SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP

Matemática

Curso Ginasial

EDART — Livraria Editôra Ltda. — S. Paulo

Matemática

Curso Ginasial

Vol. I

Direção editorial
de
Artur Neves e Washington Helou

Pedidos à
EDART LIVRARIA EDITÔRA LTDA.
Rua Conde do Pinhal, 80, 2.º andar
Fones: 37-8689 e 33-1520 — Caixa Postal 9 420
SÃO PAULO — 3, S P.

Matemática

Curso Ginasial
Vol. I

Texto organizado pelo
School Mathematics Study Group

Edição preliminar
1967

EDART LIVRARIA EDITÔRA LTDA.
SÃO PAULO

Título do original:

Mathematics for Junior High School

Volume I - Student's Text - Part 1

Publicado pela YALE UNIVERSITY PRESS, New Haven, EUA

Caixa Postal 2921, São Paulo, Brasil.

Parte I

Traduzida por Lafayette de Moraes, Lydia Condé Lamparelli e Colaboradores

Revista e Adaptada por Lafayette de Moraes.

Datilografia de Marianina Malvezzi.

Prólogo

A contribuição crescente da Matemática para a cultura do mundo moderno, bem como sua importância como uma parte vital da educação científica e humanística, tornou necessária a elaboração de um "curriculum" para as nossas escolas.

Com isto em mente, diversas organizações matemáticas dos Estados Unidos cooperaram na formação do School Mathematics Study Group (SMSG). O SMSG congrega matemáticos de Universidades, professôres de matemática de todos os níveis, técnicos em Educação e elementos representativos da Ciência e da Tecnologia. O objetivo geral do SMSG é o aperfeiçoamento do ensino de Matemática nas escolas do País. A National Science Foundation destinou fundos substanciais para apoiar êste empreendimento.

Um dos requisitos prévios para o aperfeiçoamento do ensino da Matemática em nossas escolas é um curriculum melhorado que leva em conta o crescente uso da Matemática na Ciência, na Tecnologia, em outros campos do conhecimento e, ao mesmo tempo, reflita os recentes avanços registrados na própria Matemática. Um dos primeiros projetos empreendidos pelo SMSG foi o de recrutar um grupo de notáveis matemáticos e professôres de Matemática para preparar uma série de livros de texto que constituíssem um curriculum melhorado de acôrdo com as bases indicadas.

Os matemáticos do SMSG acham que a Matemática apresentada nêste texto é um conhecimentos valioso para todo cidadão bem instruído de nossa sociedade, sendo também importante para o estudante pré-universitário em preparação para trabalhos mais avançados no ramo. Ao mesmo tempo, os professôres do SMSG acham que a apresentação é feita de tal forma que a matéria pode ser ràpidamente compreendida pelos alunos.

Na maioria dos casos, a matéria terá um caráter familiar, mas a apresentação e o ângulo sob o qual é vista serão diferentes. Alguns temas serão completamente novos para o curriculum tradicional. A Matemática deve ser considerada como um assunto vivo e sempre dinâmico e não como patrimônio morto que o passado nos legou. Esta saudável fusão do velho e do nôvo deve conduzir os alunos a uma compreensão superior dos conceitos básicos e da estrutura da Matemática assim como proporcionar um fundamento mais sólido para a compreensão e o uso da Matemática numa sociedade científica.

Isto não significa que êste livro seja considerado como o único caminho definitivo de apresentar corretamente a Matemática a estudantes de nível médio. Ao contrário, é uma amostra do tipo de curriculum melhorado que necessitamos e uma fonte de sugestões para os autores de livros de textos comerciais. Esperamos sinceramente que êstes textos abram o caminho que inspire logo um ensino mais significativo da Matemática, a Rainha e Escrava das Ciências.

Prefácio da Edição Norte Americana

As idéias principais de um Curso de Matemática para o primeiro ciclo do Curso Secundário abordados neste texto são: a estrutura da Aritmética sob um ponto de vista algébrico; o sistema dos números reais como um desenvolvimento progressivo, relações métricas e não métricas na Geometria. Através dêsses tópicos, estas idéias são associadas com as suas aplicações. O importante neste nível são experiências sugestivas que levem a uma apreciação dos conceitos abstratos, do papel da definição, do desenvolvimento do vocabulário preciso e do raciocínio, da experimentação e da demonstração. Progressos relativamente grandes podem ser feitos no trato dêstes conceitos ainda no primeiro ciclo do curso secundário.

Catorze unidades experimentais para uso no 7º e 8º graus foram escritas no verão de 1958 e testados aproximadamente por cem professôres no ano escolar de 1958-1959. Com base nessa experiência, estas unidades foram revistas durante o verão de 1959 e, com algumas unidades novas, foi escrito um livro modêlo para o grau 7 e um livro de unidades experimentais para o grau 8. No ano escolar 1959-60 êstes livros para o 7º e 8º graus foram usados por cêrca de 175 professôres em diversas regiões do país e posteriormente revistas no verão de 1960.

A Matemática é fascinante para muitas pessoas pelas oportunidades que oferece para a criação e a descoberta assim como pela sua utilidade. É contínuo e rápido o seu crescimento no sentido de satisfazer tanto a curiosidade quanto às necessidades de aplicação. Os estudantes de ginásio já podem formular questões matemáticas e levantar hipóteses que êles mesmos podem testar e talvez aproveitar algumas; podem também desenvolver processos sistemáticos para tratar problemas sejam ou não problemas de rotina ou de soluções imediatamente determináveis. O reconhecimento dêstes importantes fatores teve grande importância na seleção do conteúdo e do método encontrados neste texto.

Acreditamos firmemente que a Matemática possa ser estudada com sucesso e satisfação. Nossa esperança é que êste texto seja de grande utilidade para todos os professôres que o utilizem como meio de atingirem os seus objetivos.

Prefácio da Edição Brasileira

A acolhida dispensada à Série de Textos do S. M. S. G. para o Curso Colegial animou o IBECC a lançar a série para o Curso Ginasial com o mesmo espírito que orientou a primeira. Desta vez nos restringimos apenas a um volume, o Volume 1 do "Mathematics for Junior High School" porque êle corresponde à primeira série do Curso Ginasial.

Um tratamento mais aprofundado que o comum dos textos dêste nível é dispensado aos sistemas e às bases de numeração, o que para alguns pode parecer demasiado. Preferimos no entanto reproduzir o texto como no original deixando os eventuais cortes a cargo do professor.

No capítulo referente às unidades de medida, embora tenhamos introduzido alguma modificação pelo uso do sistema métrico, ainda resta farto material empregando as unidades inglesas pela sua aplicação na vida prática.

Os problemas são classificados em três categorias. Os de aplicação de teoria exposta, os que apresentam dificuldade maior, assinalados com (x) e os qualificados como Problema-Desafio cuja solução, em geral, constitui um complemento do material do texto.

Embora escrito para uma realidade diferente da nossa, acreditamos que o texto será de grande utilidade para a juventude estudiosa de nossa terra.

Lafayette de Moraes

ÍNDICE

Capítulo 1

O QUE É MATEMÁTICA?

1-1. Matemática como um Método de Raciocínio

> "Uma vez, durante uma viagem de avião, comecei a conversar com o passageiro que estava ao meu lado. Êle me perguntou em que eu trabalhava. Eu lhe disse que era um matemático. Êle exclamou: "É verdade? Você não se cansa de somar colunas de números durante o dia todo?" E eu tive que explicar-lhe que isto pode ser feito melhor por uma máquina. Meu trabalho consiste principalmente em raciocinar lògicamente.

O que é na verdade esta Matemática da qual tanto se fala hoje em dia? É a arte de contar e calcular? É desenhar figuras e medí-las? É uma linguagem que usa símbolos como um código misterioso? Não, Matemática não é nenhuma dessas coisas. Ela as inclui, porém, é muito mais que tôdas elas. Matemática é um modo de pensar, um modo de raciocinar. Algumas partes da Matemática envolvem experimentação e observação, mas a maioria delas usa o raciocínio dedutivo.

Mediante raciocínio dedutivo, demonstramos que a partir de certas condições dadas, segue-se necessàriamente uma conclusão definida. Na Aritmética você aprendeu como demonstrar proposições sôbre números. Se uma sala de aula possui 7 filas de carteiras com 5 carteiras em cada fila, então temos um total de 35 carteiras na sala. Você sabe que isto é verdade sem contar as carteiras ou sem ter de ver a sala.

Os matemáticos raciocinam desta maneira. Êles demonstram proposições da forma "se .... então". Raciocinando, êles demonstram que se algo é verdadeiro, então algo mais deve ser verdadeiro.

