 8301 ÷ 5

2. Efetue as operações aritméticas seguintes. Efetue as operações e dê as respostas na base sete.

a. $21_{sete} + 34_{sete}$
b. $352_{sete} + 416_{sete}$
c. $416_{sete} - 352_{sete}$
d. $308_{sete} - 155_{sete}$

3. Faça uma lista do conjunto de todos fatores comuns para cada um dos seguintes:

a. 18, 42
b. 21, 33
c. 24, 60
d. 39, 78

4. Na base sete, dê o conjunto de todos fatores comuns para cada um dos seguintes:

a. 30_{sete}, 50_{sete}
b. 42_{sete}, 60_{sete}
c. 66_{sete}, 51_{sete}
d. 100_{sete}, 100_{dez}

5. Efetue os cálculos indicados. Confira todos os problemas, após a parte a, usando a operação inversa.

a. 985 + 726 + 673 + 1548
b. 90 703 - 70 309 confira
c. 60 004 - 54 927 confira
d. 237 x 405 confira
e. 32 396 ÷ 89 confira
*f. 167 544 ÷ 276 confira
*g. 14 411 ÷ 2401 confira

6. Ache o máximo divisor comum dos números dados em cada um dos itens seguintes:

a. 18, 42
b. 28, 56
c. 48, 84
d. 29, 92

7. Ache o máximo divisor comum para cada um dos conjuntos seguintes. Escreva suas respostas na base sete.

a. 15_{sete}, 33_{sete}

b. 26_{sete}, 50_{sete}

c. 66_{sete}, 110_{sete}

8. Efetue os cálculos aritméticos seguintes. Expresse tôdas as respostas em expressões mais simples.

a. $\frac{3}{8} + \frac{3}{8}$

b. $\frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$

c. $8 \div \frac{2}{5}$

d. $\frac{15}{16} - \frac{7}{16}$

e. $\frac{10}{21} - \frac{5}{21}$

f. $\frac{7}{9} - \frac{4}{9}$

9. Considere três retas em um plano.

a. Se não tivermos duas delas paralelas entre sí, quantos pontos de intersecção têm as três retas? Faça figuras afim de ilustrar a sua resposta.

b. Quantos pontos de intersecção têm as três retas, se sòmente duas das retas forem paralelas entre si?

c. Quantos pontos de intersecção tem as três retas se elas forem paralelas entre si?

10. Suponha que você esteja numa sala cujas paredes, piso e teto têm todos a forma retangular.

a. Quantos exemplos você pode achar onde três planos sugeridos pelas paredes (ou piso ou teto) se interceptam em um ponto?

b. Quantos exemplos você pode achar de dois planos que se interceptam numa reta?

11. Quais dos seguintes números são divisíveis por 2?

a. 101_{dois}

b. 101_{cinco}

c. 101_{seis}

d. 101_{sete}

e. 101_{oito}

f. 101_{dez}

12. Quais dos seguintes números são múltiplos de 3?

a. $12_{três}$

b. 13_{quatro}

c. 14_{cinco}

d. 15_{sete}

e. 17_{oito}

f. 18_{nove}

13. Com os números abaixo, faça duas colunas; uma formada pelos números compostos e outra, pelos números primos.

Números Compostos — Números Primos

a. 24_{cinco}

b. 111_{dois}

c. 155_{sete}

d. 91

e. 63

f. 10_{dois}

g. 103

h. 35_{nove}

14. a. Desenhe dois ângulos tais que a intersecção de seus interiores seja o interior de um triângulo.

b. Desenhe dois raios cuja reunião seja uma reta.

15. Escreva por extenso os números representados abaixo:

a. 700 003

b. 803 040

c. 610 502

d. 129 041

16. a. Escreva o conjunto de todos os restos possíveis de uma divisão, se o divisor fôr 5.

b. Qual é o divisor, se o maior resto possível de uma divisão é 13?

c. Escreva o conjunto de todos os fatores possíveis de 31. Explique porque temos sòmente dois elementos neste conjunto

17. Escreva os números representados pelos seguintes nomes, usando numerais

a. oitocentos e um

b. três mil e setecentos

c. vinte e um mil e vinte e quatro

d. 4 $\frac{1}{2}$ milhões

*18. a. O conjunto dos números primos é fechado em relação à adição?

b. O conjunto dos números primos é fechado em relação à multiplicação?

*19. Suponha que a, b, f e g sejam quatro números diferentes. Todos êles são múltiplos de f. O máximo divisor comum de a e b é g. Usando um dos símbolos (<, =, ou >), descreva a relação que existe entre cada um dos seguintes pares:

a. f ? a

b. f ? b

c. f ? g

d. Escreva um número para cada uma das letras para exemplificar estas relações

*20. Suponha que os números do problema anterior não sejam necessàriamente diferentes. Usando os símbolos (<, =, ou >) descreva as relações possíveis para os seguintes pares:

a. f ? g

b. a ? f

c. g ? b

d. a ? b

*21. a. Os fatores de 7 são 1 e 7. Que propriedade dos números inteiros nos permite escrever $1 \times 7 = 7 \times 1$?

b. Uma fatoração completa de 12 é $12 = 2 \times 2 \times 3$ ou $12 = 2^2 \times 3$. Quais são as duas propriedades dos números inteiros que nos permitem escrever $2 \times 2 \times 3 = 2 \times 3 \times 2 = 3 \times 2 \times 2$?

c. A menos da ordem, qual é o maior número de conjuntos de fatores primos possível de qualquer número natural dado?

*22. Escreve-se os numerais de 1 a 50 em pedaços de papeis separados e mistura-se os mesmos dentro de um chapéu. Se um pedaço de papel fôr retirado e depois recolocado no mesmo cada vez que fôr retirado, qual é a probabilidade de que o numeral retirado represente um número divisível por cada um dos números seguintes?

a. 10 b. 5 c. 2 d. 1

*23. Em relação à questão anterior, qual é o menor número de papeis que devem ser retirados do chapéu de maneira que estejamos certos de ter um numeral divisível por cada um dos números seguintes?

a. 1 b. 2 c. 3 d. 5

*24. Existe uma correspondência bi-univoca entre o seguinte conjunto de números Caso haja, identifique a correspondência.

a. O conjunto dos números naturais de 1 a 11 e o conjunto dos números inteiros de 0 a 10.

b. O conjunto dos números ímpares entre 50 e 80 e o conjunto dos números pares entre 17 e 47.

c. O conjunto de todos os múltiplos de 3 que são menores que 44 e o conjunto de todos múltiplos de 7 que estão entre 100 e 200

5-7. Mínimo Múltiplo Comum

Você já aprendeu uma boa quantidade de cousas sôbre múltiplos dos números:

que todos os números inteiros são múltiplos de 1.

que todos os números pares {0, 2, 4, 6, ...} são múltiplos de 2.

que {0, 3, 6, 9, ...} são múltiplos de 3.

Da mesma maneira podemos dar os múltiplos de qualquer número natural.

O número 2 é um número par e o número 3 é um número ímpar. Habitualmente não imaginamos qûe tais números tenham muita coisa em comum. Entretanto, se olharmos para o conjunto de múltiplos de 2 e o conjunto de múltiplos de 3, observamos que êles tem realmente algo em comum. Alguns múltiplos de 2 são também múltiplos de 3. Por exemplo, 6 é um múltiplo tanto de 2 como de 3. Existem muitos de tais números divisíveis por 2 e também por 3. O conjunto desses números é:

{6, 12, 18, 24, 30, ...,}

Definição: Números que são múltiplos de mais de um número chamam-se <u>múltiplos comuns</u> desses números. "Comum" significa que pertence a mais de um. Assim, 6 e 12 são múltiplos comuns de 2 e 3.

Tomemos um outro exemplo. Formemos um conjunto dos múltiplos de 3 e 4. Primeiro tomemos os múltiplos de cada um dêles:

Conjunto de múltiplos de 3: {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ...,}

Conjunto de múltiplos de 4: {0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, ...,}

Os números que êstes conjuntos têm em comum são os <u>múltiplos comuns</u> de 3 e 4. Escrevemos êste conjunto assim:

{0, 12, 24, 36, 48, ...,}

Êste conjunto é a intersecção dos dois conjuntos anteriores.

Os múltiplos comuns são muito úteis em Aritmética. Por exemplo, adicionemos $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Escrevemos $\frac{1}{2}$ como $\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{3}$ como $\frac{2}{6}$.

Então $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$. Aqui usamos um múltiplo comum de 2 e 3. Fazendo tais problemas você pode ter chamado o 6 um "denominador comum". É um múltiplo comum dos denominadores das frações dadas.

Como 6, 12, 18, etc., são múltiplos de 2 e 3, podemos usar qualquer um dêstes números para adicionar $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Note que o número 6, que usamos, é o menor dêstes possíveis números. É também o menor dos múltiplos comuns de 2 e 3. O número 6 é denominado o <u>mínimo múltiplo comum</u> de 2 e 3

<u>Definição</u>: O mínimo múltiplo comum de um conjunto de números naturais é o menor número natural que é um múltiplo de cada membro do conjunto dos números dados.

Note que 0 é um múltiplo comum para qualquer conjunto de números inteiros. Entretanto, para adicionarmos ou subtrairmos frações 0 não pode ser usado como denominador comum. Você pode escrever $\frac{1}{2}$ com um zero no denominador? Por não podermos fazer isto, estamos interessados sòmente no mínimo múltiplo comum que não seja zero.

Suponha que desejamos encontrar o mínimo múltiplo comum de 12 e 18. Primeiro formemos o conjunto dos múltiplos de cada um dêles:

Conjunto de múltiplos de 12: {0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ...}

Conjunto de múltiplos de 18: {0, 18, 36, 54, 72, ...}

O conjunto de múltiplos comuns de 12 e 18 é {0, 36, 72, 108, ...}. O menor número natural dêste conjunto é 36. Logo, 36 é o mínimo múltiplo comum de 12 e 18. Qual é o mínimo múltiplo comum de 2, 3 e 4?

Conjunto dos múltiplos de 2: {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}

Conjunto dos múltiplos de 3: {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...}

Conjunto dos múltiplos de 4: {0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, ...}

O conjunto dos múltiplos comuns de 2, 3 e 4 é {0, 12, 24, 36, 48, ...}. Qual é o menor número natural dêste conjunto? De acôrdo com a nossa definição, o mínimo múltiplo comum de 2, 3 e 4 é 12.

<u>Exercícios 5-7</u>

1. Escreva o conjunto de todos os múltiplos menores que 100 para cada um dos números seguintes:

   a. 6

   b. 8

   c. 9

   d. 12

2. Usando suas respostas do Problema 1, escreva o conjunto de todos os múltiplos comuns, menores do que 100, para cada par seguinte:

   a. 6 e 8 — d. 8 e 9

   b. 6 e 9 — e. 8 e 12

   c. 6 e 12 — f. 9 e 12

3. Usando suas respostas do Problema 2, escreva o mínimo múltiplo comum dos elementos de cada um dos conjuntos seguintes:

   a. 6 e 8 — b. 8 e 9

c. 6 e 12

d. 8 e 9

e. 8 e 12

f. 9 e 12

4. Ache o mínimo múltiplo comum dos elementos de cada um dos conjuntos seguintes:

a. {2, 5}

b. {4, 6}

c. {2, 3, 5}

d. {3, 4, 6}

e. {2, 5, 6}

f. {4, 5, 6}

g. {2, 6, 7}

h. {8, 9, 12}

5. Ache o mínimo múltiplo comum dos elementos dos conjuntos seguintes:

a. {2, 3}

b. {3, 5}

c. {3, 7}

d. {5, 7}

e. {2, 11}

f. {5, 11}

g. {2, 13}

h. {7, 11}

i. {3, 13}

j. {11, 13}

k. {2, 3, 5}

l. {23, 29}

6. Referindo-se ao Problema 5, responda as seguintes questões:

a. A que conjunto pertencem os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 23 e 29 — ao conjunto dos números compostos ou ao dos números primos?

b. A partir de suas respostas do Problema 5, qual parece ser uma maneira fácil de achar o mínimo múltiplo comum nestes casos?

7. Ache o <u>mínimo múltiplo</u> comum para cada um dos conjuntos seguintes:

a. {4, 6}

b. {4, 8}

c. {4, 8}

d. {6, 9}

e. {6, 10}

f. {10, 12}

g. {12, 15}

h. {4, 6, 10}

i. {10, 15, 30}

j. {4, 6, 8}

8. No Problema 7, a que conjunto de números, compostos ou primos, cada um dos números 4, 6, 8 . . . , das partes a à j pertencem?

9. Compare as questões e suas respostas dos Problemas 7 e 8. Agora responda o seguinte:

a. Se c e d são números naturais compostos pode ser c ou d o mínimo múltiplo comum dêles? Dê um exemplo para explicar sua resposta.

b. Se <u>c</u> e <u>d</u> são números naturais compostos c ou d deve ser o mínimo múltiplo comum dêles? Dê um exemplo que justifique a sua resposta.

10. a. Qual é o mínimo múltiplo comum de 6 e 6?

b. Qual é o mínimo múltiplo comum de 29 e 29?

c. Qual é o mínimo múltiplo comum de a e a onde a é um número natural qualquer?

11. a. Qual é o mínimo múltiplo comum de 1 e 6?

b. Qual é o mínimo múltiplo comum de 1 e 29?

c. Qual é o mínimo múltiplo comum de 1 e a onde a representa um número natural qualquer?

12. a. Se a e b são números primos diferentes, a ou b pode representar o mínimo múltiplo comum de a e b?

b. Se a e b são números primos diferentes, como podemos representar o mínimo múltiplo comum de a e b?

c. Se a, b e c são números primos diferentes, qual é o mínimo múltiplo comum de a, b e c?

13. Estude os exemplos seguintes. Tente descobrir u'a maneira rápida de determinar o mínimo múltiplo comum.

EXEMPLO A: Achar o mínimo múltiplo comum de 48 e 8

(1) Primeiro, escreva uma fatoração completa para cada um dos números

$4 = 2^2$ $6 = 2 \cdot 3$ $8 = 2^3$

(2) O mínimo múltiplo comum é $2^3 \cdot 3$, ou 24.

(3) Note que $2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3 = 192$ que é um múltiplo comum de 4, 6 e 8, mas não é o menor.

EXEMPLO B: Ache o mínimo múltiplo comum de 12 e 18.

(1) Uma fatoração completa para cada número:

$12 = 2^2 \cdot 3$ $18 = 2 \cdot 3^2$

(2) O mínimo múltiplo comum de 12 e 18 é $2^2 \cdot 3^2$, ou 36.

(3) $(2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2)$ é um múltiplo comum de 12 e 18?

(4) $(2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2)$ é o mínimo múltiplo comum de 12 e 18?

Agora ache o mínimo múltiplo comum de cada conjunto dos ítens seguintes:

a. 12, 16
b. 14, 16
c. 9, 15
d. 10, 14
e. 16, 18
f. 4, 5, 6
g. 6, 8, 9
h. 8, 9, 10
i. 12, 20, 22
j. 9, 16, 20
*k. 250, 200
*l. 324, 144, 180
m. 306, 1173

14. a. Existe um máximo múltiplo comum de 3, 5? Caso exista, dê um exemplo.

b. Existe um máximo múltiplo comum de 4 e 6? Caso exista, dê um exemplo.

c. Existe um máximo múltiplo comum de qualquer conjunto de números naturais?

15. a. Podemos considerar 0 como um múltiplo de zero? (Temos $0 \times 0 = 0$?)

b. Podemos considerar 0 como um múltiplo de 6? (Temos $6 \times 0 = 0$?)

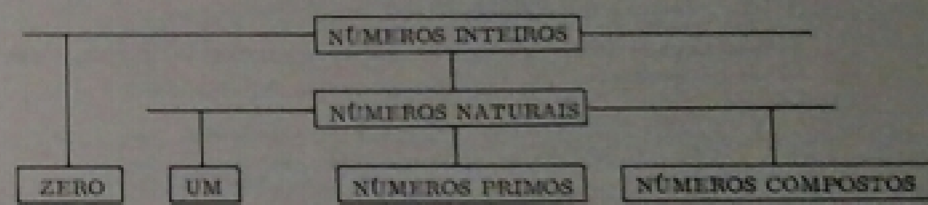
c. Podemos considerar 0 como um múltiplo de a sendo a um número inteiro qualquer?

d. Suponha que o mínimo múltiplo comum seja definido como "o menor número inteiro" ao invés do "menor número natural". Qual seria o mínimo múltiplo comum para qualquer conjunto de números naturais?

e. Usando a definição correta para o mínimo múltiplo comum, existe um mínimo múltiplo comum para qualquer número natural e zero?

5-8. Resumo

Neste capítulo você estudou quase que só os números inteiros. Também estudou alguns subconjuntos importantes dos números inteiros. Êstes subconjuntos estão esquematizados abaixo:



Note que zero é um elemento do conjunto dos números inteiros mas não é um elemento do conjunto dos números naturais. O UM, os NÚMEROS PRIMOS e os NÚMEROS COMPOSTOS são elementos do conjunto dos NÚMEROS NATURAIS e também elementos do conjunto dos NÚMEROS INTEIROS.
Todo elemento do conjunto dos números naturais é um elemento do conjunto dos números inteiros.

Você já sabe que um número PRIMO é um número natural qualquer diferente de 1, que é divisível sòmente por si mesmo e 1. O número 1 não é um número primo. Decidimos não incluir 1 no conjunto dos números primos pois qualquer número poderia ser expresso como um produto de números primos de maneiras diferentes se fizessemos isto.

Um número COMPOSTO é um número natural, diferente de 1, que não é primo. Números compostos têm mais de dois fatores. O têrmo "fator" foi usado em lugar das palavras multiplicando e multiplicador. O número a é um FATOR de b se b fôr divisível por a. O conjunto dos fatores de um número contém todos os números naturais que são fatores dêsse número. Uma FATORAÇÃO COMPLETA de um número representa o número como um produto de números primos. Para um número primo a palavra fatoração significa o proprio número. Para um número composto existem dois ou mais fatores. A PROPRIEDADE DA UNICIDADE DA FATORAÇÃO dos números naturais se refere ao fato de que todo número composto pode ser expresso como o produto de números primos de uma maneira sòmente, a menos da ordem dos fatores.

Um FATOR COMUM de um conjunto de número inteiros é um número que é um fator de cada elemento do conjunto de números. O MÀXIMO DIVISOR COMUM de um conjunto de números inteiros é o maior número natural que é um fator de cada elemento do conjunto de números. Um fator comum nunca pode ser maior do que o elemento máximo do conjunto.

O número inteiro b é um MÚLTIPLO do número inteiro a, se $a \cdot c = b$ onde c é também um número inteiro. Um MÚLTIPLO COMUM de um conjunto de números é um múltiplo de cada elemento do conjunto de números. O MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM é o menor número natural que é um múltiplo de cada elemento do conjunto numérico. O mínimo múltiplo comum de um conjunto não pode ser menor que o maior elemento dêsse conjunto.

Exercícios 5-8

1. Ache o máximo divisor comum dos números em cada um dos seguintes conjuntos numéricos:

a.	{2, 3}	g.	{23, 43}
b.	{6, 8}	h.	{66, 78}
c.	{7, 14}	i.	{39, 51}
d.	{15, 25}	j.	{74, 146}
e.	{12, 36}	k.	{45, 72, 252}
f.	{15, 21}	l.	{44, 92, 124}

2. Ache o mínimo múltiplo comum dos números em cada um dos conjuntos numéricos das partes a até l no Problema 1.

3. a. Ache o produto dos elementos de cada conjunto dos números no Problema 1.

   b. Ache o produto do máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum para cada conjunto de elementos do Problema 1.(referimo-nos às suas respostas aos Problemas 1 e 2).

   c. Como podemos comparar suas respostas de a e b?

4. a. Escreva o conjunto de todos os números compostos menores que 31.

   b. Escreva o conjunto de todos os números primos menores que 31.

5. Sejam a e b dois números naturais. Suponha que o máximo divisor comum de a e b seja 1.

   a. Qual é o mínimo múltiplo comum de a e b? Dê um exemplo para explicar sua resposta.

   b. A sua resposta para a parte a seria verdadeira se você começasse com três números naturais a, b e c? (Lembre-se, o máximo fator comum é 1). Dê um exemplo para explicar sua resposta.

6. a. Um número primo pode ser par? Dê um exemplo para explicar sua resposta.

   b. Um número primo pode ser ímpar? Dê um exemplo para justificar sua resposta.

   c. Quantos números primos terminam por 5?

   d. Com exceção de dois números primos, todos os números primos terminam com um de quatro algarismos. Escreva os dois números primos que são exceções.

   e. Escreva os outros quatro algarismos que aparecem no lugar das unidades para todos os números primos que não sejam as exceções que você achou na parte d.

7. Suponha que o máximo divisor comum de dois números seja igual ao [redacted] mínimo múltiplo comum desses números . Como devem ser os números? Dê um exemplo para explicar sua resposta.

8. a. Qual é o <u>mínimo</u> fator comum de 2867 e 6431?

   b. Qual é o <u>máximo</u> múltiplo comum de 2867 e 6431?

9. Acham-se plantados num jardim 112 bulbos de tulipa. Descreva todos os arranjos dos bulbos se êles devem ser plantados em linhas retas com um número igual de bulbos por linha.

10. Duas campainhas estão colocadas de maneira que os intervalos de tempo em que soam sejam diferentes. Suponha que no início ambas as campainhas soam juntas.

a. Uma campainha toca cada três minutos e a segunda cada cinco minutos. Se ambas as campainhas tocam juntas ao meio dia, quando elas tocarão juntas de nôvo?

b. Uma campainha toca cada 6 minutos e a segunda cada 15 minutos. Se ambas tocam juntas ao meio dia, quando elas tocarão de nôvo juntas?

c. Ache o mínimo múltiplo comum de 3 e 5 e de 6 e 15. Compare os resultados com as respostas das partes a e b.

11. a. O máximo divisor comum de vários números inteiros pode sempre ser o mesmo número que é o mínimo múltiplo comum desses números? Caso possa, dê um exemplo.

b. O máximo divisor comum de vários números inteiros pode sempre ser maior do que o mínimo múltiplo comum desses números? Caso possa, dê um exemplo.

c. O mínimo múltiplo comum de vários números inteiros pode sempre ser menor do que o máximo divisor comum desses números? Caso possa, dê um exemplo.

12. a. É possível existir apenas quatro números compostos entre dois primos consecutivos? Dê um exemplo, caso possa.

b. É possível existir apenas cinco números compostos consecutivos entre dois primos consecutivos? Dê um exemplo, caso possa.

13. São dados os números 135, 222, 783, 1065. Sem dividir, responda as seguintes questões: (Depois confira suas respostas dividindo)

a. Quais dos números são divisíveis por 3?

b. Quais dos números são divisíveis por 6?

c. Quais dos números são divisíveis por 9?

d. Quais dos números são divisíveis por 5?

e. Quais dos números são divisíveis por 15?

f. Quais dos números são divisíveis por 4?

14. Por que é importante conhecer os números primos?

15. PROBLEMA-DESAFIO

Dez bulbos de tulipas devem ser plantados de maneira que tenhamos apenas cinco linhas com quatro bulbos em cada linha. Desenhe um diagrama para êste arranjo.

16. PROBLEMA-DESAFIO

Você acha que existe um número primo máximo? Você pode achá-lo ou dar um motivo pelo qual você acha que não existe?

Capítulo 6

O SISTEMA DE NÚMEROS RACIONAIS

6.1. História das Frações

Houve tempo em que o homem não conhecia as frações. Històricamente, êle introduziu as frações quando começou a medir e a contar. Se êle dividia um pedaço de corda em duas partes de igual comprimento, cada parte tinha $\frac{1}{2}$ do comprimento da corda inicial.

Se êle necessitava de 4 canecas d'água para encher um recipiente,

diria que cada caneca continha $\frac{1}{4}$ da quantidade d'água do recipiente.

Os egípcios já usavam as frações. Inicialmente êles usavam sòmente frações da unidade e as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Frações da unidade são aquelas cujo numerador é 1, como:

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}, \text{ etc.}$$

Os egípcios usavam a notação  para $\frac{1}{5}$ isto é, o número 5 como um sinal característico sôbre êle. Quando tinham necessidade de usar outras frações, exprimiam-nas em têrmos de frações da unidade como:

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{15}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

O papiro de Rhind (1700 A. C.), copiado por Ahmes de um velho documento desaparecido, contém um conjunto de tabelas indicando como exprimir frações em têrmos de frações da unidade.

Os babilônios usavam geralmente frações com denominadores 60, 60^2 (3 600), e 60^3 (216 000) etc. devido a base de seu sistema de numeração ser 60. Embora não adotemos as unidades de tempo dos babilônios, também dividimos a hora em sessenta partes iguais chamadas minutos e um minuto em sessenta partes iguais denominadas segundos.

As crianças romanas aprendiam inicialmente as frações com denominador doze. Não tinham símbolos para frações mas tinham nomes para frações como $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, ... Podemos hoje fazer medidas usando duodécimos?

Com o decorrer dos anos muitas notações foram usadas. A nossa maneira atual de representar uma fração por meio de uma barra "—" data do século XVI.

6-2. Números Racionais

Daqui para a frente passaremos a olhar as frações sob um outro ponto de vista. Você já conhece um grande número de fatos sôbre as frações. Sabe por que os seus métodos são válidos?

As razões são importantes. Você às vêzes pergunta "por que?" quando seus pais contam-lhe algo. Sabendo o "porque" você terá mais facilidade para compreender os ensinamentos de seus pais. Você poderá achar mais fácil lembrar como operar com frações quando souber o porque das regras operatórias.

Você já sabe que um número possue várias representações. Várias representações ou numerais de um mesmo número são 6, VI, 2 . 3, 3 . 2. Outras representações do mesmo número são as frações $\frac{6}{1}$, $\frac{12}{2}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{24}{4}$. Cada fração é uma representação de um determinado número.

As frações $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{6}{18}$ representam um número.

As frações $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{12}{8}$, $\frac{15}{10}$, $\frac{18}{12}$ representam outro número.

Êsses números chamam-se números racionais. Outros números racionais são $\frac{7}{1}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{3}{4}$. Que outras representações podem ter êsses números.

Como você pode verificar se a divisão

$$12 \div 3 = 4$$

está certa?

Multiplique 3 por 4 e verifique se o resultado é 12. Quando você divide 12 por 3 está respondendo à seguinte pergunta:

3 vêzes que número é igual a 12?

ou

$$3 \ . \ ? = 12$$

É mais conveniente usarmos a letra "x" no lugar de " ? " para o número que estamos procurando escrever:

$$3 \;.\; x = 12$$

Se substituirmos x por 4, a sentença numérica

$$3 \;.\; x = 12$$

tornar-se-á verdadeira. Os matemáticos em geral escrevem $\frac{12}{3}$ no lugar de $12 \div 3$. Assim, êles escrevem, $\frac{12}{3} = 4$.

Com êste nôvo símbolo para a divisão podemos escrever:

$\frac{12}{3} = 4$ porque $3 \;.\; 4 = 12$

$\frac{6}{2} = 3$ porque $2 \;.\; 3 = 6$

$\frac{10}{2} = 5$ porque $2 \;.\; 5 = 10$

$\frac{63}{9} = 7$ porque $9 \;.\; 7 = 63$

Como $\frac{12}{3} = 4$, podemos substituir 4 por $\frac{12}{3}$ em $3 \;.\; 4 = 12$ e escrever:

$$3 \;.\; \frac{12}{3} = 12$$

Analogamente

$$3 \;.\; \frac{6}{3} = 6$$

$$2 \;.\; \frac{10}{2} = 10$$

$$9 \;.\; \frac{63}{9} = 63$$

Por que número x deve ser substituído para tornar a sentença numérica

$$3 \;.\; x = 12$$

verdadeira? É $x = 4$. Se você passar uma vista d'olhos no último parágrafo verá que lá escrevemos

$$3 \;.\; \frac{12}{3} = 12$$

Ambos 4 e $\frac{12}{3}$ podem substituir x para obtermos uma resposta correta. Os numerais 4 e $\frac{12}{3}$ representam o mesmo número. Assim,

Se $x = \frac{6}{2}$, então $2 \;.\; x = 6$

Se $x = \frac{7}{3}$, então $3 \;.\; x = 7$

<u>Problemas para discussão em Classe</u>

1. (a) Se $x = \frac{10}{2}$, $2 \;.\; x$ que número é?

   (b) Se $x = \frac{63}{9}$, $9 \;.\; x$ que número é?

   (c) Se $x = \frac{5}{2}$, $2 \;.\; x$ que número é?

   (d) Se $x = \frac{5}{3}$, $3 \;.\; x$ que número é?

   (e) Se $x = \frac{4}{9}$, $9 \;.\; x$ que número é?

2. Dê uma representação fracionária para cada número representado por x nas sentenças abaixo:

   (a) $2 \;.\; x = 10$ (f) $6 \;.\; x = 5$

   (b) $9 \;.\; x = 63$ (g) $4 \;.\; x = 13$

   (c) $2 \;.\; x = 5$ (h) $7 \;.\; x = 1$

   (d) $3 \;.\; x = 5$ (i) $4 \;.\; x = 2$

   (e) $9 \;.\; x = 4$ (j) $1 \;.\; x = 13$

3. Se a e b são números naturais, dê uma representação fracionária para o número representado por x em $b \;.\; x = a$.

Em geral, se a e b são números inteiros e b não é zero, $\frac{a}{b}$ é o número x tal que $b \;.\; x = a$. Para simplicidade de notação, um símbolo como $b \;.\; x$ é comumente escrito bx, e $8 \;.\; x$ como 8x. O símbolo de multiplicação é ainda necessário para escrever uma expressão como $3 \;.\; 8$. Por que? Você já deve ter ouvido dizer que a divisão é o inverso da multiplicação. Aqui usamos êsse conceito para mudar o problema $\frac{a}{b} = ?$ para $b \;.\; ? = a$.

Um símbolo "$\frac{a}{b}$" onde a e b são números, e b diferente de zero, é chamado <u>fração</u>. Se <u>a</u> e <u>b</u> forem números inteiros, sendo b diferente de zero, o número representado pela fração $\frac{a}{b}$, é chamado <u>número racional</u>; qualquer número que possa ser representado sob essa forma é chamado <u>número racional</u>. Por exemplo, 2,5 representa um número racional porque pode ser representado por $\frac{5}{2}$. Uma fração é uma representação para um número racional assim como numeral é uma representação para um número. Diferentes representações para o mesmo número são

$$3\ ,\ III,\ \frac{6}{2}\ ,\ \frac{9}{3}\ ,\ \frac{63}{21}$$

As representações

$$\frac{6}{2}\ ,\ \frac{9}{3}\ ,\ \frac{63}{21}$$

são frações.

Algumas vêzes $\frac{a}{b}$ é um número inteiro. Isto acontece quando b é um fator de a, e sòmente nesse caso.

Outras vêzes $\frac{a}{b}$ não é um número inteiro. Existe um número inteiro x tal que $3x = 4$? $\frac{4}{3}$ é um número inteiro?

Duas frações que representam um mesmo número são chamadas <u>frações equivalentes</u>. Porém não necessitaremos empregar esta denominação frequentemente.

Exercícios 6-2

1. Dê um exemplo de cada uma das seguintes espécies de números:
   a. Número natural
   b. Número inteiro
   c. Um número inteiro que não seja natural
   d. Um número racional que não seja número inteiro.

2. Quais dos seguintes números são racionais?
   a. $\frac{3}{7}$
   b. $\frac{5}{3}$
   c. $\frac{1}{10}$
   d. 4
   e. 1
   f. $\frac{16}{4}$
   g. $0,2$
   h. $0,13$

3. Copie e complete as seguintes afirmações:

a

   a. Se $x = \frac{4}{3}$, então $3x =$ ______
   b. Se $x = \frac{9}{3}$, então ____ $x = 9$.
   c. Se $x = \frac{5}{2}$, então $2x =$ ______.
   d. Se $x = \frac{10}{4}$, então ______ $x = 10$.
   e. Se $x = \frac{7}{1}$, então ______ $x = 7$.
   f. Se $x = \frac{18}{6}$, então ______ $x =$ ____.
   g. Se $x = \frac{4}{3}$, então ______ $x =$ ____.

4. Em que ítens do problema 3, x é um número inteiro? Quando x fôr inteiro escreva-o com um só algarismo.

5. Copie e complete as seguintes afirmações:
   a. Se $x = \frac{1}{5}$, então ____ $x =$ ____.
   b. Se $x = \frac{14}{4}$, então ____ $x =$ ____
   c. Se $x = \frac{11}{3}$, então ____ $x =$ ____.
   d. Se $x = \frac{63}{9}$, então ____ $x =$ ____.
   e. Se $x = \frac{0}{5}$, então ____ $x =$ ____
   f. Se $x = \frac{121}{11}$, então ____ $x =$ ____.

6. No Problema 5, em que ítens o número x é inteiro? Quando x fôr inteiro escreva-o com um só algarismo.

7. Sem dividir ou fatorar, diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras. Como exemplo, para verificar que $\frac{168}{21} = 8$ multiplique 8 por 21 e veja se obtém 168.
   a. $\frac{169}{13} = 13$
   b. $\frac{262}{17} = 16$

c. $\frac{744}{124} = 6$

d. $\frac{143}{11} = 13$

e. $\frac{15251}{151} = 101$

*8. Em cada um dos seguintes ítens, escreva uma sentença numérica que traduza o problema em linguagem matemática. Use x para o número desconhecido e diga, em cada caso, o que êle representa.

Exemplo: O irmão de Samuel diz que quer cortar um tronco de 12 metros de comprimento em 6 partes de igual comprimento. Qual o comprimento de cada parte?

Resposta: Se x é o comprimento de cada parte em metros, então $6 \cdot x = 12$.

a. Se 12 doces são distribuídos entre 3 rapazes, quantos recebe cada um?

b. O carro do Sr. Pedro consome 30 litros de gasolina por 180 quilometros de percurso. Quantos quilometros êle percorre com um litro de gasolina?

c. Se são necessários 20 sacos de cimento para construir 30 metros de uma calçada, quantos sacos de cimento são necessários por metro de construção?

d. Trinta e dois alunos foram divididos em 4 grupos de igual número. Quantos alunos cada grupo possuía?

e. Um professor tem 12 fôlhas de papel para distribuir igualmente em uma classe de 26 alunos. Quantas fôlhas de papel caberá a cada aluno?

6-2. Propriedades dos Números Racionais

Você viu que o número 3 pode ser escrito $\frac{3}{1}$, o que é equivalente a dizer que 3 é um número racional. De modo análogo você pode verificar que todo número inteiro é um número racional.

Quando estudamos os números inteiros, verificamos que êles gozavam de certas propriedades. A aprendizagem dos números racionais torna-se mais fácil se verificarmos que os números racionais gozam de algumas das propriedades dos números inteiros.

Você deve estar lembrado de que a soma de números inteiros é um número inteiro e que o produto de números inteiros é também um número inteiro. Assim, se a e b são números inteiros, existe um número c tal que $a + b = c$ e um número inteiro d tal que $a \cdot b = d$. O conjunto dos números inteiros é fechado em relação às operações de adição e multiplicação.

O conjunto dos números racionais é também fechado em relação à adição e à multiplicação. A soma de dois números racionais é um número racional. Você sabe que $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$, $\frac{12}{4} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, $2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$. O produto de dois números racionais é um número racional. Note que $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{12}{21}$, $\frac{5}{1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Em linguagem precisa podemos dizer:

1) O conjunto dos números racionais é fechado em relação às operações de adição e multiplicação.

Você sabe que $3 + 4 = 4 + 3$ e $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$ porque, para os números inteiros, as operações de adição e multiplicação gozam da propriedade comutativa. Estas operações gozam também da propriedade comutativa quando aplicadas aos números racionais. Você sabe que $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}$, e $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$. Em linguagem precisa podemos dizer:

2) A adição e multiplicação de números racionais gozam da propriedade comutativa, isto é:

$$a + b = b + a \quad e \quad a \cdot b = b \cdot a$$

Você também deverá estar lembrado de que $3 + (2 + 4) = (3 + 2) + 4$ e $3 \cdot (2 \cdot 4) = (3 \cdot 2) \cdot 4$, porque a adição e multiplicação de números inteiros gozam da propriedade associativa. Para os números racionais estas operações também gozam da propriedade associativa. Você sabe que $\frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + \frac{2}{3}$ e que $\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}) = (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}) \cdot \frac{2}{3}$. Em linguagem precisa podemos dizer:

3) A adição e multiplicação de números racionais gozam da propriedade associativa, isto é:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad e \quad a(bc) = (ab)c.$$

O que é $5 \cdot (2 + 3)$? Pela propriedade distributiva você sabe que obterá o mesmo resultado ao efetuar $5 \cdot 5 = 25$ ou ao efetuar $5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 10 + 15 = 25$. Para os números inteiros a multiplicação é distributiva em relação à adição. A propriedade distributiva é válida também para os números racionais. Você usou esta propriedade dos números racionais quando multiplicou $4\frac{1}{5}$ por 5. Em símbolos.

$5 \cdot (4\frac{1}{5}) = 5 \cdot (4 + \frac{1}{5}) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot \frac{1}{5} = 20 + 1 = 21$. Em linguagem preciso dizemos.

4) A multiplicação de números racionais é distributiva em relação à adição, isto é:

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

Entre os inteiros havia dois números especiais: 0 e 1. Eles são também números racionais.

5) Entre os números racionais o 0 e o 1 são também dois números especiais. 0 é o <u>elemento identidade para a adição</u> e o 1 o <u>elemento identidade para a multiplicação</u>.

Quando dizemos que zero é a identidade (ou elemento identidade) para a adição, queremos dizer por exemplo, que $0 + 3 = 3 + 0 = 3$; ou seja, adicionando zero a qualquer número, êste não sofre alteração. Isto pode ser expresso em símbolos assim:

$$0 + a = a + 0 = a$$

qualquer que seja o número a. Anàlogamente, quando dizemos que 1 é a identidade para a multiplicação, queremos dizer, por exemplo, que $1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = 5$; ou seja, multiplicando um número por 1, êle não se altera. Isto pode ser expresso em símbolos assim:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Você pode verificar que 1 é um número racional escrevendo-o sob a forma $\frac{1}{1}$. Para verificar que 0 é racional você deve lembrar que 0 dividido por qualquer número natural é 0. Se $x = \frac{0}{1}$, $1 \cdot x = 0$ e x deve ser igual a zero. Quando definimos um número racional $\frac{a}{b}$ dissemos que b devia ser diferente de zero. Você pode ver a razão disso verificando o que acontece a $\frac{5}{0}$. Se $x = \frac{5}{0}$, então $0 \cdot x = 5$. Não existe nenhum número x tal que $0 \cdot x = 5$ de modo que não existe o número $\frac{5}{0}$.

Estas cinco propriedades dos números racionais nos permitem entender as razões para algumas das regras estabelecidas para as frações. Usemos estas propriedades para mostrar que $\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$. Se $x = \frac{3}{2}$, então $2\,x = 3$. Como $2\,x$ e 3 são representações de um mesmo número,

$$5 \cdot (2\,x) = 5 \cdot 3$$

Pela propriedade associativa,

$$(5 \cdot 2)\,x = 5 \cdot 3$$
$$10\,x = 15$$
$$x = \frac{15}{10}$$

Mas x é um nome para $\frac{3}{2}$, logo

$$\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$$

Se você escrevesse a última expressão,

$$\frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 2}$$

verificaria que obtinha a mesma fração se multiplicasse o numerador e o denominador de $\frac{3}{2}$ por 5.

Generalizando, temos:

<u>Propriedade 1. Se o numerador e o denominador de uma fração são multiplicados por um mesmo número natural, o número que ela representa não se modifica. Se o numerador e o denominador são divididos por um mesmo número natural, o número que ela representa não se modifica.</u>

Você viu que $\frac{3}{2}$ e $\frac{15}{10}$ são frações que representam o mesmo número. Outros nomes para êste número são: $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{18}{12}$.

Por que números você deve multiplicar o numerador e o denominador de $\frac{3}{2}$ para obter estas frações? Como em $\frac{3}{2}$ o numerador e denominador não têm fatores comuns exceto 1, esta é chamada a <u>forma mais simples da fração</u>.

Para encontrar a forma mais simples de $\frac{72}{45}$ devemos achar o máximo divisor comum de 72 e 45, que é 9. Então,

$$\frac{72}{45} = \frac{9 \cdot 8}{9 \cdot 5} = \frac{8}{5}.$$

Podemos ainda preferir a operação por etapas do seguinte modo:

$$\frac{72}{45} = \frac{3 \cdot 24}{3 \cdot 15} = \frac{24}{15} = \frac{3 \cdot 8}{3 \cdot 5} = \frac{8}{5}.$$

<u>Para escrever a fração $\frac{a}{b}$ sob a forma mais simples, devemos achar o máximo divisor comum k de a e b onde $a = kc$ e $b = kd$; então, pela Propriedade 1,</u>

$$\frac{a}{b} = \frac{kc}{kd} = \frac{c}{d}.$$

Exercícios 6-3

1. Quais dos seguintes números são racionais?

a. 7

b. $\frac{6}{2}$

g. $1 \div 5$

h. $2 \cdot 15$

c. $\frac{0}{5}$ i. $\frac{0}{7}$

d. $3 + \frac{1}{2}$ j. 5, 0

e. $4\frac{1}{3}$ k. $\frac{5}{0}$

f. $4 - 2$ l. 0, 0

2. Escreva cada um dos números abaixo de três modos diferentes:

a. $\frac{1}{2}$ f. $\frac{12}{6}$

b. $\frac{2}{5}$ g. $\frac{0}{5}$

c. $\frac{3}{3}$ h. $\frac{25}{30}$

d. $\frac{12}{4}$ i. $\frac{30}{25}$

e. 0, 2 j. 6

3. Escreva sob a forma mais simples:

a. $\frac{2}{6}$ f. $\frac{48}{16}$

b. $\frac{12}{15}$ g. $\frac{13}{39}$

c. $\frac{30}{8}$ h. $\frac{40}{50}$

d. $\frac{14}{21}$ i. $\frac{500}{400}$

e. $\frac{8}{2}$ j. $\frac{17}{51}$

4. Cada uma das relações seguintes é verdadeira por uma das propriedades dos números racionais. Indique a propriedade em cada caso.

a. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$

b. $\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{2}{5}$

c. $5\,(2 + 3) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3$

d. $\frac{1}{2}\,(4 + 6) = \frac{1}{2} \cdot (4) + \frac{1}{2}\,(6)$

e. $1 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$

f. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{2}{3}$

g. $0 + \frac{7}{8} = \frac{7}{8}$

h. $\frac{3}{2} + \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{2}$

i. $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}$

j. $5\,(6 \cdot 7) = (5 \cdot 6) \cdot 7$

5. Efetue as operações indicadas abaixo:

a. $\frac{0 + 6}{2}$ b. $\frac{91 - 35}{7}$

c. $\frac{60 \cdot 3}{9 \cdot 2}$ d. $\frac{51 - 21}{7 + 3}$

6. Três mil cruzeiros foram igualmente distribuídos entre quatro pessoas.

a. Quanto receberá cada um?

b. Use uma fração para exprimir a parte em cruzeiros que coube a cada pessoa.

7. O que você preferia receber: uma das oito partes iguais de cinco mil cruzeiros ou oito partes iguais de mil cruzeiros?

8. Faça diagramas e sombreie as partes que representam:

a. três de 5 partes iguais de uma unidade.

b. uma de 5 partes iguais de três unidades.

c. represente a parte sombreada do seu diagrama em (a) e (b) por número racional.

d. Como seus diagramas em (a) e (b) poderiam ser imaginados como representantes da propriedade comutativa da multiplicação?

9. Um homem possui um sítio de 6 000 metros quadrados. Êle deseja dividir o sítio em partes iguais entre seus oito filhos. Quantos metros quadrados de terra caberá a cada um?

10. Qual a diferença entre as 53 das 67 partes iguais de um retângulo, e uma das 67 partes iguais de 53 retângulos, admitindo que todos os retângulos considerados sejam de mesmo tamanho?

11. Ache cinco pares de números naturais que podem ser usados para valores de n e d de modo a tornar a sentença numérica abaixo verdadeira.

$$3n = 2d$$

Calcule $\frac{n}{d}$ em cada caso. Qual é a regra geral?

12. Use a proposição numérica $2x = 3$ para mostrar que $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3$.

Sugestão: Se $2x$ e 3 são representações para um mesmo número, então $\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2} \cdot 3$

6-4. Recíprocos

Você sabe que

$2 \cdot \frac{1}{2} = 1,\ 3 \cdot \frac{1}{3} = 1,\ \frac{1}{4} \cdot 4 = 1,\ \frac{1}{5} \cdot 5 = 1,\ 31 \cdot \frac{1}{31} = 1.$

Voltemos à nossa definição de número racional e vejamos como êstes produtos estão relacionados com ela.

a e b são números inteiros, $b \neq 0$	$\boxed{\text{Seja } a = 1 \quad \text{Seja } b = 31}$	1 e 31 são números inteiros, $31 \neq 0$
$bx = a$		$31x = 1$
$x = \frac{a}{b}$		$x = \frac{1}{31}$

Sabemos que $\frac{1}{31}$ é um número racional que deve ser multiplicado por 31 para obtermos 1.

Por qual número devemos substituir x em

$$24x = 1$$

para que a proposição se torne verdadeira? A resposta é $\frac{1}{24}$

Consideremos agora a equação

$$bx = 1$$

Então

$$x = \frac{1}{b} \quad (b \text{ é um número natural})$$

e

$$b \cdot \frac{1}{b} = 1$$

O número $\frac{1}{b}$ é chamado recíproco de b. Também b é chamado recíproco de $\frac{1}{b}$. <u>Se o produto de dois números é 1, êles são chamados recíprocos um do outro</u>.

Alguns pares de números recíprocos são:

$$\frac{1}{7} \text{ e } 7, \quad 21 \text{ e } \frac{1}{21}, \quad \frac{1}{62} \text{ e } 62$$

Qual o recíproco de 1?

Vimos que os números naturais e os números como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{29}$ têm recíprocos. $\frac{3}{4}$ tem recíproco? Existe um número que multiplicado por $\frac{3}{4}$ resulte 1? Você pode saber a resposta do estudo de Aritmética.

Sabemos que $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$ e $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ de modo que

$$\frac{3}{4} \cdot (4 \cdot \frac{1}{3}) = (\frac{3}{4} \cdot 4) \cdot \frac{1}{3}$$

$$= (3) \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

pela propriedade associativa.

Vemos que se $\frac{3}{4}$ fôr multiplicado por $4 \cdot \frac{1}{3}$ o produto é igual a 1. Mas, $4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Portanto, o recíproco de $\frac{3}{4}$ é $\frac{4}{3}$.

Qual é o produto $\frac{7}{8} \cdot \frac{8}{7}$? Por que? Podemos verificar que o produto é 1, lembrando que $\frac{8}{7} = 8 \cdot \frac{1}{7}$.

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{7}{8} \cdot (8 \cdot \frac{1}{7}) = (\frac{7}{8} \cdot 8) \cdot \frac{1}{7} = 7 \cdot \frac{1}{7} = 1.$$

Como você já sabia efetuar multiplicações de números representados por frações, provàvelmente já sabia, sem efetuar tôdas as passagens, que $\frac{8}{7} \cdot \frac{7}{8} = 1$. As passagens mostram porque a proposição é verdadeira fazendo uso das propriedades dos números racionais que conhecemos.

Os exemplos nos levam à conclusão que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$, desde que nem a nem b sejam nulos.

Propriedade 2. O recíproco do número racional $\frac{a}{b}$ é o número racional $\frac{b}{a}$, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Exercícios 6-4

1. Efetue as multiplicações:

a. $(9)\left(\frac{1}{9}\right)$

b. $\left(\frac{1}{26}\right)(26)$

c. $\left(\frac{1}{11}\right)(11)$

d. $(45)\left(\frac{1}{45}\right)$

e. $\left(\frac{3}{5}\right)(5)\left(\frac{1}{3}\right)$

f. $92 \cdot \left(\frac{1}{51}\right)$

g. $\left(\frac{7}{4}\right)\left(\frac{1}{7}\right)(7)$

h. $\left(\frac{4}{5}\right)(3)$

i. $\left(\frac{9}{11}\right)\left(\frac{11}{9}\right)$

j. $\left(\frac{35}{4}\right)\left(\frac{4}{35}\right)$

2. Escreva os recíprocos dos seguintes números racionais:

a. 11

b. 201

c. 47

d. $\frac{1}{5}$

e. $\frac{2}{7}$

f. $\frac{50}{3}$

g. $\frac{1\,000}{7}$

h. $\frac{346}{175}$

3. Nos ítens abaixo, as letras representam números racionais, tôdas diferentes de zero. Escreva os recíprocos.

a. m b. s c. $\frac{1}{c}$ d. $\frac{r}{s}$ e. $\frac{1}{w}$

4. Calcule x de modo que estas proposições sejam verdadeiras:

a. $3x = 5$

b. $7x = 2$

c. $15x = 10$

d. $36x = 18$

e. $rx = k$, $r \neq 0$

5. Escreva as seguintes proposições sob a forma de multiplicação e calcule n em cada uma delas.

a. $8 \div 7 = n$

b. $15 \div 20 = n$

c. $100 \div 17 = n$

d. $2 \div 11 = n$

e. $1492 \div 13 = n$

f. $6 \div 300 = n$

g. $5 \div 475 = n$

h. $64 \div 36 = n$

6. Escreva o conjunto de números formado pelos recíprocos dos elementos do conjunto Q onde:

$$Q = \{1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}\}$$

7. a. Quando o recíproco de um número é maior que êsse número?

b. Quando o recíproco de um número é menor que êsse número?

c. Quando o recíproco de um número é igual a êsse número?

d. Se n é um número natural, podemos dizer corretamente que uma das seguintes relações é sempre verdadeira?

(1) $n > \frac{1}{n}$, (2) $\frac{1}{n} > n$, (3) $n = \frac{1}{n}$

8. Qual o número que multiplicado por n resulta 1, onde n é tal que $2n = 19$?

9. a. Calcule n sendo $8n = 36$

b. Calcule q sendo $36q = 8$

c. Que observações você pode fazer sôbre n e q?

10. A população de uma cidade A é 16 000 habitantes e a de uma cidade B, vizinha de A, é de 30 000.

a. A população de B é quantas vêzes a população de A?

b. A população de A é quantas vêzes a população de B?

c. Que observação pode fazer sôbre as respostas dos ítens a e b?

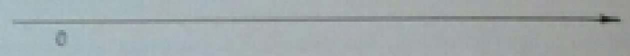
11. Se $14n = 5$, então $\left(\frac{1}{14}\right)(14n) = \left(\frac{1}{14}\right)(5)$. a. Por que? b. Use a

equação em a para calcular o número pelo qual devemos multiplicar n (dado em $14n = 5$) para obter 1.

12. Se $ax = b$ e $by = a$, sendo a e b não nulos, x e y são recíprocos um do outro. Por que isto é verdade?

6-5. Usando a Reta Numérica

Recordemos a construção da reta numérica feita no Capítulo 3. Partimos de uma reta onde escolhemos um ponto que chamamos "0".

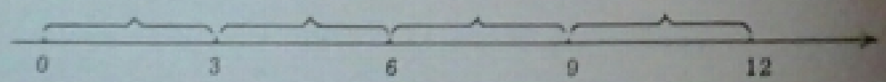


Depois de escolher uma unidade de comprimento, marcámo-la sôbre a reta sucessivamente para a direita a partir de 0. Depois disso fizemos corresponder os pontos finais dos segmentos a 1, 2, 3, etc. como mostra a figura abaixo:

O número natural correspondente a cada ponto indica quantos segmentos unitários existem entre 0 e o ponto considerado.

Para adicionar 3 e 2 sôbre a reta numérica, partimos de 0 e marcamos 3 unidades iguais. Em seguida mediremos mais duas unidades iguais para a direita. A união dêstes dois segmentos é o segmento cuja extremidade esquerda é 0 e a extremidade direita é 5; o comprimento dêste segmento é a soma dos comprimentos dos outros dois segmentos. Temos uma representação sôbre a reta que indica a soma: $3 + 2 = 5$. Você pode imaginar como efetuamos a subtração usando a reta numérica?

Para multiplicar 3 por 4 sôbre a reta numérica podemos partir de 0 e marcar quatro segmentos de comprimento 3 como abaixo:



Êste gráfico também dá um significado para a divisão. Se dividirmos o segmento cujos pontos extremos são 0 e 12 em quatro partes iguais, cada parte terá comprimento 3. Portanto, a mesma figura pode representar ambas as operações

$$12 = 4 \times 3 \qquad e \qquad \frac{12}{4} = 3$$

Se imaginarmos 12 como designando pés (medida inglesa de comprimento), a reta mostra que um pé tem quatro jardas (outra unidade inglesa de comprimento) pois $\frac{12}{3} = 4$, ou doze terços é igual a quatro.

Literalmente: "Doze pés têm quatro jardas" pode também ser escrito "doze terços de uma jarda são iguais a quatro jardas" porque um pé é um terço de uma jarda.

A mesma reta numérica pode ser também usada para representar o número da jardas em, digamos, 13 pés. Aqui a jarda pode ser usada como unidade de comprimento quatro vêzes, sobrando um pé. Como o pé é um terço da jarda temos

$$13 \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3}$$

que pode ser lido como se segue: treze pés são iguais a quatro jardas mais um terço de jarda. Esta mesma igualdade pode ser escrita sob a forma

$$13 = 4 \cdot 3 + 1$$

que pode ser lida: 13 pés são iguais a quatro jardas mais um pé.

Consideremos um outro exemplo e, para tanto, vamos procurar representar sôbre a reta numérica o número de pés contidos em 43 polegadas (1 pé = 12 polegadas). Neste caso você deve representar sôbre a reta numérica a seguinte equação:

$$43 = 3 \cdot 12 + 7$$

que pode ser lida: 43 polegadas são iguais a 3 pés e 7 polegadas. Usando as frações, isto também pode ser escrito

$$\frac{43}{12} = 43 \cdot \frac{1}{12} = 3 + \frac{7}{12}$$

exprimindo que 43 doze avos de um pé é igual a 3 pés mais 7 doze avos de um pé.

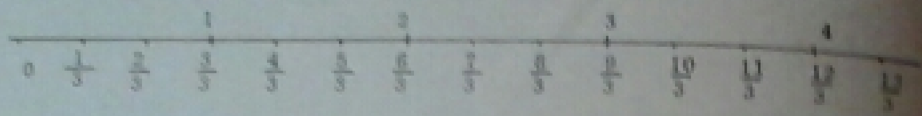
Embora a reta numérica nos auxilie a visualizar estas relações no início, o seu uso torna-se incômodo quando os números envolvidos são elevados. Consideremos a fração $\frac{85}{23}$ sem o auxílio da reta numérica. Se dividirmos 85 por 23 obteremos o quociente 3 e o resto 16, isto é,

$$85 = 23 \cdot 3 + 16$$

Outra maneira de escrever esta expressão é:

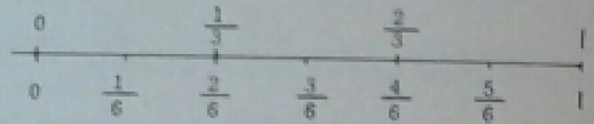
$$\frac{85}{23} = 3 + \frac{16}{23} = 3\,\frac{16}{23}$$

Até aqui representamos na reta numérica sòmente segmentos cujos comprimentos continham um número inteiro de unidades. Podemos, do mesmo modo, representar as frações marcando outros pontos. Por exemplo, temos:



Podíamos ver isto da mesma maneira como vimos na reta anterior que $12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 4$. Também podemos ver $\frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3}$ a partir da mesma reta numérica.

Lembre-se que a Propriedade 1, dada no final da Seção 6-3, expressava o fato de que podemos multiplicar o numerador e o denominador de uma fração por um número natural sem alterar o número que ela representa. Se o denominador fôr pequeno podemos representá-lo sôbre a reta numérica. Por exemplo: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ pode ser visto através da seguinte figura.



A Propriedade 1 nos fornece um modo para simplificar certas frações. Pode também ser usada para verificar quando os números representados por duas frações são iguais ou não.

<u>Exemplo</u> 1. Suponhamos a questão:

É correto escrever $\frac{6}{9} = \frac{18}{12}$?

Ela pode ser respondida se reduzirmos à forma mais simples cada uma das frações como abaixo:

$$\frac{6}{9} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{8}{12} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3}$$

Como cada uma das frações é igual a $\frac{2}{3}$, os números dados são iguais.

<u>Exemplo</u> 2. $\frac{9}{15}$ é igual a $\frac{20}{25}$? Pelo mesmo processo, temos:

$$\frac{9}{15} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \frac{20}{25} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

Como $\frac{3}{5}$ não é igual a $\frac{4}{5}$, as frações dadas não representam o mesmo número

<u>Exemplo</u> 3. $\frac{9}{15}$ é igual a $\frac{14}{22}$? Agora,

$$\frac{9}{15} = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \frac{14}{22} = \frac{7 \cdot 2}{11 \cdot 2} = \frac{7}{11}$$

$\frac{3}{5}$ é igual a $\frac{7}{11}$? A resposta é tão imediata quanto nos dois primeiros exemplos?

Quando você respondeu, justificou sua resposta? Achou com certeza que é mais fácil comparar frações quando elas tem o mesmo denominador. Êste fato sugere um outro processo para responder a questão, " $\frac{3}{5}$ é igual a $\frac{7}{11}$?" Podemos re-escrever as duas frações com um denominador comum, isto é, tendo o mesmo denominador. Êste denominador deve ser múltiplo tanto de 5 como de 11. O menor dêles é 55, porque é o mínimo múltiplo comum de 5 e 11. Logo

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot ?}{5 \cdot 11}$$

indica que como multiplicamos o denominador por 11 para obter $5 \cdot 11$, devemos também multiplicar o numerador por 11, isto é, devemos substituir o sinal de interrogação por 11. Então,

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 11}{5 \cdot 11} = \frac{33}{55}$$

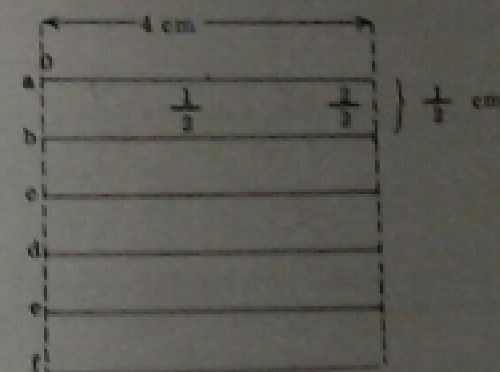
e anàlogamente

$$\frac{7}{11} = \frac{7 \cdot 5}{11 \cdot 5} = \frac{35}{55}$$

$\frac{33}{55}$ e $\frac{35}{55}$ são iguais? Você sabe que se dividirmos 33 por 55 não encontraremos o mesmo número que quando dividirmos 35 por 55. Portanto $\frac{9}{15}$ <u>não</u> é igual a $\frac{14}{22}$

<u>Exercícios 6-5</u>

1. Numa fôlha de papel desenhe uma figura análoga à desenhada abaixo. Trace cada segmento com 4 cm de comprimento e distantes 0,5 cm.



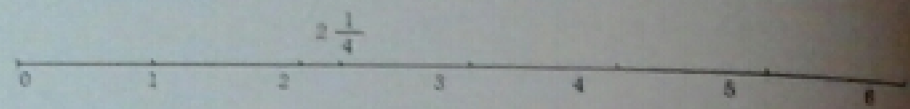
Divida cada segmento no seguinte número de partes:

a. 2 partes (mostrado no desenho acima)   d. 3 partes

b. 4 partes   e. 6 partes

c. 8 partes   f. 5 partes

2. Desenhe numa fôlha de papel uma reta numérica como esta:



Use 1 cm como unidade de comprimento. Tão precisamente quanto você possa, localize cada um dos seguintes pontos sôbre a reta numérica que você desenhou como foi mostrado para o caso (a).

a. $2\frac{1}{4}$

b. $4\frac{2}{3}$

c. $\frac{10}{2}$

d. $\frac{15}{3}$

e. $\frac{14}{3}$

f. $\frac{19}{8}$

g. Se $\frac{a}{b} = \frac{6}{3}$ localize $\frac{a}{b}$ na reta numérica

h. Se $12 \cdot x = 4$, localize x sôbre a reta numérica.

3. a. Considere os pontos A, B, C, D, E e F representados sôbre a reta numérica.

Dê três representações diferentes para cada um dos pontos A, B, C, D, E e F como:

A: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, ___; etc.

b. O número racional correspondente ao ponto B é menor ou maior que o correspondente ao ponto A? Justifique sua resposta.

c. O racional correspondente a C é menor ou maior que o correspondente a A? Justifique sua resposta.

4. Interprete sôbre a reta numérica:

a. $\frac{20}{5} = 4$ b. $\frac{22}{4} = 5$ c. $\frac{23}{5} = 4\frac{3}{5}$

5. Exprima cada uma das frações seguintes sob a forma de um número inteiro adicionado a um número racional menor que 1.

a. $\frac{57}{39}$ b. $\frac{137}{23}$

6. Mostre na reta numérica a igualdade: $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$

7. Responda as perguntas dos Problemas 1 e 2 desta seção usando o processo do Exemplo 3.

8. Mostre como efetuar a subtração sôbre a reta numérica em cada um dos seguintes casos:

a. $3 - 2$ b. $0 - 5$

9. No Exemplo 3 verificamos quando duas frações representam o mesmo número escrevendo-as sob a forma de frações equivalentes de mesmo denominador. Poderíamos também ter encontrado um critério para saber quando duas frações representam o mesmo número escrevendo-as sob a forma equivalentes de mesmo numerador? Lembre-se de que dizemos que duas frações são "equivalentes" se representam o mesmo número.

6-6. Multiplicação de Números Racionais

Você deve estar lembrado que $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ e $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$. Em geral, se a e b são números inteiros, sendo b diferente de zero,

$$b \cdot \frac{1}{b} = 1 \quad e \quad b \cdot \frac{a}{b} = a$$

A que é igual $\frac{5}{7} \cdot 2$? Podemos obter uma resposta se calcularmos x tal que

$$x = \frac{5}{7} \cdot 2$$

Mas então x e $\frac{5}{7} \cdot 2$ são representações de um mesmo número, portanto

$$7x = 7(\frac{5}{7} \cdot 2)$$

Pela propriedade associativa da multiplicação,

$$7x = (7 \cdot \frac{5}{7}) \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10$$

$$x = \frac{5 \cdot 2}{7} = \frac{10}{7}$$

Partimos de $x = \frac{5}{7} \cdot 2$ e chegamos a $x = \frac{5 \cdot 2}{7}$, portanto,

$$\frac{5}{7} \cdot 2 = \frac{5 \cdot 2}{7}$$

Em geral, se a, b e c são números inteiros, b diferente de zero,

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b}$$

Anàlogamente, você pode achar um número x tal que

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$$

Como x e $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ são representações para um mesmo número

$$3x = 3(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}).$$

Pela propriedade associativa

$$3x = (3 \cdot \frac{2}{3}) \cdot \frac{5}{7}$$

$$3x = 2 \cdot \frac{5}{7}$$

$$3x = \frac{2 \cdot 5}{7}$$

Mas $3x$ e $\frac{2 \cdot 5}{7}$ são representações de um mesmo número. Portanto

$$7 \cdot (3x) = 7(\frac{2 \cdot 5}{7})$$

$$7 \cdot (3x) = 2 \cdot 5$$

Pela propriedade associativa da multiplicação,

$$(7 \cdot 3)x = 2 \cdot 5$$

$$x = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

Você partiu de $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ e verificou que $x = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7}$, portanto,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7}$$

Este exemplo mostra que:

Multiplicar dois números racionais escritos sob a forma de fração é encontrar uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores das frações dadas e cujo denominador é o produto dos denominadores das mesmas.

Simbòlicamente, se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são números racionais,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ao invés de usar a Propriedade 1, você pode usar esta propriedade para reduzir $\frac{12}{16}$ à forma mais simples, do seguinte modo:

$$\frac{21}{35} = \frac{7 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{7}{7} \cdot \frac{3}{5} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Anàlogamente,

$$\frac{21}{35} = \frac{7 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{7}{7} \cdot \frac{3}{5} = 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

Você pode até verificar a Propriedade 1, para o número racional $\frac{a}{b}$ do seguinte modo se k fôr diferente do zero:

$$\frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{k}{k} \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{ka}{kb}$$

Exercícios 6-6

1. Efetue os seguintes produtos mentalmente. Dê as respostas sob a forma mais simples.

a. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ b. $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$ c. $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}$

d. $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$ e. $\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10}$ f. $\frac{4}{100} \cdot \frac{3}{10}$

g. $\frac{1}{9} \cdot 9$ h. $\frac{2}{9} \cdot 2$ i. $2 \cdot \frac{2}{9}$

j. $4 \cdot \frac{1}{3}$ k. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ l. $\frac{3}{2} \cdot 4$

m. $8 \cdot \frac{3}{4}$ n. $(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{3}$ o. $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$

p. $10 \cdot \frac{1}{100}$ q. $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100}$ r. $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100}$

s. $\frac{1}{10} \cdot 100$ t. $\frac{3}{2} \cdot 8$ u. $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{5}$

v. $\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6}$ w. $\frac{21}{2} \cdot \frac{1}{2}$ x. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

2. Escreva os produtos sob a forma mais simples

a. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{13}$ b. $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{15}$ c. $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{5}$

d. $\frac{1}{5} \cdot 50$ e. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}$ f. $\frac{5}{6} \cdot 24$

g. $36 \cdot \frac{1}{12}$ h. $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{12}$ i. $72 \cdot \frac{5}{9}$

j. $\frac{8}{9} \cdot 1$ k. $\frac{4}{5} \cdot \frac{17}{17}$ l. $\frac{9}{16} \cdot \frac{7}{16}$

m. $\frac{13}{15} \cdot \frac{10}{39}$ n. $\frac{33}{100} \cdot \frac{99}{99}$ o. $\frac{17}{3} \cdot \frac{3}{51}$

3. Frequentemente, fatorando podemos efetuar produtos como os do **Problema 2** mais fàcilmente. Por exemplo na parte (e)

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 8} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot (2 \cdot 4)} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} = 1 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

Use êste processo para as partes h, m, n e o do Problema 2.

4. Efetue os produtos abaixo e dê resposta sob a *forma mais simples*. *Antes de multiplicar, exprima cada fator como uma fração.* Exemplo:

$$\frac{3}{4} \cdot (2\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

a. $2 \cdot (2\frac{2}{3})$ b. $(3\frac{1}{2}) \cdot (3\frac{1}{3})$

c. $12 \cdot (5\frac{5}{6})$ d. $(2\frac{1}{3}) \cdot (1\frac{1}{3})$

e. $(5\frac{1}{4}) \cdot (\frac{2}{7})$ f. $(1\frac{1}{2}) \cdot (1\frac{1}{6})$

5. Calcule r de modo que a seguinte expressão seja verdadeira

$$\frac{3}{4} \cdot (\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8}) = (r \cdot \frac{1}{3}) \cdot \frac{7}{8}$$

6. Uma marca numa vasilha indica que a sua capacidade é de $\frac{3}{4}$ de litro. Se você usar $\frac{2}{3}$ da vasilha quantos litros estará usando?

*7. Eis uma receita de "vitamina" para seis pessoas:

$\frac{1}{2}$ copo de suco de laranja

$\frac{1}{4}$ copo de suco de limão

$\frac{1}{2}$ copo de suco de uva

1 copo de suco de maçã

$1\frac{1}{2}$ copo d'agua

$\frac{1}{2}$ copo de xarope

a. Que quantidade de cada ingrediente será necessário para preparar uma "vitamina" para 4 pessoas?

b. Que porção de cada ingrediente será necessário para preparar uma "vitamina" para 8 pessoas?

*8. Num mapa rodoviário, 1 cm representa 10 quilômetros. Se a distância da sua casa à sua escola mede, neste mapa, $1\frac{3}{8}$ cm, há quantos quilometros você mora distante da escola?

6-7. Divisão de Números Racionais

Neste capítulo você aprendeu que podia escrever $5 \div 3$ como $\frac{5}{3}$. Se a e b são dois números quaisquer, sendo b diferente de zero, você pode escrever $\frac{a}{b}$ em lugar de $a \div b$. Se a e b são números racionais, $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$ por exemplo, você pode escrever

$$\frac{3}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$$

Note que o traço entre $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$ é maior que os outros dois.

Quando você estudou operações inversas, viu que a multiplicação e divisão são operações inversas. Isto significa que

$$\frac{8}{2} = 4 \text{ se } 2 \cdot 4 = 8$$

e sòmente neste caso. A mesma relação de multiplicação e divisão é válida se a, b e x forem números racionais com b diferente de zero. Isto é:

$$\frac{a}{b} = x \text{ se } bx = a$$

e sòmente nesse caso. Exemplo:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = x \text{ se } \frac{1}{2}\, x = \frac{3}{2}$$

e sòmente nesse caso. Neste exemplo $x = 3$ torna verdadeiras ambas as proposições. Outras representações para x são $\frac{3}{1}$ e $\frac{6}{2}$.

Como outro exemplo, vejamos

$$x = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}}$$

Como você fará para obter o valor de x? Poderá calcular o valor de x sem usar as regras da divisão.

$$x = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}} \qquad \text{se} \qquad \frac{5}{7}\, x = \frac{3}{2}$$

e sòmente nesse caso. Na igualdade da direita $\frac{5}{7}\, x$ e $\frac{3}{2}$ são representações para

um mesmo número. Agora multiplique êste número por $\frac{7}{5}$, o recíproco de $\frac{5}{7}$, e use a propriedade associativa para obter

$$\left(\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7}\right) \cdot x = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2}$$

$$1 \cdot x = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2}$$

Mas no começo do exemplo você tinha

$$x = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}}$$

logo

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2}$$

Usando sòmente as propriedades como fizemos inicialmente, obtivemos, neste exemplo, a razão para o seguinte enunciado:

> Para achar o quociente de dois números racionais escritos sob a forma de fração, devemos efetuar o produto do numerador pelo recíproco do denominador. Simbòlicamente:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Entretanto, não é necessàrio lembrar esta afirmação referente à divisão de um número racional por outro, se você efetuar a divisão do seguinte modo:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}}{\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}}{1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

Você simplesmente deve olhar para o denominador e verificar por que número êle deve ser multiplicado para tornar-se igual a 1, e então multiplicar o numerador por aquele número. Aqui temos um outro exemplo:

$$\frac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{5}}{5\cdot\frac{1}{5}} = \frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{5}}{1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{15}$$

Num dos capítulos anteriores você aprendeu que o conjunto dos números inteiros não é fechado em relação à operação de divisão. Nesta seção vimos um processo para encontrar o quociente de dois números racionais quaisquer, a e b, sendo b diferente de zero. Não é permitida a divisão por zero. O conjunto dos números racionais exceto o número zero, é fechado em relação à operação de divisão?

Exercícios 6-7

1. Escreva cada uma das seguintes divisões como uma razão de dois números inteiros.

a. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{3} \div \frac{3}{1}$

c. $\frac{4}{1} \div \frac{1}{4}$

d. $12 \div \frac{1}{6}$

e. $\frac{1}{10} \div 10$

f. $\frac{5}{9} \div \frac{5}{9}$

g. $\frac{5}{9} \div \frac{9}{5}$

h. $\frac{1}{100} \div 10$

i. $\frac{5}{8} \div \frac{5}{4}$

j. $\frac{11}{24} \div \frac{11}{2}$

k. $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$

l. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$

2. Escreva cada um dos quocientes seguintes sob a forma mais simples. Fatore os números sempre que isto lhe oferecer vantagem:

a. $\dfrac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{10}}$

b. $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}$

c. $\dfrac{\frac{1}{9}}{8}$

d. $\dfrac{\frac{9}{16}}{\frac{1}{4}}$

e. $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}$

f. $\dfrac{\frac{9}{8}}{\frac{1}{2}}$

g. $\dfrac{\frac{12}{17}}{6}$

h. $\dfrac{\frac{12}{15}}{\frac{24}{30}}$

i. $\dfrac{16}{\frac{1}{4}}$

3. Determine os seguintes quocientes. Escreva cada resposta sob a forma de número inteiro ou de um número inteiro mais um número menor que 1.

a. $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$

b. $15 \div \frac{1}{5}$

c. $\frac{2}{3} \div \frac{1}{12}$

d. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$

e. $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$

f. $\frac{3}{4} \div \frac{1}{3}$

g. $5 \div \frac{2}{3}$

h. $7 \div 4$

i. $3 \div \frac{1}{2}$

4. Escreva os quocientes das divisões abaixo, sob a forma mais simples. Inicie escrevendo cada fração sob a forma mais simples e depois efetue a divisão.

a. $\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{8}{8}}$

b. $\frac{3}{11} \div \frac{5}{5}$

c. $\frac{4}{4} \div \frac{3}{5}$

d. $\frac{2}{3} \div \frac{6}{8}$

e. $\frac{4}{6} \div \frac{12}{16}$

f. $\frac{11}{22} \div \frac{9}{12}$

g. $\frac{6}{10} \div \frac{9}{12}$

h. $\frac{120}{60} \div \frac{7}{14}$

i. $\frac{10}{100} \div \frac{3}{4}$

*5. Você acha que a divisão é comutativa? Determine o quociente das divisões abaixo e verifique se você tem razão.

a. $\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$

*6. Você acha que a divisão é associativa? Calcule os quocientes abaixo e verifique se você tem razão.

a. $\frac{3}{2} \div \left(\frac{5}{4} \div \frac{7}{8}\right)$

b. $\left(\frac{3}{2} \div \frac{5}{4}\right) \div \frac{7}{8}$

*7. a. $\frac{12}{10}$ é quantas vêzes maior que $\frac{12}{100}$?

b. $\frac{4}{7}$ é quantas vêzes maior que $\frac{7}{4}$?