Mediante raciocínio lógico você frequentemente pode encontrar todos os diferentes modos por meio dos quais um problema pode ser resolvido. Às vezes, raciocinando, você pode demonstrar que o problema não tem solução. Todos os problemas dados nos Exercícios 1-1 a seguir podem ser resolvidos mediante raciocínio. Cálculo algum é necessário, embora você possa se valer de algum desenho se achar conveniente. Tente resolvê-los.

Exercícios 1-1

1. Um homem que pesa 80 quilos e seus dois filhos pesando cada um 40 quilos querem atravessar um rio. Se êles tiverem apenas um bote que tem capacidade de carregar com segurança sòmente 80 quilos, qual será a maneira dêles atravessarem o rio?

2. Se o homem do problema 1 pesasse 70 quilos, e seus filhos pesassem respectivamente 50 e 40 quilos poderiam êles usar o mesmo bote? Se não, que pêso o bote deveria suportar com segurança para que êles pudessem atravessar o rio?

3. Um agricultor deseja transportar para outro lado de um rio um pato, uma raposa e um saco de milho. Se o agricultor não estiver com êles, a raposa comerá o pato ou o pato comerá o milho. Se o agricultor tiver sòmente um bote suficiente apenas para carregá-lo assim como uma das outras três coisas, como poderá êle atravessar o rio?

4. É possível medir-se exatamente 2 litros usando sòmente um recipiente cuja capacidade é de 8 litros e outro recipiente cuja capacidade é de 5 litros? Os recipientes não possuem marcas da unidade litro ou qualquer outra marca.

5. <u>PROBLEMA-DESAFIO</u>

Três antropófagos e três missionários querem atravessar um rio. Êles se utilizam de um bote com capacidade sòmente para duas pessoas. Em nenhum momento os antropófagos podem ser mais numerosos que os missionários, mas os missionários podem ser mais numerosos que os antropófagos. Como podem todos atravessar o rio usando o mesmo bote?

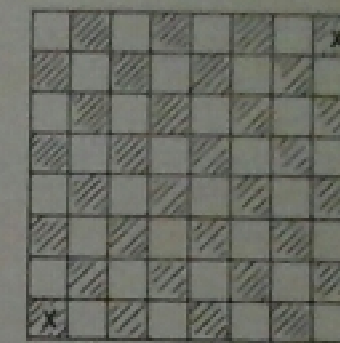
6. <u>PROBLEMA-DESAFIO</u>

Oito bolinhas de gude têm o mesmo tamanho, côr e forma. Sete delas têm o mesmo pêso e a restante é mais pesada. Usando uma balança com dois pratos, como você encontrará a bolinha mais pesada efetuando sòmente duas pesagens?

7. <u>PROBLEMA-DESAFIO</u>

Suponha que você tem um tabuleiro para jôgo de damas e as pedras de dominó. O tamanho do dominó é tal que cobre dois quadrados do tabuleiro. De que maneira você colocaria os dominós no tabuleiro de maneira que todo êle ficasse coberto com exceção dos dois quadrados dos cantos opostos?

Nota: Todos os quadrados têm que ser recobertos, exceto os dois dos cantos opostos. Você também poderá escolher para deixar descobertos os dois quadrados brancos opostos dos outros dois cantos em lugar dos quadrados hachurados marcados com "X".



1-2. <u>Raciocínio Dedutivo</u>

Você pode resolver outros tipos de problemas mediante raciocínio dedutivo. Suponha que a sua classe seja formada por trinta alunos. Você pode demonstrar que pelo menos dois deles aniversariam no mesmo mês? Você pode provar isto de diversas maneiras sem saber os dias dos aniversários de quaisquer deles. Uma das maneiras é raciocinando assim: Imagine doze caixas, uma para cada mês do ano; imagine também que seu professor escreva o nome de cada aluno num pedaço de papel e coloque-os nas caixas convenientes. Se nenhuma caixa contiver mais que um papelzinho, então não poderá haver mais que doze nomes no total. Como existem trinta nomes, então pelo menos uma caixa deverá conter mais que um nome.

Os matemáticos sempre querem chegar ao melhor resultado possível. Aqui, você pode usar o mesmo método para provar que pelo menos <u>três</u> alunos aniversariam num mesmo mês. Se nenhuma caixa contiver mais que dois papelzinhos, então, não poderá haver mais que vinte e quatro nomes no total. Como existem trinta nomes então, no mínimo, três alunos farão aniversários num mesmo mês. Cada problema no conjunto de exercícios seguinte pode ser resolvido pelo processo empregado acima.

<u>Exercícios 1-2</u>

1. Suponha que você vai distribuir um conjunto de cinco lápis entre quatro de seus colegas de classe. Explique como pelo menos um deles ficará com dois lápis.

2. a. Teria você que dar pelo menos dois lápis a uma pessôa se você estivesse distribuindo dez lápis entre seis pessôas?

   b. O que poderá você dizer se estivesse distribuindo uma dúzia de lápis entre cinco pessôas?

3. Qual é o menor número de estudantes que podem fazer parte de uma escola de maneira que você possa estar seguro de que existem pelo menos dois dêles que aniversariam no mesmo dia?

4. Qual é o maior número de estudantes que podem fazer parte de uma escola de maneira que você possa estar seguro que todos êles aniversariam em meses diferentes?

5. Numa cidade existem cinco cinemas. Qual é o menor número de pessoas que teriam que ir aos cinemas de maneira que você possa estar seguro de que pelo menos duas delas verão o mesmo filme?

6. No problema 5, qual é o maior número de pessoas que teriam que ir aos cinemas de maneira que você possa estar certo que nenhum par delas verá o mesmo filme?

7. Se oito chocolates têm de ser distribuidos entre cinco meninos, quantos meninos podem receber três chocolates se cada menino irá receber pelo menos um chocolate?

8. Numa classe de trinta e dois estudantes deseja-se formar vários grupos. Nenhum estudante pode estar em mais de um grùpo. Cada grupo contém de cinco a oito estudantes. Qual é o maior número de grupos que pode ser formado?

9. PROBLEMA-DESAFIO

Qual é a resposta do problema 8 se todo estudante pode estar tanto em um como em dois grupos?

1-3. Da Aritmética para a Matemática

Uma outra maneira dos matemáticos e outros cientistas resolverem problemas é fazendo experiências e observações. Êste método é chamado método experimental. Poderá você pensar em problemas científicos que foram resolvidos assim?

Muitas vezes em Matemática experimentamos para descobrir a maneira geral de resolver um conjunto inteiro de problemas. Depois que o método geral é descoberto, tenta-se provar que êle é lógico e correto por raciocínio lógico.

A parte da Matemática que você conhece melhor é a Aritmética. Freqüentemente em Aritmética você pode obter resultados por raciocínio que o livrará de uma quantidade de trabalho considerável e tempo dispendido em cálculo.

Quando Karl Friedrich Gauss, um famoso matemático, tinha 10 anos, seu professor queria manter a classe em silêncio por um momento. Êle então pediu às crianças que somassem todos os números de 1 a 100, isto é, 1 + 2 + 3 .... + 100. (Nota: para nos livrar de escrever todos os números entre 3 e 100 costumamos colocar reticências que podem ser lidas como: "assim por diante"). Depois de dois minutos Gauss estava de pé para brincar de novo. O professor perguntou-lhe porque não estava êle trabalhando no problema. Êle respondeu "Eu já o fiz". "Impossível"! exclamou o professor. É fácil, respondeu Gauss. Primeiro eu escrevi,

1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100, e depois escrevi os números na ordem inversa:

$$\underline{100} + \underline{99} + \underline{98} + \underline{97} + \ldots + \underline{1},$$ e então somei cada par de números:

$$101 + 101 + 101 + 101 + \ldots + 101.$$

Quando efetuei as adições fiquei com cem vêzes o número 101. Isto me dá 100 × 101 = 10 100. Mas eu usei cada número 2 vêzes; por exemplo, somei 1 a 100 no começo e 100 a 1 no fim. Portanto eu dividi a resposta 10 100 por 2.

A resposta é $\frac{10\ 100}{2}$ ou 5 050.

Quem foi Karl Friedrich Gauss? Quando êle viveu? Você encontrará as respostas a estas questões numa enciclopédia.

Exercícios 1-3

1. Efetue a adição dos números inteiros de 1 a 5, isto é, 1 + 2 + 3 + 4 + 5, usando o método de Gauss. Pode você descobrir outro método rápido diferente do de Gauss?

2. O método de Gauss pode ser aplicado para à adição dos números 0 + 2 + 4 + 6 + 8?

3. Mediante um método rápido, adicione os números ímpares de 1 a 15, isto é, 1 + 3 + 5 + . . . + 15. (Para evitar de escrever os números ímpares entre 5 e 15 colocamos reticências e lemos "assim por diante").