6-8. *Adição e Subtração de Números Racionais*

Estudamos os elementos do conjunto dos números racionais. Sabemos que um número racional tem muitas representações. Usamos as operações de multiplicação e divisão. Restam ainda duas operações a serem consideradas: a adição e sua inversa, a operação de subtração. Consideremos primeiramente a adição.

Estamos familiarizados com a idéia de que $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; também $\frac{4}{3} = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. Continuando com outros números racionais, procuremos uma única fração equivalente a

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3}.$$

De acôrdo com o que conhecemos, podemos escrever:

$$\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

e

$$\frac{4}{3} = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

Logo,

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{3}$$

ou podemos escrever

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{3}\right)$$

$$= (2 + 4)\,\frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{6}{3}$$

onde usamos a propriedade distributiva para obter a segunda linha.

Que resultado obteremos se adicionarmos $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$, onde a, b e c são números inteiros e b é diferente de zero? $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ pode ser escrito como $a \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{b}$. Pela propriedade distributiva esta expressão é igual a:

$$(a + c) \cdot \frac{1}{b} = \frac{a + c}{b}.$$

Se a, b e c são números inteiros e b é diferente de zero, então $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$. Isto pode ser lido assim: A soma de dois números cujas frações têm o mesmo denominador é igual à soma dos numeradores dividida pelo denominador comum.

Consideremos agora um outro exemplo mais complicado:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{10}$$

O mínimo múltiplo comum dos denominadores 4 e 10 é 20. Vamos escrever cada uma das frações acima de modo equivalente com denominador 20. Lembre-se de que

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20} \text{ e } \frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 2}{10 \cdot 2} = \frac{14}{20}$$

Portanto,

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{10} = \frac{15}{20} + \frac{14}{20} = \frac{15 + 14}{20} = \frac{29}{20}$$

Também

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{15} = \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{9}{30} + \frac{14}{30} = \frac{23}{30}$$

A soma de dois números racionais quaisquer $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ pode ser calculada de modo análogo. Um múltiplo comum de b e d é bd.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{ad}{bd} \text{ e } \frac{c}{d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{bc}{bd}$$

Usando os nossos conhecimentos sôbre a adição de números racionais cujas frações têm o mesmo denominador, temos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$$

$$= \frac{ad + bc}{bd}$$

Logo, podemos dizer:

Se a, b, c e d são números inteiros sendo b e d diferentes de zero, então

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

No conjunto de exercícios seguinte veremos novamente que as propriedades comutativa e associativa da adição, assim como a propriedade distributiva, são válidas no conjunto dos números racionais.

Exercícios 6-8a.

1. Calcule as somas abaixo:

a. $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$ d. $4 + \frac{3}{8}$ g. $\frac{7}{8} + \frac{3}{16}$

b. $\frac{4}{3} + \frac{2}{3}$ e. $\frac{2}{5} + \frac{3}{10}$ h. $\frac{3}{16} + \frac{7}{8}$

c. $\frac{3}{8} + 4$ f. $\frac{3}{10} + \frac{2}{5}$

2. Você suspeita que a adição de números raciónais seja comutativa?

3. Calcule cada uma das seguintes somas:

a. $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + \frac{4}{3}$ e. $(\frac{1}{5} + \frac{5}{2}) + \frac{2}{3}$

b. $\frac{1}{3} + (\frac{2}{3} + \frac{4}{3})$ f. $\frac{1}{5} + (\frac{5}{2} + \frac{2}{3})$

c. $(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}) + \frac{3}{8}$ g. $(\frac{12}{15} + \frac{6}{3}) + \frac{4}{6}$

d. $\frac{1}{4} + (\frac{5}{4} + \frac{3}{8})$ h. $\frac{12}{15} + (\frac{6}{3} + \frac{4}{6})$

4. Você acha que a operação de adição para os números racionais é associativa?

*5. a. É verdade que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ para quaisquer números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$?

b. Que propriedade da adição está apresentada no ítem (a)?

*6. a. É verdade que $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f})$ para todos os números racionais $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$?

b. Que propriedade da adição é apresentada no ítem (a)?

7. a. Um lojista vendeu três pedaços de fita de $\frac{7}{8}$m, $\frac{1}{2}$m e $\frac{1}{4}$m. Qual o total de metros vendidos?

b. Se o primeiro e o terceiro pedaços foram vendidos a Cr\$25 o metro e o segundo a Cr\$20 o metro, qual o preço total de custo?

8. Numa receita são necessários $\frac{1}{3}$ kg de manteiga, $\frac{1}{2}$ kg de açúcar, $\frac{1}{8}$ kg de chocolate e $\frac{1}{6}$ kg de amendoim. Qual o pêso total dos ingredientes?

Levando em consideração as propriedades comutativa e associativa da adição, podemos fàcilmente adicionar $2\frac{1}{4}$ a $3\frac{5}{8}$

$$2\frac{1}{4} + 3\frac{5}{8} = (2 + \frac{1}{4}) + (3 + \frac{5}{8}) =$$

$$= (2 + 3) + (\frac{1}{4} + \frac{5}{8})$$ pelas propriedades comutativa e

$$= (2 + 3) + (\frac{2}{8} + \frac{5}{8})$$ associativa

$$= 5 + \frac{7}{8}$$

$$= 5\frac{7}{8}$$

Êste processo é familiar para você? Provàvelmente você seguiu um caminho ligeiramente diferente mas teve o mesmo trabalho. É possível que você tenha disposto as operações mais no sentido vertical do que no horizontal.

Você poderia também ter resolvido o problema da seguinte maneira:

$$2\frac{1}{4} + 3\frac{5}{8} = \frac{9}{4} + \frac{29}{8}$$

$$= \frac{18}{8} + \frac{29}{8}$$

$$= \frac{47}{8}$$

$$= 5\frac{7}{8}$$

Exercícios 6-8b

1. Efetue as seguintes adições:

a. $1\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}$ b. $33\frac{1}{3} + 66\frac{2}{3}$ c. $16\frac{1}{2} + 37\frac{1}{3}$ d. $30 + 7\frac{4}{5}$

2. Efetue cada uma das adições abaixo de dois modos diferentes:

a. $4\frac{1}{8} + 3\frac{4}{8}$ b. $8\frac{5}{16} + 1\frac{13}{16}$ c. $2\frac{12}{32} + 14\frac{23}{32}$

3. Efetue as seguintes adições:

a. $\frac{1}{32} + \frac{1}{32}$ g. $(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5})$

b. $1\frac{1}{16} + \frac{10}{16}$ h. $\frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{5})$

c. $4\frac{2}{7} + \frac{1}{14}$ i. $(\frac{3}{8} + \frac{8}{9})\frac{2}{5}$

d. $\frac{13}{64} + \frac{20}{32}$ j. $(\frac{2}{5} - \frac{1}{8}) + (\frac{2}{5} + \frac{8}{9})$

e. $\frac{10}{21} + 5\frac{2}{7}$ k. $3\frac{1}{2} + 4\frac{2}{3} + 7\frac{5}{6}$

f. $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000}$ l. $\frac{12}{20} + 1\frac{2}{5} + 4\frac{7}{10}$

4. a. Compare os resultados obtidos em 3g e 3h.

b. Compare os resultados obtidos em 3i e 3j.

5. Efetue

a. $\frac{5}{3} + \frac{2}{5}$ b. $(5 + 5) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{5})$ c. $\frac{3}{5} + \frac{5}{6}$

6. Veja se você consegue efetuar mentalmente as operações indicadas em seguida, confira depois o resultado com lápis e papel.

a. $1 \div (\frac{1}{3} \div \frac{1}{5})$ b. $(1 \div \frac{1}{3}) \div \frac{1}{5}$

7. Baseado nos resultados obtidos em 6(a) e 6(b) você pode concluir que a divisão é associativa?

8. No quadrado mágico abaixo, adicione os números de cada coluna. Adicione agora na direção horizontal e verifique o resultado de cada linha. Finalmente adicione em diagonal. (Do canto superior esquerdo ao canto inferior direito, etc).

$11\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$
5	$7\frac{1}{2}$	10
$6\frac{1}{4}$	$12\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$

9. Um homem gasta $\frac{1}{5}$ do seu salário em aluguel de casa, $\frac{1}{3}$ com alimentação, $\frac{1}{6}$ com vestuário e $\frac{1}{4}$ em obras de caridade e outras despesas. O restante êle economiza. De cada cruzeiro recebido quanto êle economiza?

Para verificar como a subtração está relacionada com a adição devemos somente ampliar o nosso campo de operações. Como no caso da adição, se as frações tiverem o mesmo denominador simplesmente efetuamos a diferença dos numeradores e escrevemos esta diferença sôbre o denominador comum. Exemplo:

$$\frac{12}{7} - \frac{5}{7} = \frac{12-5}{7} = \frac{7}{7}$$

Como a subtração é o inverso da adição,

$$\frac{12}{7} - \frac{5}{7} = \frac{7}{7}$$

é equivalente a

$$\frac{5}{7} + \frac{7}{7} = \frac{12}{7}$$

Em símbolos, esta relação entre dois números racionais pode ser escrita

$\frac{c}{b} - \frac{a}{b} = \frac{c - a}{b}$ onde b é diferente de zero e c maior ou igual a a.

Lembre-se de que os racionais dêste capítulo não são fechados em relação à subtração.

Se duas frações têm denominadores diferentes, podemos re-escrevê-las sôbre um denominador comum. Façamos isto no exemplo: $\frac{4}{5} - \frac{5}{7}$.

$$\frac{4}{5} - \frac{5}{7} = \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{7}\right) - \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{5}\right)$$

$$= \frac{28}{35} - \frac{25}{35}$$

$$= \frac{28 - 25}{35}$$

$$= \frac{3}{35}$$

Confira a resposta efetuando a adição:

$$\frac{3}{35} + \frac{5}{7} = \frac{4}{5}$$

Como no caso da adição de números racionais, êste mesmo procedimento pode ser aplicado ao caso geral $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b}\right) - \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d}\right)$$

$$= \frac{cb}{bd} - \frac{ad}{bd}$$

$$= \frac{cb - ad}{bd}$$

Portanto $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{cb - ad}{bd}$ se (cb) fôr maior ou igual a (ad) com b e d diferentes de zero.

Exercícios para serem resolvidos em Classe

1. a. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$ c. $\frac{9}{8} - \frac{2}{8}$ e. $\frac{15}{16} - \frac{5}{8}$

   b. $\frac{5}{6} - \frac{4}{6}$ d. $\frac{3}{4} - \frac{3}{16}$ f. $\frac{11}{12} - \frac{2}{3}$

g. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ j. $\frac{5}{8} - \frac{15}{12}$ m. $\left(\frac{7}{12} - \frac{4}{12}\right) - \frac{2}{12}$

h. $\frac{3}{5} - \frac{2}{7}$ k. $\frac{17}{18} - \frac{1}{9}$ n. $\left(\frac{3}{8} + \frac{2}{8}\right) - \frac{1}{8}$

i. $\frac{23}{100} - \frac{1}{10}$ l. $\frac{1}{100} - \frac{3}{1000}$ o. $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{5}$

2. Escreva os racionais abaixo sob outras formas.

   a. $\frac{0}{8}$ b. $2\frac{3}{4}$ c. $\frac{5}{6}$ d. $5\frac{2}{3}$

Já sabemos como efetuar a subtração de racionais quando o resultado é um número racional. Vejamos o caso:

$$5\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2}$$

$5\frac{2}{3}$ e $2\frac{1}{2}$ podem ser escritos sob a forma de fração

$$5\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} = \frac{17}{3} - \frac{5}{2}$$

$$= \left(\frac{17 \cdot 2}{3 \cdot 2}\right) - \left(\frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 3}\right)$$

$$= \frac{34}{6} - \frac{15}{6}$$

$$= \frac{19}{6}$$

$$= 3\frac{1}{6}$$

Você poderia testar êste resultado por meio da adição?

Provàvelmente você conhece um processo ligeiramente diferente dêste e poderia efetuar a mesma subtração do seguinte modo:

$$\begin{array}{rcr} 5\frac{2}{3} & = & 5\frac{4}{6} \\ -2\frac{1}{2} & = & -2\frac{3}{6} \\ \hline & & 3\frac{1}{6} \end{array}$$

Para verificar se a sua resposta está correta encontramos:

$$2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{6}$$

$$= (2 + 3) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{6})$$ Pela propriedade associativa da adição

$$= 5 + \frac{2}{3}$$

$$= 5\frac{2}{3}$$

No exercício de subtração abaixo é conveniente re-escrever os números racionais sob forma de fração. Escrevemos o número racional $8\frac{1}{3}$ como $\frac{25}{3}$. Vamos agora escrevê-lo sob outra forma. Usando a propriedade associativa, podemos escrever $8\frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3} = (7 + 1) + \frac{1}{3} = 7 + (1 + \frac{1}{3}) = 7 + \frac{4}{3}$. Você pode usar o raciocínio acima para escrever $7\frac{1}{4}$ como $6 + \frac{5}{4}$? $12\frac{3}{8}$ como $11 + \frac{11}{8}$? $13\frac{2}{3}$ como $12 + \frac{5}{3}$?

No exercício seguinte

$$8\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6}$$

achamos conveniente escrever $8\frac{1}{3}$ como $7\frac{4}{3}$ porque $\frac{5}{6}$ é maior que $\frac{1}{3}$. Entretanto, $\frac{5}{6}$ não é maior que $\frac{4}{3}$.

$$8\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6} = (8 + \frac{1}{3}) - (2 + \frac{5}{6})$$

$$= (7 + \frac{4}{3}) - (2 + \frac{5}{6})$$

$$= (7 + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{2}) - (2 + \frac{5}{6})$$

$$= (7 + \frac{8}{6}) - (2 + \frac{5}{6})$$

$$= (7 - 2) + (\frac{8}{6} - \frac{5}{6})$$

$$= 5 + \frac{3}{6}$$

$$= 5\frac{3}{6}$$

$$= 5\frac{1}{2}$$

Podemos também escrever isto sob a forma

$$\begin{array}{rcccc} & 8\frac{1}{3} & = 7\frac{4}{3} & = 7\frac{8}{6} & \\ - & 2\frac{5}{6} & = 2\frac{5}{6} & = 2\frac{5}{6} & \\ \hline & & & = 5\frac{3}{6} & = 5\frac{1}{2} \end{array}$$

Exercícios 6-8c

1. Subtração. Escreva a resposta sob a forma mais simples.

a. $\frac{15}{64} - \frac{7}{64}$

b. $\frac{24}{16} - \frac{9}{16}$

c. $\frac{8}{9} - \frac{2}{3}$

d. $3\frac{4}{5} - \frac{1}{3}$

e. $5\frac{9}{16} - 2\frac{5}{8}$

f. $\frac{14}{6} - \frac{11}{9}$

g. $(4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}) - 2$

h. $16\frac{2}{3} - \frac{7}{3}$

i. $\frac{90}{100} - \frac{109}{1000}$

j. $(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}) - (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6})$

k. $\frac{2}{3}(\frac{5}{6} - \frac{1}{6})$

l. Compare os resultados obtidos em (j) e (k)

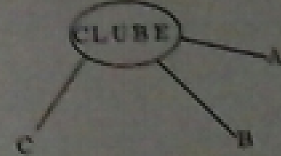
m. Compare (j), (k), (l). Você imagina que a multiplicação é distributiva em relação à subtração?

2. João mora distante $\frac{5}{16}$ de quilômetro da escola. Maria mora a $\frac{3}{7}$ de quilômetro da escola.

a. Qual dêles mora mais longe da escola?

b. Verifique se o seu resultado está correto.

3. Pedro, Paulo e João construiram um clube recreativo. Pedro mora a $\frac{2}{3}$ de quilômetro do clube. Paulo mora a $\frac{4}{8}$ de quilômetro do clube. João mora a $\frac{7}{9}$ de quilômetro do clube. No diagrama abaixo, A representa a casa do que mora mais próximo do clube, B o seguinte e C o que mora mais longe. Quem mora em A? Em C? Em B? De quanto B está mais distante do clube de que A? Qual a diferença das distâncias de C e A ao clube?



4. O comprimento de um campo é $30\frac{1}{2}$ metros. A largura do mesmo é $15\frac{3}{4}$ metros. Qual a diferença entre o comprimento e a largura?

5. José correu 100 metros em $11\frac{1}{5}$ segundos. Paulo percorreu a mesma distância em $10\frac{4}{5}$ segundos. Quantos segundos José levou mais que Paulo?

6. Maria está fazendo um agasalho que requer $1\frac{3}{8}$ metros de lã. Ela tem $4\frac{3}{4}$ metros. Quantos metros de lã ainda faltam?

7. Antonio saiu de casa às 15h15 minutos. Gastou $\frac{1}{4}$ de hora separando jornais para distribuição, $1\frac{3}{4}$ hora para distribuí-los e $\frac{1}{4}$ de hora para retôrnar à casa. Jantou e saiu para o cinema às 19h45 minutos. Quanto tempo gastou para jantar e sair para o cinema?

8. Sr. Manoel mudou o preço das batatas no seu armazem de Cr$ 45 por quilo para Cr$ 140 por 3 quilos.

   a. Qual foi o acréscimo ou redução do preço por quilo?

   b. Abaixou ou elevou o preço?

9. a. A diferença entre $17\frac{1}{4}$ e $6\frac{3}{4}$ é maior ou menor que 11?

   b. Como você poderia responder sem efetuar as contas?

10. O número representado por uma fração varia se subtrairmos um mesmo número do numerador e do denominador? Dê um exemplo.

*11. Preencha os quadrinhos em branco do quadrado mágico de modo que a soma dos números de cada linha seja a mesma. Calcule depois a soma dos números de cada coluna e das diagonais.

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$

6-9 <u>Razões Expressas por Números Racionais</u>

No uso que fez dos números, provàvelmente você notou que podia comparar dois números por subtração ou divisão. Dados dois números, 6 e 2, podemos dizer que o primeiro contém 4 unidades mais que o segundo ou que o primeiro é três vêzes o segundo. Podemos também dizer que a razão do primeiro número para o segundo é 3 para 1 ou simplesmente 3. Comparando os números 9 e 2, dizemos geralmente que a razão dêstes dois numeros na ordem dada é de 9 para 2 ou $\frac{9}{2}$. Nove é quatro vêzes e meia o número dois.

<u>Definição</u>: A razão de um número c para um número d, $d \neq 0$, é $\frac{c}{d}$.

Se c e d forem números naturais, a razão $\frac{c}{d}$ é um número racional.

Numa classe há 36 alunos dos quais 16 são moças. A razão do número de moças para o número de alunos da classe é $\frac{16}{36}$ ou $\frac{4}{9}$.

Portanto $\frac{4}{9}$ dos alunos da classe são moças: $36 \cdot (\frac{4}{9}) = 16$. A razão do número de alunos da classe para o número de moças é $\frac{36}{16}$ ou $\frac{9}{4}$. Há duas vêzes e um quarto mais rapazes que moças na classe. Note que $\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$.

Se um automóvel percorre 258 quilômetros em 6 horas, a razão do número de quilômetros para o número de horas gasto no percurso é $\frac{258}{6}$ ou $\frac{43}{1}$ ou seja 43. A razão, 43, é geralmente chamada de velocidade de percurso e é expressa em quilômetros por hora. Em exemplo que envolve movimento, assim como um carro que se move, você pode usar a fórmula:

$$d = rt,$$

onde d representa o número de unidades da distância percorrida; r, a razão do espaço percorrido pelo tempo gasto; t, o tempo gasto no percurso. Se $d = 258$ e $t = 6$ então,

$$6r = 258$$
$$r = 43$$

r é a razão de 258 e 6 ou número racional $\frac{258}{6}$. Outros nomes de $\frac{258}{6}$ são $\frac{43}{1}$ e 43.

A razão tem largo uso em Matemática Aplicada. No decorrer dêste ano e no próximo, veremos muitas outras aplicações das razões. Algumas aplicações da razão são ilustradas por exercícios abaixo.

Exercícios 6-9

1. Escreva as razões seguintes, como número racional sob a forma mais simples.

   a. 3 metros para 10 metros

   b. Uma prova de nota 75 para uma outra de nota 90

   c. 56 quilos para 12 quilos

   d. $\frac{5}{2}$ para $\frac{7}{2}$

   e. $\frac{5}{4}$ centímetros para 2 centímetros

   f. 90 centavos para 75 centavos

   g. 15 000 pessoas para 25 400 pessoas

   h. 90 graus para 55 graus

2. Um avião percorre 2 600 quilômetros em 5 horas

   a. Quantos quilômetros êle percorre por hora?

   b. Qual a razão do número de quilômetros percorridos para o número de horas de vôo?

3. A razão de 5 centímetros para um metro pode ser escrita $\frac{5}{1}$ ou se transformarmos metro em centímetros, a razão será $\frac{5}{100}$. Quando usamos a razão devemos dar especial atenção para a unidade que estamos usando. Qual a vantagem de escrever a razão de 5 centímetros para um metro sob a forma $\frac{5}{100}$?

4. Na escala de um mapa, um centímetro corresponde a vinte quilômetros.

   a. Escreva esta escala sob a forma de razão.

   b. Neste mapa quantos quilômetros representa um segmento de comprimento $4\frac{1}{4}$ cm?

5. Uma pequena cidade é limitada por uma construção de forma retângular cujo lado maior mede 3 quilômetros e cujo lado menor mede 2 quilômetros. Usan-

do uma escala que 1 centímetro representa $\frac{1}{8}$ de quilômetro, quais as dimensões do comprimento e de largura do perímetro dessa cidade?

6. Um mapa do Brasil é desenhado na escala de 10 centímetros para 30 000 quilômetros.

   a. Escreva a escala sob a forma de razão

   b. Quantos quilômetros representa 1 centímetro nessa escala?

   c. A distância do Rio de Janeiro a São Paulo é, aproximadamente, 500 quilômetros. Qual o comprimento dessa distância no referido mapa?

7. Desenhe, numa escala em que 1 centímetro corresponda a 6 metros, o chão de sua sala de aula.

   a. Escreva esta escala sob a forma de razão

   b. Nessa escala, escreva quantos metros são representados por um segmento de vinte centímetros.

   c. Em (b) qual é a razão do comprimento do segmento desenhado para o número de metros que êle representa?

8.

X	1	2	3	4	5	6
3X	3	6	9	12	15	18

Calcule a razão de cada número da segunda linha da tabela acima para o seu correspondente na primeira linha da tabela.

9.

2	4	6	8	10		
5	10	$12\frac{1}{2}$	20		30	40

Admita que a razão de cada par de números correspondentes (situados sôbre a mesma vertical) na tabela acima seja a mesma. Quais os números omitidos?

10. Num termômetro, dez centímetros de mercúrio representam uma temperatura de 40 graus.

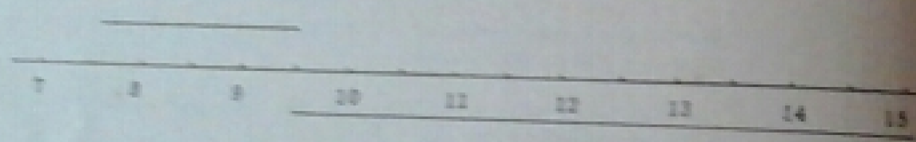
a. Quantos centímetros de mercúrio são necessários para se representar 60 graus, admitindo que escala inicie com 0 graus?

b. Idem para a temperatura de 67 graus.

11. $\frac{1}{4}$ de litro de suco de laranja é vendido a Cr\$80 e o litro do mesmo suco a Cr\$200. Calcule a razão do preço de venda por litro em ambos os casos.

12. O custo de uma bicicleta em 1º de janeiro de 1961 era $\frac{11}{10}$ do preço da mesma bicicleta em 1º de janeiro de 1959. (a) Qual a razão entre o custo da última data e o custo em 1º de janeiro de 1961? (b) Se a bicicleta custava Cr\$ 4 000 em 1º de janeiro de 1961, quanto custava dois anos antes?

*13.



O comprimento de uma barra acima da escala dada é de dois centímetros. Calcule, sem efetuar medidas, o comprimento da barra abaixo da escala.

*14. Um homem tem 1,80 metros de altura e seu filho 1,20 metros. (a) Qual a razão das alturas do pai para filho? (b) Quantas vêzes a altura do filho está contida na altura do pai? (c) Quantas vêzes a altura do pai é maior que a do filho?

6-10. A Notação Decimal

Nas suas experiências quotidianas provàvelmente você já usou a notação decimal para os números racionais. Por exemplo, dizemos um quarto para indicar $\frac{25}{100}$. Muitas vêzes escrevemos 0,25 em lugar de $\frac{25}{100}$. Como $\frac{25}{100}$ é a mesma coisa que um quarto, vemos que 0,25, $\frac{25}{100}$ e $\frac{1}{4}$ são nomes diferentes de um mesmo número racional.

Nomes do mesmo racional n tal que $10n = 3$, são $\frac{3}{10}$, 0,3, $\frac{30}{100}$ e 0,30

Você aprenderá que a notação decimal de $\frac{3}{10}$ é 0,3. Em símbolos, os nomes para os números compreendidos entre 0 e 1, são escritos tendo um zero à esquerda da vírgula.

A notação decimal para $\frac{3}{1000}$ é 0,003.

Lê-se o numeral 1,87: um inteiro e oitenta e sete centésimos. Em termos de dinheiro dizemos Cr\$1,87 (hum cruzeiro e oitenta e sete centavos). A forma decimal 1,87 é um nome de $1 + \frac{87}{100}$ que, por sua vez, é um nome do racional $\frac{187}{100}$

Alguns nomes decimais mais usados para números racionais são:

$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 0,50$ ou $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5$

$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75$ $\quad \frac{3}{10} = 0,3$ $\quad \frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = 0,125$

Suponha que desejamos escrever $\frac{7}{8}$ sob notação decimal. Sabemos que $\frac{7}{8} = 7 \div 8$, de modo que efetuando a divisão

$$7,000 \;\underline{\big|\; 8 \quad}$$
$$0,875$$

Vemos que $\frac{7}{8}$ pode ser escrito como 0,875. Podemos verificar se $\frac{7}{8} = 0,875$ (ou $\frac{875}{1000}$) é correto. Vemos que $\frac{875}{1000} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7}{8}$

Podemos observar que quando usamos a notação decimal para representação de números racionais, a representação do número pode ser obtido por divisão.

Exemplo:

3,00 | 4 → 0,75 $\qquad \frac{3}{4} = 0,75$

5,0000 | 16 → 0,3125 $\qquad \frac{5}{16} = 0,3125$

```
5,0000 |_16____
48       0,3125
 20
 16
  40
  32
   80
   80
    0
```

lemos 0,3125 assim: três mil cento e vinte e cinco décimos milésimos.

$$0,3125 = 0\,(1) + 3\left(\frac{1}{10}\right) + 1\left(\frac{1}{100}\right) + 2\left(\frac{1}{1000}\right) + 5\left(\frac{1}{10000}\right)$$

Na adição de números racionais podemos usar a propriedade distributiva. Exemplo:

$$\frac{32}{100} + \frac{55}{100} = 32\left(\frac{1}{100}\right) + 55\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{100}\right)(32 + 55) = \left(\frac{1}{100}\right)(87) = \frac{87}{100}$$

Se desejarmos usar a notação decimal, podemos substituir $\frac{1}{100}$ por 0,01, $\frac{32}{100}$ por 0,32 e $\frac{55}{100}$ por 0,55.

$$0,32 + 0,55 = 32(0,01) + 55(0,01)$$

$$= (0,01)(32 + 55) = (0,01)(87) = 0,87$$

Se você não tiver confiança no último produto (0,01)(87) observe que

$$(0,01)(87) = \left(\frac{1}{100}\right)(87) = \frac{87}{100} \text{ ou } 0,87$$

Êste e alguns outros exemplos, devem ter sido suficientes para convencê-lo de que a notação decimal torna o seu trabalho mais fácil. Se escrevessemos êste exercício de adição em coluna, necessitaríamos sòmente de:

$$\begin{array}{r} 0,32 \\ +\;0,55 \\ \hline 0,87 \end{array}$$

Na notação decimal adicionamos dezenas a dezenas, centenas a centenas, etc. usando a propriedade distributiva.

Consideremos outro exemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4}(3 + 2) = \frac{1}{4}(5) = \frac{5}{4}$$

ou, em notação decimal,

$$0,75 + 0,50 = 0,01\ (75 + 50) = 0,01\ (125) = 1,25,$$

dispondo em coluna, temos:

$$\begin{array}{r} 0,75 \\ +\;0,50 \\ \hline 1,25 \end{array}$$

Neste exemplo usamos

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75 \qquad \frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 0,50$$

$$0,75 = (0,01)75 \qquad 0,50 = (0,01)50$$

e

$$(0,01)125 = 1,25$$

Afim de ver porque (0,01) 125 = 1,25, substituiremos 0,01 por $\frac{1}{100}$ para obter

$$(0,01)\,125 = \left(\frac{1}{100}\right)125 = \frac{125}{100} = 1 + \frac{25}{100} = 1,25$$

Exercícios 6-10

1. Escreva os números racionais abaixo sob a forma decimal:

a. $\frac{1}{2}$	d. $\frac{3}{16}$	g. $\frac{11}{4}$	j. $\frac{1}{16}$
b. $\frac{1}{4}$	e. $\frac{24}{100}$	h. $\frac{4}{5}$	k. $\frac{15}{16}$
c. $\frac{3}{8}$	f. $\frac{3}{4}$	i. $\frac{1}{8}$	l. $\frac{40}{16}$

Nos três últimos itens use quatro casas decimais (quatro algarismos após a vírgula).

2. Escreva os números decimais abaixo como números racionais sob a forma mais simples.

a. 0,75	d. 5,6	g. 0,140	j. 0,875
b. 1,75	e. 0,36	h. 0,012	k. 1,506
c. 0,6	f. 2,36	i. 0,825	l. 2,008

3. Escreva por extenso os números decimais do Problema 2.

4. Adicione: 105,70, 41,70, 58,20, 217,20, 30,60, 50,90.

5. Adicione os racionais seguintes sob forma de fração e em seguida use a notação decimal e efetue novamente a operação:

$$\frac{5}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{8}$$

6. Adicione os números: 1, 4; 3, 75; 10, 06; 3, 7; 0, 096, 9, 99.

7. Os comprimentos de vários pedaços de madeira foram medidos com aproximação de décimos de centímetro. Seus comprimentos são:

6, 3; 8, 2; 9, 7; 1, 6; 2, 8; 3, 9.

a. Qual a soma dêsses comprimentos?

b. Qual a diferença entre os pedaços maior e menor?

8. Calcule os produtos abaixo, convertendo em frações os números decimais onde houver vantagens:

a. 4 (0, 01)	d. 240 (0, 01)	g. (0, 1) (0, 01)
b. 25 (0, 1	e. 1492 (0, 01)	*h. (2, 3) (1, 2)
c. 356 (0, 001)	f. 673 (0, 1)	

*9. Escreva sob a forma decimal com aproximação de 0, 001:

a. $\frac{2}{3}$	d. $\frac{1}{11}$	g. $\frac{41}{3}$
b. $\frac{5}{6}$	e. $\frac{1}{9}$	h. $\frac{55}{7}$
c. $\frac{4}{9}$	f. $2\frac{3}{8}$	i. $\frac{1000}{6}$
		j. $\frac{2134}{21}$

10. Use a propriedade distributiva para mostrar porque a soma de

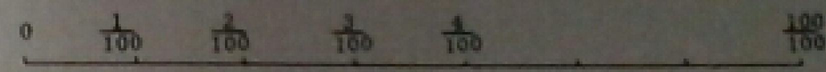
3, 25 e 6, 71 é 9, 96

6.11. A Ordenação

Conhecemos processos para dizer quando duas frações representam o mesmo número. Algumas vêzes é importante saber quando são dadas duas frações desiguais, qual delas representa o maior número. Se numa casa comercial você compra três maçãs por Cr$100 e em outra duas maçãs por Cr$100, é fácil ver que as maçãs custam mais barato na primeira casa onde você obtem mais com a mesma quantia. Isto também pode ser visto notando que na primeira você adquire $\frac{3}{100}$ de uma maçã por Cr$10 e na segunda sòmente $\frac{2}{100}$ de maçã pelo mesmo preço. Sabemos que três centésimos é maior que dois centésimos, o que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{3}{100} > \frac{2}{100}$$

Sôbre a reta numérica



$\frac{3}{100}$ está à direita de $\frac{2}{100}$.

O problema ficaria mais complicado se na primeira casa você comprasse três limões por Cr$5 e na segunda oito limões por Cr$13. Teriamos então de responder a pergunta:

$$\frac{3}{5} > \frac{8}{13} \text{ está correto?}$$

Deveríamos fazer um desenho minucioso para responder usando a reta numérica. Há, no mínimo, dois métodos para obtermos a resposta:

Método I: Converta ambas as frações em números decimais e compare os resultados. Portanto $\frac{3}{5} = 0,60$ $\frac{8}{13} = 0,61 \ldots$ obtido por meio da seguinte divisão:

$$\begin{array}{r|l} 8,00 & 13 \\ \cline{2-2} \underline{7\ 8} & 0,61 \\ 20 & \\ \underline{13} & \\ 7 & \end{array}$$

Basta dividirmos até a segunda casa decimal para ver que os números decimais que as duas frações representam são diferentes.

Método II: Aqui vamos usar o processo do exemplo 3 da secção 5, ou seja, procuraremos duas frações com denominadores iguais que representem os números dados. Como no caso os denominadores são 5 e 13, o menor denominador comum que podemos obter para as frações será o mínimo múltiplo comum de 5 e 13, que é 65.

Então,

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 13}{5 \cdot 13} = \frac{39}{65} \quad e \quad \frac{8}{13} = \frac{8 \cdot 5}{13 \cdot 5} = \frac{40}{65}$$

Como $\frac{40}{65} > \frac{39}{65}$ temos que $\frac{8}{13} > \frac{3}{5}$

Ambos os métodos anteriores mostram que se sôbre uma reta numérica tomarmos 65 partes iguais, o ponto correspondente a $\frac{8}{13} = \frac{40}{65} = 0{,}615\ldots$ estará à direita do ponto correspondente a $\frac{3}{5} = \frac{39}{65} = 0{,}600$.

Uma fração cujo numerador é maior que o denominador é chamada fração imprópria. O número que tal fração representa é maior que 1. Para verificar isto, consideremos a fração $\frac{13}{11}$. Ela é maior que $\frac{11}{11}$, que é igual a 1. Logo $\frac{13}{11}$ é maior que 1. Anàlogamente $\frac{3568}{3452}$ é maior do que 1 porque é maior que $\frac{3452}{3452}$, que é igual a 1.

Exercícios 6-11

1. Para cada um dos seguintes pares de frações, verifique qual delas representa o maior número:

   a. $\frac{7}{12}$ e $\frac{2}{3}$ b. $\frac{4}{5}$ e $\frac{13}{16}$ c. $\frac{13}{15}$ e $\frac{13}{7}$

2. O que é mais barato, cinco laranjas por cento e dez cruzeiros ou quatro laranjas por noventa cruzeiros?

3. Uma firma A vende suco de laranja acondicionado em vasilhas de 1,5 l e outra B em vasilhas de 0,800 l. Se a firma A vender a Cr$230 cada unidade e a firma B Cr$120 qual das duas vende mais barato?

4. Se o numerador de uma fração é maior que o dôbro do denominador, mostre que o número representado pela fração é maior que 2.

5. Se duas frações têm denominadores iguais e se o numerador da primeira é maior que o denominador da segunda, então o número representado pela primeira é maior que o número representado pela segunda. Suponhamos que duas frações tenham numeradores iguais; como você pode dizer, comparando os denominadores, qual a fração que representa o maior número? (Experimente com alguns pares de frações inicialmente para ver o que acontece).

Capítulo 7

MEDIDA

7-1. Contando e Medindo

Muitas questões que aparecem na vida diária começam com "Quantos?" ou "A que velocidade?". Dizemos "Quantas pessoas assistiram ao jôgo?" ou "Quanto comprarei de carne?" ou "Qual a velocidade de um avião a jato?". As respostas que desejamos para estas perguntas têm um elemento comum: tôdas elas envolvem números. Algumas respostas podem ser obtidas contando, enquanto outras podem ser obtidas medindo.

Quando perguntamos, "Quantas pessoas assistiram ao jôgo?" achamos a resposta contando. Cada pessoa é um todo indivisível. Não há fração de pessoas entre a assistência ao jôgo. Elas não são exatamente iguais, nem tem sempre o mesmo tamanho, mas cada uma é uma pessoa. Para contá-las usamos sòmente os números naturais e nossa resposta é um número natural. Há 78 ou 79 pessoas, seria impossível dizermos $78\frac{1}{2}$ ou $79\frac{1}{4}$ pessoas.

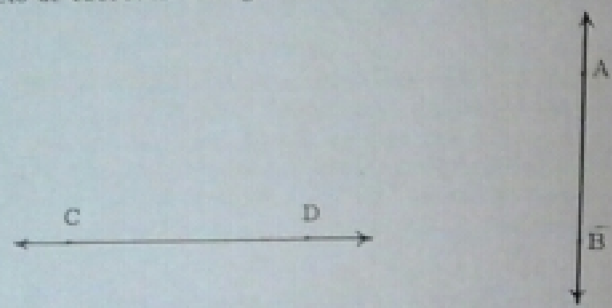
Quando perguntamos "Qual o comprimento desta corda?" não poderemos achar uma resposta contando, porque a corda é contínua; não é composta de partes separadas que possamos contar. Podemos encontrar o seu comprimento medindo-o. A resposta será um número de unidades. Podemos dizer que ela tem 50 centímetros de comprimento ou $\frac{1}{2}$ metro de comprimento ou ainda 0,5 metros de comprimento. Escrevemos geralmente um número racional mas, nem sempre um número natural. Na resposta à pergunta "Qual a velocidade de um avião à jato?" devemos usar duas unidades. Podemos dizer, "êle percorre 1 200 quilômetros por hora" usando uma unidade de distância e uma unidade de tempo.

Neste capítulo vamos estudar os processos para medir grandezas contínuas. Quando formulamos a pergunta "Quantos?", estamos nos referindo a um conjunto de objetos que desejamos saber quantos são. Denominamos êstes conjuntos de conjuntos discretos. Quando formulamos as perguntas, "Quanto?", "Qual o comprimento?" "Que velocidade?", etc. estamos nos referindo a grandezas como um todo, sem fragmentos. Quando nos referimos a grandezas dêsse tipo, dizemos que são contínuas. Conjuntos de pessoas, casas, animais, pedras ou utensílios, são conjuntos discretos, desejamos saber "Quantos?". Uma corda, um fio condutor, uma estrada ou um mastro de bandeira são conhecidos como grandezas contínuas como segmentos de reta; podemos contar um certo número de segmentos mas, não podemos contar os pontos de um segmento. Um pedaço de pano, um quadro negro, um campo de futebol, um campo de pastagem podem ser considerados regiões limitadas por curvas fechadas simples, portanto contínuas; podemos contar os campos de futebol, mas não tem significado contar um campo de futebol.

Propriedades das Grandezas Contínuas

As grandezas contínuas que pretendemos medir são de natureza diversas. Algumas grandezas contínuas ou conjuntos podem ser tratados como segmentos de reta, outras podem ser tratadas como interior de uma curva fechada e outras ainda como volumes e unidades de capacidade. Por exemplo, a sua altura ou a coleira do seu cachorro podem ser tratadas como segmento de reta. O assoalho de seu ginásio de esportes pode ser tratado como uma região limitada por uma curva fechada simples.

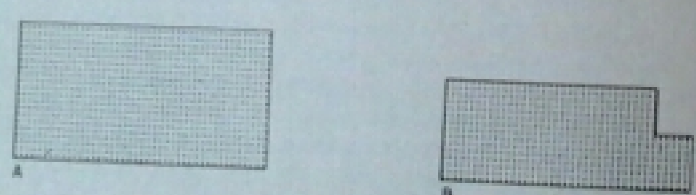
Os comprimentos de segmentos de retas e de curvas fechadas simples, podem ser comparados sem que conheçamos as suas medidas. Para verificarmos de dois rapazes, qual é o mais alto, êles devem ficar um de costas para o outro num mesmo plano para compararmos as posições das duas cabeças. Um método análogo pode ser empregado para verificarmos qual de dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, desenhados abaixo, é o maior. O símbolo $\overline{AB}$ usado aqui, tem o mesmo significado do Capítulo 4: é um modo compacto de escrever "o segmento AB".



Para comparar êstes dois segmentos, coloquemos a aresta de um pedaço de papel ao longo de $\overline{CD}$ e o marquemos os pontos C e D sôbre o papel de modo que êles correspondam aos pontos da figura. Coloquemos em seguida a aresta de papel ao longo de $\overline{AB}$ de modo que o ponto C fique sôbre A. Onde estará o ponto D? Se êle estiver entre A e B, $\overline{AB}$ será maior que $\overline{CD}$. Se D coincidir com B, os segmentos terão o mesmo comprimento. Dizemos neste caso que segmentos de mesmo comprimento são congruentes. Se B estiver entre C e D, $\overline{CD}$ será maior que $\overline{AB}$.

Vamos considerar o conjunto dos pontos que pertencem a uma curva fechada simples ou que estão contidos no interior da mesma. Êste conjunto de pontos é chamado região fechada.

Observe as regiões fechadas abaixo. Reproduza-as em uma folha de papel.



Para comparar o tamanho da região fechada A com o tamanho da região fechada B, destaque uma cópia de B e coloque sôbre a região fechada A. A figura B separará A em duas partes, uma coberta por B e outra não coberta por B. Dizemos que a área de A é maior que a área de B.

Quando usamos um processo para comparar segmentos de reta ou regiões fechadas, admitimos as seguintes propriedades das grandezas geométricas contínuas:

Propriedade de Movimento. Uma figura geométrica pode ser movida sem se deformar.

Propriedade de Comparação. Duas figuras geométricas contínuas, ou conjuntos da mesma espécie, podem ser comparadas para determinarmos quando elas são do mesmo tamanho ou quando uma é maior do que a outra.

Exercícios 7-1

1. Indique nas questões abaixo quais você poderia responder contando e quais as que responderia medindo.

   a. Quantos alunos há nesta classe?

   b. Qual é a nossa distância à Lua?

   c. Quantas pessoas irão ao "pic-nic"?

   d. Qual a temperatura de hoje?

   e. Qual a sua idade?

   f. Quanta água contém a piscina?

2. Diga quais das seguintes grandezas são contínuas e quais as discretas.

   a. Sua altura

   b. Seu pêso

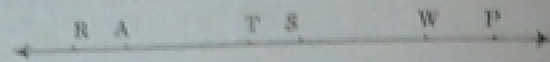
   c. Os elementos de sua família

   d. O comprimento desta página

   e. Os números ímpares entre 0 e 10

   f. A quantidade de ar existente nesta sala

3. Use uma tira de papel ou um fio do mesmo comprimento que $\overline{RT}$, localizado na reta que se segue:



Utilize-se de $\overline{RT}$ para comparar os segmentos de reta abaixo. Indique se os segmentos dados são congruentes ou qual dos dois é o maior:

a. $\overline{RT}$ e $\overline{SP}$

b. $\overline{RT}$ e $\overline{TW}$

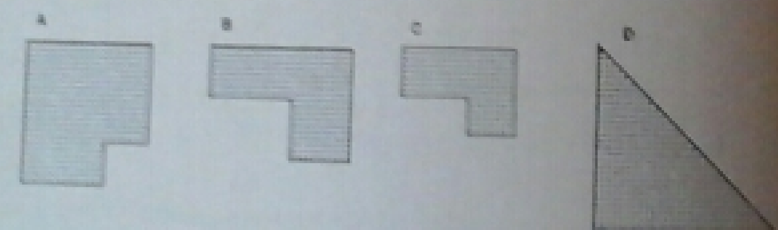
c. $\overline{RT}$ e $\overline{AS}$

d. $\overline{RT}$ e $\overline{AT}$

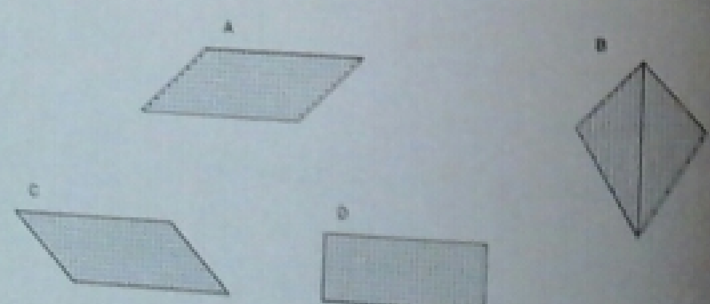
e. $\overline{RT}$ e $\overline{TP}$

4. Das regiões fechadas abaixo, aponte qual você acha que seja a menor. Escreva sentenças comparando o tamanho da menor região fechada com o tamanho das regiões fechadas de cada uma das outras figuras. Utilize um dos símbolos >, =, <, e a forma aqui mostrada:

A região fechada da figura __?__ < que a região fechada da figura __?__.



5. a. Qual das 4 regiões fechadas abaixo você crê seja a maior? Escreva-as na ordem de tamanho que você acha que elas estão, colocando a maior em primeiro lugar.

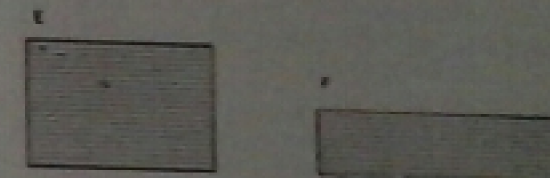


b. Faça três cópias da Figura A, e use-as para comparar a região fechada da A com as outras regiões fechadas. Se necessário, corte as cópias da Figura A).

c. Estava correta a lista que fez para o problema 5 (a)?

6. a. Utilize a margem de uma fôlha de papel para anotar os comprimentos dos quatro segmentos de reta na curva fechada da figura E abaixo. A seguir utilize a faixa para comparar o comprimento da curva fechada na figura E com o comprimento da curva fechada na Figura F. Qual o maior comprimento?

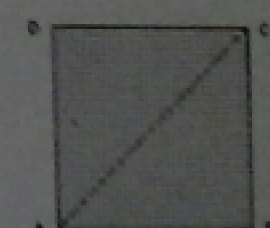
b. Utilize uma cópia da Figura E para comparar os tamanhos das regiões fechadas E e F. Qual das regiões fechadas tem maior área?



7. Desenhe um quadrado e dê nomes aos vértices ABCD. Recorte a região fechada quadrada e a seguir corte-a ao longo de $\overline{AC}$. Junte as duas partes de maneira que não formem um quadrado, e trace uma linha em tôrno da nova figura.

a. Como comparamos a área da nova região fechada com a área do quadrado ABCD?

b. Como comparamos os comprimentos das curvas fechadas?



Nos Problemas 6-7 exploramos mais duas propriedades das figuras geométricas contínuas, ou conjuntos.

Propriedade de Comparação: Se duas figuras geométricas contínuas, ou um conjunto de figuras, são ambos constituídos de partes tais que cada parte de uma pode ser comparada a uma parte do mesmo tamanho da outra, então as duas figuras contínuas ou conjuntos de figuras têm o mesmo tamanho.

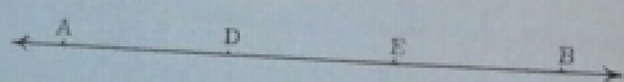
Propriedade de Subdivisão: Uma figura geométrica contínua, ou conjunto de figuras, pode ser subdividido.

7-2 Subdivisão e Medição

A propriedade da subdivisão de uma quantidade contínua é a base do processo que chamamos medição. Usaremos alguns exemplos que o auxiliarão a compreender esta idéia.

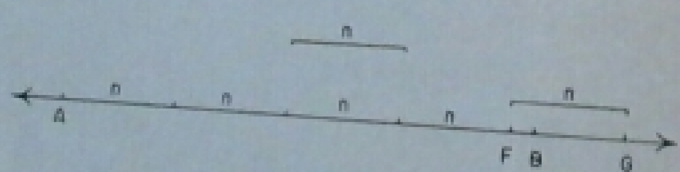
Cada uma das três figuras seguintes é a figura de uma reta contendo o mesmo segmento, $\overline{AB}$. O ponto C subdivide o segmento $\overline{AB}$ em dois segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$. Como comparamos o tamanho dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$? São êles congruentes?

No esquema seguinte, $\overline{AB}$ está subdividido por dois pontos D e E, de modo que o comprimento de $\overline{AD}$ seja $\frac{1}{3}$ do comprimento de $\overline{AB}$ e o comprimento de $\overline{EB}$ seja também $\frac{1}{3}$ do comprimento de $\overline{AB}$.



Como comparamos os comprimentos de $\overline{AE}$ e $\overline{AB}$? De $\overline{DB}$? De $\overline{DE}$?

$\overline{AB}$ pode ser subdividido de outros modos para compararmos o comprimento de um segmento com o comprimento de outro. Suponha que escolhamos um segmento de comprimento qualquer menor que o comprimento de $\overline{AB}$. Chamaremos "n" o comprimento do segmento.

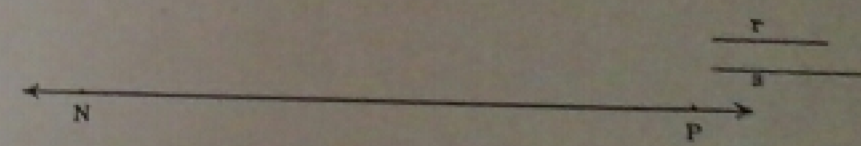


Utilize uma tira de papel ou um compasso e marque segmentos de comprimento n em $\overline{AB}$. (Comece pelo ponto A.) Na figura acima, o segmento de comprimento n foi marcado 4 vêzes e portanto $\overline{AF}$ tem comprimento 4 n. O símbolo "4n" significa "quatro vêzes tão longo quanto n".

O ponto F está entre A e B. Se um quinto segmento de comprimento n fôr marcado, o segmento $\overline{AG}$ terá comprimento 5n, e B estará entre A e G. Portanto, $\overline{AB}$ é maior que 4n porém menor que 5n. Uma vez que $\overline{BG}$ é obviamente maior que $\overline{FB}$, dizemos que $\overline{AB}$ é aproximadamente igual a 4n. Existe um símbolo para as palavras "aproximadamente igual a". É o sinal seguinte "$\approx$". Podemos usar êste símbolo e estabelecer que o comprimento de $\overline{AB} \approx 4n$.

No exemplo anterior comparamos o comprimento de $\overline{AB}$ com o comprimento de outro segmento cujo comprimento foi chamado n. Fizemos isto sub-dividindo $\overline{AB}$ em partes congruentes, cada uma das quais com o comprimento n. Achamos que o comprimento de $\overline{AB} \approx 4n$. Êste processo chama-se medição e o segmento de comprimento n, é uma unidade de medida. O número 4, é a medida de $\overline{AB}$ quando medido com a unidade n. ($\overline{AF}$ também tem a medida 4).

Faça duas unidades de medida, uma congruente ao segmento r e a outra congruente ao segmento s. Meça $\overline{NP}$ com a unidade r. Quantas unidades r há no comprimento $\overline{NP}$?



Meça $\overline{NP}$ com a unidade s. Quantas unidades s há no comprimento $\overline{NP}$?

Você verá que se medir um segmento com unidades de tamanhos diferentes, as medidas obtidas não lhe dirão o tamanho do segmento. Você precisa também conhecer o tamanho da unidade de medida que é usada. A medida de $\overline{NP}$ não é a mesma quando as unidades utilizadas em sua medição são r e s.

O comprimento de um segmento inclue o conhecimento de ambos, a medida e a unidade utilizada na medição. No exemplo onde utilizamos n como uma unidade, o comprimento de $\overline{AB} \approx 4n$. O símbolo AB (sem barra em cima) significa o comprimento do segmento $\overline{AB}$. O comprimento pode ser dado pela afirmação $\overline{AB} \approx 4n$.

Note como estas palavras são usadas.

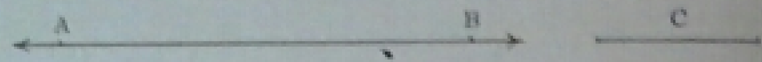
4 é a medida

n é a unidade de medida

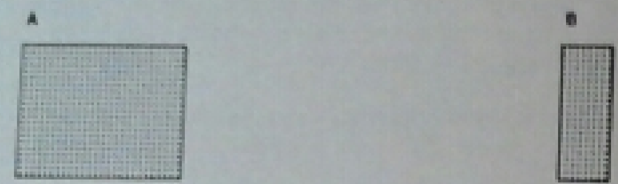
4n é o comprimento

Exercícios 7-2

1. Copie no papel o segmento $\overline{AB}$ e o segmento de reta notado "c" abaixo (ou use um compasso) para comparar o comprimento de $\overline{AB}$ com o comprimento do segmento c.

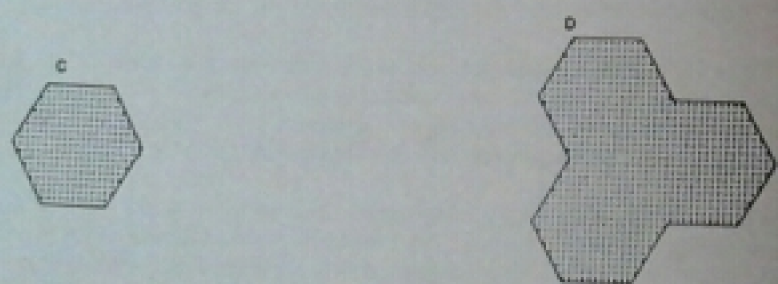


2. a. Utilize a região fechada B como unidade para comparar as áreas das duas regiões fechadas. Copie as Figuras A e B. Recorte ou trace a Figura B e subdivida a região fechada A em partes do mesmo tamanho que B.



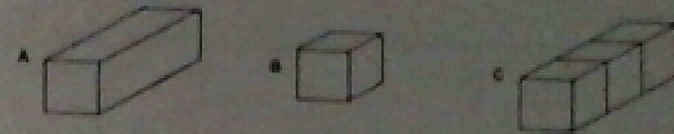
b. O tamanho da região A é aproximadamente _____ vêzes o tamanho de B.

3. a. Compare o comprimento da linha D com o comprimento da linha C.



b. Compare o tamanho da região fechada D com o tamanho da região fechada C.

4. Observe a caixa A na figura. Podemos pensar no sólido A como subdividido em partes com tamanho da caixa B, como é mostrado em C. A caixa sólida A é cêrca de ____ vêzes maior que o sólido B.



5. a. Qual a unidade de medida que foi utilizada no Problema 1?

b. Qual foi a medida de $\overline{AB}$?

6. a. Qual a unidade de medida que foi utilizada no Problema 2?

b. Qual foi a medida da região fechada A?

7. a. No Problema 3a, suponha que você use um segmento da curva C como unidade de medida, e chame a medida dêste segmento "t". Qual é o comprimento da curva C medida nesta unidade?

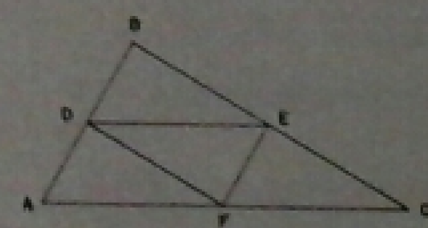
b. Utilizando a mesma unidade de medida "t", qual o comprimento da curva D?

c. Como podemos comparar o comprimento da linha D com o comprimento da linha C?

d. No Problema 3b, que unidade de medida você usou? Qual é o tamanho da região fechada D?

8. No Problema 4, o que foi utilizado como unidade de medida para medir o volume da caixa A? Qual a dimensão do sólido A?

9. Desenhe um triângulo ABC. Em cada lado do triângulo coloque um ponto que o subdivida em dois segmentos congruentes. Chame êsses pontos D, E, F, como mostra no esquema. Trace os segmentos $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{DF}$.



a. Use uma tira de papel para determinar quais os segmentos congruentes (Você deverá achar três conjuntos, com três segmentos em cada um dêles).

b. Há 11 curvas simples fechadas na figura acima. Algumas são triângulos e outras são figuras de quatro lados. Dê nome a tôdas essas curvas fechadas.

c. Copie o triângulo EFC e compare a área de região fechada EFC com as áreas das outras regiões triangulares fechadas.

*d. Que conjuntos de regiões fechadas apresentam o mesmo tamanho. (Um conjunto poderá ter quatro elementos e dois poderão apresentar três elementos cada um).

7-3. Subdividindo as Unidades de Medida

Vimos que os tamanhos de quantidades contínuas podem ser encontrados por meio de medições. Para fazer isto, devemos nos utilizar de uma unidade de medida. A unidade de medida deve apresentar duas características:

1. Deve ser da mesma natureza que a grandeza a ser medida — um segmento de reta para medir um segmento de reta; uma região fechada para medir uma região fechada, e assim por diante.

2. Devemos poder mover a unidade, ou copiá-la com precisão, para que possa ser utilizada para subdividir a grandeza que está sendo medida.

Muitas vêzes usamos qualquer coisa apropriada que esteja convenientemente à mão como unidade de medida. Coisas que sempre temos conosco são nossas mãos, dedos, braços e pés. Estas partes do corpo são muitas vêzes utilizadas como unidades para medir segmentos de reta.

Exercícios para serem Resolvidos em Classe 7-3

1. Use o comprimento da seção média de seu dedo mínimo como unidade de medida para medir.

a. O comprimento de sua carteira;

b. O comprimento desta página.

2. Utilize o comprimento de seu pé para medir o comprimento de sua sala de aula.

3. Compare suas respostas dos Problemas 1 e 2 com as respostas de seu colega. Como você explica algumas diferenças?

4. Que objeto seria uma unidade conveniente para medir o volume sugerido por uma escrivaninha?

5. Você pode pensar em algum objeto que possa ser movido e que poderia ser utilizado como unidade para medir a superfície de sua escrivaninha? Poderia ser utilizada uma folha de papel de seu caderno de notas? Coloque algumas fôlhas lado a lado, e conte o número de unidades folha de caderno de notas. Qual é a medida da superfície?

6. Você e todos os seus colegas de classe usaram como unidade fôlhas de caderno de notas do mesmo tamanho? Se não, qual foi a medida verdadeira?

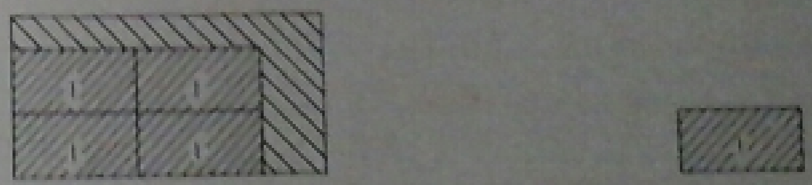
Subdividindo as Unidades de Medida

Provàvelmente suas unidades — folha de caderno de notas não cobriram exatamente o tampo de sua escrivaninha um número inteiro de vêzes. Em tais casos muitas vêzes cobrimos a superfície descoberta com partes da unidade. Vejamos como isto é feito.

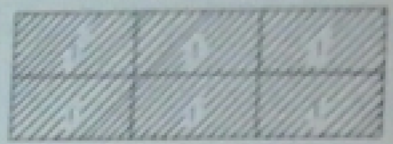
Você sabe o que é um retângulo. É uma curva simples fechada constituida de quatro segmentos de reta que se interceptam formando quatro "ângulos retos". As quatro margens de uma página dêste livro formam um retângulo. Procure alguns retângulos em sua sala de aula. Para cada um dêles, destaque os cantos e o interior do retângulo.

Suponha que queremos medir a região retangular maior no diagrama que se segue utilizando a menor região retangular fechada como unidade.

As unidades devem ser postas lado a lado na região retangular fechada maior, como mostra a figura de modo a cobrí-la tanto quanto possível.



Pode acontecer que, tão próximo como possamos dizer, a região retangular fechada possa ser coberta "exatamente" por alguma disposição das unidades, como vemos na figura.



A medida da região retangular fechada é então obtida pela simples contagem das unidades. Se chamarmos o número de unidades nesta região de "A", poderemos escrever $A \approx 6$ para significar "O tamanho desta região retangular fechada é aproximadamente 6 unidades". Note que o símbolo "$\approx$" para "aproximadamente igual" foi usado, pois não é possível colocar as unidades de modo que possamos dizer que a medida é <u>exatamente</u> 6.

O tamanho de uma região fechada é chamado sua área. Dizemos que a área do retângulo acima é 6 unidades. Por isto entendemos que o tamanho da região retangular fechada é 6 unidades. Rigorosamente falando, um retângulo não tem área pois êle é uma curva simples fechada. Estamos naturalmente querendo dizer que podemos cobrir apenas uma parte da região retangular fechada. Parte desta região sobrará em tôrno dos limites das unidades de medida. A parte que ficou fora não terá configuração de modo que possamos ajustar mais uma unidade inteira nela. Na figura abaixo, a parte hachurada (/////) não está coberta.

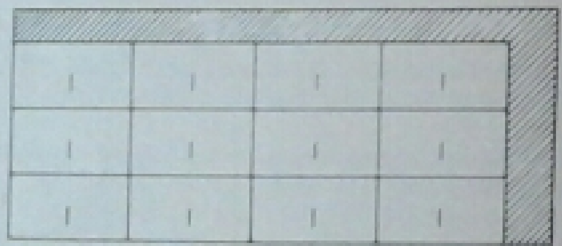


Figura 7-1.

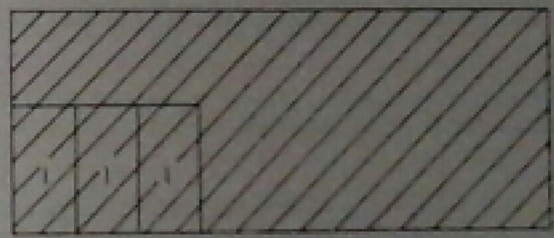
Nesta situação podemos trabalhar subdividindo algumas de nossas unidades em porções menores. Podemos usar isto para cobrir as porções expostas. Fazendo êste retalhamento devemos ter cuidado de subdividir apenas uma unidade de cada vez. Devemos usar tôdas as porções de uma unidade antes de começar a subdividir a próxima. (Por que devemos usar tôda uma unidade antes de subdividir outra unidade?)

Faça algumas unidades retangulares do tamanho usado aqui. Corte-as, uma

de cada vez, para cobrir a parte exposta da Figura 7-1. Quantas dessas unidades você usou? Teve você de deixar de lado alguma parte porque não a usou? Se teve, a parte que sobrou parece ser maior ou menor que a metade da unidade?

Se você trabalhou com um pouco de cuidado, provàvelmente terá usado três unidades completas e cortou alguma parte de outra. Se a parte não utilizada desta última unidade é maior que a metade da unidade, você escreverá a área do retângulo como aproximadamente 15 unidades, ainda que ela tenha mais de 15 mas não tanto quanto $15\frac{1}{2}$ unidades. Se a parte restante da unidade fôr menor que uma metade da unidade, é sinal de que você usou mais de meia unidade de modo que você deverá escrever que a área medida é aproximadamente 16 unidades. Embora ela não seja 16 é maior que $15\frac{1}{2}$. Quais dessas duas respostas você encontrou?

Na medida feita supusemos que o resultado não depende de como as unidades retangulares são colocadas na figura grande. Por exemplo, é improvável que todos os seus colegas de classe tenham cortado as unidades do mesmo modo ao colocar os pedaços nos bordos, embora tenhamos suposto que todos tenham obtido a mesma resposta. O fato de que a área obtida não depende do modo como colocamos as unidades na figura pode ser comprovado. Meça a mesma região retangular fechada anterior com a mesma unidade, mas coloque as unidades de tal modo que os lados maiores da unidade fiquem verticais como vemos na figura abaixo.

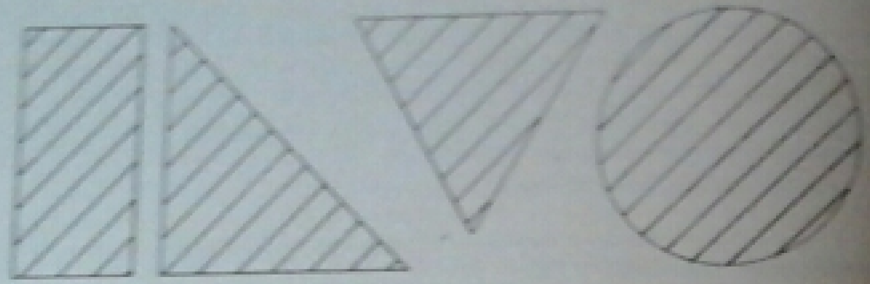


Você acha que a área do retângulo é a mesma que a encontrada anteriormente? Deveria ser? O fato de que uma quantidade contínua pode ser medida cobrindo-a com unidades de qualquer modo que você ache conveniente é muito importante. Se achássemos áreas diferentes para nosso retângulo, então um único retângulo pareceria ter dois tamanhos diferentes. Para estar de acôrdo com o fato de que quantidades contínuas da mesma espécie podem ser comparadas, aceitamos o fato de que o retângulo inteiro deve ter maior área que qualquer uma de suas partes.

Para medir esta região retangular fechada utilizamos como uma unidade de medida uma região retangular fechada menor. Poderíamos igualmente ter escolhido outra figura qualquer como unidade de área.

Exercícios 7-3

1. Copie as figuras abaixo para utilizá-las como unidades de área, e corte algumas cópias de cada uma.



a. Meça a área de uma fôlha de caderno, usando cada uma destas figuras como unidade de medida.

b. Foi difícil utilizar algumas das figuras como unidade de medida? Se foi, qual a razão?

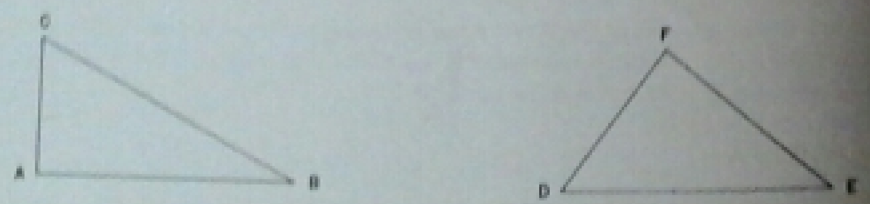
c. Foi a medida dada pelo mesmo número para duas quaisquer das figuras?

2. Se você fosse um escoteiro pròvàvelmente mediria distâncias por "passos". Qual o comprimento de sua classe quando medida por seus "passos"?

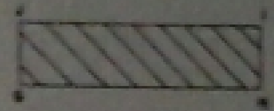
3. Poderia você medir o espaço ocupado por uma caixa determinando quantas bolinhas de gude de um certo tamanho ela contivesse? Pode pensar num objeto de forma diferente que fosse melhor para medir êste espaço?

4. PROBLEMA-DESAFIO

Observe os dois triângulos que são vistos abaixo. O ângulo CAB é um ângulo reto, $\overline{AB}$ tem o mesmo comprimento que $\overline{DE}$, e os triângulos tem alturas de mesma medida.

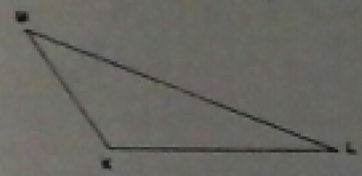


a. Copie os triângulos e recorte as regiões triangulares fechadas. Corte cada região em pedaços que possam ser reunidos para formar uma região retangular fechada como a que apresentamos abaixo, na qual CH tem o mesmo comprimento de $\overline{AB}$.



b. Recorte uma das regiões triangulares fechadas em partes que possam ser reunidas formando a outra região triangular fechada.

c. Se você achou êste problema muito fácil, tente fazê-lo de novo, quando o segundo triângulo pareça-se com êste.



7-4. Unidades Padrão de Comprimento

Na Seção 3 foram usadas unidades de medida de várias espécies. Algumas delas foram feitas de tal modo que sua unidade fosse diferente das de seus colegas de classe, embora tendo sido feitas do mesmo modo. Outras unidades que você utilizou foram as mesmas para todos na classe. Quando uma unidade é convencionada e usada por um grande número de pessoas, ela é uma unidade padrão. Você pode comprar uma régua com unidades de mesmo tamanho que as réguas de seus colegas, tão fàcilmente que pode lhe parecer estranho aprender que se levou muito tempo e que foi muito trabalhoso verificar que fazendo estas unidades iguais as coisas seriam simplificadas. Os povos primitivos tiveram pouca necessidade de uma unidade que fosse a mesma para todos. Se um troglodita gostasse de um arco que pertencesse a um seu amigo, êle poderia tomá-lo emprestado por um tempo suficiente para achar um pedaço de madeira que o igualasse. As poucas propriedades do homem primitivo podiam ser trocadas pràticamente sem levar em conta o tamanho. Com o desenvolvimento da civilização, o homem passou a ter senso de valor e o tamanho passou a desempenhar um papel importante. Se uma pessoa possuía um diamante e outra deseja trocá-lo por ouro, a primeira pessoa deseja saber se o ouro oferecido é de fato puro e se a pesagem foi feita com precisão. A história conta que o Rei Hiero de Siracusa pagou ao matemático grego Arquimedes para descobrir um meio de verificar se o ourives que confeccionou a sua nova coroa de ouro o tinha enganado. Arquimedes inicialmente achou o problema um tanto difícil mas finalmente encontrou um meio de resolvê-lo. A idéia surgiu-lhe enquanto estava tomando banho e tão entusiasmado êle ficou que saiu correndo sem roupa e exclamando "Eureka" que significa, "Eu achei". O ourives perdeu a cabeça porque um matemático achou um novo método de medida.

Esta seção lida com medidas lineares. "Linear" é um adjetivo e significa "ter à natureza de uma linha". Tôda medida de segmentos de reta é chamada medida linear. As menores unidades de medida no sistema de medidas Inglês, que é o usado nos Estados Unidos da America do Norte, originalmente foi sugerido por algumas partes do corpo. A jarda é aproximadamente a distância da parte da ponta do nariz à extremidade dos dedos quando o braço está estirado na direção dos ombros. Certamente se seu nariz coça e você dobra o braço um pouco, você modifica o tamanho de sua jarda mas para uma estimação aproximada de quanto pano de roupa você tem, esta é uma medida muito boa. Quando os meninos jogam bola de gude, êles usam uma velha medida. Quando você distende seu polegar e o dedinho tanto quanto possível, você tem uma unidade chamada um palmo. Quando Noé construiu a arca supunha-se que ela tivesse 300 cúbitos de comprimento, 50 cúbitos de largura e 30 cúbitos de altura. O cúbito era a distância do cotovelo à ponta dos dedos, e variava de 37,5 cm a 50 centímetros nas diferentes fases da história. Os marinheiros usavam uma medida denominada braça. Originàriamente êles seguravam uma corda esticada entre as pontas dos dedos estendidas para fora e davam nós nos dois lugares onde seguravam a corda. Agora a braça corresponde a cêrca de 1,80 m. Quando mediam grandes distâncias os romanos faziam a mesma coisa que fazem os escoteiros; êles mediam o número de passos que precisavam para cobrir a distância. O passo romano, entretanto, era um passo duplo. O vocábulo latino para "mil passos" é "mille passus" e da palavra "mille" para 1 000, é que veio nossa palavra "milha".

Você agora deve ter notado que as medidas do corpo variam muito nas diferentes pessoas. Êste fato levou a muitos argumentos através da história. Nos tempos primitivos, uma tribo deveria decidir-se por algum padrão e usaria o mesmo para aquele grupo. Isto funcionou bem até que alguém no grupo quis comerciar com alguém de fora do grupo que tinha um padrão próprio. Então as duas tribos precisaram lutar para decidir qual a unidade a ser utilizada. Como as medidas se tornaram mais importantes, cada país estabeleceu um conjunto de padrões para todos os seus habitantes. Estas unidades foram estabelecidas de muitos modos mas muitas delas ainda utilizam as medidas do corpo como bases de sua unidade padrão.

O rei Eduardo I tinha uma peça de ouro que era para ser a jarda oficial na Inglaterra, mas então êle lançou mão dela e guardou-a para que somente o rei e seus amigos íntimos pudessem usá-la. Conta-se que um rei da Inglaterra deu uma ordem para que seus oficiais fossem a uma certa igreja num certo domingo; tomou os primeiros dezesseis homens que saíram da igreja e colocou-os em linha reta de modo que o dedo grande do pé de um homem tocasse o calcanhar do que estava à sua frente. Êste comprimento, que foi fàcilmente medido com uma corda, foi dividido em dezesseis pedaços iguais e tornou-se o "pé" oficial na Inglaterra naquela época. Em muitos países

atos semelhantes foram feitos para que todo o povo daquele país (ou em alguns casos numa cidade) usasse a mesma medida. Uma aldeia na França tinha uma barra para reforçamentos numa praça do mercado; aquela barra era a unidade oficial de comprimento lá.