4. Êste problema lhe dará uma chance de fazer uma outra descoberta em Matemática.

	Adicione os números abaixo	Multiplique os números abaixo
a.	1 + 3 = ?	2 x 2 = ?
b.	1 + 3 + 5 = ?	3 x 3 = ?
c.	1 + 3 + 5 + 7 = ?	4 x 4 = ?

d. Observe as somas e os produtos à direita. Qual parece ser a regra geral para encontrar as somas dos números à esquerda?

e. Aplique a sua nova regra para 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15. Confira sua resposta com o exercício 3.

5. Adicione os números ímpares 7 + 9 + 11 + ... + 17.

6. Adicione os números pares de 22 a 40: 22 + 24 + 26 + ... + 40.

7. Adicione todos os números inteiros de 0 a 50: 0 + 1 + 2 + 3 + ... + 50.

8. O método de Gauss é aplicável para quaisquer conjuntos de números, comecem êles por 0 ou 1, ou outro número qualquer?

9. PROBLEMA-DESAFIO

Adicione todos os números de 1 a 200 pelo método de Gauss. Faça o mesmo para os números de 0 a 200. As respostas para êstes dois problemas coincidem? Por que?

10. PROBLEMA-DESAFIO

Suponha que o professor de Gauss pediu-lhe para que efetuasse a adição dos números: 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 256. (começamos com o número 1 e duplicamos cada número para obtermos o seguinte). Há aqui algum método que seja rápido para calcular a soma?

11. PROBLEMA-DESAFIO

Se você tiver um método rápido para fazer o problema 10, tente êste: adicione os números 2 + 6 + 18 + ... + 486, onde começamos por 2 e multiplicamos cada número por 3 para obter o seguinte. A resposta é 728. Poderá você encontrar uma maneira rápida de obter esta soma?

1-4. Ramos da Matemática

Os matemáticos pensam em tôda espécie de questões e problemas complicados. Quando resolvem um problema, em geral êles criam novos ramos da Matemática que devem ser acrescentados ao acervo sempre crescente do conhecimento matemático. Os novos ramos da Matemática podem ser usados juntamente com os antigos na resolução de problemas ainda mais difíceis. Êste processo tem se verificado durante séculos e o acervo total da Matemática é muito maior talvez do que você possa imaginar. A Aritmética é um ramo da Matemática. A Trigonometria, Algebra e a Geometria Plana que estudaremos são outros ramos da Matemática.

Atualmente existem mais de oitenta ramos diferentes de Matemática. Nenhum matemático sòzinho pode aspirar estudar mais do que uma pequena parte do todo. Na verdade o estudo de qualquer um desses oitenta ramos ocuparia um gênio matemático durante tôda a sua vida. Portanto, não se espante se seu professor às vezes não sabe responder de pronto alguma pergunta que você formule.

Além do mais, centenas de páginas de matemática nova são criadas todos os dias do ano, muito mais do que uma pessoa pode ler num mesmo dia. De fato, nos últimos 50 anos, a Matemática desenvolveu-se mais do que em todos os milhares de anos da existência humana.

Chance ou Probabilidade

Um dos oitenta ramos da Matemática que está interessando os matemáticos e que também é útil para problemas atuais é o estudo da chance ou probabilidade.

Muitos acontecimentos de nossas vidas estão sujeitos à incerteza, ou chance. Há uma possibilidade de que o alarma contra fogo toque enquanto você estiver lendo esta setença. É possível que o professor dê prova hoje. É difícil predizer exatamente a possibilidade de ocorrência de qualquer um dêsses acontecimentos, embora em tais casos possamos ficar satisfeitos em saber que a probabilidade é muito pequena.

Muitas vêzes, entretanto, gostaríamos de calcular a possibilidade mais precisamente para poder comparar as possibilidades de várias alternativas. Os matemáticos têm estudado tais questões por longos anos, e êste ramo da Matemática é chamado probabilidade.

Disney necessitou da ajuda dos matemáticos

Um número de tais questões de probabilidade foram respondidas a Walt Disney antes da construção da Disneylândia. Quando se propôs a construir a Disneylândia, Disney queria saber de que tamanho deveria construí-la, onde construí-la, quanto cobrar pela entrada e que espécie de divertimentos deveria apresentar nos feriados. Êle não queria arriscar um investimento de US$ 17.000.000 (dezesete milhões de dolares) para construir a Disneylândia sem saber algo sôbre a probabilidade de sucesso.

Na verdade êle queria a resposta para uma questão dêste tipo: Se eu construo um certo tipo de divertimento, em determinado lugar e cobro tanto pela entrada, então qual é a possibilidade que terei de obter certo lucro?

Disney dirigiu-se ao Instituto de Pesquisa de Stanford (Stanford Research Institute). Alí êle conversou com um grupo de matemáticos que são especialistas em aplicar raciocínio matemático a problemas de negócios. Êste pessoal primeiro coletou dados estatísticos sôbre o povo, suas rendas, seus hábitos de viagens, divertimentos preferidos, número de crianças, etc. Combinando estas informações com raciocínio matemático êles predizíam a probabilidade que o povo teria de ir a um certo local e pagar um certo preço pela entrada. A partir de um raciocínio como êste, êles puderam predizer a probabilidade de ter uma Disneylândia com sucesso, com certo tipo de diversão em um certo local. Conhecendo as chaves de sucesso sob certas condições dadas, Disney estava bem capacitado para decidir como e onde construir a Disneylândia e quanto cobrar pelo ingresso.

Êste é um exemplo típico de como se usa probabilidade para calcular o grau de incerteza de um acontecimento ou a chave de sucesso de qualquer ação que se projeta realizar.

Os problemas seguintes são para lhe dar alguma idéia do que é probabilidade simples.

Exercícios 1-4

1. Para ver como um matemático pode começar a pensar sôbre probabilidade, imagine que você joque duas moedas. Existem quatro maneiras igualmente possíveis das moedas cairem.

1a. moeda	C	C	R	R
2a. moeda	C	R	C	R

Estamos usando C para representar "cara" e R para indicar o reverso da moeda, ou seja, "coroa". Dizemos então que a probabilidade de sair duas caras com duas moedas é uma em quatro ou seja $\frac{1}{4}$. Não podemos predizer que isto acontecerá tôda vez que as moedas forem jogadas, mas nós podemos predizer que se as duas moedas forem jogadas cêrca de 100.000 vêzes, então as duas caras sairão cêrca de $\frac{1}{4}$ de vêzes. Tente esta experiência 100 vêzes com alguns de seus colegas e anote seus resultados. Anote outras experiências da classe inteira e veja quantas CC saíram do número total de jogadas.

2. Qual é a probabilidade de sair duas coroas quando duas moedas são jogadas?

3. Qual é a probabilidade de cair cara quando uma moeda é jogada?

4. Qual é a probabilidade de uma pessoa retirar um ás de espada de um baralho completo de 52 cartas?

5. Qual é a probabilidade de uma pessoa retirar um ás qualquer de um baralho completo de 52 cartas?

6. Qual é a probabilidade de sair um dois quando um dado é jogado?

7. Existem quatro ases (de um baralho de 52 cartas) para serem distribuidos a quatro pessoas. Qual é a probabilidade da 1a. pessoa que recebe carta, receber um ás de cópas?

8. PROBLEMA-DESAFIO

   Jogando-se dois dados qual é a probabilidade de sair a face "um" em cada dado?

9. PROBLEMA-DESAFIO

   Qual é a probabilidade de sair três caras quando três moedas são jogadas?

   Qual é a probabilidade de sair exatamente duas "caras"? No mínimo duas "caras"?

1-5. Matemática do Presente

Você está vivendo num mundo que muda ràpidamente. Para ter alguma idéia das mudanças nos últimos vinte anos, pergunte aos seus pais como era a vida quando êles iam ao ginásio. Você verá que coisas como TV em côres, submarinos atômicos, aviões a jato e satélites artificiais são todos invenções recentes. Existem medicamentos e vacinas novas. Novas maneiras de se fazer decisões em negócios. Existem novas máquinas de calcular. Existem centenas de outras novas descobertas realizadas cada dia. Pode você mencionar algumas descobertas, progressos ou produtos recentes? O interessante é notar que a Matemática e os matemáticos tomaram parte ativa em quase tôdas elas.

Na industria telefônica a Matemática é usada no desenho de circuitos acoplados, de maneira que quando você discar um número tenha uma chance boa de não obter sinal de ocupado. A Matemática contribuiu especialmente na descoberta de melhores maneiras de enviar informações através de fios telefônicos ou por meio de sistema de comunicações sem fios.