Isto ia muito bem até que alguém de um país desejou comerciar com alguém de um outro país. Desentendimentos foram tão comuns que finalmente um grupo de cientistas da França combinaram uma conferência de representantes de muitos países para estabelecer um conjunto de unidades internacionais. Êste grupo desenvolveu o sistema métrico que rejeitou as unidades do velho corpo e baseou tôdas suas unidades na distância do Polo Norte ao Equador. O metro é a unidade básica de comprimento do sistema métrico; foi tomada como sendo a décima milionésima parte da distância do Polo Norte ao Equador. Recentemente um congresso de cientistas definiu o metro em relação às ondas luminosas. Êste sistema é utilizado por todos os cientistas no mundo e é usado em comum por todos os países com exceção daquêles em que se fala a língua inglêsa.

O Bureau Nacional de Padrões em Washington tem uma cópia do metro feita com grande precisão. Esta barra é feita de platina e irídio, um metal cujo comprimento varia muito pouco sob condições atmosféricas diferentes. O congresso fez passar uma lei que estabelece que parte desta barra seria a jarda oficial nos Estados Unidos da América do Norte. Esta barra é a unidade padrão de comprimento a partir da qual tôdas as unidades de comprimento padrão nesse país são comparadas. A barra é considerada tão importante que é guardada cuidadosamente. Se um fabricante deseja construir instrumentos de medida, seus produtos devem igualar-se ao padrão oficial.

Exercícios 7-4a

1. As padarias têm um padrão para a confecção de pães? Em caso afirmativo, qual é êle?

2. São as latas de conserva de tamanhos padrão? Quais são êsses padrões, se existirem?

3. Escreva finalmente cinco artigos que sejam vendidos comumente como alguma espécie de unidade padrão. Descreva a unidade padrão para cada um dêles.

Você tem usado diferentes espécies de unidades para medir segmentos de reta e regiões fechadas no plano e no espaço. Entre outros, você usou o comprimento da secção média de seu dedo, o comprimento de seu pé, uma fôlha de caderno e bolinhas de gude. Do trabalho que você fêz com estas, você poderia ter sugerido as seguintes idéias:

1. O tamanho de uma unidade de medida foi feito por alguém.

3. Quando uma grande quantidade de pessoas resolve usar a mesma unidade, a unidade transforma-se em unidade padrão.

A polegada foi sugerida a partir do comprimento da seção de um dedo e o pé foi sugerido do comprimento do pé de alguém. Você achou também que sua "polegada" difere das de seus colegas, e o mesmo acontece com seu "pé". A unidade que chamamos polegada poderia ser maior ou menor e ainda ser uma unidade de comprimento. Por convenção, todos que utilizam o sistema de medidas inglesas, usam a unidade de comprimento padrão, um "pé" e um doze avos dêste comprimento como uma "polegada".

Exercícios 7-4b

1. Utilize um pedaço de metal ou cartão com um bordo reto e faça uma régua de 4 cm com divisões de cada centímetro.

2. Faça mais duas réguas de 4 centímetros, subdividindo uma com intervalos de $\frac{1}{4}$ de centímetro e a outra em intervalos de $\frac{1}{8}$ de centímetro.

Utilize o símbolo $\approx$ em suas respostas dos Problemas de 3 a 5.

3. Meça cada um dos segmentos com aproximação de cada centímetro, usando a régua feita no Problema 1.

a. ____________________

b. ____________________

c. ____________________

d. ____________________

e. ____________________

4. Meça cada um dos segmentos de reta acima com aproximação de $\frac{1}{4}$ de centímetro usando sua régua aferida em $\frac{1}{4}$ de centímetro.

5. Meça cada um dos segmentos de reta acima com aproximação de $\frac{1}{8}$ de centímetro usando sua régua aferida em $\frac{1}{8}$ de centímetro.

6. Meça cada um dos segmentos de reta acima utilizando a seção média de seu dedo médio.

7. Que unidade utilizada lhe deu um resultado mais satisfatório? Por que?

A Régua e a Reta Numérica

Nos capítulos anteriores trabalhamos com a reta numérica. Medir segmentos pode ser considerado como comparar os segmentos que devem ser medidos com a reta numérica. Realmente, a régua que usamos é parte de uma reta numérica na qual a unidade é o centímetro. A parte da reta numérica que aparece na régua começa no zero e vai geralmente até 30 cm. Quando trabalhamos pela primeira vez com a reta numérica colocamos nela apenas os números naturais. Quando aprendemos quais eram os números racionais, incluímo-los na reta numérica. Algumas réguas utilizadas por crianças muitas vêzes usam apenas centímetros e $\frac{1}{2}$ centímetros, como a primeira régua de cartão que você fêz. Quando as crianças crescem elas podem entender réguas com divisões menores. A maioria das réguas que usamos apresenta cada centímetro dividido em 10 partes iguais. Quando medimos um segmento de reta, comparamos o comprimento do segmento com a reta numérica gravada na régua.

Exercícios para serem realizados em classe

Observe com atenção para a construção da régua da figura abaixo.

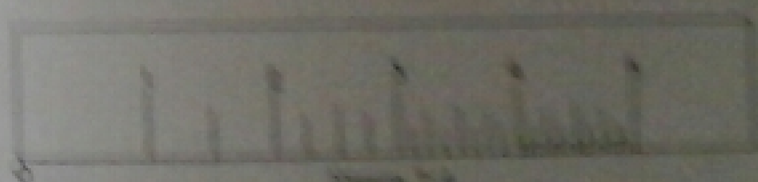


Figura 7-4.

Esta régua está dividida em 10 unidades iguais denominadas polegadas. Parte dela é mostrada na Figura 7-4. O espaço entre as extremidades da figura tem o comprimento de cinco polegadas.

1. Por que é necessário dividir as unidades?

2. Como está dividida a polegada entre 1 e 2?

3. Como estão divididas as outras polegadas?

4. Quantas divisões menores que aquelas mostradas são necessárias e como são elas obtidas?

5. Quantas divisões existem na terceira polegada? Na quarta? Na quinta?

6. Observando a régua, como pode você dizer quais divisões foram feitas primeiro?

7. Ajudam de algum modo os segmentos maiores?

8. Quantas divisões é possível colocar entre duas quaisquer das menores divisões em sua régua?

Se você sente dificuldade em usar uma régua, estude as questões acima cuidadosamente e examine ou a figura ou sua própria régua enquanto você responde as questões.

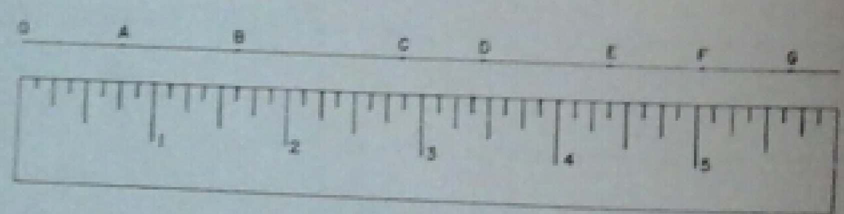
Uma régua ou qualquer outro instrumento, não tem utilidade para você a menos que você a saiba usar. Uma régua apresenta duas utilidades: (1) Uma régua pode ser usada para traçar a representação de uma linha reta. (2) Uma régua é usada para medir distâncias em têrmos de uma unidade padrão, tal como o centímetro.

Um modo de usar a régua para medir uma distância é colocar o ponto zero da régua numa extremidade do segmento, a régua cuidadosamente ao lado do segmento de reta e ler o número do ponto da régua que se emparelha ao outro extremo do segmento. A menos que sua régua tenha um pequeno espaço à esquerda do ponto zero, êste não será o melhor modo de usar sua régua porque a maioria das réguas tem o canto gasto, faltando uma parte do primeiro centímetro. Uma medida melhor é feita emparelhando o extremo à esquerda do segmento de reta com algum traço na régua, medindo a distância à extremidade à direita do segmento e subtraindo a distância à esquerda do primeiro traço que foi usado. Qual é um ponto conveniente para usar na extremidade à esquerda do segmento?

Exercícios 7-4c

1. Se a sexta polegada na Figura 7-4 fosse a última, quantas divisões teria?

2.



Que ponto da régua está abaixo de cada um dos pontos A até G, no segmento de reta.

3. Qual é o comprimento:

a. $\overline{AB}$?   b. $\overline{AC}$?   c. $\overline{CD}$?   d. $\overline{DF}$?   e. $\overline{FG}$?

4. a. Desenhe um segmento de 5 centímetros de comprimento e divida-o em seções de $\frac{5}{8}$ cm de comprimento cada.

b. Divida 5 por $\frac{5}{8}$.

c. Há alguma relação entre as partes (a) e (b) dêste problema?

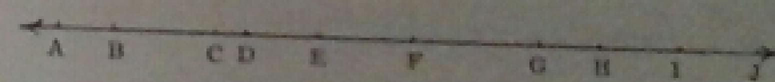
5. a. Desenhe um segmento de reta em sua fôlha de papel e represente êstes segmentos nela de tal modo que o extremo esquerdo de um coincida com o extremo à direita do anterior.

$2\frac{1}{2}$ cm, $1\frac{1}{4}$ cm, $\frac{5}{8}$ cm, $\frac{5}{16}$ cm

b. Qual é o comprimento total dêstes segmentos? Leia esta resposta em sua régua.

c. Confira sua resposta pela adição.

6. Com sua régua, meça os segmentos indicados na reta abaixo:



a. $\overline{AB}$ e. $\overline{EF}$

b. $\overline{BE}$ f. $\overline{EJ}$

c. $\overline{AJ}$ g. $\overline{GH}$

d. $\overline{CG}$ h. $\overline{IJ}$

7. a. Na reta do Problema 6, meça cada um dos seguintes, se você ainda não o houver feito: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$ e $\overline{IJ}$

b. Adicione tôdas estas medidas e compare com a resposta em 6 (c) para verificar se elas coincidem.

8. Escreva as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{16}$ como frações ordinárias na base dois

*9. Há alguma relação entre a divisão de uma régua e a base 2?

Existem muitas unidades padrão de comprimento, tais como, o centímetro, a polegada, o pé, a milha. Assim como há muitos nomes para o mesmo número racional como $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{10}{15}$, há muitos nomes para o mesmo comprimento, tais como 2 pés, 24 polegadas e $\frac{2}{3}$ de jarda. É importante saber mudar o nome de uma medida de um para o outro. Para mudar êstes nomes, é necessário saber a relação existente entre as unidades. É também necessário considerar o sentido do símbolo " = ". Até aqui êste símbolo foi usado para mostrar diferentes nomes para o mesmo comprimento. Quando trabalhamos com medições, êste também é o significado do sinal de igual. Com isto em mente, podemos escrever 2 pés = 24 polegadas.

Que entendemos por "2 polegadas + 3 polegadas"? Sabemos adicionar números, mas "adicionar comprimentos" é algo diferente. Suponha que temos dois segmentos de comprimentos 2 e 3 centímetros. Suas medidas, em centímetros, são 2 e 3. Marque êstes segmentos de reta em uma reta de modo que êles tenham um ponto em comum. Obtemos um segmento cuja medida, em centímetros é 5 e cujo comprimento é 5 centímetros. Realmente, a adição é feita com os números 2 e 3. Isto é o que queremos significar com

2 centímetros + 3 centímetros = 5 centímetros

O símbolo + como foi usado acima tem sentido diferente daquele que usamos em 2 + 3 = 5.

De modo análogo, damos sentido a

5 centímetros - 3 centímetros = 2 centímetros

A operação é realmente feita com os números.

Sabemos que 2 x 3 significa 3 + 3. Anàlogamente por 2 (3 centímetros) entendemos 3 centímetros mais 3 centímetros.

Como exemplo, consideremos problemas que envolvam mudança de unidade de polegadas para pés e pés para polegadas. Inicialmente, trabalharemos com o problema de transformar 60 polegadas em pés. Sabemos o fato básico de que 12 polegadas = 1 pé. Isto significa que 1 polegada = $\frac{1}{12}$ do pé, isto é, 1 polegada e $\frac{1}{12}$ pé são nomes diferentes para o mesmo comprimento. Podemos escrever o problema como uma sentença numérica. Abreviamos as unidades inglesas do seguinte modo:

1 pé = 1 ft (foot em inglês)
1 polegada = 1 in (inch em inglês)
1 jarda = 1 yd (yard em inglês)
1 milha = 1 mi (mille em inglês)

60 polegadas = __?__ pés. Do significado de medida, 60 polegadas é 60 . 1 polegada. Com isto em mente, a sentença numérica pode ser reescrita como 60 . 1 polegada = __?__ pés.

Como uma polegada e $\frac{1}{12}$ do pé, são nomes diferentes para o mesmo comprimento, podemos substituir 1 in por $\frac{1}{12}$ ft. Então, 60. $\frac{1}{12}$ ft = __?__ ft.

Agora os cálculos no lado esquerdo da sentença numérica podem ser feitos e vemos que 60 in = 60(1 in) = 60($\frac{1}{12}$ ft.) = $\frac{60}{12}$ ft = 5 ft.

O mesmo raciocínio é utilizado quando transformamos 50 pés em polegadas. O fato básico é o mesmo, portanto 50 pés = 50 (1 pé) = 50 (12 polegadas) = 600 polegadas.

O senso comum também ajuda a comprovar se as respostas são razoáveis. Se as unidades usadas em medição são pequenas, elas serão tomadas em maior número para efetuar uma medição dada, do que quando tomamos uma unidade maior. Comprove sempre suas respostas para ver se elas são razoáveis.

A maioria das relações básicas necessárias em conversões (ou substituir o nome de) de unidades são conhecidas de você. A tabela das medidas lineares comuns é também dada aqui:

12 polegadas = 1 pé
36 polegadas = 1 jarda
3 pés = 1 jarda
5 280 pés = 1 milha

Exercícios 7-4d

Quando fizer medições, use o símbolo ≈.

1. Dê, naturalmente, dez passos, meça a distância desde a primeira marca de seu artelho até a última marca do mesmo e divida-a por dez para achar o comprimento de seu passo. Expresse êste comprimento em polegadas e em pés.

2. Utilize uma régua aferida em milímetros para medir cada um dos segmentos abaixo:

a. ____________________

b. ___________________________

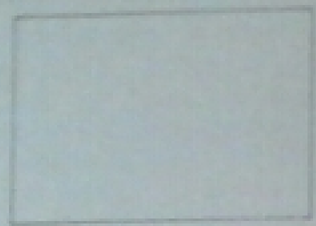
c. __________________

d. ______________________________

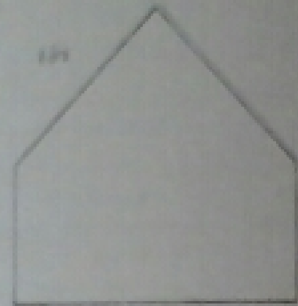
e. _________________________

3. Determine o comprimento total de cada uma das seguintes curvas fechadas simples medindo cada segmento e adicionando tôdas as medidas.

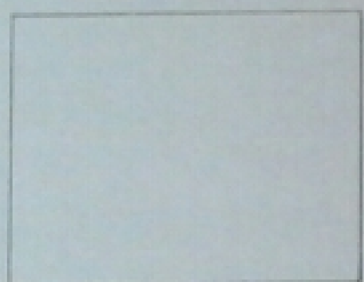
(a)



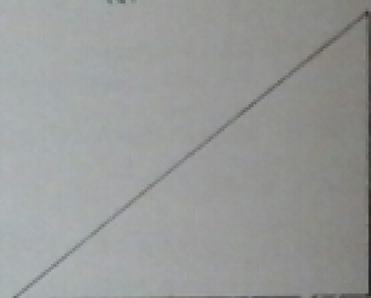
(b)



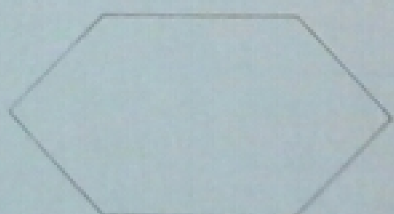
(c)



(d)



(e)



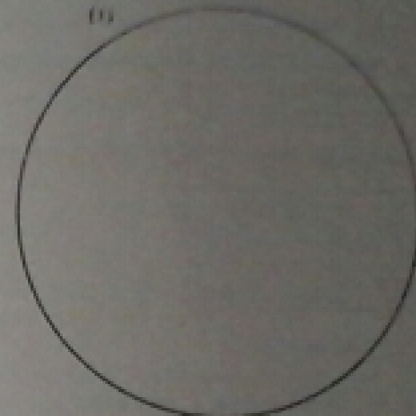
(f)

4. a. No Problema 3 você usou uma régua. Pode você medir o comprimento de cada uma das curvas fechadas seguintes do mesmo modo?

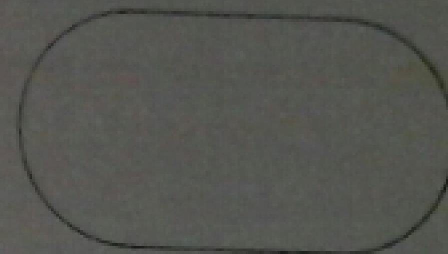
b. Pode você pensar num processo de medida de comprimento utilizando-se de um barbante?

c. Meça o comprimento de cada uma das curvas fechadas abaixo:

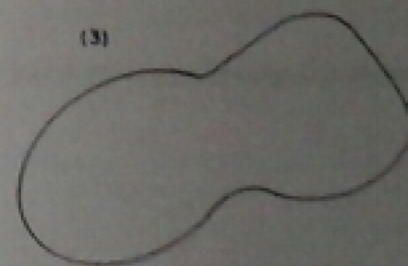
(1)



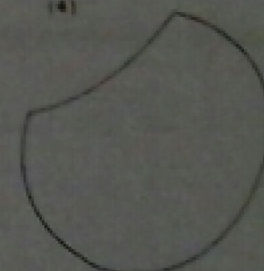
(2)



(3)



(4)



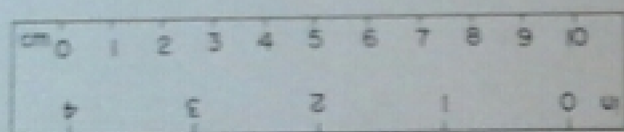
5. a. Use 18 polegadas como comprimento de um cúbito e determine as dimensões da Arca de Noé. Você poderá achar as dimensões em cúbitos à página 240.

b. Dê as dimensões da Arca de Noé em pés e também em jardas.

*2. Utilize um almanaque para achar o comprimento de alguns navios modernos. Como êles podem ser comparados com os comprimentos da referida Arca de Noé?

Outra Espécie de Régua

Na primeira parte desta seção aprendemos que o metro é a unidade de comprimento básica no Sistema Métrico. Entretanto, torna-se frequentemente conveniente usar outra unidade de medida para medir comprimentos que são menores que o metro. Esta unidade é o centímetro. O centímetro é $\frac{1}{100}$ do metro. Talvez você ganhe uma régua comercial com um bordo rotulado em polegadas e o outro em centímetros. Se não, a seguinte figura o ajudará a comparar as duas unidades.



1 centímetro = $\frac{1}{100}$ do metro

Um comprimento 100 vêzes o comprimento de um centímetro é um metro.

Exercícios para serem resolvidos em Classe

1. Use uma tira de cartão ou metal, com um lado reto para fazer uma régua de 10 centímetros.

2. Meça cada uma dos segmentos de reta seguintes até o centímetro mais próximo:

 a. ____________________

 b. __________________________

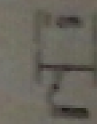
 c. __________________

 d. ______________________________

3. Determine o comprimento total em centímetros das curvas fechadas simples do Problema 4 dos Exercícios 7-4d

---

Sob muitas condições de laboratório é freqüentemente necessário utilizar uma unidade de medida menor que o centímetro. Para êsses fins, os cientistas usam uma unidade cuja medida é $\frac{1}{10}$ de do centímetro, chamada um milímetro. Note que $\frac{1}{10}$ x $\frac{1}{100}$ de um metro é $\frac{1}{1000}$ do metro. O prefixo "mili" significa um milésimo. A figura seguinte ajudará você a ver a que uma unidade do milímetro se assemelha. Ela é obtida dividindo um centímetro em 10 partes iguais. Cada uma destas partes é chamada um milímetro.



1 milímetro = $\frac{1}{10}$ do centímetro = $\frac{1}{1000}$ do metro. Um comprimento 1000 vêzes o tamanho de um milímetro é um metro.

Exercícios para serem Resolvidos em Classe 7-4f

Use uma régua comercial graduada em milímetros para realizar as atividades neste conjunto de exercícios.

1. Meça (em milímetros) cada um dos segmentos de reta no Problema 2 dos Exercícios 7-4e.

2. Determine o comprimento total em milímetros das curvas simples fechadas do Problema 3 dos Exercícios 7-4d.

3. a. Desenhe um segmento de reta de comprimento 1 polegada

 b. Meça êste segmento com régua em centímetros. Cêrca de quantos centímetros há em uma polegada?

 c. Meça o comprimento de uma polegada em milímetros. Cêrca de quantos milímetros há em uma polegada?

7-5. Precisão de uma Medida e o Maior Êrro Possível

Fazendo os Problemas 3-6 nos Exercícios 7-4b, você achou medidas diferentes para o mesmo segmento quando você usou réguas com divisões de diferentes tamanhos. Você fez réguas aferidas em polegas, em $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$ cm $\frac{1}{8}$ cm e em centímetros. Se você medir um segmento com uma régua que é graduada em intervalos de $\frac{1}{10}$ cm, sua medição deveria ser mais próxima do comprimento real do segmento de reta do que quando você usa qualquer das réguas que você fez. Você pode comprar réguas que estão graduadas em $\frac{1}{32}$ ou mesmo $\frac{1}{64}$ de uma polegada. Como estas devem ser feitas com muita exatidão tornam-se muito caras em geral não são usadas. Se você usou uma destas réguas para medir o mesmo segmento, você deve concluir que a medida que achou anteriormente não era igual à achada agora. Quando você trabalha com uma régua graduada em centímetros, você deve dar sua resposta apenas aproximada até o último centímetro inteiro. Se sua régua é graduada em $\frac{1}{2}$ centímetro você pode medir com aproximação de $\frac{1}{2}$ centímetro. Com que precisão você pode medir com uma régua aferida em $\frac{1}{8}$ cm?. E com uma régua aferida em $\frac{1}{16}$ cm?

<u>Exercícios para discussão em Classe 7-5a.</u>

Volte aos Exercícios 7-4b.

1. Use sua régua em metade de polegada para medir o segmento (b) no Problema 3.

2. Use sua régua graduada em $\frac{1}{4}$ de polegada para medir o mesmo segmento de reta.

3. Use sua régua graduada em $\frac{1}{8}$ de polegada para medir êste segmento de reta.

4. Meça o segmento (b) utilizando a régua com divisões de $\frac{1}{16}$ de polegada.

5. Foram iguais os resultados das medidas com as subdivisões em diferentes tamanhos?

6. Repita os Problemas 1-5 para o segmento (c).

   Sua resposta ao Problema 1 deveria ter sido $3\frac{1}{2}$ polegadas. Isto significa que o extremo à direita de segmento de reta está mais próximo do traço $3\frac{1}{2}$ polegadas que dos traços 3 polegadas ou 4 polegadas. No Problema 2 você provàvelmente não estava certo se disse $3\frac{1}{4}$ ou $3\frac{1}{2}$ polegadas porque a extremidade do segmento parecia estar na posição média entre os traços $3\frac{1}{4}$ e $3\frac{1}{2}$

7. Preencha os espaços vazios. No Problema 3 o extremo à direita do segmento está mais próximo de _?_ do que _?_ ou ___.

   A medida é aproximadamente _?_ centímetros.

Embora você tenha medido o mesmo segmento nos Problemas de 1 a 5 acima, seus resultados foram diferentes. Estas diferenças ocorreram porque você estava usando diferentes subdivisões da unidade quando fez as medidas. A medida no Problema 1 é dita de aproximação de $\frac{1}{2}$ polegada. No Problema 2 é dita ter a aproximação de $\frac{1}{4}$ de polegada. No Problema 3 a aproximação de $\frac{1}{8}$ de polegada, enquanto que no Problema 4, a aproximação foi de $\frac{1}{16}$ de polegada. A precisão depende do tamanho da menor subdivisão usada no instrumento de medida.

Dizemos que:

medida por aproximação de $\frac{1}{2}$ cm é mais precisa que medida por aproximação de 1 cm

medida por aproximação de $\frac{1}{4}$ de polegada é mais precisa que medida por aproximação de $\frac{1}{2}$ cm

e assim por diante.

Certamente, qualquer pessoa pode cometer um engano ao ler os traços na régua ou pode ser descuidado em colocá-la ao lado do segmento que está sendo medido, isto não é o que se entende por precisão de medida.

Escrevamos os intervalos de subdivisão na ordem em que são usados nos países de lingua inglesa,

1 polegada, $\frac{1}{2}$ polegada, $\frac{1}{4}$ polegada, $\frac{1}{8}$ polegada, $\frac{1}{16}$ polegada, ...

e observamos os denominadores das frações,

1, 2, 4, 8, 16

Note que os

denominadores crescem na direção $\longrightarrow$ e a precisão de medidas cresce na direção $\longrightarrow$

A idéia de precisão de medida está relacionada com a idéia dos denominadores crescentes.

Uma régua graduada em $\frac{1}{4}$ de polegada dá maior precisão que uma graduada em $\frac{1}{2}$ de polegada.

Uma régua graduada em $\frac{1}{8}$ de polegada dá maior precisão que uma graduada em $\frac{1}{4}$ de polegada.

Suponha que você queira medir a espessura de um cabelo. Usaria para isso uma régua graduada em cm? Em $\frac{1}{8}$ cm ? Em $\frac{1}{16}$ cm? Você provàvelmente dirá que êstes instrumentos de medida são muito "grosseiros", que você precisará de um instru mento mais elaborado. Dizemos que necessitamos um instrumento mais preciso. Você sabe o que é um "instrumento de precisão"?. O têrmo se aplica a uma grande varieda- de de instrumentos que são feitos com muito cuidado e com os quais podem ser feitas medidas "delicadas". Êste cuidado é essencial se o instrumento é para ser utilizado em medidas muito precisas. Se muitas medidas precisas são necessárias para fazer uma máquina funcionar convenientemente, essa máquina é também chamada instrumento de precisão. Um relógio é um instrumento de precisão. O automóvel da família é outro; êle não funcionaria muito bem se um dos cilindros fosse $\frac{1}{16}$ de polegada maior que os demais;de modo análogo, nem mesmo o pistão entraria no cilindro se êste diferisse dos demais por aquela quantidade. Os mecânicos muitas vêzes fazem a medição com aproxi- mações, de milésimos ou décimos de milésimos de centímetro. Esta é uma dimensão tão pequena que seu ôlho não pode perceber, mas há instrumentos com os quais tais compri- mentos ou espessuras podem ser percebidos. Um instrumento de precisão desta nature- za é o micrômetro estampado na Figura 7-5a. Talvez algum de seus colegas possa tra- zer um e mostrar como funciona.

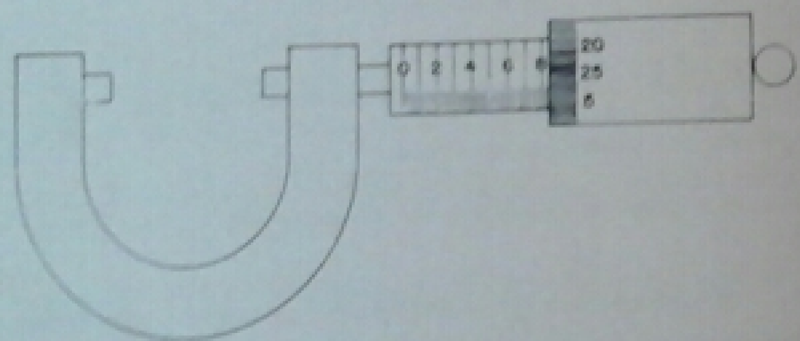


Figura 7-5a

Suponha que usemos um processo para subdividir um centímetro de acôrdo com a idéia de um cientista e diretamente relacionada ao nosso sistema decimal. O proces- so seria algo parecido com o seguinte :

A. Comece com um centímetro. $\frac{1}{1}$ cm

B. Divida-o em 10 partes iguais. Assim, cada parte seria $\frac{1}{10} \times (1 \text{ cm}) =$ $\frac{1}{10}$ cm

C. Divida a nova unidade $\frac{1}{10}$ cm em 10 partes iguais. Cada nova parte será $\frac{1}{10} \times (\frac{1}{10} \text{ cm}) =$ $\frac{1}{100}$ cm

D. Divida a nova unidade $\frac{1}{100}$ cm em 10 partes iguais. Cada nova parte será $\frac{1}{10} \times (\frac{1}{100} \text{ cm}) =$ $\frac{1}{1000}$ cm

E. Divida a nova unidade $\frac{1}{1000}$ cm em 10 partes iguais. Cada nova parte será $\frac{1}{10} \times (\frac{1}{1000} \text{ cm}) =$ $\frac{1}{10\,000}$ cm

Êste é exatamente o procedimento que o técnico segue na construção da esca- la num micrômetro como aparece na Figura 7-5a. Suponha que temos uma régua subdi- vidida de acôrdo com êste plano. Se usamos apenas marcas de $\frac{1}{10}$ cm medimos com aproximação de $\frac{1}{10}$ de centímetro. Se usarmos divisões de $\frac{1}{100}$ cm mediremos com a- proximação de $\frac{1}{100}$ cm. Suponha que arranjemos os denominadores de nossas frações na ordem crescente.

Temos:

1 10 100 1000 10 000

Note que

denominadores crescem na direção $\longrightarrow$

precisão de medidas cresce na direção $\longrightarrow$

Aqui também você vê que a idéia de precisão de medidas está relacionada com a idéia do crescimento dos denominadores.

Quando usamos partes fracionárias de uma unidade,maior precisão na medi- da é obtida pelo uso de uma subdivisão cuja fração tenha um maior denominador.

Uma régua graduada em $\frac{1}{100}$ cm dá maior precisão que uma régua gradua- da em $\frac{1}{10}$ cm.

Uma régua graduada em $\frac{1}{1000}$ cm dá maior precisão que outra graduada em $\frac{1}{100}$ cm, etc.

A discussão precedente deixa claro que à medida que progredimos para unida- des menores de medida na régua,obtemos melhor precisão nas medidas. Medições fei- tas com uma régua graduada em $\frac{1}{8}$ polegada são mais precisas que aquelas feitas com uma régua graduada em $\frac{1}{4}$ polegada. Pela mesma razão, medidas são ditas mais precisas se a régua fôr graduada em:

polegadas	que se graduada em	pés
pés	que se graduada em	jardas
jardas	que se graduada em	varas
varas	que se graduada em	milhas

Pela mesma razão medições serão exatas se a régua fôr graduada em:

milímetros	que se graduada em	centímetros
centímetros	que se graduada em	metros

Como podemos representar uma medida para que qualquer pessoa ao observá-la possa dizer quão precisa é ela? Um modo muito simples — não mude as frações para os têrmos mais baixos. Se você medir com uma régua que fôr graduada em $\frac{1}{16}$ de polegada e você estiver usando tôdas as divisões, sua resposta deve ser expressa em $\frac{1}{16}$ de polegada. Por exemplo, se um comprimento é achado como sendo $2\frac{1}{2}$ polegadas, você precisaria escrevê-lo como $2\frac{8}{16}$ polegadas. Certamente, se você mede sòmente por aproximação de $\frac{1}{8}$, a resposta deveria ser escrita $2\frac{4}{8}$ polegadas. Êste método é usado mesmo quando a medição aparece como sendo um número inteiro; 2 polegadas poderia ser escrito como $2\frac{0}{16}$ polegadas, ou como $2\frac{0}{8}$ polegadas, dependendo do tamanho da unidade que está sendo usada. Êste método de informar indica a precisão da medida. Assim $2\frac{8}{16}$ polegadas indica uma medida feita com uma aproximação de $\frac{1}{16}$ de polegada.

<u>Exercícios para discussão em Classe 7-5b</u>

1. Se você usa régua graduada em $\frac{1}{8}$ de polegada para medir um segmento,
   a. Você estará medindo com aproximação de ____ polegadas.
   b. Poderia a medida ser dada por $3\frac{7}{8}$ polegadas?
   c. Poderia a medida ser dada por $3\frac{14}{16}$ polegadas?
   d. Qual é a precisão da medida obtida com uma régua graduada em $\frac{1}{8}$ de polegada?

2. Que significaria uma medida de $3\frac{14}{16}$ polegadas em têrmos de precisão?

3. Se você usa régua graduada em $\frac{1}{16}$ polegadas para medir um segmento,
   a. Você está medindo com aproximação de __?__ polegadas
   b. Se sua medida é dada como $2\frac{10}{16}$ polegadas, poderia êste número ser escrito $2\frac{5}{8}$ polegadas? Por que?
   c. Qual a precisão da medida obtida?

4. Qual daria uma medida mais precisa, uma régua graduada em $\frac{1}{8}$ de polegada ou uma régua graduada em $\frac{1}{16}$ de polegada?

Agora que temos alguma noção de precisão de medidas, poderemos considerar outra idéia que nos auxiliará ter melhor compreensão. Suponha que você está usando uma régua graduada em polegadas e que você ache a medida como sendo 2 polegadas. Isto significa que o extremo à direita do segmento está entre $1\frac{1}{2}$ polegadas e $2\frac{1}{2}$ polegadas. Qual é a maior diferença possível entre o comprimento real do segmento e sua resposta? Pode esta diferença ser maior que $\frac{1}{2}$ polegada? O diagrama seguinte mostra que quando o extremo à direita está em A ou B a diferença entre os extremos e o traço 2 não é maior que $\frac{1}{2}$ polegada.

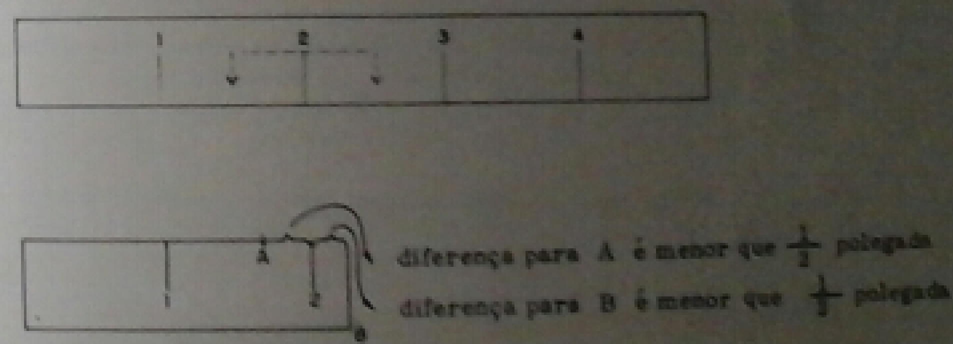


Figura 7-5b.

<u>Exercícios para discussão em Classe 7-5c</u>

1. Se sua régua fôr graduada em $\frac{1}{2}$ polegada, a maior diferença possível entre o comprimento verdadeiro e a medida será __?__ polegada.

2. Se sua régua fôr graduada em $\frac{1}{8}$ de polegada, a maior diferença possível será __?__ polegada.

A maior diferença possível entre o comprimento real de um segmento e a medida estabelecida é chamada de <u>êrro máximo possível.</u> Se você escreve uma medida com $2\frac{3}{8}$ polegadas o comprimento real está entre $2\frac{5}{16}$ polegadas e $2\frac{7}{16}$ polegadas. O êrro máximo possível é $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{8})$ polegada ou $\frac{1}{16}$ polegada.

3. a. Faça um diagrama de uma régua semelhante ao desenho da Figura 7-5b, sòmente graduando em $\frac{1}{2}$ cm.

   b. Mostre neste diagrama um segmento cuja medida poderia ser escrita $2\frac{1}{2}$ cm.

   c. Indique o êrro máximo possível ao graduar um segmento.

4. Usando uma régua graduada em $\frac{1}{4}$ cm, o êrro máximo possível é ___?___ cm.

5. Quando usamos uma régua graduada em $\frac{1}{16}$ de polegada, o êrro máximo possível é ___?___ polegadas.

6. Suponha que as seguintes medidas são escritas corretamente (isto significa que mesmo que seja possível as frações não devem ser simplificadas). Preencha o espaço em branco como mostra o exemplo.

	Medida	Precisão da medida	Êrro máximo possível
a.	$3\frac{2}{4}$ in	aproximação $\frac{1}{4}$ in	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ in $= \frac{1}{8}$ in
b.	$1\frac{15}{16}$ in		
c.	$4\frac{3}{8}$ in		
d.	$2\frac{6}{8}$ in		
e.	$3\frac{10}{16}$ in		
f.	$7\frac{4}{8}$ in		
g.	$2\frac{3}{32}$ in	aproximação $\frac{1}{32}$ in	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{32}$ in $= \frac{1}{64}$ in

No Problema 6a. acima o êrro máximo possível é $\frac{1}{8}$ in. Isto não

deve significar que você tenha cometido um engano (ou que você não tenha cometido um engano) mas, que a medida real está entre $(3\frac{2}{4} - \frac{1}{8})$ polegada e $(3\frac{2}{4} + \frac{1}{8})$ polegada. A medida real está entre $3\frac{3}{8}$ polegadas e $3\frac{5}{8}$ polegadas.

7. Para cada medida dada no Problema 6, estabeleça entre que dois comprimentos está a medida. A resposta para a parte (a) poderia ser escrita:

$(3\frac{2}{4} - \frac{1}{8})$ in ou $3\frac{3}{8}$ in e $(3\frac{2}{4} + \frac{1}{8})$ in ou $3\frac{5}{8}$ in

A medida para a parte (g) poderia ser escrita:

O comprimento real está entre $(2\frac{3}{32} - \frac{1}{64})$ in e $(2\frac{3}{32} + \frac{1}{64})$ in

O comprimento real está entre $2\frac{5}{64}$ in e $2\frac{7}{64}$ in.

<u>Exercícios 7-5a.</u>

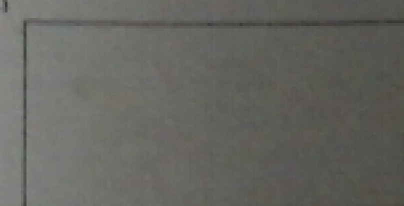
1. O êrro máximo possível é que parte fracionária da menor divisão usada no instrumento da medida?

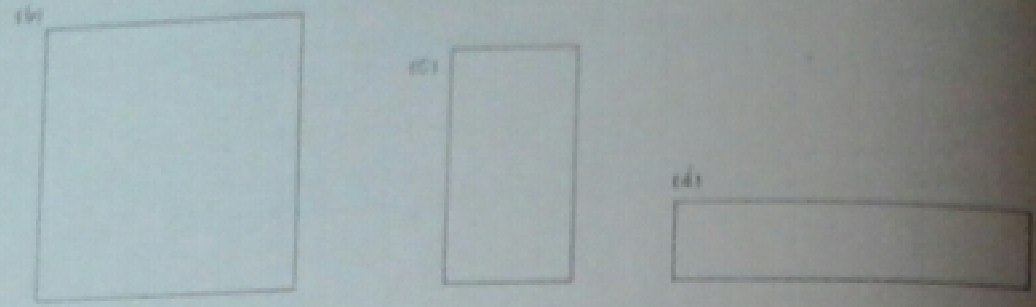
2. Desenhe um segmento de 2 polegadas de comprimento e divida-o de tal modo que possa ser usado para mostrar a exatidão da medida de $\frac{1}{8}$ in.

3. Desenhe um segmento de 2 polegadas de comprimento e divida-o de tal modo que possa ser usado para apresentar um êrro máximo possível de $\frac{1}{8}$ de polegada.

4. Meça o comprimento e a largura de cada uma das seguintes figuras (1) com aproximação de $\frac{1}{2}$ cm; (2) com aproximação de $\frac{1}{8}$ cm; (3) com aproximação de $\frac{1}{16}$ cm. Em cada caso dê o êrro máximo possível.

(a)





5. Um retângulo tem um comprimento de 4 cm e uma largura de 3 cm. Cada medida é dada com uma exatidão de $\frac{1}{2}$ cm.

a. Desenhe um retângulo usando os segmentos de comprimento máximo possível que têm estas medidas.

b. No interior do retângulo (a) desenhe um retângulo que tenha segmentos de comprimentos mínimos possíveis com estas medidas.

6. Um quadrado tem lados de $3\frac{1}{2}$ cm com um êrro máximo possível de $\frac{1}{8}$ cm.

a. Desenhe o maior quadrado cujo lado tenha esta medida.

b. No interior do primeiro quadrado, desenhe o mínimo quadrado com esta medida.

Outro modo de indicar o êrro máximo possível é muitas vêzes usado em oficinas e por engenheiros. Para isto precisamos um novo símbolo, um sinal de mais sôbre um sinal de menos "$\pm$", que lemos "mais ou menos". Por exemplo, se a régua é graduada em $\frac{1}{16}$ cm e você usa tôdas as divisões, um segmento de reta de 2 cm de comprimento seria escrito como "$2 \pm \frac{1}{32}$ cm. Isto significa que o segmento pode ter um comprimento de $2\frac{1}{32}$ cm ou de $1\frac{31}{32}$ cm e ainda tem o nome de "2 cm". Observe a Figura 7-5b para tornar o significado desta notação claro. Note que ambas as medidas, 2 cm, e o êrro máximo possível, $\frac{1}{32}$ cm, aparecem nesta notação. Como o êrro máximo possível é metade do tamanho da subdivisão da régua usada, o tamanho da subdivisão é duas vêzes o êrro máximo possível. Portanto, para nosso exemplo, o tamanho da unidade de medida na régua é $2(\frac{1}{32})$ cm = $\frac{1}{16}$ cm. A medida é exata por aproximação de $\frac{1}{16}$ cm.

Exercícios 7-5b.

1. Desenhe uma reta e marque nela uma escala com divisões de $\frac{1}{4}$ de polegada. Represente o zero por C, coloque um ponto entre $1\frac{2}{4}$ polegada e $1\frac{3}{4}$ polegada mas mais próximo de $1\frac{3}{4}$ polegada, e chame-o ponto D. Qual o comprimento de $\overline{CD}$ com aproximação de $\frac{1}{4}$ de polegada?

2. Expresse o comprimento de $\overline{CD}$ usando a notação do êrro máximo possível.

3. Escreva o comprimento de $\overline{CD}$ usando a notação de precisão para mostrar que o tamanho das divisões na reta que você desenhou.

4. Entre que dois pontos na escala deve ficar D, se a medida, com aproximação de $\frac{1}{4}$ in, é $1\frac{3}{4}$ in? Qual a distância do ponto $1\frac{3}{4}$ in a cada um dêsses pontos?

5. a. A medida de um segmento de reta foi estabelecida como $1\frac{3}{8}$ in. Êste segmento deve ter sido medido com aproximação _?_ de polegada.

b. A extremidade de um segmento deve cair entre _?_ e _?_.

c. O êrro máximo possível na medida dêste segmento é _?_ .

d. Expresse esta mesma medida usando outro tipo de notação.

6. a. A medida de um segmento de reta foi dado por $(2\frac{1}{4} \pm \frac{1}{16})$ cm. Êste segmento deve ter sido medido com aproximação _?_

b. O extremo do segmento deve ter caído entre _?_ e _?_.

c. O êrro máximo possível na medida dêsse segmento é _?_.

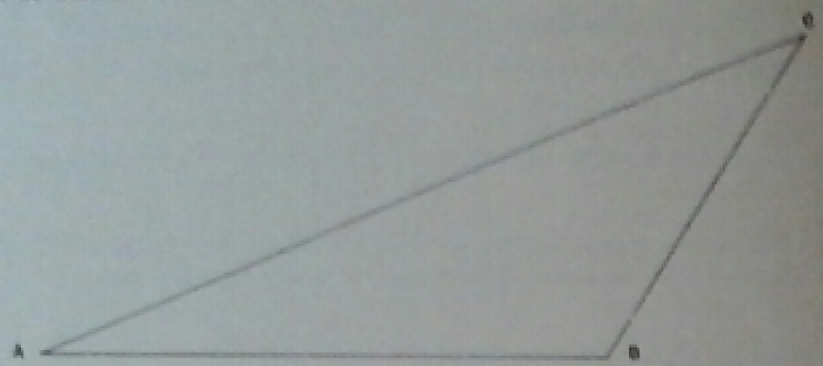
d. Expresse a medida em (a) de outro modo.

7. Meça o comprimento de seu caderno e expresse a medida usando a idéia do êrro máximo possível para indicar o tamanho das divisões em sua régua.

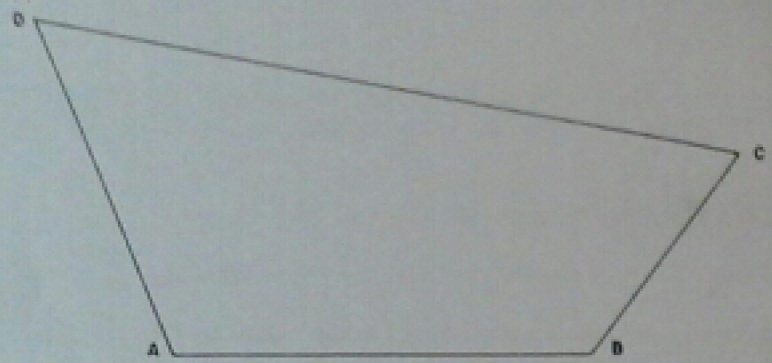
8. Meça o comprimento de seu caderno e expresse a medida usando a idéia de precisão para indicar o tamanho das divisões de sua régua.

9. Meça o comprimento de cada lado do triângulo a seguir e expresse sua res-

posta de dois modos diferentes.



10.

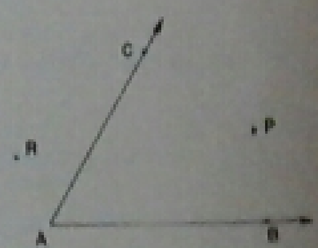


Meça o comprimento de cada lado do quadrilátero e expresse sua resposta de duas maneiras distintas.

7-6. Medidas de Ângulos

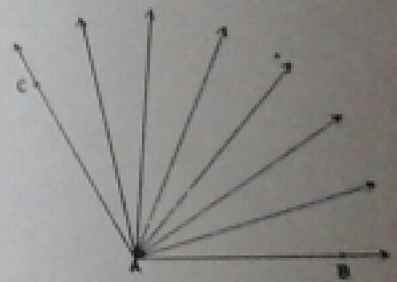
Você estudou modos de medir segmentos de reta, regiões planas fechadas e sólidos. Vejamos agora como ângulos são medidos.

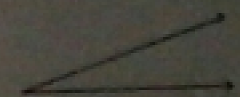
Recorde que ângulo é o conjunto de pontos de dois raios com a mesma extremidade. No desenho do ângulo, os raios eram $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Êstes raios são os lados do ângulo BAC e o ponto A é seu vértice. Note que o ângulo é chamado "ângulo BAC" ou "ângulo CAB", com o vértice ocupando a posição do meio. Por que A deve ser a letra de meio? Podemos chamá-lo "ângulo A" se êste nome refere-se a um ângulo isolado. Também damos nomes a ângulos escrevendo uma letra minúscula ou número no interior do mesmo, próximo ao vértice.



Um ângulo determina três conjuntos de pontos no plano, o conjunto de pontos interiores ao ângulo, o conjunto de pontos exteriores ao ângulo e o conjunto de pontos do próprio ângulo. Um ponto P está no interior do ângulo BAC se êle estiver do mesmo lado que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que o ponto C, e do mesmo lado que a reta $\overleftrightarrow{AC}$ que o ponto B. (Veja o ângulo BAC da figura anterior.) Qualquer ponto no plano que não seja um ponto do ângulo e não seja um ponto no interior é um ponto exterior do ângulo. O ponto R é um ponto interno ou externo ao ângulo BAC? E o ponto P?.

Como sabemos, para medir alguma coisa devemos usar uma unidade da mesma natureza que a coisa a ser medida. Para medir um ângulo devemos escolher um ângulo como unidade de medida. Assim, um ângulo pode ser medido desenhando-se raios que subdividem seu interior de tal modo que formem ângulos exatamente como a unidade de ângulo. No esquema, o interior do ângulo BAC está subdividido de modo que os ângulos formados sejam exatamente como a unidade mostrada. Portanto o $\angle$ BAC é sete vêzes o ângulo unitário.

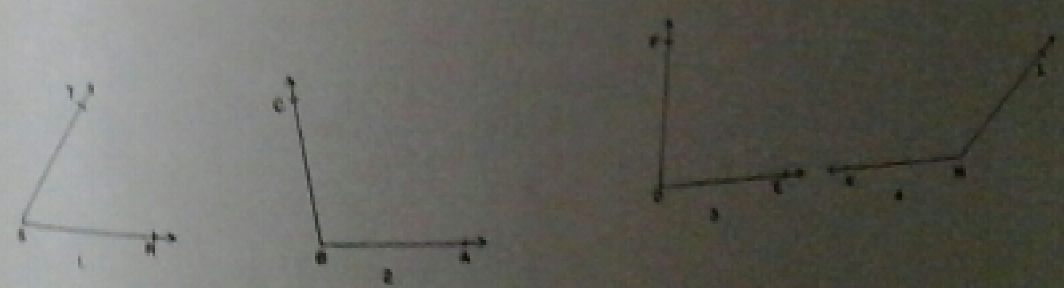




ÂNGULO UNITÁRIO

Exercícios 7-6a

Copie os ângulos abaixo em papel fino, e também a unidade de ângulo u. Recorte a região angular determinada pela unidade de ângulo e use-a para subdividir o interior de cada um dos ângulos, 1 a 4.



Compare cada ângulo com a unidade de ângulo, estabelecendo suas comparações assim: O tamanho do ângulo RST = ______ u.

Unidade Padrão para Ângulos

Como havia unidades padrão para medir segmentos de reta (polegada, pé, jarda, milímetro, centímetro, metro) há também unidades padrão para medidas de ângulos. Uma que poderemos usar é determinada por um conjunto de 181 raios traçados de um mesmo ponto. Êstes raios determinam 180 ângulos congruentes que, juntamente com seus interiores, determinam um semi-plano e a reta que determina o semi-plano. Os raios são numerados em ordem de 0 a 180, formando uma escala. A cada raio corresponde um número, isto é, há um número para cada raio, e um raio para cada número de 0 a 180. Nem todos os 181 raios são mostrados no esquema abaixo, mas, os raios correspondentes a 0 e a tôdas as dezenas seguintes são representados. Um dêsses 180 ângulos congruentes é tomado como unidade padrão. A medida dêste ângulo é chamada grau. A medida dêste ângulo unitário, em graus, é 1.

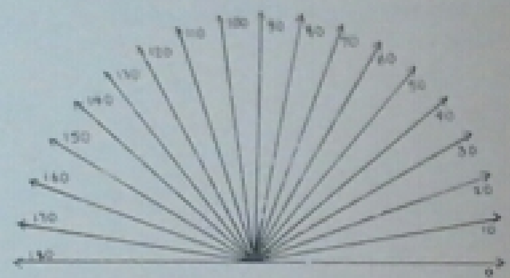


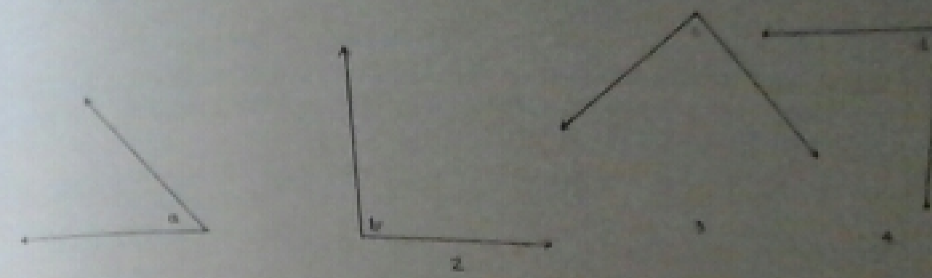
Figura 7-6a.

Você pode usar uma escala como esta para medir um ângulo. Coloque o ângulo na escala com um lado do ângulo no raio que corresponde a zero (0) e o outro lado no raio que corresponde a um número menor que 180. O vértice do ângulo é colocado na intersecção dos raios. O número que corresponde ao raio diferente de zero é a medida do ângulo em graus. O tamanho ou medida do ângulo é aquêle número de graus.

O símbolo para "grau" é " ° ". Trinta e cinco graus pode ser escrito "35°".

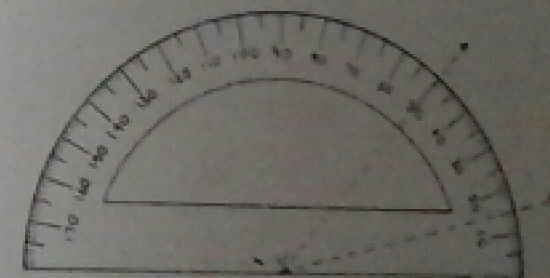
Exercícios 7-6b.

Copie os ângulos a seguir. Depois meça cada ângulo colocando-o na escala da Figura 7-6a.



O Transferidor. O método que usamos para os exercícios acima é inconveniente, e por isso na prática usamos um instrumento chamado transferidor. Neste caso, a escala pode ser colocada sôbre o ângulo, ao invés de o ângulo na escala.

Observe êste desenho do transferidor. Imagine os raios passando pelo ponto V. Segmentos dêsses raios são mostrados na parte curva do transferidor. No desenho dois dos raios são mostrados em linhas tracejadas para ilustrar como os imaginamos.



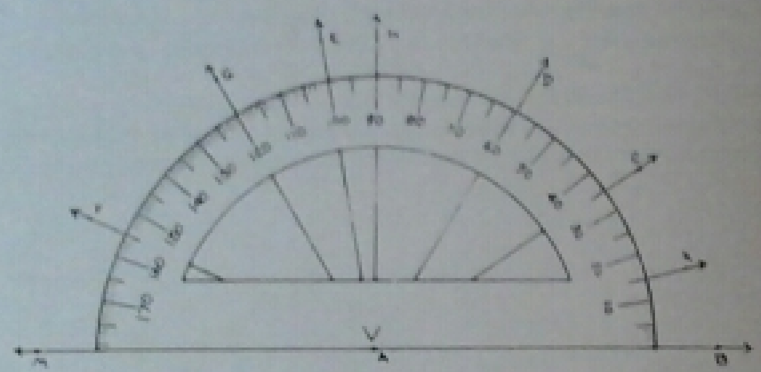
Êstes raios correspondem aos números de 0 a 180, e todo raio múltiplo de 10 está representado. Para medir um ângulo com o transferidor, coloque o transferidor sôbre o ângulo de modo que o ponto V coincida com o vértice do ângulo e o raio que corresponde a zero no transferidor fique sôbre um lado do ângulo. Observe então o raio do transferidor que está no outro lado do ângulo. O número que corresponde a êste raio é a medida, em graus, do ângulo.

Você em geral encontrará duas escalas em seu transferidor (sòmente uma escala é mostrada no diagrama). Uma escala começa com o zero à direita e vai até 180 à esquerda. A outra escala começa com zero à esquerda e vai até 180 à direita. Quando você lê a medida de um ângulo, você precisa certificar-se de que lê a mesma escala que mostra zero para um lado do ângulo.

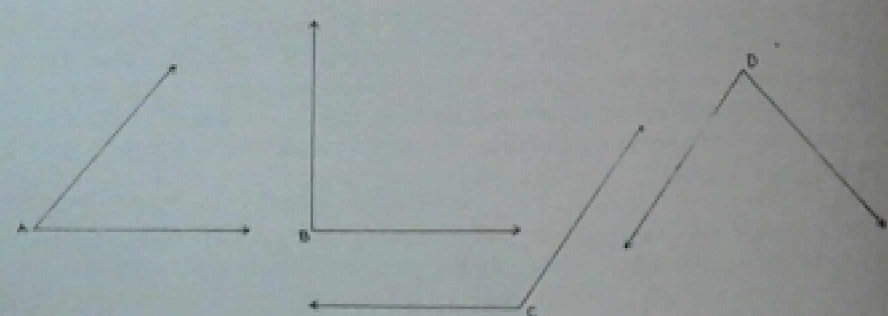
Exercícios 7-6c.

1. No desenho abaixo mostramos um transferidor colocado numa figura com muitos raios desenhados a partir do ponto A. Ache a medida, em graus, de cada um dos seguintes ângulos:

a. $\angle$ BAK	b. $\angle$ BAC	c. $\angle$ BAD	d. $\angle$ BAH
e. $\angle$ BAE	f. $\angle$ MAF	g. $\angle$ GAM	h. $\angle$ MAC
i. $\angle$ DAE	j. $\angle$ CAG	k. $\angle$ KAF	l. $\angle$ HAF



2. Utilize um transferidor para medir os ângulos abaixo. Se as partes dos raios mostrados não são bastante longas para mostrar a intersecção do lado do ângulo com o limbo do transferidor coloque a aresta de um pedaço de papel ao longo do lado do ângulo.



3. Desenhe um raio $\overrightarrow{AB}$ com extremo A. Coloque seu transferidor com o ponto V em A e o raio do transferidor correspondente a zero em $\overrightarrow{AB}$. Marque então o ponto 35 na escala do transferidor, e represente êsse ponto por C. Tire o transferidor e desenhe o raio $\overrightarrow{AC}$. Você terá agora um ângulo BAC. Qual é sua medida?

4. Utilize o método descrito no Problema 3 para desenhar ângulos com os seguintes tamanhos:

a. 20° b. 45° c. 61° d. 90° e. 135°

f. 179°

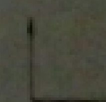
5. No desenho abaixo, os raios $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostos, isto é, estão na mesma reta, tem mesma origem, sua intersecção é o ponto A.

a. Se o transferidor é colocado de modo que V esteja em A e o raio zero da escala em $\overrightarrow{AB}$, que número corresponde ao raio do transferidor sôbre o raio $\overrightarrow{AC}$?

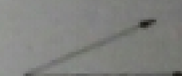
b. CAB é um ângulo? Por que?

<u>Conjuntos de Angulos</u>. Angulos podem ser classificados em conjuntos de acôrdo com suas medidas.

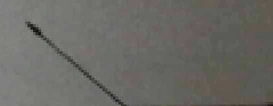
Um ângulo de 90 graus é denominado <u>ângulo reto</u>



Um ângulo cujo tamanho é menor que 90 graus é chamado <u>ângulo agudo</u>.



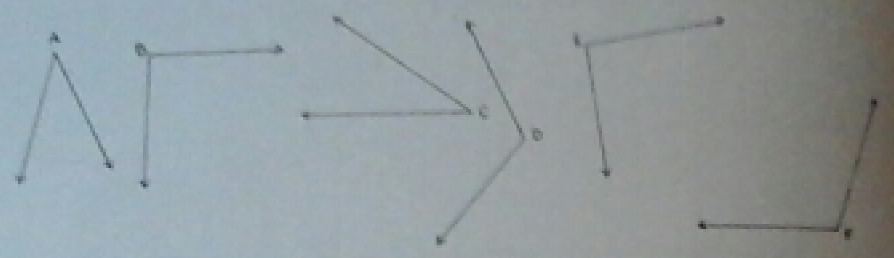
Um ângulo cuja medida é maior que 90 graus e menor que 180 é chamado <u>ângulo obtuso</u>.



Exercícios 7-6d.

1. Sem medir, diga quais dos ângulos abaixo parecem ser:

 a. ângulos retos; b. ângulos agudos; c. ângulos obtusos



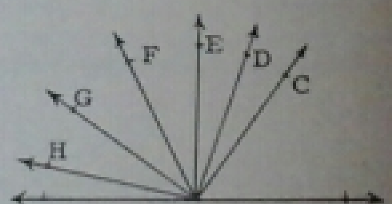
2. Em que ângulos do Problema 1 você esteve incerto quanto ao seu tamanho? Comprove sua resposta utilizando o transferidor.

3. a. A medida, em graus, de um ângulo agudo é maior que ___?___ e menor que ___?___.

 b. A medida, em graus, de um ângulo obtuso é maior que ___?___ e menor que ___?___.

4. a. Na figura, indique todos os ângulos obtusos que tem o raio $\overrightarrow{AB}$ como um lado, todos os ângulos agudos e todos os ângulos retos.

 b. Mencione todos os ângulos agudos que têm o raio $\overrightarrow{AE}$ como um dos lados, todos os ângulos obtusos e todos os ângulos retos.

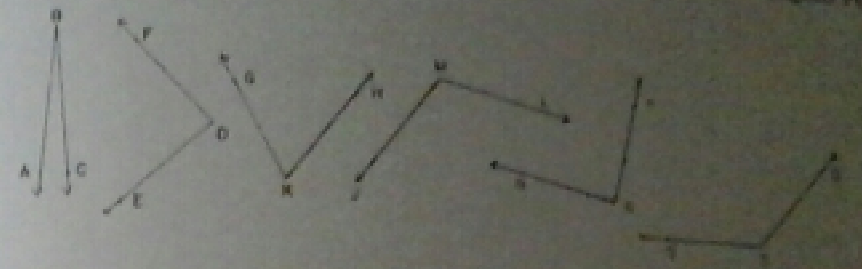


 c. Mencione todos os ângulos retos que têm o raio $\overrightarrow{AK}$ como um dos lados, todos os ângulos obtusos e todos os ângulos agudos.

5. a. Sem efetuar a medida, diga se cada ângulo que aparece em seguida é um ângulo agudo, reto ou obtuso.

 b. Sem medir, faça uma estimativa da medida, em graus, de cada ângulo

abaixo. (Um bom modo de fazer isto é compará-los com o ângulo reto)

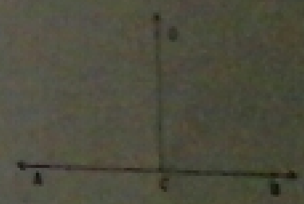


 c. Meça cada ângulo do Problema 5b. Com que precisão você estimou seus tamanhos?

6. Ache seis representações físicas de nossa idéia de um ângulo — dois ângulos agudos, dois retos e dois obtusos.

Retas Perpendiculares Entre Si

Na figura ao lado, o raio $\overrightarrow{CD}$ é traçado do ponto C na reta $\overleftrightarrow{AB}$, de modo que os ângulos BCD e DCA tenham a mesma medida. Dizemos que o raio $\overrightarrow{CD}$ é perpendicular à reta AB.

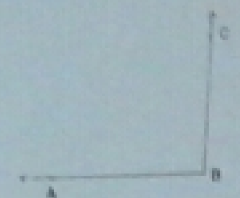


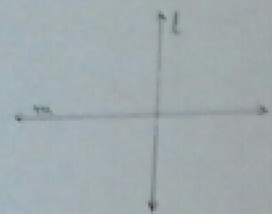
Se um transferidor fôr colocado com o ponto V coincidindo com C e o raio zero do transferidor com $\overrightarrow{CB}$, o raio do transferidor que coincide com CA corresponde a ___?___. Portanto, o tamanho do ângulo BCD, e também do ângulo DCA, é ___?___ graus, e ambos são ângulos ___?___. Por isso podemos dizer também que um raio é perpendicular a uma reta se o raio e a reta se interceptam de tal modo que pelo menos um ângulo formado seja reto.

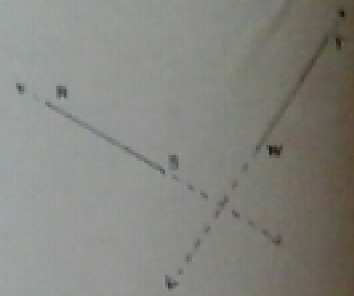
Quando dois raios formam um ângulo reto dizemos que os raios são perpendiculares entre si. Que raios nas figuras do Problema 5 dos Exercícios 7-6d parecem ser raios perpendiculares entre si?

Quando duas retas se interceptam, elas são perpendiculares entre si se um dos ângulos determinados pelas retas é um ângulo reto. Segmentos de reta são perpendiculares se as retas a que êles pertencem forem perpendiculares entre si.

O símbolo para "perpendicular" é " $\perp$ ".

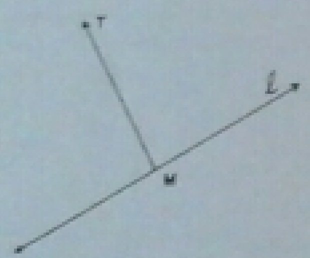


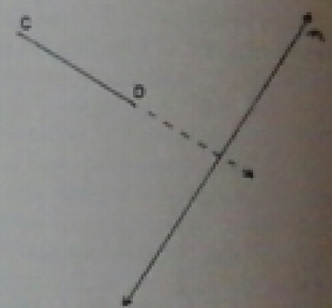




$\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ Reta $\ell \perp$ reta m Segmento $\overline{RS} \perp$ segmento $\overline{TW}$

Podemos também dizer que uma reta é perpendicular a um raio, ou um segmento de reta é perpendicular a um raio ou a uma reta.





Reta $\ell \perp$ raio $\overrightarrow{MT}$ Segmento $\overline{CD} \perp$ reta n

Exercícios 7-6e

1. Quais dos desenhos, seguintes representam

   a. Retas perpendiculares entre si?

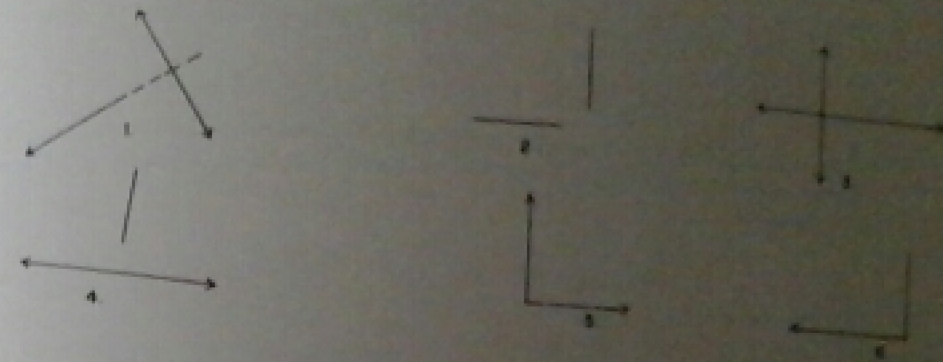
   b. Raios perpendiculares entre si?

   c. Segmentos de reta perpendiculares entre si?

   d. Uma reta perpendicular a um raio?

   e. Um raio perpendicular a um segmento de reta?

   f. Um segmento perpendicular a uma reta.



2. Determine cinco representações físicas de pares de raios, retas ou segmentos de retas perpendiculares entre si.

3. Determine cinco representações físicas de pares de raios, retas ou segmentos de retas que não sejam perpendiculares entre si. Se êles se interceptam, diga se os raios formam um ângulo agudo ou um ângulo obtuso.

7-7. Resumo

1. Os tamanhos de coleções de objetos separados podem ser determinados por contagem, mas os tamanhos de quantidades contínuas são determinados por medições.

2. Uma medida é aproximada, não é exata; quando possível, a precisão ou êrro máximo possível em uma medição deve ser indicada.

3. O símbolo $\approx$ significa "é aproximadamente igual a".

4. A medida de quantidades geométricas contínuas como de comprimento, ângulo, área e volume podem ser pensadas como um processo de "cobertura" com unidades de um dado tamanho.

5. Quando quantidades geométricas contínuas são medidas, a unidade usada preci

sa ser da mesma espécie que a quantidade medida i. e. um segmento unitário para medir segmentos, um ângulo unitário para medir ângulos.

6. O tamanho das unidades de medida é inteiramente arbitrário, mas na prática é essencial termos unidades padrão que sejam usadas por um grande número de pessoas.

7. Uma régua pode ser utilizada como uma escala numérica para medir segmentos e um transferidor pode ser utilizado como uma escala numérica para medir ângulos.

Capítulo 8

ÁREA, VOLUME, PÊSO E TEMPO

8-1. Retângulo

Consideraremos aqui a mais familiar de tôdas as curvas simples fechadas, o retângulo. Sabemos que o retângulo é uma figura de quatro lados (no plano) que apresenta um ângulo reto em cada um de seus quatro vértices. A capa de seu livro tem a forma de um retângulo? Procure cinco exemplos de retângulos em sua sala de aula. Sob esta definição um quadrado é um retângulo?

Nas Seções 3 e 4 do Capítulo 7 você encontrou os comprimentos das curvas fechadas medindo os segmentos que formam as curvas. Você mediu também regiões fechadas determinadas por curvas. Que instrumento você utilizou para medir os comprimentos dos lados? Por que você precisou uma nova espécie de unidade para medir uma região fechada?

O comprimento total de uma curva fechada é chamado perímetro da curva. Para um retângulo, êste é a distância que uma formiga percorreria se começasse num canto do retângulo e continuasse caminhando ao longo de seus lados até atingir seu ponto de partida.

Exercícios 8-1a.

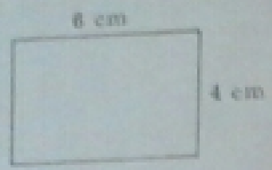
1. Meça os quatro lados da capa dêste livro. Tome dois retângulos adicionais e meça os quatro lados de cada um.

2. Ache o perímetro de cada um dos três retângulos do Problema 1.

3. Em todo retângulo há dois pares de lados opostos, isto é, lados que não se encontram num vértice. Para cada retângulo no Problema 1, escreva os comprimentos dos pares dos lados opostos. Observando êstes comprimentos complete as seguintes afirmações.

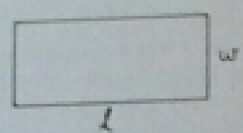
   Os comprimentos de dois lados opostos de um retângulo são ________.

4. Suponha que os lados de um retângulo tenham 6 cm e 4 cm como na figura seguinte:



Utilize o resultado do Problema 3 para dizer quais são os comprimentos dos lados restantes. Calcule o perímetro dêste retângulo.

5. Se ℓ e w representam os números de unidades de comprimento dos lados de um retângulo, quais são os números de unidades nos comprimentos dos outros dois lados? Escreva uma sentença numérica que diga como achar o número de unidades do perímetro se você conhece ℓ e w.



Os comprimentos de dois lados que se interceptam de um retângulo são muitas vêzes chamados comprimento e largura. Frequentemente em discussões sôbre outras curvas simples fechadas a distância total ao redor delas é chamada comprimento da curva ao invés de perímetro. Entretanto, como dissemos, para um retângulo a palavra "comprimento" indica o comprimento do lado maior. Aqui utilizamos o têrmo nesta acepção.

6. O pateo de uma escola é retangular, medindo 400 cm de comprimento e 200 cm de largura. Qual é o comprimento total da cêrca em tôrno do pateo? Expresse o comprimento em metros.

7. Se um metro de cêrca custa Cr$500, quanto custará a cêrca do Problema 6?

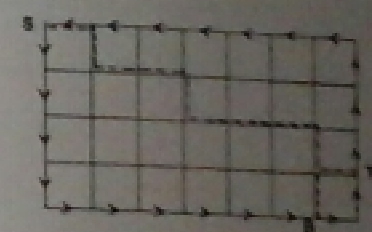
8. Um carpinteiro está colocando friso em um quarto que tem 3, 5 m de largura e 6 m de comprimento. Qual o perímetro do friso? Expresse a resposta em metros e em centímetros.

9. O carpinteiro do Problema 8 está também colocando um rodapé em tôrno do quarto. Êle observa que o quarto tem quatro portas, e que cada porta tem 90 cm de largura. Como êle não vai colocar rodapé nos vãos das portas, quantos centímetros de rodapé precisará? (Para seu cálculo interessa saber onde as portas estão colocadas?).

10. Um menino tem 24 dm de arame de cêrca para fazer um gradil para seu coelho favorito. Êle pretende utilizar no gradil todo o arame que tem. Poderia êle fazer um gradil de 12 dm de comprimento por 12 dm de largura? Poderia êle fazer o gradil de 8 dm de comprimento por 3 dm de largura? Por quê? com 8 dm de comprimento por 4 dm de largura? Dê cinco exemplos de comprimentos e larguras que êle poderia utilizar em seu gradil. (Use sòmente números inteiros para comprimentos e larguras).

11. Uma moça está decorando um ambiente para uma festa. Ela tem 5 mesas, cada uma com 10 cm de largura por 84 cm de comprimento, e deseja colocar uma faixa de papel crepon em tôrno de cada mesa. Quantos decímetros de papel serão necessários?

12. A parada de 7 de Setembro deve seguir uma estrada retangular como se mostra com as setas, começando e terminando em S, onde os quadrados representam quarteirões da cidade.



Nesta cidade cada quarteirão tem 1/8 km de lado. Qual é o comprimento total percorrido no desfile? Expresse a resposta no mínimo de dois modos diferentes.

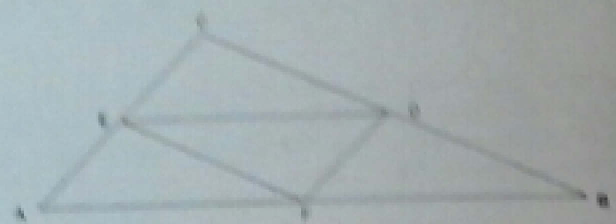
13. Se as decorações ao longo do percurso da parada do problema 12 custam cêrca de Cr$25 000 por quilômetro, qual foi aproximadamente o custo total das decorações?