Na indústria da aviação (aeronáutica) a Matemática ajuda determinar a melhor forma para um avião ou nave espacial e o quanto deve ser sólida sua construção. Outro ramo da Matemática prediz se um avião se desmanchará quando estiver voando numa tempestade a alta velocidade. Facetas ainda diferentes da Matemática ajudam desenhar instrumentos como o rádio e o radar usados para guiar o avião assim como comunicar-se com outros aviões e aeroportos.

Em quase tôdas as industrias, a Matemática (a probabilidade que você estudou na última secção) é usada para predizer a durabilidade ou eficiência dos bens fabricados. Muitas vêzes o fabricante deve garantir o funcionamento correto de seu produto baseado numa predição matemática. Se os matemáticos errarem,o fabricante perderá dinheiro (e o matematico poderá perder seu êmprego).

Outros ramos modernos da Matemática ajudam o homem de negocios a decidir o quanto deve produzir, qual a melhor maneira de programar a produção para não ter de pagar horas extraordinárias, e onde construir novas instalações afim de reduzir o gasto com transporte.

Na indústria do petróleo a Matemática é usada em larga escala para se decidir quantos poços devem ser perfurados e onde perfurar, afim de obter a mais alta quantidade de possível do produto nos lençois de petróleo com o mínimo de gasto. Técnicos matemáticos também ajudam o fabricante de gasolina resolver quanto de gasolina deve ser refinada de várias qualidades, partindo de diferentes tipos de petróleo.

Em todos êsses negócios e industrias, assim como nas universidades e organismos governamentais, o cálculo matemático é usado em larga escala, assim como os computadores eletrônicos.

Por que a Matemática é agora usada em tantas áreas? Uma razão é que o raciocínio matemático, e os ramos de Matemática até agora desenvolvidos,fornecem uma maneira precisa para resolver situações complicadas e de analisar problemas difíceis. A linguagem matemática se expressa por símbolos curtos, todos precisamente definidos e usados de acôrdo com regras lógicas definidas. Isto freqüentemente torna possível estudar problemas muito complicados para poderem ser visualizados. Freqüentemente, o raciocínio matemático prediz a possibilidade ou impossibilidade de uma experiência científica. As vêzes, a resposta mais útil que um matemático pode encontrar fora de qualquer dúvida é que o problema (ou máquina, ou sistema, ou experiência) que está sendo estudado é impossível. O trabalho matemático pode também mostrar porque o problema é impossível na forma apresentada e pode sugerir uma maneira de evitar as dificuldades.

1-6. Matemática como Vocação

Antes da Segunda Guerra Mundial quase todos os matemáticos eram empregados como professôres nas escolas e colégios. Desde então, o mundo da Matemática e o mundo dos matemáticos mudaram bastante. Atualmente existe um número de matemáticos que jamais houve. No 1º e 2º ciclos do curso secundário existem cêrca de mais de 50 000 pessoas que ensinam matemática. Há mais de 5 000 professôres empregados em colégios e universidades. Mas agora (1960), nos negocios, nas industrias, no govêrno dos Estados Unidos há mais de 20 000 pessoas trabalhando como matemáticos.

O Govêrno Federal norte-americano emprega matemáticos em numerosos organismos para várias atribuições diferentes. Milhares de pessoas trabalham com computadores e usam matemática para cálculos. Industrias de todos os tipos estão empregando matemáticos para resolverem problemas matemáticos complexos, para ajudarem outros trabalhadores que tenham dificuldades matemáticas e também para ensinarem matemática a seus empregados.

Estas mudanças são devidas ao avanço revolucionário sofrido pela tecnologia e pela ciência. Estas mudanças ainda estão se processando. Quando você estiver apto para trabalhar oportunidades para uma carreira em Matemática serão sempre mais numerosas e variadas.

Nos jornais, revistas, etc. do momento você encontrará muita informação sôbre a Matemática e sua função na vida atual. As atividades das seções 1-6 e 1-7 sugerem algumas maneiras dessas informações serem encontradas.

Você deveria começar sua pesquisa agora e continuar coletando dados durante o ano. Muitos ítens serão apropriados para o seu jornal mensal da classe.

Atividades de Classe 1-6

1. Faça uma lista de negocios e industrias que empregam matemáticos e computadores. Você pode fazer isso coletando os anuncios de "precisa-se matemáticos" nos jornais e revistas matemáticas e técnicas (notadamente estrangeiras).

2. Colete informações dadas pelo govêrno sôbre a possibilidade de emprêgo para matemáticos nos serviços oficiais.

3. Procure ler nos jornais, revistas semanais e revistas científicas,artigos sôbre os matemáticos e a Matemática.

1-7. A Matemática e Outras Vocações

Muitas pessoas que não se especializam em Matemática precisam saber muita coisa sôbre a mesma pois quase todos os dias a usam. Estão nesse caso os engenheiros e físicos que têm agora a necessidade em usar Matemática Superior. Todo projeto novo na indústria de aviação, em viagem espacial ou em eletrônica requer maior especialização dos engenheiros, cientistas e técnicos.

A Matemática está agora sendo largamente utilizada em campos tais como estudos sociais, Ciências Médicas, Psicologia, Geologia e administração de negocios. O raciocínio matemático e muitos ramos da Matemática são úteis em todos êsses campos. Muitas aplicações de computadores eletrônicos em negocios e indústria estão a cargo de pessoas que devem aprender algo mais de Matemática e cálculo para desempenharem com eficiência as suas funções. Para trabalhar em tais empregos exige-se que você conheça bastante Matemática. Em suma, para entender estas fases da vida moderna e para apreciá-las suficientemente afim de ser um cidadão útil, você necessitará saber cada vez mais Matemática.

Esta é uma das maiores razões dêste livro estar sendo escrito. Nós sabemos que você necessitará conhecer mais Matemática do que seus pais ou que seus professôres aprenderam. Esperamos fornecer-lhe uma boa base para todos seus estudos futuros em Matemática e outras ciências e ao mesmo tempo dividirmos com você o prazer que se pode encontrar ao descobrir e usar seus conhecimentos matemáticos.

Atividades de Classe 1-7

1. Analise sua pesquisa nos jornais e revistas para obter informes sôbre a oportunidade de trabalho e artigos especiais acêrca das pessoas que empregam seus conhecimentos matemáticos em outras vocações.

2. Procure nos Diários Oficiais para encontrar os requisitos matemáticos para empregos oficiais de engenheiro, físico e estatístico.

3. Descubra os requisitos para algumas das seguintes vocações: (seu orientador profissional poderá lhe ajudar a obter guias e catálogos de colégios)

Contador	Eletricista
Escrivão	Agricultor
Engenheiro Aeronáutico	Mecânico
Engenheiro Agrônomo	Matemático
Pedreiro	Enfermeira
Carpinteiro	Físico
Engenheiro Químico	Encanador
Farmacêutico	Planejador
Médico	Psicólogo
Economista	Estatístico
Engenheiro Eletricista	

1-8. A Matemática como Recreação

Assim como a Música é a arte de criar beleza com sons e a Pintura é a arte de criar beleza com côres e formas, também a Matemática é a arte de criar beleza com combinações de idéias. Muitas pessoas têm um "hobby" fascinante que é divertir-se com a Matemática. Muitas estudam Matemática para entreter-se da mesma forma

que outras pessoas cultivam a Música e a Pintura ùnicamente por prazer.

Durante muitos milhares de anos várias pessoas têm estudado por diversão vários tipos de problemas. Um bom exemplo disto é o problema das Pontes de Königsberg. No comêço do século XVIII a cidade de Königsberg (Alemanha) estava ligada por sete pontes. Muitas pessoas da cidade nesse tempo estavam interessadas em saber se era possível andar pela cidade de maneira a cruzar cada ponte sòmente uma vez.

Pelo diagrama que mostra as tais pontes, você pode descobrir se isto pode ser feito ou não? Você pode estar interessado em saber que um matemático resolveu esta questão no ano de 1736.

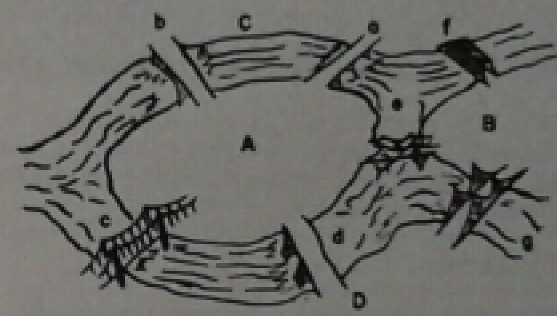


Fig. 1-8a.

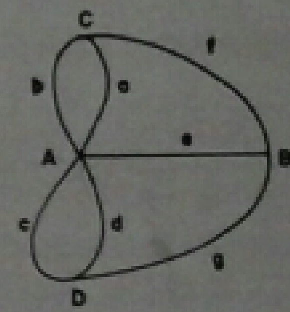


Fig. 1-8b.