14. No desfile do Problema 12, dois homens cansados voltam para o ponto de partida ao longo das linhas tracejadas. Um homem deixou a parada no ponto T e o outro no ponto B. Qual a distância que cada homem poupou?

15. Um fazendeiro descobriu que andava 240 dm ao contornar a cêrca de seu quintal retangular. Êle disse que um dos lados tinha 40 dm de comprimento

Qual é o comprimento de cada um dos outros lados? Represente por x um número de decímetros da largura e escreva uma sentença numérica descrevendo êste problema.

*16. Você trabalhou com uma figura como a que aparece abaixo. Aqui D, E e F são os pontos médios dos lados. Seja a o número de unidades no comprimento do segmento $\overline{AF}$. Faça uma cópia da figura e mencione com um a em todos os segmentos que tenham o mesmo comprimento que $\overline{AF}$. Do mesmo

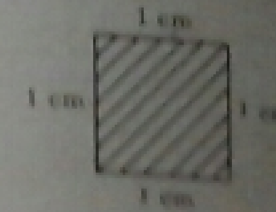


modo, seja b o número de unidades no comprimento de $\overline{AE}$ e c o número de unidades no comprimento $\overline{BD}$. Indique os outros segmentos com as medidas b ou c. Quando você trabalhou com esta figura anteriormente, você achou 11 curvas simples fechadas que estão contidas na figura. Dê nome a cada uma das 11 curvas e para cada uma das curvas escreva uma sentença numérica para o número de unidades do perímetro (o comprimento total).

Áreas dos Retângulos

Voltemos nossa atenção para a região fechada determinada pelo retângulo. Como você aprendeu anteriormente, para medi-la você escolheu uma região fechada determinada por uma certa curva fechada para unidade de área e viu então quantas destas unidades eram tomadas para cobrir uma região fechada a ser medida. Isto é muitas vêzes um trabalho impreciso e muito cansativo. Por que não podemos ter algum instrumento simples como a régua que possamos colocar sôbre área e ler a resposta de uma vez?

No seu trabalho anterior com áreas você tomou contacto com as regiões fechadas determinadas por muitas curvas fechadas diferentes como unidades de áreas possíveis. Gostaríamos agora de escolher uma unidade de área definida. A escolha usual é uma região quadrada fechada. Com base em sua experiência no Problema 1 dos Exercícios 7-3, parece ser esta escolha boa? Por que? Além disso temos uma escolha, a do tamanho do quadrado a ser usado. Para definir, tomemos para unidade de área a região fechada determinada por um quadrado cujo lado tenha uma unidade de comprimento. Como usamos muitas unidades de comprimento, obtemos em correspondência muitas unidades de área. Se o comprimento é medido em centímetros, temos como unidade de área correspondente, a região fechada determinada pelo quadrado de um centímetro de lado como na figura abaixo



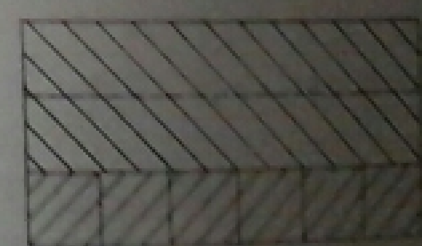
A área desta região fechada é chamada centímetro quadrado. Descreva e mencione três outras unidades de área relacionadas com diferentes unidades de comprimento.

Se um retângulo tem 6 unidades de comprimento e 3 unidades de largura, então está claro que a região fechada retangular pode ser coberta por unidades quadradas de área como vemos abaixo.

A medida da área é, por definição, o número de regiões quadradas fechadas. Quantas delas há? Existe algum modo mais fácil de obter o número do que o de contagem? Se há, qual é?

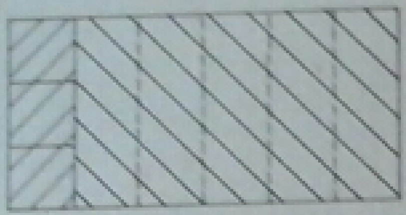
Se você contou observando que cada fila tem 6 quadrados e que há 3 filas, você obteve o número de unidades quadradas A na área, escrevendo:

$$A = 3 \times 6$$



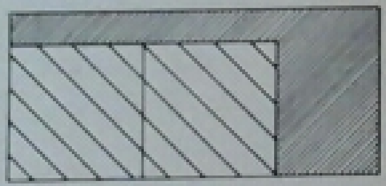
Se você contou dizendo que há 3 quadrados em cada coluna e seis colunas você obteve:

$$A = 6 \times 3$$

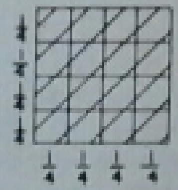


Essas respostas são iguais? Se forem, que propriedade dos números racionais isto ilustra? Que vantagem você vê nesta discussão em que se escolhe a unidade da área de modo que os lados do quadrado tenham comprimento unitário? Qual seria se a unidade da área fosse determinada por um quadrado cujo lado fosse $1\frac{1}{2}$ unidades?

Na prática é muito mais provável que as medidas dos lados sejam números racionais que não são números inteiros. Suponha por exemplo que o comprimento seja $2\frac{3}{4}$ cm e que a largura seja $1\frac{1}{4}$ cm. Podemos fàcilmente colocar nele 2 quadrados de um cm de comprimento, mas que deixe ainda para fora um bordo como mostra a figura pela área sombreada.

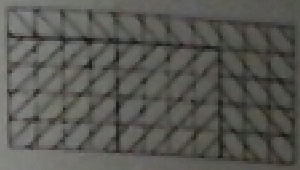


Para preencher o bordo convenientemente tomemos uma unidade de um centímetro quadrado (ou várias se fôr necessário) e cortemo-la em regiões quadradas fechadas menores como aparece na figura abaixo.



Esta divisão particular é escolhida porque as medidas dadas para o retângulo são da-

das em quartos de centímetros. Quantas das regiões quadradas fechadas menores há no centímetro quadrado? Que parte do centímetro quadrado é cada região quadrada fechada menor? Estas unidades quadradas menores podem ser utilizadas convenientemente para preencher o bordo descoberto na figura anterior como podemos ver.



Acontece que se cortamos também os dois quadrados originais, como mostramos por linhas tracejadas, a região retangular fechada inteira ficará coberta pelas unidades quadradas menores.

Consideremos a área de uma região fechada. Recorde que uma região fechada consiste de uma curva simples fechada e seu interior. Seria possível falar apenas sôbre a área do interior de uma curva simples fechada. Se uma tal discussão fôsse levada avante (isto pode ser feito mais tarde em sua experiência matemática), seríamos que

a área do interior de uma curva simples fechada

= área da região fechada correspondente.

<u>Exercícios para serem Resolvidos em Classe 8-1a.</u>

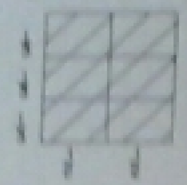
1. Na figura acima mostrando o retângulo $2\frac{3}{4}$ cm por $1\frac{1}{4}$ cm:

   O número de quadrados menores em cada fila é ___?___; o número de filas é ___?___; o número total de quadrados menores é ___?___; a área de cada unidade quadrada é ___?___ centímetros quadrados. A área do retângulo é portanto ___?___ centímetros quadrados.

   No problema foi necessário desenhar a figura para determinar quantos quadrados havia em cada fila? Para determinar o número de filas? Se não, como você determinaria êsses números?

2. O comprimento e a largura de um retângulo são dadas: $1\frac{1}{2}$ dm e $4\frac{1}{2}$ dm. De que tamanho deveria ser uma unidade quadrada menor, para cobrir convenientemente êste retângulo? Quantos quadrados há em cada fila? Quantas filas há? Qual é o número de decímetros quadrados da área? Desenhe uma figura mostrando os quadrados menores. Foi necessário construir a figura para determinar a área?

5. Utilizando o mesmo método acima, determine a área de um retângulo cujos comprimento e largura são $5\frac{1}{2}$ cm e $4\frac{1}{3}$ cm. (Neste caso você pode achar conveniente cortar o centímetro quadrado unitário em regiões retangulares fechadas ao invés de quadrados; fazendo duas divisões horizontais e três verticais como na figura abaixo.)



Por que pode ocorrer a você esta divisão? Que parte do centímetro quadrado é cada unidade retangular menor?

Exercícios 8-1b.

1. Baseado em sua experiência no problema precedente, enuncie um método pelo qual você possa determinar o número de unidades quadradas na área de um retângulo se você conhece o número de unidades do comprimento e da largura.

2. Se ℓ e w representam os números de unidades lineares do comprimento e da largura de um retângulo, e A é o número de unidades quadradas em sua área, escreva uma sentença numérica dizendo como determinar A se você conhece ℓ e w. Note que isto nada mais é que a tradução em linguagem matemática da afirmação do Problema 1 acima.

3. Quantos centímetros quadrados há em um decímetro quadrado? Quantos decímetros quadrados há em um metro quadrado? Desenhe figuras para ilustrar sua resposta. Faça estas figuras em tamanho real, no papel ou numa superfície como o quadro-negro.

4. Desenhe um quadrado de 3 dm de lado. Desenhe também um retângulo cuja área seja 3 decímetros quadrados. Qual é maior? Qual é a área do quadrado?

5. Desenhe dois retângulos diferentes, cada um dos quais tenha uma área de 1 centímetro quadrado. Faça um retângulo de 2 centímetros de comprimento e com o outro lado tendo 4 centímetros de comprimento. (Isto ilustra como uma área de um centímetro quadrado pode aparecer de muitas formas diferentes)

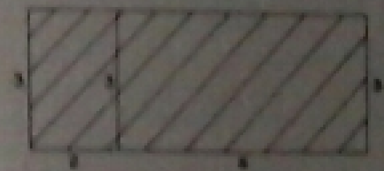
6. O tapete de uma sala de visitas tem 9 decímetros por 12 decímetros. (a) Determine sua área. (b) Expresse o resultado em metros quadrados.

7. Tem-se um quadrado com 60 dm de lado. Determine a área do interior dêste campo em decímetros quadrados e em metros quadrados.

8. Tem-se um quadrado de 40 dm de lado. É esta área maior ou menor que a metade da área do quadrado do problema anterior?

9. Determine o número de metros quadrados existentes num quilômetro quadrado.

10. Dois retângulos são colocados juntos como se mostra na figura, de modo que um maior retângulo seja formado, com o número de unidades lineares nos lados como indicado. Determine as áreas de ambos os retângulos menores e do maior em unidades quadradas. A área do maior é a soma das dos dois outros? Escreva uma sentença numérica determinada por esta relação entre as três áreas. Que propriedade dos números racionais ilustra esta sentença numérica?



11. Um retângulo tem 3 unidades de comprimento e 2 unidades de largura. Se outro retângulo tem comprimento igual a duas vêzes o comprimento dêste, e mesma largura, como comparamos a área dêstes dois retângulos? Desenhe uma figura ilustrando sua resposta. Faça o mesmo se o novo retângulo tem o mesmo comprimento que o original porém o dôbro da largura.

12. O raciocínio do problema anterior depende das medidas particulares, 3 e 2? Se não, escreva uma afirmação dizendo o que acontece com a área se dobramos o comprimento de qualquer retângulo. E dobrando sua largura. (Quando duplamos uma dimensão mantemos a outra inalterada).

13. Se um retângulo tem comprimento e largura de 3 e 2 unidades, que acontece com a área se dobramos ambos, comprimento e largura? Desenhe uma figura para ilustrar sua conclusão. Se o raciocínio não depende do retângulo particular, escreva uma proposição dizendo o que acontece com a área de qualquer retângulo quando dobramos ambos, o comprimento e a largura do mesmo.

14. Nos retângulos do Problema 13 compare os dois perímetros. Escreva uma proposição dizendo o que acontece com o perímetro de um retângulo se duplicarmos ambos, o comprimento e a largura.

15. Um retângulo tem comprimento 313 centímetros e largura 211 centímetros. Sua área, pelo Problema 2, é 313 x 211 centímetros quadrados. (Não efetue a multiplicação). Se um novo retângulo tem comprimento duplo e largura dupla, sua área é 626 x 422 centímetros quadrados. Sem multiplicar, mostre que

$$626 \cdot 422 = 2^2 \cdot 313 \cdot 211.$$

Que propriedade, ou propriedades, dos números racionais você usou? Que diz a proposição a cêrca das áreas dos dois retângulos? Isto está de acôrdo com sua conclusão no Problema 13?

16. Por raciocínio análogo ao do Problema 14, ache o que acontece com a área se o comprimento e a largura de um retângulo são triplicados. Desenhe uma figura ilustrando a conclusão. Que acontece com a área se o comprimento é dobrado e a largura é triplicada?

* *Precisão e Êrro*

Na discussão anterior supusemos que os comprimentos e as larguras eram conhecidos com exatidão. Na realidade, vimos que isto nunca acontece já que medida alguma pode ser feita com exatidão. Assim, se medirmos um retângulo e acharmos medidas de $2\frac{1}{2}$ centímetros e $3\frac{1}{4}$ centímetros, precisamos usar o símbolo de "aproximadamente igual" e escrever $\ell \approx 3\frac{1}{4}$, $w \approx 2\frac{2}{4}$ e portanto

$$A = \ell w$$

$$A \approx (3\frac{1}{4})\ (2\frac{1}{2})$$

$$A \approx (\frac{13}{4})\ (\frac{5}{2})$$

$$A \approx \frac{65}{8}$$

$$A \approx 8\frac{1}{8}$$

Como A é o número de centímetros quadrados, achamos portanto que a área é aproximadamente $8\frac{1}{8}$ de centímetros quadrados.

Uma proposição com relação à quantidade medida deveria indicar que esta é apenas aproximada.

Exercícios 8-1c

Utilize o sinal $\approx$ em conexão com números representativos de quantidades medidas.

1. Meça o comprimento e a largura da tampa de sua mesa com aproximação de $\frac{1}{2}$ centímetro.

   a. Determine o número de centímetros quadrados na área.

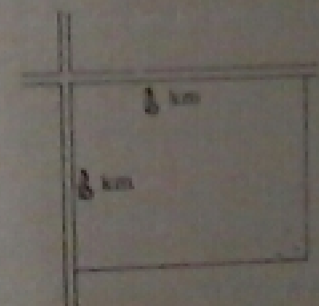
   b. Qual é o perímetro?

2. Um pedaço de giz de seção quadrada tem cêrca de 5 mm de comprimento e $3\frac{1}{2}$ mm de largura.

   a. Determine a área. Expresse a resposta de 3 modos diferentes.

   b. Determine o perímetro e expresse-o de 3 modos diferentes.

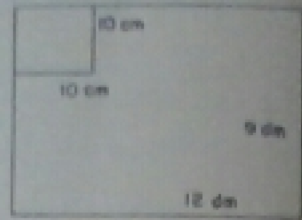
3. Um campo retangular está localizado na encruzilhada de duas estradas perpendiculares entre si. Usando o velocímetro de um carro, o comprimento e a largura são medidos com aproximação de $\frac{1}{10}$ de quilômetro e $\frac{1}{10}$ de quilômetro. Determine a área do campo, e expresse o resultado em duas unidades diferentes.



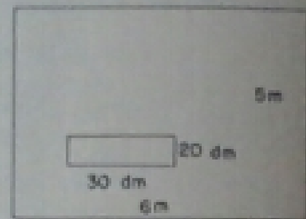
4. Um gramado retangular tem 84 decímetros por 30 decímetros. O prado está sendo semeado com grama, e o ponteiro na caixa das sementes de grama diz que um quilo de sementes é suficiente para 300 decímetros quadrados. Quantos quilos de semente de grama são necessários?

5. O piso de um banheiro está ladrilhado com pequenos ladrilhos que são regiões fechadas de 1 centímetro quadrado. O piso contém 3 240 dêsses ladrilhos. Qual é a área do piso em metros quadrados?

6. O piso do quarto dos meninos tem a forma de um retângulo. O comprimento e a largura são 12 decímetros e 9 decímetros. Há um encerado de três decímetros de comprimento e três decímetros de largura construido em um canto, como mostra a figura no piso. Qual é a área do assoalho do quarto (fora do encerado)?



7. O assoalho de um sótão tem a forma de um retângulo com medidas de seis metros por cinco metros. Há uma abertura no assoalho como mostra a figura onde chega uma escada. Determine a área real do assoalho do sótão. Expresse o resultado sob duas formas diferentes. Ao determinar a área do assoalho, importa o lugar onde está a abertura no assoalho para a escada?



8. Um fazendeiro teve durante alguns anos um jardim retangular. Êle sabe que o comprimento do arame da cêrca em tôrno dêle é 500 centímetros e notou por experiência que êle usa um saco de 100 quilos de fertilizante nele por ano. Em certa primavera êle decidiu aumentar seu jardim de modo que êle tivesse o dôbro do comprimento e o dôbro de largura. Como a antiga cêrca estava inutilizada êle a jogou fora. Êle então vai a um armazem o ordena 10 metros de cêrca e duzentos sacos de um quilo de adubo. É esta ordem razoável? Por que?

<u>Exercícios para serem resolvidos em Classe 8-1b</u>

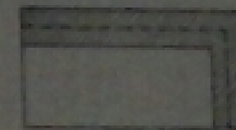
1. O comprimento e a largura de um retângulo, R, foi medido e achamos $3\frac{1}{4}$ centímetros e $2\frac{3}{4}$ centímetros portanto $\ell \approx 3\frac{1}{4}$ e $w \approx 2\frac{3}{4}$. Desenhe um retângulo com estas dimensões e ache sua área usando o resultado do Problema 2 dos exercícios 8-1b. Esta área será chamada <u>área calculada</u>.

2. a. Caso seja entendido que no Problema 1 que $\ell \approx 3\frac{1}{4}$ significa que o comprimento foi medido por aproximação de $\frac{1}{4}$ de centímetro, então estamos certos de que o número de centímetros do comprimento verdadeiro é um número compreendido entre ___?___ e ___?___.

b. De modo análogo, o número de centímetros da largura verdadeira está entre ___?___ e ___?___.

c. Na figura que você fez para o último problema mostre os comprimentos máximo e mínimo que são descritos por $\ell \approx 3\frac{1}{4}$.

d. Faça o mesmo com a largura. A seguir desenhe os máximo e mínimo retângulos que podem ser corretamente descritos por $\ell \approx 3\frac{1}{4}$, $w \approx 2\frac{3}{4}$, onde ℓ e w representam números de centímetros. A área entre êstes dois retângulos representa a incerteza na área correta e é sombreada no diagrama. A área verdadeira fica entre a do retângulo mínimo e a do retângulo máximo.



3. a. A área do retângulo mínimo no Problema 2 é ___?___ centímetros quadrados.

b. A área do retângulo máximo no Problema 2 é ___?___ centímetros quadrados.

c. A diferença entre a área R calculada e a resposta de (a) acima é ___?___ centímetros quadrados.

d. A diferença entre a área R calculada a resposta de (b) acima é ___?___ centímetros quadrados.

As respostas das questões acima podem ser reunidas numa tabela

Retângulo mínimo	Retângulo medido	Retângulo máximo	
$3\frac{1}{8}$ cm	$3\frac{1}{4}$ cm	$3\frac{3}{8}$ cm	Comprimento
$2\frac{5}{8}$ cm	$2\frac{3}{4}$ cm	$2\frac{7}{8}$ cm	Largura
$\frac{525}{64}$ cm^2	$\frac{572}{64}$ cm^2	$\frac{621}{64}$ cm^2	Área

Também,

diferença na parte (c) = área calculada - área mínima possível

$$\frac{47}{64}\ \text{cm}^2 = \left(\frac{572}{64} - \frac{525}{64}\right)\text{cm}^2$$

e

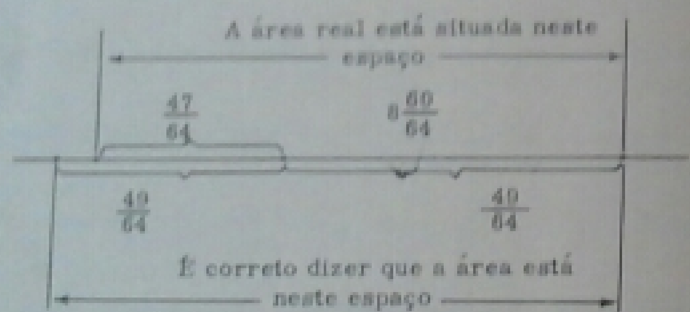
diferença na parte (d) = área máxima possível - área calculada

$$\frac{49}{64}\ cm^2 = \left(\frac{621}{64} - \frac{572}{64}\right) cm^2$$

Assim, a área verdadeira de nosso retângulo R está compreendida entre

$$\left(8\frac{60}{64} - \frac{47}{64}\right) cm^2 \quad e \quad \left(8\frac{60}{64} + \frac{49}{64}\right) cm^2$$

A área do retângulo R calculada, como foi achada no Problema 1, é $8\frac{60}{64}$ ou $2\frac{3}{4} \times 3\frac{1}{4}$. A área R calculada pode ser muito grande quando comparada com $\frac{47}{64}$ centímetros quadrados ou, por outro lado, pode ser muito pequena quando comparada com $\frac{49}{64}$ centímetros quadrados. O <u>êrro máximo possível</u> para a área calculada R é $\frac{49}{64}$ centímetros quadrados. Portanto, seria correto dizer que a área verdadeira está compreendida entre $(8\frac{60}{64} - \frac{49}{64})$ centímetros quadrados e $(8\frac{60}{64} + \frac{49}{64})$ centímetros quadrados. Note que os números entre parênteses estão a uma mesma distância de cada lado de $8\frac{60}{64}$. Essas idéias são ilustradas numa reta numérica.



Agora podemos indicar a precisão da área calculada $(3\frac{1}{4} \times 2\frac{3}{4})\ cm^2$, escrevendo

$$\text{Área verdadeira} = \left(8\frac{60}{64} \pm \frac{49}{64}\right) cm^2$$

Isto significa que a área verdadeira não diferirá de $8\frac{60}{64}\ cm^2$ por mais que $\frac{49}{64}\ cm^2$.

No Problema 1, a resposta obtida pela multiplicação deu uma área expressa em $\frac{1}{16}\ cm^2$. Isto sugeriria que a resposta seria correta por aproximação de $\frac{1}{16}$ de um centímetro quadrado. Isto é verdadeiro para os resultados obtidos neste problema?

<u>Exercícios 8-1d</u>

Determine a área calculada para cada retângulo cujas dimensões são dadas abaixo; determine a seguir a precisão de sua resposta e indique-a utilizando a notação do êrro máximo possível.

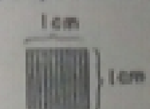
1. $3\frac{1}{2}$ cm por $4\frac{1}{2}$ cm

2. $1\frac{3}{4}$ cm por $2\frac{1}{4}$ cm

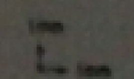
3. $2\frac{3}{8}$ cm por $3\frac{4}{8}$ cm

Nos conjuntos de exercícios anteriores você utilizou o pé, a polegada, etc., em alguns exercícios ao determinar perímetros e áreas de regiões fechadas. Façamos agora medidas utilizando algumas unidades métricas. Recorde as unidades métricas para medidas lineares onde o metro, centímetro $= \frac{1}{100}$ (metro) e o milímetro $= \frac{1}{1\,000}$ (metro). As unidades métricas correspondentes para medidas de áreas são regiões quadradas fechadas tendo lados que medem 1 metro, 1 centímetro e um milímetro, respectivamente.

O diagrama abaixo à esquerda é um desenho de uma <u>região fechada de um centímetro quadrado</u>, o da direita é uma <u>região fechada de um milímetro quadrado</u>.



Área = 1 centímetro quadrado



Área = 1 milímetro quadrado

<u>Exercícios 8-1e</u>

1. Quantos milímetros quadrados há em um centímetro quadrado?

2. Quantos centímetros quadrados há em um metro quadrado?

3. Quantos milímetros quadrados há em um metro quadrado?

4. Desenhe um quadrado de 3 centímetros quadrados. Desenhe ainda um retângulo cuja área seja 3 centímetros quadrados. Qual é maior?

5. Um tapete tem 2 m por 3 m. Determine seu perímetro e sua área.

6. O assoalho de um quarto de meninos tem a forma de um retângulo. O compri-
mento tem 4 metros e a largura 3 metros. Existe um encerado de um metro
de comprimento por 1 metro de largura construido em um canto. Qual é a
área do assoalho do quarto (fora do encerado)?

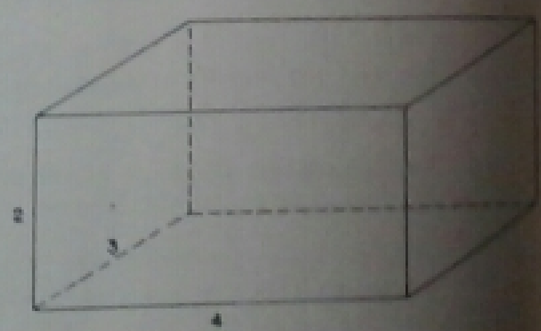
8-2. Prisma Retangular

Uma figura com a forma de uma caixa de giz será referida como um prisma
retangular. É uma das figuras mais conhecidas e você poderá encontrar muitos exem-
plos. Sua sala de aula é provàvelmente um dêles. Dê outros exemplos se puder. Ha-
verá mais adiante em seu curso discussões de prismas e outras figuras. Quando você
anda através de sua sala de aula você está se movendo no interior do prisma retangu-
lar de sua sala de aula, se sua sala tem esta forma. Examinemos um tal prisma. No-
te que o prisma tem um certo número de lados planos. Êstes constituem suas faces.
Quantas faces tem um prisma retangular? Que tipo de figura é cada uma das faces?
Note que cada face está num plano. Para cada face do prisma note que há exatamente
uma outra face que não a encontra. Um tal par de faces é chamado par de faces opos-
tas. Faces opostas na realidade estão em planos paralelos. Quantos pares de faces pa-
ralelas há? Identifique os pares de faces paralelas em sua sala de aula. Que pode vo-
cê dizer acêrca da forma de duas faces opostas? Como você sabe?

Você aprendeu no Capítulo 4 que dois planos que se interceptam devem cor-
tar-se segundo uma reta, portanto duas faces que não são opostas devem cortar-se em
pontos que pertencem a uma reta. Realmente elas se encontram nos pontos de um seg
mento de reta. Êstes segmentos são chamado arestas do prisma. Quantas arestas tem
um prisma retangular? Identifique-as em sua sala de aula. Algumas destas arestas tem
comprimentos iguais. (Que conjuntos de arestas são iguais? Por que?) Quantos com-
primentos diferentes pode haver entre as arestas? Há no prisma pontos em que três fa-
ces se interceptam, ou o que é a mesma coisa, onde três arestas se encontram. Êstes
pontos são chamados vértices do prisma. Quantos vértices existem? Aponte os vérti-
ces de sua sala de aula.

Como você provàvelmente notou, as arestas paralelas tem o mesmo compri-
mento, por exemplo, as arestas que vão do piso ao teto, ou as arestas que vão de u-
ma extremidade à extremidade oposta. Podem portanto existir três comprimentos di-
ferentes.

No figura à direita, o número
de unidades nos comprimentos de três
arestas foram marcadas. Quantas uni-
dades há no comprimento de cada uma
das outras nove arestas?



O comprimento das arestas nas três possíveis direções são muitas vêzes cha-
mados, comprimento, largura e altura do prisma. O que você nota acêrca dos pares
de faces opostas? Como tôdas as faces são regiões retangulares fechadas, é fácil de-
terminar tôdas suas áreas. A soma das áreas de tôdas as faces é chamada área da
superfície do prisma retangular.

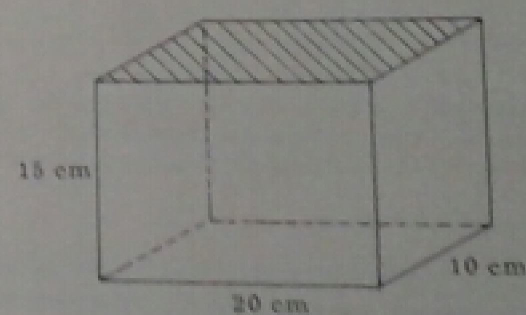
Exercícios 8-2a

1. Determine a área da superfície do prisma retangular que discutimos.

2. Uma dona de casa tem uma fôrma de bôlo com a forma de prisma retangular
(sem a tampa). A fôrma tem 10 centímetros de comprimento, 8 centímetros
de largura e 2 centímetros de profundidade. Ao assar um pudim ela forra a
panela com papel manteiga. Quantos centímetros quadrados de papel manteiga
são necessários para forrar a fôrma exatamente?

3. A parede de uma sala de aula tem 30 dm por 10 dm. Nesta parede há uma
faixa de 20 dm de comprimento e $3\frac{1}{2}$ dm de largura. A parede deve ser
pintada com excessão desta faixa. Calcule a área a ser pintada. Expresse
a resposta em decímetros quadrados e em metros quadrados.

4. Uma incubadeira para chocar ovos tem a forma de um prisma retangular de
20 centímetros de comprimento e 10 centímetros de largura e 15 centímetros
de altura. A tampa é feita de vidro (indicada pelo hachurado) enquanto que
os lados e a base são feitos de madeira. Qual é a área da tampa? Qual é a
área da superfície de fora da parte de madeira da caixa? Expresse suas res
postas em centímetros quadrados e decímetros quadrados.



5. Um quarto tem 15 pés de comprimento, 12 pés de largura e 9 pés de altura.

a. Quantos ladrilhos, de 12 polegadas por 12 polegadas serão necessá-
rios para ladrilhar o piso?

b. Quantos ladrilhos seriam necessários se cada um tivesse 6 polegadas por 6 polegadas?

6. No quarto do Problema 5 há 3 janelas nas paredes, cada com 3 pés de altura por 5 pés de largura. Qual a superfície das paredes não contando as janelas? Ao determinar sua resposta importa o lugar onde se colocam as janelas?

7. Um caminhão tem 3 pés de comprimento, 18 polegadas de largura e 2 pés de altura. As arestas são tôdas reforçadas com tiras de latão. Quanto latão em tiras é necessário? Expresse a resposta em polegadas, em pés e em jardas.

8. Um cubo é um prisma retangular no qual tôdas as arestas são congruentes; portanto tôdas as faces são regiões fechadas quadradas. Quantas polegadas de madeira são necessárias para fazer uma cobertura de uma caixa cúbica de arestas de 15 polegadas cada? Quantos pés quadrados?

9. Sejam ℓ, w, h os números que representam as unidades de comprimento, largura e altura de um prisma retangular. Escreva uma sentença numérica dizendo como achar o número, S, de unidades quadradas da área da superfície.

*10. Se ℓ, w, h têm os mesmos significados que no Problema 10, escreva uma sentença numérica dizendo como obter o número total, E, de unidades de comprimento de tôdas as arestas.

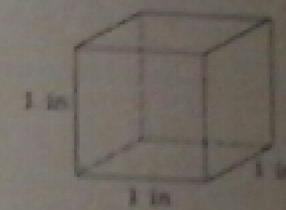
*11. Um fabricante de caixas de ferramentas faz (com tampas) que tem $2\frac{1}{2}$ dm de comprimento 1 dm de largura e 6 cm de altura. Êle tem 50 de tais caixas e deseja envernizá-las por fora com excessão das bases. Se um litro de verniz cobre uma região retangular fechada de 9 dm por 8 dm, serão 2 litros de verniz suficientes para envernizar as caixas de ferramentas?

Volume

O têrmo sólido retangular referir-se-á a um conjunto de pontos que constituem um prisma retangular e seu interior. Queremos achar o volume dêste sólido retangular. Referir-nos-emos a êste volume como o volume do prisma. Na Seção 7-3 discutímos as medidas de volume tomando certa unidade de volume conveniente e contando quantas destas unidades eram necessárias para perfazer o sólido. Medir volumes por êste processo, apresenta sérias dificuldades práticas. Imagine tentá-lo num problema como por exemplo achar o volume da sala de aula. Seria certamente útil se

conhecêssemos um modo de determinar o volume de um prisma retangular trabalhando com o comprimento, a largura e a altura, como aprendemos a determinar a área de uma região trabalhando com seu comprimento e sua largura. Entretanto, primeiro é necessário convencionar uma unidade de volume. A escolha usual para unidade de volume é um sólido de forma cúbica. Um cubo é um prisma retangular no qual tôdas as arestas são congruentes. Seria esta sua escolha, ou você teria escolhido alguma outra forma? Qual o tamanho do cubo que você escolheria? Por que?

A escolha usual é um sólido de forma cúbica, em que cada aresta tem uma unidade de comprimento. Neste caso, que podemos dizer acêrca do tamanho de sua forma? [illegible] a relação existente entre as unidades de volume, área e comprimento que nos facilita a representação de volumes. Se escolhermos como unidade para medir comprimento a polegada, então a unidade de volume deveria ser um cubo com arestas de comprimento igual a uma polegada. O volume dêste sólido é chamado polegada cúbica.



Como no caso do retângulo, o que falamos a cêrca da área de seu interior, podemos falar do volume do interior do prisma retangular. É o mesmo que o volume do sólido retangular correspondente.

Exercícios para serem resolvidos em Classe 8-2

1. Descreva e nomeie pelo menos três unidades de volume.

2. Obtenha alguns blocos cúbicos pequenos, do mesmo tamanho e pense nas arestas como uma unidade de comprimento. Coloque-os juntos de modo a formar um sólido retangular de 4 unidades por 3 unidades por 2 unidades. Quantos blocos você utilizou?

3. a. Utilize os pequenos cubos para construir um sólido de 3 unidades por 2 unidades.

   b. Construa um sólido retangular cujo comprimento seja duplo mas a altura e a largura as mesmas (6 por 2 por 2)

   c. Construa um sólido retangular com a largura dupla da original mas as outras medidas as mesmas (3 por 4 por 2)

d. Construa um sólido retangular com a altura dupla da altura do original mas as outras medidas iguais (3 por 2 por 4)

e. Compare o número de blocos em (b) (c) e (d) com o número de (a)

4. Escreva uma proposição dizendo o que acontece com o volume de um prisma retangular se uma das dimensões é duplicada.

5. a. Construa um sólido retangular de 6 unidades por 4 unidades por 2 unidades. Note que ambos o comprimento e a largura do prisma são duplos do comprimento e da largura do Problema 3 (a)

b. Qual é a relação entre o número de blocos do novo sólido e o número de blocos do original (Problema 3a)?

c. Obteria você a mesma razão se dobrasse um par de dimensões diferentes?

6. Escreva uma proposição relatando o que acontece com o volume de um prisma retangular se duas das suas dimensões são duplicadas.

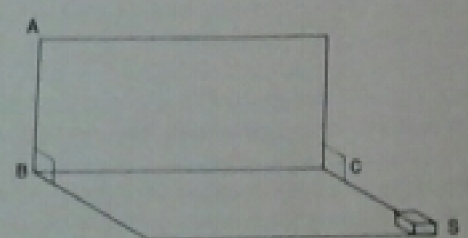
7. a. Duplique cada aresta do sólido do Problema 3a e construa um sólido retangular (6 unidades por 4 unidades por 4 unidades)

b. Qual é a razão entre o número de blocos neste sólido e o número do sólido original?

8. Escreva uma proposição dizendo o que acontece com o volume de um prisma retangular se cada aresta é duplicada.

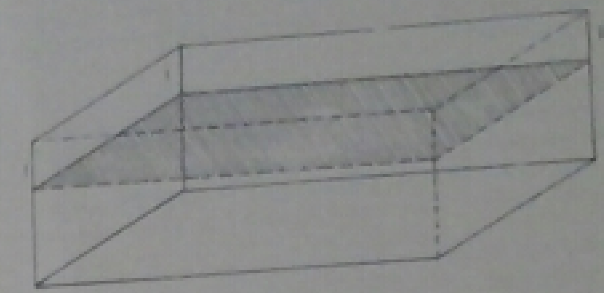
9. PROBLEMA-DESAFIO

Duas placas metálicas são soldadas formando um ângulo reto como na figura.



Uma formiga A deseja locomover-se ao longo das placas para pegar o torrão de açúcar em S. Como deve ela locomover-se para chegar a S pela distância mais curta?

Volume do Prisma Retangular



Já que sabemos como achar a área de qualquer face de um prisma retangular imaginemos que tenhamos determinado a área da face na qual o sólido está apoiado. Suponha que a área dessa face de baixo (muitas vêzes chamada base) tenha 12 unidades quadradas. Se a base consiste de 12 regiões fechadas quadradas unitárias, coloquemos um cúbico unitário em cada uma dessas regiões. Êstes sólidos unitários preencherão uma camada de espessura unitária sôbre a superfície de baixo do sólido. Como há 12 dêstes sólidos, o volume da camada é de 12 unidades cúbicas. Você viu exemplo de tais camadas nos problemas da última seção. Uma vez que a superfície superior da camada é igual a superfície da base, uma segunda camada pode ser colocada sôbre a primeira e assim por diante. Se a altura do prisma fôr de 3 unidades, então será exatamente preenchido com 3 camadas, e o número, V, de unidades de volume será então dado por

$$V = 3 \times 12 = 36$$

Assim o volume é 36 unidades cúbicas.

Se a medida da altura fôr um número racional que não seja um número inteiro, como por exemplo, $2\frac{1}{3}$ unidades, então duas camadas, não o preencherão completamente, mas três camadas serão demais. De fato, se cortarmos a terceira camada horizontalmente, precisamos utilizar apenas o terço inferior da terceira camada. O volume dêste é $(\frac{1}{3})$ (12) unidades cúbicas, e o volume total do prisma é $2\ (12) + (\frac{1}{3})$ (12) unidades cúbicas, ou $(2\frac{1}{3})$ (12) unidades cúbicas, ou 28 unidades cúbicas.

Supuzemos que a base era exatamente constituida de unidades inteiras. Que você faria se a base não contivesse um número inteiro de unidades, como poderia acontecer se a base fôsse 8 unidades por $1\frac{1}{2}$ unidades? Você chegaria à mesma conclusão a cêrca do volume? Por que?

Exercícios 8-2b

1. Determine o volume do interior de um quartinho de $8\frac{1}{2}$ pés de altura se o piso tem 10 pés quadrados.

2. A base de um tanque de areia de crianças é uma região fechada retangular, e sua área é 24 pés quadrados. Se a caixa tem 10 polegadas de profundidade, determine seu volume.

3. Escreva uma proposição dizendo como determinar o número de unidades cúbicas de um prisma retangular se o número de unidades quadradas da base e o número de unidades da altura são conhecidas.

4. Que profundidade deve ter o tanque de areia do Problema 2 se a caixa deve ter 48 pés cúbicos?

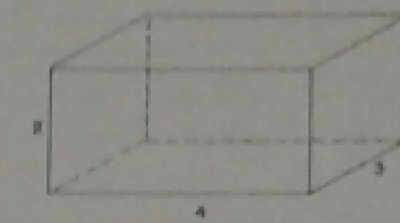
5. Um homem está fazendo uma caixa de madeira para conter 260 centímetros cúbicos de areia. Para ajustá-la a um certo espaço a caixa deve ter 13 centímetros de comprimento. Quantos centímetros quadrados de área deve ter a base da caixa? Escreva uma sentença numérica que descreva êste problema. Expresse ainda a resposta do problema em metros quadrados.

6. Os regulamentos de saúde no distrito dizem que as salas das escolas devem ter 30 decímetros cúbicos de ar por criança. Se uma sala tem um piso de 180 decímetros quadrados e tem 3 metros de altura, pode o diretor colocar 30 crianças nela, legalmente? Qual é o número máximo de crianças que podem legalmente ser designadas para ela?

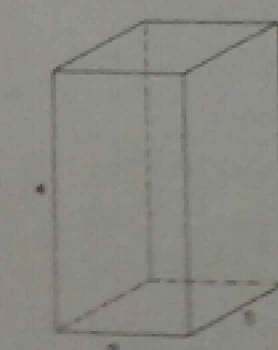
7. Uma caixa retangular tem h unidades de altura e tem uma base cuja área é B unidades quadradas. Escreva uma sentença numérica mostrando como obter o número, V, de unidades cúbicas de volume em seu interior, se os números h e B são conhecidos. Note que isto é uma setença matemática para estabelecer o que você fez no Problema 3.

Observe a solução do último problema. Você precisa saber a forma exata da base? Que você precisa conhecer para poder determinar o volume de um prisma retangular. Êste processo de determinar o volume de um prisma a partir da área da base e altura sem precisar conhecer a forma exata da base será utilizada novamente quando você considerar outros prismas e cilindros.

Se conhecermos tôdas as arestas de um prisma retangular, sabemos como determinar a área da base, portanto, podemos fàcilmente obter o volume.



Num prisma retangular 4 unidades por 3 unidades por 2 unidades, provàvelmente pensaríamos na base como a maior face. A área desta face é 4 x 3 unidades de superfície portanto o volume, pelo Problema 4 acima, seria 2 x (4 x 3) unidades de volume. Note que o número 4 x 3 que está encerrado nos parênteses é o número de uni- unidades quadradas da área da base. Se levantarmos o prisma pela extremidade (ou girarmos nosso pescoço de um ângulo reto) pensaremos noutra face como base.



Achamos que a área da base é 2 x 3 unidades de superfície e o volume do sólido é 4 x (2 x 3) unidades de volume. Apoiando o prisma em sua terceira base, achamos que o volume é 3 x (2 x 4) unidades de volume. Já que o sólido é o mesmo nas diversas posições parece-nos óbvio que

$$2 \times (4 \times 3) = 4 \times (2 \times 3) = 3 \times (2 \times 4)$$

É isto verdadeiro? Se não, onde está o êrro em nossa discussão? Se verdadeiro, que propriedade ou propriedades dos números racionais isto ilustra?

Exercícios 8-2c

1. O fundo de uma gaveta necessita duas fôlhas de papel de tipo ofício colocadas, lado a lado (Papel tamanho ofício tem 22 cm por 32 cm). Se a gaveta tem 10 cm de profundidade determine seu volume. Se o fundo e os lados desta gaveta vão ser forrados com papel encerado quantos centímetros quadrados de papel encerado serão necessários de modo que fique completamente forrada?

2. Uma mulher tem alguns cobertores para estocar. Ela calcula que quando dobrados êles ocuparão 16 decímetros cúbicos de espaço. Poderia ela guardá-los num baú de 5 decímetros de comprimento, 15 centímetros de largura e 2 decímetros de altura? Se o baú tivesse o mesmo comprimento e altura, mas tivesse 40 centímetros de largura, poderia ela guardar os cobertores no baú?

3. Escreva uma proposição em palavras dizendo como obter o número de unidades cúbicas no volume de um sólido retangular se o número de unidades do comprimento, da largura e da altura são conhecidos.

4. Se ℓ, w, h, representam os números de unidades no comprimento, largura e altura de um prisma retangular, escreva uma sentença numérica dizendo como determinar o número de unidades cúbicas, V, do volume do interior do sólido.

5. Quantas polegadas cúbicas há num pé cúbico? Quantos pés cúbicos há numa jarda cúbica? Demonstre como foram obtidas suas conclusões.

6. a. Um cubo tem arestas de 3 centímetros. Qual é o volume do cubo?

   b. É êsse volume maior ou menor que 3 centímetros cúbicos? Tenha cuidado em não confundir o volume de um cubo de 3 centímetros de aresta com o volume de um cubo de medida 3 centímetros cúbicos.

   c. Se n é o número de centímetros da aresta de um cubo, é verdade que o volume de um cubo de n centímetros de aresta é maior que n centímetros cúbicos?

7. Se um prisma retangular tem 2 centímetros de comprimento e 1 centímetro de largura, qual é sua altura se o sólido retangular deve ter o volume de um centímetro cúbico? Faça um modêlo de papel dêste prisma para ilustrar uma possível forma diferente para o volume de um centímetro cúbico.

8. O volume do interior de um prisma retangular de 59 cm de comprimento, 37 cm de largura e 23 cm de altura é dado por $(23 \cdot 37 \cdot 59)$ centímetros cúbicos? (Não efetue a multiplicação) Escreva uma expressão como essa para um prisma retangular com medidas duplas das do primeiro prisma. Fatore esta expressão; se algum fator ocorrer mais que uma vez, escreva-o com um expoente. Quantas vêzes o segundo volume é maior que o primeiro?

*9. Usando raciocínio análogo ao do Problema 8, diga o que acontece com o volume de um prisma retangular se tôdas suas dimensões são triplicadas. O que

acontece com o volume de um prisma retangular se tôdas suas dimensões são triplicadas? O que acontece se duas dimensões são duplicadas e a terceira triplicada.

Os volumes obtidos aqui pela multiplicação serão corretos se o comprimento, a largura e a altura forem corretos. Como estas quantidades são sempre aproximadas, precisaríamos na realidade utilizar o sinal de $\approx$ "aproximadamente igual", ao escrever afirmação acêrca das medidas. Nos problemas restantes abaixo, utilize êste sinal onde fôr necessário.

10. Um bloco de pedra com a forma de um sólido retangular tem um volume de $2\frac{1}{2}$ metros cúbicos. Êle pesa cêrca de 600 quilos por metro cúbico. Qual é seu pêso total?

11. Um apartamento residencial está construído com a forma de um prisma retangular 210 pés de comprimento, 30 pés de largura e 30 pés de altura. Quantos pés cúbicos de espaço há na construção? (Ignore a espessura das paredes). Expresse o volume também em jardas cúbicas.

12. Um fole elétrico é capaz de deslocar 3375 centímetros cúbicos de ar por minuto. Quanto tempo levará o fole para trocar o ar de um compartimento de 27 centímetros por 25 centímetros por 10 centímetros?

13. Imagine um edifício com a forma de um cubo de $\frac{1}{10}$ km de lado. Se as pessoas do edifício insistem que deve haver 100 centímetros cúbicos de espaço por pessoa, quantas pessoas poderá o edifício acomodar?

14. Um grande tanque de areia com base de 10 metros de comprimento por 9 metros de largura é construído num parque. Um caminhão transportador de areia que transporta 180 metros cúbicos de areia está esvaziando a caixa. Se a areia é retirada, qual é a profundidade do tanque de areia?

15. Um tesouro de piratas encerrado num cofre foi desenterrado e descobriu-se que estava cheio de ouro. O cofre era um prisma retangular de 2 decímetros e 6 centímetros de comprimento, 18 centímetros de largura e 10 centímetros de profundidade. Admitindo ar no espaço entre as peças de ouro, podemos supor que o ouro pesa 300 quilos. Poderiam 5 homens, cada um dos quais podendo carregar 60 quilos, tirar o cofre do buraco?

16. Um bastão de ferro deve ser construído de modo que tenha seção quadrada de 1 cm de lado. Isto é, a extremidade assemelha-se à figura a seguir. Se um centímetro cúbico de ferro fosse moldado nesta fôrma, qual seria o comprimento do bastão?

°17. *Se um edifício tivesse uma milha cúbica, isto é, fosse um cubo cuja aresta medisse uma milha, haveria espaço para tôda a população dos Estados Unidos (cêrca de 178 000 000)? Para a população da China (cêrca de 400 000 000)? Poderia você acomodar a população de ambos os países juntos? (Exija 10 jardas cúbicas por pessoa).*

°18. O comprimento, a largura e a altura de um prisma retangular são medidas como $10\frac{1}{2}$ centímetros, $5\frac{1}{2}$ centímetros e $3\frac{1}{2}$ centímetros. Determine o volume de seu interior a partir dessas dimensões.

°19. Se as dimensões do Problema 18 são entendidas como tendo a precisão de $\frac{1}{2}$ cm (i.e. com aproximação de meio centímetro) então:

a. O comprimento verdadeiro está entre __?__ centímetros e __?__ centímetros.

b. A largura verdadeira está entre __?__ centímetros e __?__ centímetros

c. A altura verdadeira está entre __?__ centímetros e __?__ centímetros.

°20. a. O menor prisma retangular que pode ser descrito pelas medidas do Problema 18 terá __?__ centímetros por __?__ centímetros por __?__ centímetros.

b. O maior prisma retangular que pode ser descrito pelas medidas do Problema 18 terá __?__ centímetros por __?__ centímetros por __?__ centímetros.

c. O volume do menor prisma é __?__

d. O volume do maior prisma é __?__

e. A diferença entre o menor volume possível e a resposta do Problema 18 é __?__

f. A diferença entre o maior volume possível e a resposta do Problema 18 é __?__

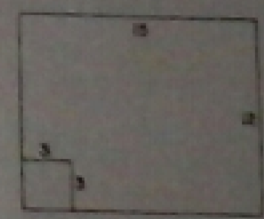
g. O êrro máximo possível na resposta do Problema 18 é portanto __?__

h. Escreva a resposta do Problema 18 na seguinte forma:

O volume é ________ (resposta do Problema 18) ± ________ (maior êrro possível) centímetros cúbicos

Os Problemas 18, 19 e 20 mostram, como no caso da área, que o êrro num volume obtido após multiplicar medidas aproximadas é geralmente muito maior do que a forma que resposta sugere. Devemos lembrar que ao escrever a resposta do Problema 18 como $183\frac{3}{4}$ centímetros cúbicos, não dizemos que êste resultado é a menos de $\frac{1}{4}$ de centímetro cúbico. De fato, o êrro pode ser quase 18 centímetros cúbicos.

Provàvelmente a figura mais simples possível não contida num plano é um prisma retangular. De fato, com o tempo aprenderemos a determinar os volumes de outros sólidos determinados por diversas figuras como outros prismas, cones, cilindros, esferas, etc. Mas está claro que não podemos considerar tôdas as formas possíveis individualmente. Muitas vêzes, podemos obter os resultados somando ou subtraindo volumes que já conhecemos. Por exemplo, suponha que num recinto de 15 metros de comprimento, 12 metros de largura e 8 metros de altura, um homem construiu uma despensa em um dos cantos que chega até o teto e tem uma base de 3 metros de lado. O plano do piso assemelha-se à figura abaixo:



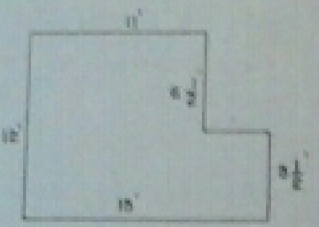
Como você determina o volume do espaço restante no quarto? Qual é êsse volume?

Suponha, entretanto, que estejamos lidando com um sólido de forma irregular que não parece ser constituído de prismas retangulares. Para ser definido, suponha que você tenha tomado uma pedra de forma irregular numa estrada, e você deseja saber qual é o seu volume. Veja se você pode imaginar um ou mais métodos para determinar êste volume.

Exercícios 6-2d

1. Meça o volume de uma pedra ou outro objeto irregular pelo método que você imaginou.

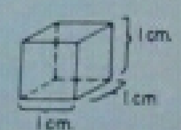
2. A planta do piso de um quarto é como se mostra



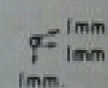
Quantos metros quadrados de tapete, de parede a parede, seriam necessários para o piso? Qual é o volume do interior do quarto se êle tem 3 metros de altura?

3. Uma copa, cujo piso tem 4 metros por 5 metros, tem 3 metros de altura. Ela contém um congelador que tem 2 pés por 3 pés por 7 pés. Quantos pés cúbicos de espaço sobram no recinto?

Nos exercícios precedentes você calculou áreas de superfícies em têrmos de jardas quadradas, pés quadrados e polegadas quadradas. Você calculou volumes em têrmos de jardas cúbicas, pés cúbicos e polegadas cúbicas. Algumas unidades métricas para medir volume são o metro cúbico, o centímetro cúbico e o milímetro cúbico. O diagrama à esquerda abaixo é uma representação do milímetro cúbico.



1 centímetro cúbico



1 milímetro cúbico

Exercícios 8-2e

\# 1. Quantos milímetros cúbicos há em 1 centímetro cúbico?

2. Quantos centímetros cúbicos há em um metro cúbico?

3. Quantos milímetros cúbicos há em um metro cúbico?

4. Desenhe um cubo de aresta 3 cm. Desenhe também um prisma retangular cujo volume seja 3 centímetros cúbicos. Qual tem maior volume?

5. O comprimento, a largura e a altura de um prisma retangular são 2 metros, 3 metros e um metro. Determine sua superfície total e seu volume.

6. Suponha que num quarto de 5 metros de comprimento, 4 metros de largura e 3 metros de altura, um homem constrúa um gabinete num dos cantos. Êste gabinete chega até o teto e tem uma base de 1 metro de lado. Determine:

a. O volume do quarto sem o gabinete

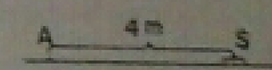
b. O volume do interior do gabinete

c. A diferença (a) - (b) acima

d. É (c) o volume do espaço restante?

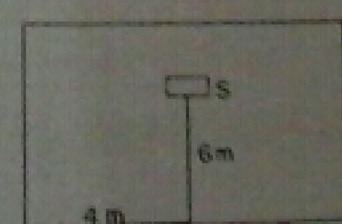
Dimensão

Considere duas moscas apoiadas lado a lado num ponto A do rodapé de um quarto. Uma delas está tentando dirigir-se para um torrão de açúcar que está também no rodapé. Que direção deve ela tomar?



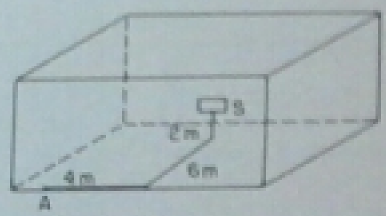
Presume-se que tudo que ela deva dizer seja "Siga pelo rodapé e percorra quatro metros -- você não pode errar!". A descrição completa onde o açucar está localizado no rodapé pode ser dado por um número e uma direção. Por esta razão a aresta do quarto é <u>uni-dimensional</u>. De fato a seção do rodapé seguida pode ser um simples segmento ou pode dobrar num ou mais cantos; qualquer segmento ou curva simples fechada é <u>uni-dimensional</u>.

Se o torrão de açúcar S está em qualquer outro lugar no meio do piso isto representa mais que um problema de direção de vôo. Sua amiga não pode chegar lá apenas seguindo o rodapé. Que tipo de instruções devem ser transmitidas? Um dos caminhos mais simples poderia ser o mostrado abaixo.



"Siga o rodapé por 4 metros. Em seguida vire à esquerda de modo a ficar numa perpendicular ao rodapé e ande seis metros". Neste caso quando o torrão de açúcar estava no interior do retângulo, achou conveniente usar dois números e duas direções pararalelas e uma aresta do quarto para descrever sua localização. Por esta razão o conjunto interno a um retângulo (ou qualquer curva simples fechada) é chamado bi-dimensional.

Se o torrão de açúcar não estiver no piso mas sim em algum outro lugar no quarto, por exemplo, suspenso do teto por um fio, o problema de direção é mais difícil ainda.



As direções então podem seguir assim, "Caminhe ao longo do rodapé quatro metros, depois pelo piso perpendicular ao rodapé, seis metros. Você estará então diretamente sob o açúcar. Para obter o açúcar vôe diretamente para cima dois metros". Desta vez usamos <u>três</u> números e três direções paralelas a uma aresta do quarto para descrever como chegar ao ponto S; o interior do quarto (isto é, o interior de um sólido retangular) é <u>tri-dimensional</u>.

Com base na discussão acima, que dimensões poderia você dar a um ponto?

Grosseiramente, as dimensões do conjunto onde a mosca está, mostra quanta liberdade de movimento ela tem. Se ela precisar ficar num conjunto uni-dimensional consistindo de arestas do piso, ela pode sòmente mover-se numa direção ou na outra ao longo desta aresta. Se ela pode ir a qualquer lugar no conjunto bi-dimensional interior a um retângulo, ela pode andar por todo o piso. Se ela está meramente confinada ao conjunto tri-dimensional interno ao quarto, ela pode voar por todo o quarto.

8-3. <u>Outras Medidas</u>

Em nossa discussão anterior usamos unidades de volume relacionadas a medidas lineares, como o metro cúbico, a polegada cúbica, a jarda cúbica, ou a milha cúbica. Na prática muitas vêzes usamos outras unidades de volume. Se você vai à mercearia, você pede leite, creme ou vinagre em <u>quartos</u> ao invés de metros cúbicos ou polegadas cúbicas. Do me mo modo você pode se referir a um alqueire de

terra. Naturalmente, há relações definidas entre estas várias medidas e o pé cúbico ou polegada cúbica. Você pode achar estas relações aproximadamente.

Seria muito vantajoso eliminar a maioria dessas unidades desnecessárias (Na verdade, esta é uma grande vantagem do sistema métrico acêrca do qual você ouvirá muito com o passar do tempo.) Já que estas unidades são usadas diàriamente, precisamos conhecer a relação existente entre elas, ou então onde encontrá-las.

As medidas neste capítulo trataram apenas com espaço. Retas, superfície, volume e ângulos foram medidos. Há muitas coisas que são medidas que não têm conexão com o espaço. Temperatura é um exemplo; tempo é outro. Todos conhecemos pêso como uma quantidade mensurável. A água, o gás e a eletricidade usada em nossas casas são mensuráveis. Pode você mencionar outras coisas que podem ser medidas?

É interessante notar que muitos artigos são medidos numa escala marcada numa reta. Quando você faz uma leitura num termômetro, está realmente lendo um número numa reta? Para ler tais medidas, lemos as medidas de um segmento de reta. Dois dos artigos acima são realmente medidos por volume. Quais são os medidos por volume? Há medidas lidas em uma escala circular? Medidas envolvem muito mais que determinar o comprimento de um segmento de reta. Duas destas medidas serão consideradas brevemente, tempo e pêso. Como tôdas as outras espécies de medidas, as unidades utilizadas para medir estas coisas devem ter a mesma natureza que a coisa medida. Tempo é medido em unidades de tempo, e pêso é medido em unidades de pêso. Os conceitos científicos de tempo e pêso são complicados e serão deixados para mais tarde. Nós nos ocupamos apenas com o uso de algumas unidades comuns de pêso e tempo.

<u>Pêso</u>

As unidades de pêso são usadas para descrever qual é a "massa" de algum volume dado. Parece engraçado pensar no seu corpo como um volume, mas êle ocupa certa quantidade de espaço e portanto tem pêso. As unidades de pêso no sistema inglês de medidas são a onça, a libra e a tonelada. As relações existentes entre estas unidades são:

16 onças = 1 libra (lb)

2 000 libras = 1 tonelada (t)

Os cientistas que desenvolveram o sistema métrico incluiram unidades de pêso e massa. Massa é, para um cientista, uma medida que é muito parecida com aquela que chamamos pêso que você pode pensar nas duas como sendo a mesma daqui por diante. Você entretanto deve estar preparado para desfazer-se desta idéia algum dia, pois a diferença entre as idéias de massa e peso são de muito grande importância na Física. Para convencê-lo de que há diferenças mencionaremos uma das mais importantes dentre elas. O pêso de um objeto tal como seu corpo depende da distância dele ao centro da Terra. Seu pêso poderá ser menor no topo do Pico das Bandeiras que em sua casa, e seria muito menor numa nave espacial que estivesse tão longe da Terra como, digamos, a Lua. A <u>massa</u> de seu corpo entretanto seria a mesma em qualquer dêsses lugares. Ela não depende do lugar onde seja medida.

Acontece que as unidades métricas para massa são mais comumente usadas para descrever um objetivo quanto ao pêso, e é nessa acepção que as usaremos. Aqui o sistema métrico decimal tem uma grande vantagem sôbre o sistema inglês porque as medidas de massa estão relacionadas com as de volume. A massa de um centímetro cúbico de água à temperatura e pressão determinadas é uma unidade, uma grama. Isto é importante, pois a unidade de massa pode ser obtida sempre por qualquer pessoa que possa medir um dado volume de água com precisão.

Um objeto cuja massa seja 1 000 gramas é dito ter massa de um quilograma. Estas são as únicas unidades métricas de massa que serão usadas por enquanto.

1 000 gramas (gm) = 1 quilograma (kg)

Você com certeza já utilizou outras no curso Primário. Relei-as agora.

Tempo

A unidade básica de pequenas divisões de tempo é a hora. Duas unidades menores são obtidas pela divisão da hora em 60 partes iguais, cada uma das quais constitui um minuto, 60^2 ou 3 600 partes iguais, cada uma das quais constitui um segundo. Maiores períodos de tempo estão relacionados aos movimentos do Sol e da Lua. Você deverá conhecer as relações entre as unidades: dia, semana, mês e ano.

60 segundos = 1 minuto

60 minutos = 1 hora

24 horas = 1 dia

7 dias = 1 semana

$4\frac{1}{2}$ semanas $\approx$ 1 mês

30 dias $\approx$ 1 mês

52 semanas $\approx$ 1 ano

365 dias $\approx$ 1 ano

12 meses = 1 ano

Devemos notar que as relações entre dia e mês, semana e mês, semana e ano, e dia e ano são apenas aproximadas. Isto é em parte devido ao fato de que a Terra leva algumas horas e minutos além de 365 dias para completar a sua órbita em tôrno do Sol.

Exercícios 8-3a.

1. Uma escola inicia às 8h45 minutos da manhã e fecha às 3h30 minutos da tarde.
   a. Quantas horas e minutos ela funciona?
   b. Quantos minutos há num dia escolar?
   c. Se há 8 aulas de igual período (incluindo uma para almôço) quantos minutos dura cada aula?
   d. Se há apenas 7 aulas de períodos iguais, quanto dura cada período?

2. A escola em questão fica aberta 180 dias por ano. Quantas horas fica funcionando a escola num ano? (Veja Problema 1).

3. Quantos dias há no intervalo de tempo entre 25 de Abril e 5 de Maio? Não conte êsses dois dias.

4. Quanto tempo para recreação você tem por dia se você dorme 9 horas, gasta 6 horas e 45 minutos na escola, estuda 2 horas usa 1 hora e 45 minutos para comer e ajuda sua mãe 1 hora?

5. A água pesa aproximadamente $62\frac{1}{2}$ libras por pé cúbico. Qual é o pêso da água de um aquário que tem 21 polegadas de comprimento, 18 polegadas de largura e está cheio até uma altura de 16 polegadas? (Sugestão: Êste problema torna-se fácil se tôdas as medidas forem expressas em pés).

6. Suco de tomate de marca A tem um rótulo que diz que o pêso é uma libra e 12 onças, enquanto que a marca B diz que o pêso é 30 onças. Qual lata contém mais suco de tomate?

7. Num acampamento fornecem-se alimentos a 70 pessoas por refeição
   a. Se cada pessoa se serve de 6 onças de suco de tomate, quantas onças são necessárias?
   b. Quantas libras há nessa quantidade?
   c. Quantas latas de suco da massa A seriam necessárias? (Veja o Problema 6)
   d. Quantas latas da marca B?

e. Se uma lata da marca A custa Cr$42 a lata da marca B custa Cr$44, qual das duas nos permitirá economizar ao servir uma refeição no acampamento? Quanto economizaríamos?

8. Uma tonelada de carvão ocupa, aproximadamente, 35 pés cúbicos.

a. Quantas toneladas pode conter um depósito de 5 pés por 8 pés por 7 pés?

b. Qual o pêso em libras?

9. Um cm^3 de água pesa 1 grama

a. Quantas gramas pesa 1 metro cúbico de água?

b. Qual o pêso em quilogramas?

10. PROBLEMA-DESAFIO

Que pesa mais, um metro cúbico de água ou um metro cúbico de gêlo? Por que?

Cálculo com medidas

Volte à página 246 e leia os parágrafos referentes ao significado especial dos seguintes sinais: =, + e − quando se referem à medidas. Tenha presente estas idéias quando ler o texto e tente resolver os problemas que se seguem.

É necessário, frequentemente, somar e subtrair medidas. Suponha que João viaje durante 2 horas um dia e durante 3 horas outro dia, e que deseja saber o tempo total da viagem. Outro problema poderia ser: Há 10 litros de leite em uma tina. Se se tiram 3 litros, que quantidade sobra?

Há situações especiais que requerem maior análise. Suponha que as viagens de João tenham sido assim: uma hora no primeiro dia e quinze minutos no segundo dia. Será o tempo total de sua viagem (1 + 15) unidades de tempo, isto é, 16 unidades de tempo? Naturalmente que não! Podemos ver que seu tempo total de viagem não foi 16 horas nem 16 minutos. As medidas devem ser expressas nas mesmas unidades antes de tentar qualquer adição. Isto implica que antes de somar devemos expressar uma hora como 60 minutos, ou então 15 minutos como 1/4 de hora.

Seria tôlo tratar de adicionar 6 pés mais 4 galões! Por que?

Até agora, quando demos nomes diferentes a uma medida, expressamo-la nas mesmas unidades, tal é o caso da distância que se pode expressar pelo número $3\frac{1}{2}$ pés ou pelo número 42 polegadas. Isto, naturalmente, podemos fazer sempre, mas frequente-

mente não convém fazê-lo. Por exemplo, é mais prático usar 2 pés e 5 polegadas que $2\frac{5}{12}$ pés ou a 29 polegadas apesar dos últimos nomes serem corretos para êsse comprimento. Da mesma forma, a duração de uma viagem de trem seria melhor expressa como 2 horas 17 minutos, do que como 137 minutos ou $2\frac{17}{60}$ horas, que também seriam nomes corretos. Portanto, consideraremos aqui tais nomes compostos, sabendo que poderemos evitá-los se quisermos.

Suponhamos agora que João viaje durante 2 horas e 40 minutos no primeiro dia e durante 1 hora e 30 minutos no segundo dia. Desta vez não desejamos expressar a duração da viagem sòmente em horas ou minutos apenas, portanto, devemos tratar as duas unidades separadamente.

Tempo total de viagem = (2 + 1) horas (40 + 30) minutos

= 3 horas 70 minutos

Como 70 minutos são mais que uma hora, podemos e devemos expressá-los como 1 hora e 10 minutos, de maneira que

Tempo total de viagem = (3 + 1) horas 10 minutos

= 4 horas 10 minutos

Neste caso foram efetuadas duas adições separadas e depois uma mudança de unidades. Deixar 70 minutos na resposta teria sido como levar o bôlso cheio de moedas quando podemos trocá-las por cédulas de fácil transporte. Uma mudança como a que vimos, algumas pessoas chamam "simplificação da resposta" ou "expressão da resposta sob a forma mais simples".

Exercícios 8-3b

Adicione e expresse o resultado na forma mais simples.

1.	3h 18 min	2.	15 h 16 min 50 seg
	6h 52 min		12 h 55 min 10 seg

A subtração como a adição, podem ser realizadas sòmente quando as unidades são as mesmas, ou podem ser substituídas de modo que sejam as mesmas. Entretanto, as vêzes achamos outras dificuldades na subtração. Teste o seguinte.

Subtraia	8 jardas 1 pé 4 polegadas
	2 jardas 2 pés 9 polegadas

Como pode você subtrair 9 polegadas de 4 polegadas ou 2 pés de 1 pé? Agora usamos outro importante princípio que usamos anteriormente.

É o inverso da última passagem na adição. Trocamos a forma do minuendo sem trocar seu valor, antes da subtração. O que deve ser feito é mostrado a seguir:

6 yd 1 ft 4 in = 5 yd 3 ft 16 in

2 yd 2 ft 9 in

3 yd 1 ft 7 in

A troca de forma faz-se habitualmente apagando o número original e colocando o novo mais acima. Quando se necessitam mais unidades menores, converte-se uma soma das maiores, das que se seguem nas menores.

Subtraia e expresse a resposta sob a forma mais simples

2. a. 41 jardas 3 pés 1 polegada

19 jardas 8 polegadas

b. Em ambos os casos você deve trocar a unidade maior em uma equivalente em unidades menores? Explique.

3. 5 jardas 2 pés 10 polegadas

3 jardas 6 polegadas

4. 6 h 10 min

4 h 35 min

5. 6 jardas 2 pés 3 polegadas

3 jardas 2 pés 8 polegadas

6. 4 jardas quadradas 2 pés quadrados 40 polegadas quadradas

3 jardas quadradas 8 pés quadrados 105 polegadas quadradas

7. 8 jardas cúbicas 6 pés cúbicos 88 polegadas cúbicas

2 jardas cúbicas 5 pés súbicos 99 polegadas cúbicas

Às vêzes é necessário multiplicar quantidades medidas por um número. Aqui vai um exemplo de um problema em que é necessário. Um pano de 2 pés e 8 polegadas de comprimento é necessário para fazer um cinto para estudantes da patrulha de segurança; quantas jardas de tecido são necessárias? Poderíamos tomar 2 pés e 8 polegadas 15 vêzes e adicioná-los mas é muito mais rápido usar a simplificação da multiplicação. Para multiplicar, multiplicamos cada unidade separadamente e transformamos a resposta em uma forma mais simples, ou à forma que o problema pede.

2 pés 8 polegadas

15

30 pés 120 polegadas = 40 pés = $13\frac{1}{3}$ jardas. Quarenta pés é uma forma simples mas $13\frac{1}{3}$ jardas é a forma que o problema pede.

Multiplique a medida pelo número indicado e expresse a resposta na forma mais simples.

8. 6 h. 18 min.

5

9. 5 yd 2 ft 27 in

19

10. 2 galões 3 quartos

417

11. 5 h. 18 min. 25 seg.

15

12. 2 ton. 1689 libras

38

Quando fôr necessário dividir uma quantidade medida por um número é muitas vêzes mais fácil substituir tôdas as medidas pela menor unidade, como foi mencionado acima antes de fazer a divisão. Após a divisão simplifique a resposta.

Aqui vai um exemplo. Divida um segmento de reta de comprimento 3 jardas 2 pés 8 polegadas em 8 partes iguais.

3 jardas	= 108 polegadas
2 pés	= 24 polegadas
8 polegadas	= 8 polegadas
3 jardas 2 pés 8 polegadas	= 140 polegadas

$140 \div 8 = 17\frac{1}{2}$

Portanto, o comprimento de cada parte $= 17\frac{1}{2}$ polegadas $=$ 1 pé $5\frac{1}{2}$ polegadas. Divida cada medida pelo número indicado e expresse a resposta sob forma simples.

13. (8 h. 16 min.) : 8

14. (23 yd 1 ft) : 10

15. (3 ton. 496 lb) : 32

Trocar tôdas as medidas em têrmos de unidades menores não é absolutamente essencial. Você pode achar interessante resolver o Problema 14 acima sem trocá-las.

Existe uma relação muito interessante entre o explicado nesta seção e o estudo das diferentes bases de numeração. Por exemplo, suponha que escolhemos a base doze para nossos cálculos. Então a expressão 2 pés e 7 polegadas poderia escrever-se como 27_{12} polegadas ou $(\frac{27}{10})_{12}$ pés. Observe que na base doze o número de polegadas quadradas em um pé quadrado seria 100_{doze}.

16. Dê pelo menos um exemplo de unidades de medida conhecidas que poderiam expressar-se muito fàcilmente nas seguintes bases.

   a. Base dois
   b. Base três
   c. Base desesseis
   d. Base sessenta

17. PROBLEMA-DESAFIO

   Uma maçã pesa $\frac{3}{4}$ de quilo mais $\frac{3}{4}$ de seu pêso. Quanto pesa?

8-4. Resumo

1. As unidades utilizadas comumente para medir áreas e volumes se relacionam com as unidades de comprimento.

2. Se c e ℓ são os números de unidades do comprimento e da largura de um retângulo podemos determinar o número de unidades de seu perímetro mediante a proposição numérica: $2p = 2(c + \ell)$.

3. O número A de unidades da área de um retângulo é o produto dos números c e ℓ das unidades de seu comprimento e de sua largura. Como proposição numérica, êste enunciado se escreve

$$A = c\ell$$

Lembre que quando encontramos a área de um retângulo cujos lados são duas polegadas e três polegadas, não multiplicamos 2 polegadas por 3 polegadas para obter a área. Utilizamos a unidade de área 1 polegada quadrada e determinamos que número dessas unidades é necessário para cobrir a região retangular fechada. Êste número obtem-se multiplicando as medidas, 2 e 3, dos comprimentos dos lados. A área é então, (2×3) polegadas quadradas. Ocorre algo análogo para os volumes.

4. O número V de unidades cúbicas do volume de um sólido retangular é o produto do número B de unidades quadradas da área da base pelo número h de unidades lineares da altura. Como proposição numérica êste enunciado escreve-se

$$V = Bh$$

Como a base é um retângulo, esta proposição numérica pode também escrever-se

$$V = c\ell h$$

5. Uma mesma medida pode ter vários nomes diferentes (por exemplo, 108 polegadas, 9 pés, 3 jardas, $\frac{3}{1760}$ milhas); podemos transformá-la em outra utilizando as razões entre as unidades de medida.

6. Uni-dimensional: necessitamos um número e uma direção para fixar a posição de um objeto.

   Bi-dimensional: necessitamos dois números e duas direções para fixar a posição de um objeto.

   Tri-dimensional: necessitamos três números e três direções para fixar a posição de um objeto.

7. Muitas quantidades não geométricas também podem ser medidas. Frequentemente fazemos a medida reduzindo-a à leitura de uma escala reta ou circular, tal como fizemos neste capítulo.

Este livro foi impresso nas Oficinas da Emprêsa Gráfica da "Revista dos Tribunais" S.A., à Rua Conde de Sarzedas, 38, São Paulo, para a Edart Livraria Editôra Ltda. em papel Offset de 1ª, da Indústria de Papel Leon Feffer, especialmente fabricado para esta edição.