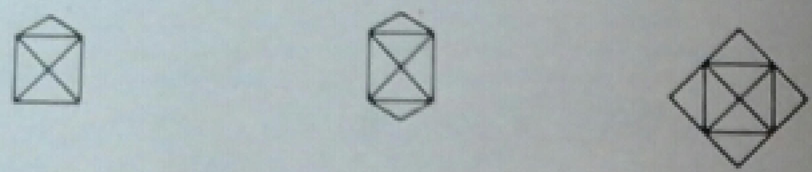
A Figura 1-8b o ajudará ver as várias maneiras de andar através da cidade usando as pontes para ir de uma parte de terra firme à outra. Represente a parte de terra ao norte por C e a parte de terra ao sul por D. A é a ilha e B é a terra à leste. As linhas que partem de A, C, D e B mostram caminhos através das pontes para as várias partes da cidade. As pontes estão representadas por a, b, c, d, e, f, g. Dos pontos B, C e D saem três caminhos juntos e no ponto A cinco caminhos se encontram.

Vários ramos da Matemática foram desenvolvidos por matemáticos como um resultado de seus trabalhos em problemas como êste.

Exercício 1-8

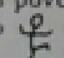
1. PROBLEMA-DESAFIO

Das três figuras abaixo, duas podem ser desenhadas sem tirar o lápis do papel e sem traçar o lápis mais de uma vez sôbre uma reta, enquanto que a outra não pode. Quais são as duas que podem ser desenhadas sem traçar uma reta duas vêzes e sem cruzar qualquer reta?



1-9. Estrutura da Primeira Série Ginasial

Durante êste ano você irá tendo pouco a pouco uma melhor compreensão do que realmente é Matemática. Você terá muitas oportunidades de utilizar a Matemática e o raciocínio dedutivo. Embora Matemática seja muito mais que contar, calcular, medir e desenhar, você usará muitas operações e aplicações nos capítulos seguintes. Os próximos parágrafos lhe darão um quadro geral dos vários tópicos que você explorará.

Você estudará os números desde as marcas feitas pelos povos primitivos na terra para escrever símbolos para números. O símbolo egípcio  (homem atônito) para 1 000 000 e o símbolo babilônico  para 21 (vinte e um) lhe darão uma idéia do que você verá no capítulo seguinte. Você verá que o numeral 100 (lê-se um, zero, zero) nem sempre representa uma centena. Isto o surpreende?

Durante muitos anos você contou números como 1, 2, 3, 4 e assim por diante. Existem outras espécies de números? Sim, você aprenderá muitas outras espécies de números.

Se você observar como os números se comportam quando você os adiciona ou os multiplica, você descobrirá algumas propriedades que sempre se verificam para a adição e multiplicação. Zero e um também gozam de propriedades especiais que você poderá descobrir. Êste ano você estudará os numerais de um modo mais profundo. Para alguns de vocês será a mesma coisa que olhar através de um vidro de aumento (ou lupa). Quando você realmente olhar para um problema com cuidado, descobrirá o quanto mais claro a Matemática torna o problema. Pergunte a você mesmo, "O que aconteceu a êsses números?" Posso afirmar o que parece ser verdadeiro?

Durante muitos anos você usou a palavra "igual" e conhecia um símbolo para ela. As coisas são sempre iguais? Você pode sugerir um símbolo para "não é igual"? Você já está familiarizado com muitos outros símbolos usados em Matemática. Alguns têm sido usados tão freqüentemente que você os usa sem se preocupar muito com êles. Olhe para o símbolo $\frac{23}{30}$. Êste símbolo lhe é familiar? Agora olhe para uma maneira egípcia de escrever esta fração muitos anos atrás: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$. Você concordaria em afirmar que o símbolo $\frac{23}{30}$ é muito mais simples e mais fácil de usar? Novos símbolos serão introduzidos êste ano. Êles deverão ajudá-lo a ser mais preciso nas suas conversações comuns.

Outra parte de seu ano letivo será gasta em considerações sôbre pontos, retas, planos e espaço. Você pode ter idéias sôbre isto. Você já construiu modelos? Se já os fez, terá algumas idéias próprias sôbre pontos, retas, planos e espaço. Estas idéias precisam ser cuidadosamente consideradas e ampliadas. Você pode não concordar com suas primeiras observações depois que estudar mais sôbre êsses conceitos.

Você pode fazer distinções entre quantidades que são contadas e quantidades que são medidas? Espécies diferentes de números são necessários para contar e medir, mas você já estudou algo sôbre êsses números e está pronto para usá-los em medições de vários tipos de objetos. Seus professôres de trabalhos manuais e economia doméstica serão bons juízes para dizer se você faz isto bem.

Nós não podemos possìvelmente contar-lhe tudo sôbre seu primeiro ano de matemática no ginásio ou o que é Matemática sòmente num capítulo. Entretanto, esperamos que durante o estudo de Matemática neste ano você ganhe uma idéia melhor do que é Matemática e porque você deve saber dela o mais possível.

Capítulo 2

NUMERAÇÃO

2-1. Numerais do Homem da Caverna

Nos tempos primitivos, meninos e meninas de sua idade provàvelmente travaram contacto com os números simples ao contar "um cervo" ou "duas flechas". Os povos primitivos aprenderam a tomar nota dos números. As vêzes êles faziam nós numa corda, ou usavam uma pilha de pedras ou ainda faziam marcas num pedaço de madeira para contar objetos. Um menino para contar suas ovelhas, teria pedrinhas, ou faria marcas em um pedaço de madeira assim . Uma pedrinha ou uma marca no pedaço de madeira, deveria representar uma ovelha. Êle poderia contar marcando e saber vários dias mais tarde que estava faltando uma ovelha se não houvesse uma ovelha para cada pedrinha ou marca. Você faz a mesma espécie de notação quando conta votos numa eleição de classe, uma marca para cada voto, como 𝍸 ||. Quando as pessoas começaram a fazer marcas para os números por meio de vários riscos numa pedra ou na terra, ou por meio de cortes em um pedaço de madeira, estavam escrevendo os primeiros numerais. Numerais são símbolos para números. Assim, o numeral "7" é um símbolo para o número sete. Numeração é o estudo de como os símbolos são escritos para representar números.

Com o passar do tempo o homem começou a usar sons ou nomes para os símbolos. Hoje temos um conjunto padrão de nomes para números. Um pastor contando as ovelhas compara uma única ovelha com o nome "um", 2 ovelhas com o nome "dois" e assim por diante. O homem tem agora tanto os símbolos (1, 2, 3, ...) como as palavras (um, dois, três, ...) os quais podem ser usados para representar os números

Sistemas Numéricos Antigos

Um dos mais antigos sistemas de escrita dos numerais de que temos notícia é o egípcio. Seus numerais pintados ou hieroglifos foram criados por volta de 3 300 A. C. Portanto, há cêrca de 5 000 anos atrás, os egípcios desenvolveram um sistema por meio do qual puderam expressar os números até milhões. Os símbolos egípcios são mostrados a seguir:

NOSSO NÚMERO	SÍMBOLO EGÍPCIO	OBJETO REPRESENTADO
1	𓏺	Traço ou bastão vertical
10	𓎆	Calcanhar
100	𓍢	Corda enrolada ou rôlo
1 000	𓆼	Flor de Lotus
10 000	𓂭	Dedo apontado
100 000	𓆐	Peixe Bacalhau
1 000 000	𓁨	Homem assustado (espantado)

Êstes símbolos eram gravados em madeira ou pedra. O sistema egípcio foi um progresso em relação ao sistema do homem da caverna porque usou as seguintes idéias:

1. Um único símbolo podia ser usado para representar o número de objetos de uma coleção. Por exemplo, o calcanhar representava o número dez.

2. Símbolos eram repetidos para representar outros números. O grupo de símbolos 𓍢𓍢𓍢 queria dizer 100 + 100 + 100 ou 300.

3. Êste sistema estava baseado em grupos de 10. Dez bastões eram equivalentes a um calcanhar, 10 calcanhares a um rôlo e assim por diante.

O quadro seguinte mostra como os egípcios escreviam numerais:

Nossos numerais	4	11	23	20 200	1959
Numerais Egípcios	||||	∩|	∩∩|||	𓂭𓂭𓍢𓍢	𓆼 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢 ∩∩∩∩∩ |||||||||

Há 4 000 anos atrás, mais ou menos em 2 000 A.C., os babilônios viviam na parte da Ásia que agora chamamos de Oriente Médio. Êles escreviam com um pedaço de madeira em tabuletas de argila. Essas tabuletas denominavam-se cuneiformes. Êles usavam argila porque não sabiam como fazer papel. Os pedaços de madeiras tinham a forma de uma cunha na extremidade como . Um instrumento de desenho dêste tipo é chamado de estilo. Com o estilo uma marca 𒁹 era feita na argila para representar o número "um". Virando o estilo, êles faziam êste símbolo 𒌋 para "dez". Êles combinaram êstes símbolos para escrever numerais até 59 como mostra no quadro abaixo:

Nossos numerais	5	13	32	59
Numerais Babilônios	𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹	𒌋𒁹𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹	𒌋𒌋𒌋 𒌋𒌋 𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹

Mais adiante neste capítulo você aprenderá como os babilônios escreviam os numerais, ou símbolos, para números maiores que 59.

O sistema romano foi usado centenas de anos. Existem ainda alguns lugares no momento onde êstes numerais são usados. Datas em pedras fundamentais, números para indicar os capítulos de um livro são freqüentemente escritos em numerais romanos.

Os historiadores acreditam que os numerais romanos vieram das imagens dos dedos como isto: |, ||, |||, e ||||. Os romanos usaram u'a mão para cinco . Gradualmente foram sendo omitidas algumas marcas V e êles por fim escreviam V para cinco. Dois cincos colocados juntos deram o símbolo X para dez. Os outros símbolos eram letras de seu alfabeto.

Nossos númerais	1	5	10	50	100	500	1000
Numerais romanos	I	V	X	L	C	D	M

No começo os romanos repetiam símbolos para escrever números grandes da mesma maneira que os egípcios faziam muitos anos antes. Mais tarde, êles usaram subtração para encurtarem alguns números.

Os valôres dos símbolos romanos eram somados quando um símbolo que representava uma quantidade grande era colocado a esquerda no numeral.

MDCLXVI = 1 000 + 500 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 = 1 666

DLXI = 500 + 50 + 10 + 1 = 561

Quando um símbolo que representava um valor menor era colocado à esquerda de um símbolo que representava um valor maior, subtraia-se o valor menor do maior.

IX = 10 - 1 = 9

XC = 100 - 10 = 90

Os romanos faziam restrições para subtrair.

1. V, L e D (símbolos que representavam números que começavam por cinco) nunca eram subtraídos.

2. Um número pode sempre ser subtraído sòmente nos seguintes casos:

I pode ser subtraído sòmente de V e X.

X pode ser subtraído sòmente de L e C.

C pode ser subtraído sòmente de D e M.

A adição e subtração podem ser usadas na escrita de um número. Primeiro, qualquer número cujo símbolo está colocado para indicar subtração é subtraído do número à sua direita; segundo, os valores obtidos pela subtração são somados a todos outros números do numeral.

CIX = 100 + (10 - 1) = 100 + 9 = 109

MCMLX = 1 000 + (1 000 - 100) + 50 + 10 = 1 000 + 900 + 50 + 10 = 1 960

Às vêzes os romanos colocavam uma barra sôbre um número para multiplicar o valor do número por 1 000.

$\overline{\text{X}}$ = 10 000, $\overline{\text{C}}$ = 100 000, $\overline{\text{XXII}}$ = 22 000

Existiam muitos outros sistemas numéricos usados no decorrer da história: os sistemas da Asia, o Coreano, o Chinês, o Japones e Indiano, os sistemas dos Maias, Inca e Astéca das Américas; os sistemas Hebreu, Grego e Arábico das regiões do Mediterrâneo. Você pode se divertir estudando alguns dêles. Se você fizer isto, descobrirá que o estudo dêstes vários sistemas muito interessa. Nós não temos tempo necessário para discutir todos êles neste capítulo.

<u>Exercícios 2-1</u>

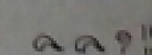
1. Escreva os seguintes números usando os numerais egípcios:

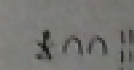
   a. 19 c. 666 e. 1 003 214

   b. 53 d. 1969

2. Os egípcios habitualmente seguiam um padrão para escrever números grandes. Entretanto, os significados de seus símbolos não mudavam se a ordem no numeral fosse trocada. De quantos modos diferentes podemos escrever vinte e dois na notação egípcia?

3. Escreva nossos numerais para cada um dos seguintes números:

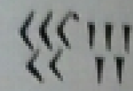
   a.  b. 

   c.  d. 

4. Escreva os seguintes números nos numerais babilônios:

   a. 9 b. 22 c. 51

5. Escreva os nossos numerais para cada um dos seguintes números:

a.  b.  c. 

6. Escreva nossos numerais para cada um dos seguintes números:

a. XXIX b. LXI c. XC d. CV e. DCLXVI

f. $\overline{\text{D}}$ g. MCDXCII

7. Escreva os seguintes números em numerais romanos:

a. 19 b. 57 c. 888 d. 1690

e. 1 000 000 f. 15 000

8. a. Quantos símbolos diferentes eram usados na escrita dos numerais egípcios?

b. Quantos símbolos diferentes eram usados na escrita dos numerais babilônios para números até 59?

c. Quantos símbolos diferentes usavam os romanos na escrita dos numerais?

d. Quantos símbolos diferentes existem no nosso sistema?

9. a. XC e CX têm o mesmo significado na escrita romana? Justifique a sua resposta.

b. A posição de um símbolo em um numeral era importante no sistema romano posterior? Se era, o que indicava a posição de um numeral?

10. a. Que número é representado por III no sistema Romano?

b. Que número é representado por 111 no nosso sistema?

c. Você pode explicar por que suas respostas para as partes a e b são diferentes?

11. Escreva cada um dêstes pares de números na nossa notação e após some os resultados e escreva a resposta com numerais romanos

a. MDCCIX e DCLIV

b. MMDCXL e MCDVIII

2-2. O Sistema Decimal

História e Descrição

Todos os primeiros sistemas numéricos constituiram um progresso sôbre as marcas em pedaços de madeira ou o ato de ajuntar pedras. É muito mais fácil representar um número em qualquer um dêles. Difícil é usá-los para somar e multiplicar. Alguns instrumentos, como o ábaco, eram usados pelos povos antigos para resolverem problemas aritméticos.

A maneira como hoje escrevemos os numerais foi desenvolvida na Índia. Os estudantes árabes aprenderam êsses numerais e os levaram para a Europa. Por causa disto, nossos numerais são chamados hindus-arábicos. É interessante notar que a maioria dos árabes nunca usou êstes símbolos. Pelo fato de nosso sistema usar grupos de dez, êle é denominado um sistema decimal. A palavra decimal vem da palavra latina "decem" que significa "dez".

O sistema decimal é usado na maioria dos países de agora porque é um sistema melhor que os outros sistemas numéricos discutidos na seção anterior. Logo, é importante que você compreenda o sistema e saiba ler e escrever os seus numerais.

Muito tempo atrás o homem aprendeu que era fácil contar um número grande de objetos, agrupando-os. Usamos esta mesma idéia hoje em dia quando usamos 1 duzia de ovos para representar um grupo de 12 ovos e uma grosa para representar um grupo de 12 duzias. Como temos dez dedos é natural para nós contar por grupos de dez. Usamos dez símbolos para os nossos numerais. Êstes símbolos, que são chamados dígitos ou algarismos, são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0. A palavra dígito refere-se aos nossos dedos e a êstes dez símbolos. Com êstes dez símbolos podemos escrever um número tão grande ou tão pequeno quanto quisermos.

O sistema decimal usa a idéia de valor posicional para representar o valor de um grupo. O valor de um grupo representado por um símbolo depende da posição do algarismo ou símbolo no numeral. O símbolo nos diz quantos dêste grupo nós temos. No numeral 123 o "1" representa um grupo de uma centena, o "2" representa dois grupos de dez, ou vinte; e o "3" representa três "uns" ou três. Esta inteligente idéia de posições com valores fez do sistema decimal o mais conveniente no mundo inteiro.

Como os grupos no sistema decimal são de dez, dizemos que nossa base é dez. Por causa disto cada posição sucessiva (ou vizinha) à esquerda representa um grupo dez vêzes àquele representado pela posição precedente. A primeira posição nos dá quantos grupos de um. A segunda quantos grupos de dez ou dez vêzes um (10×1). O terceiro lugar nos dá quantos grupos de dez vêzes dez (10×10) ou uma centena, o próximo dez vêzes dez vêzes dez ($10 \times 10 \times 10$) ou um milhar, e assim por diante. Usando uma base e a idéia de valor posicional podemos escrever qualquer número no sistema decimal usando sòmente os dez símbolos básicos. Não há limite para o tamanho dos números que podem ser representados pelo sistema decimal.

Para entender o significado do número representado por um numeral como 123 nós somamos os números representados em cada símbolo; assim, 123 significa:

$$(1 \times 100) + (2 \times 10) + (3 \times 1) \text{ ou } 100 + 20 + 3.$$

O mesmo número é representado por $100 + 20 + 3$ e por 123. Quando escrevemos um numeral como 123 estamos usando símbolos numéricos, a idéia de valor posicional e base dez.

Uma vantagem do nosso sistema decimal é que tem êle um símbolo para zero. Usamos o zero para preencher os lugares que deveriam estar vazios e que possam criar uma certa confusão. Para escrever o numeral para trezentos e sete, poderíamos escrever 307. Sem um símbolo para o zero poderíamos achar necessário escrever 3-7. O significado de 3-7 ou 3 7 pode ser ambíguo. A origem do zero é incerta, mas os hindus usaram um símbolo para zero cêrca de 600 A.D. ou possìvelmente antes.

O uso inteligente do valor posicional e o símbolo para zero faz do sistema decimal o sistema mais eficiente no mundo. Pierre Simon Laplace (1749-1827), um famoso matemático francês, chamou o sistema decimal a maior e mais útil invenção do mundo

Lendo e Escrevendo Numerais Decimais

Começando da primeira posição à direita, cada posição no sistema decimal tem um nome. A primeira é a das unidades, a segunda das dezenas, a terceira das centenas, a quarta dos milhares e assim por diante. As posições continuam indefinidamente. Não confundir os nomes dos nossos dez símbolos com os nomes das posições. Números grandes são lidos mais fàcilmente se os algarismos estiverem separados por intervalos regulares. Começando pela direita, cada grupo de três algarismos é separado por um intervalo. Êstes grupos também têm nomes como os mostrados pelo quadro seguinte para os primeiros quatro grupos de algarismos.

Nome do Grupo	Bilhão	Milhão	Milhar	Unidade
Nome da Posição	Cem Bilhões, Dez Bilhões, Bilhão	Cem Milhões, Dez Milhões, Milhão	Cem Mil, Dez Mil, Mil	Centena, Dezena, Unidade
Algarismos	5 4 5	4 6 5	7 3 8	9 2 1

Os nomes dos algarismos, o conceito de valor posicional e o nome do grupo são todos usados para a leitura de um número. Para ler o numeral mostrado no quadro começamos com o grupo à esquerda, lendo o número representado pelo primeiro grupo de algarismos como um numeral. A isto segue-se o nome do grupo como "quinhentos e quarenta e cinco bilhões". Em seguida lemos cada um dos grupos seguintes usando o nome para cada grupo mostrado na tabela, exceto o nome "unidade" que não é usado ao lermos o último grupo à direita. Lemos corretamente todo numeral do quadro assim: "quinhentos e quarenta e cinco bilhões, quatrocentos e sessenta e cinco milhões, setecentos e trinta e oito mil, novecentos e vinte e um".

Embora tendo sòmente dez símbolos, usamos êsses símbolos repetidamente. Êles são usados em posições diferentes nos numerais afim de representar números diferentes. Da mesma maneira, na leitura dos numerais usamos sòmente algumas palavras básicas. Usamos nomes para os símbolos "um, dois, três, quatro, etc". Ainda temos as palavras "dez" "onze", "doze", "mil" etc. Para outros nomes usamos combinações de nomes; "treze", que é o "três e dez", ou "cento e vinte e cinco" que é "uma centena, duas dezenas e cinco unidades".

Exercícios 2-2

1. Quantos símbolos são usados no sistema decimal de notação? Escreva os símbolos.

2. Escreva os nomes para as primeiras nove posições no sistema decimal. Comece pela menor posição e conserve-as em ordem, como "um, dez, ?, ?, ...

3. Pratique leitura de numerais lendo alto os seguintes numerais ou escrevendo-os literalmente.

a.	300	d.	15 015	g.	100 009
b.	3005	e.	234 000	h.	430 001
c.	7109	f.	608 014	i.	999 999

4. Faça o mesmo para

a.	7 036 298	c.	20 300 400 500
b.	9 300 708 500 000	d.	900 000 000 000

5. Escreva os seguintes números usando numerais decimais:

a. Cento e cinqüenta e nove

b. Quinhentos e três

c. Seis mil oitocentos e cinqüenta e sete

d. Três milhões, setenta mil e treze

e. Quatro bilhões, trezentos e setenta e seis milhões e sete mil

f. Vinte mil e dez

g. Nove milhões, quinze mil e duzentos

6. a. Escreva o numeral que representa o maior número de cinco algarismos no sistema decimal

b. Explique o que êste número significa como, por exemplo, (3 x 10) + (5 x 1) é o significado de 35.

c. Escreva o numeral por extenso.

7. a. Escreva o numeral que representa o menor número de seis algarismos no sistema decimal.

b. Explique o significado dêsse número

c. Escreva o seu nome

2-3. Numerais Desenvolvidos e Notação Exponencial

Dissemos que o sistema decimal tem a base dez. Começando pela unidade, cada posição à esquerda tem um valor dez vêzes maior que o valor da posição à sua direita. As primeiras seis posições da direita para a esquerda, são mostrados abaixo:

CEM MIL	DEZ MIL	MIL	CEM	DEZ	UM
(10 x 10 x 10 x 10 x 10)	(10 x 10 x 10 x 10)	(10 x 10 x 10)	(10 x 10)	(10)	(1)

Freqüentemente escrevemos êstes valores abreviadamente usando um pequeno numeral à direita e acima do 10. Êste numeral mostra quantos 10's estão sendo tomados numa multiplicação. Os números que são multiplicados são chamados fatôres. Desta maneira, os valores das posições são escritas e lidas assim:

(10 x 10 x 10 x 10 x 10)	10^5	"dez à quinta potência"
(10 x 10 x 10 x 10)	10^4	"dez à quarta potência"
(10 x 10 x 10)	10^3	"dez à terceira potência"
(10 x 10)	10^2	"dez à segunda potência"
(10)	10^1	"dez à primeira potência"
(1)	1	" um "

Numa expressão como 10^2, o número 10 é chamado base e o número 2 expoente. O expoente nos dá o número de vêzes que a base é tomada como fator num produto. 10 à segunda potência indica (10 x 10) ou seja 100. Um número como 10^2 é chamado uma potência de dez, e neste caso é a segunda potência de dez. Às vêzes omitimos o expoente para a primeira potência de dez; comumente escrevemos 10 ao invés de 10^1. Todos os outros expoentes são sempre escritos. Outra maneira de escrever (4 x 4 x 4) é 4^3, onde 4 é a base e 3 é o expoente.

Como podemos escrever o significado de "352" usando expoentes?

$$352 = (3 \times 10 \times 10) + (5 \times 10) + (2 \times 1) =$$

$$= (3 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (2 \times 1).$$ É chamada notação desenvolvida. Escrever os numerais em notação desenvolvida nos ajuda a explicar o seu significado.

História

Provàvelmente a razão de usarmos um sistema numérico com base dez é por que as pessoas têm dez dedos. Daí o uso do têrmo dígito para algarismo. Usamos o têrmo "algarismos" quando queremos nos referir aos símbolos não relacionados com os numerais nos quais êles são usados.

Os Celtas, que viviam na Europa há mais de 2 000 anos, usavam vinte como base, e também o faziam os Maias na América Central. Pode você dar uma razão para isto? Que nome especial às vêzes usamos para vinte? Algumas tribos esquimós contavam e agrupavam com base cinco. Pode você pensar em uma boa razão para isto? Mais tarde veremos como trabalhar com sistemas quando as bases são diferentes de dez.

Exercícios 2-3

1. Escreva o seguinte em palavras: 10^1 como "dez à primeira potência" e assim sucessivamente até 10^5.

2. Escreva cada um dos seguintes produtos usando expoentes:

   a. $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

   b. $2 \times 2 \times 2 \times 2$

   c. $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

   d. $25 \times 25 \times 25$

   e. $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

   f. 4×4

   g. $279 \times 279 \times 279 \times 279 \times 279$

   h. 16

3. Quantos "cincos" são usados como fatôres em cada uma das seguintes potências?

   a. 5^3 c. 5^2 e. 5^1

   b. 5^7 d. 5^{10} f. 5^5

4. Escreva cada uma das seguintes potências sem os expoentes como, por exemplo, $2^3 = 2 \times 2 \times 2$

   a. 4^3 c. 2^8 e. 33^5

   b. 3^4 d. 10^7 f. 175^6

5. O que nos dá um expoente?

6. Escreva cada uma das seguintes expressões como por exemplo 4^3 significa $4 \times 4 \times 4 = 64$

   a. 3^3 d. 2^5 g. 8^2 j. 3^4

   b. 5^2 e. 6^2 h. 9^2 k. 2^6

   c. 4^4 f. 7^3 i. 10^3 l. 4^5

7. Que numeral representa o maior número?

   a. 4^3 ou 3^4 b. 2^9 ou 9^2

8. Escreva os seguintes numerais na notação desenvolvida como no exemplo $210 = (2 \times 10^2) + (1 \times 10^1) + (0 \times 1)$

   a. 468 c. 7062 e. 100 180

   b. 5324 d. 59 126

9. Complete a tabela mostrada abaixo para as potências de 10, em ordem decrescente começando por 10^{10}. A próxima expressão será 10^9 e assim por diante. Escreva o numeral representado por cada expressão e escreva o nome de cada numeral.

POTÊNCIA	NUMERAL	NOME
10^{10}	10 000 000 000	Dez Bilhões
10^9	1 000 000 000	Um Bilhão
10^8	?	?

10. Na tabela do problema 9, qual é a relação entre o expoente de uma potência de 10 e os zeros quando êste número está escrito na notação decimal?

11. Escreva os seguintes numerais sob a forma exponencial:

   a. 1 000 c. 1 000 000

   b. 100 000 d. Cem Milhões

12. Um dia um matemático estava conversando com um grupo de estudantes de aritmética. Êles conversavam sôbre um número muito grande o qual resolveram chamar "gogol". Um gogol é 1 seguido por 100 zeros. Escreva êste número sob a forma exponencial.

13. PROBLEMA-DESAFIO

Qual é o significado de 10^3? de 10^1? Qual você acha que deva ser o significado de 10^0?

2-4. Numerais na Base Sete

Você conhece e usa numerais decimais há bastante tempo, e por isso talvez ache que sabe tudo a respeito dêles. Algumas de suas características entretanto podem ter lhe escapado simplesmente porque os numerais lhe são muito familiares. Nesta seção você estudará um sistema de notação com uma base diferente. Isto aumentará a sua compreensão dos numerais decimais.

Suponha que encontremos em Marte pessoas que possuem sete dedos. Ao invés de contar por grupos de dez, um marciano poderá contar por grupos de sete. Vejamos como escrever numerais na notação sete. Desta vez planejamos trabalhar com grupos de sete. Olhe para os x's abaixo e note como êles estão agrupados de sete em sete com alguns x's deixados de lado.

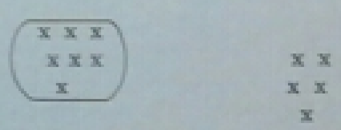


Figura 2-4a.

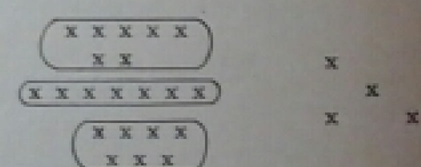


Figura 2-4b.

Na Figura 2-4a vemos um grupo de sete e mais cinco. Escrevemos o numeral 15_{sete}. Neste numeral, o 1 indica que há um grupo de sete, e o cinco, que há 5 unidades.

Na Figura 2-4b quantos grupos de sete existem? Quantos x's são deixados para fora dos grupos de sete? O numeral que representa êste número de x's é 34_{sete}. O 3 representa os três grupos de sete, e o 4 representa os 4 x's separados. O índice "sete" simplesmente serve para indicar que estamos trabalhando com base sete.

Quando agrupamos de sete em sete os números dos objetos individuais podem ser sòmente zero, um, dois, três, quatro, cinco, seis. Necessitamos símbolos

para êstes números. Suponha que usemos os conhecidos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, para êles ao invés de inventarmos novos símbolos. Como você descobrirá, nenhum outro símbolo é necessário para o sistema de base sete.

Se os x's são marcas para dias, podemos pensar em 15_{sete} como uma maneira de escrever uma semana e cinco dias. No nosso sistema decimal chamamos êsse número de dias "doze" e escrevemos " 12 " para indicar que existe um grupo de dez e mais dois. Não escrevemos a base dos nossos numerais porque sabemos não existir nenhuma ambiguidade.

Não deveríamos usar o nome "quinze" para 15_{sete} porque quinze é 1 dez mais cinco. Devemos simplesmente ler 15_{sete} assim: "um, cinco, base sete".

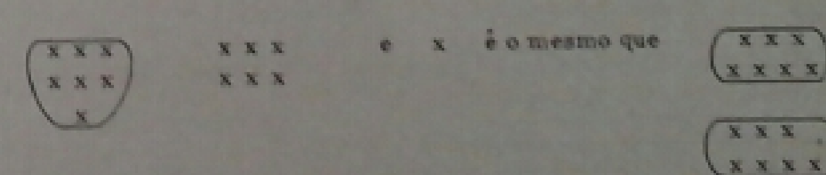
Você sabe contar na base dez e como escrever os numerais em sucessão. Note que um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito e nove são representados por símbolos simples. Como é representado o número base "dez"? Esta representação, 10, significa um grupo de dez e mais um zero.

Com esta idéia em mente, comece pensar em contar na base sete. Tente isto e compare com a tabela seguinte, preenchendo os numerais de 21_{sete} a 63_{sete}. Omitimos nesta tabela o índice sete.

Contando na Base Sete

Número	Símbolo	Número	Símbolo
um	1	um, quatro	14
dois	2	um, cinco	15
três	3	um, seis	16
quatro	4	dois, zero	20
cinco	5	dois, um	21
seis	6	------	---
um, zero	10	seis, três	63
um, um	11	seis, quatro	64
um, dois	12	seis, cinco	65
um, três	13	seis, seis	66

Como você obteve o numeral que segue a 16_{sete}? Pròvàvelmente você pensou em algo como isto:



onde há os dois grupos de sete x's e 0 x's deixados de lado.

Qual seria o numeral sucessivo de 66_{sete}? Aqui você teria 6 setes e 6 unidades mais uma. Isto é igual a 6 setes e outro sete, ou seja, sete setes. Como poderíamos representar $(sete)^2$ sem usar um novo símbolo? Introduziríamos um novo grupo, o grupo $(sete)^2$. Êste número poderia então ser escrito 100_{sete}. O que realmente significa? Avance mais um pouco e escreva um pouco mais de numeros. Qual é o numeral sucessivo de 666_{sete}?

Agora você está pronto para escrever uma lista de valôres posicionais para a base sete. Pode você fazer isto sòzinho estudando os valôres posicionais decimais à página 25 e pensando no significado de 100_{sete}?

Valôres Posicionais na Base Sete

$(sete)^5$	$(sete)^4$	$(sete)^3$	$(sete)^2$	$(sete)^1$	(um)

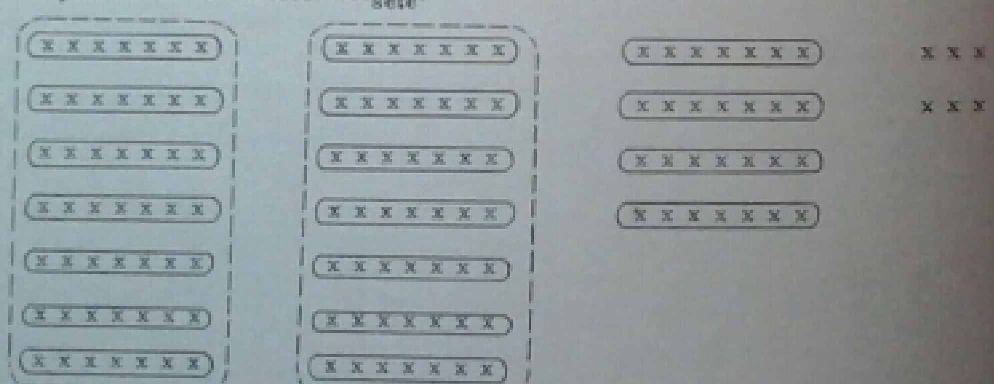
Note que cada posição representa sete vêzes o valor da vizinha posição à direita. A primeira posição à direita é a <u>posição um</u> tanto no sistema decimal como no sistema de base sete. O valor da segunda posição é a <u>base vêzes um</u>. Neste caso, qual o seu valor? O valor para a terceira posição a partir da direita é (sete × sete), e da próxima posição é (sete × sete × sete).

Qual é o nome decimal para (sete × sete)? Nós temos de usar isto (quarenta e nove) quando mudamos da base sete para base dez. Mostre que o numeral decimal para $(sete)^3$ é 343. Qual é o numeral decimal para $(sete)^4$?

Usando o diagrama acima, vemos que:

246_{sete} = (2 × sete × sete) + (4 × sete) + (6 × um)

O diagrama mostra o grupo presente representado por algarismos e os valôres posicionais no numeral 246_{sete}:



(2 × sete × sete) (4 × sete) (6 × um)

Se desejarmos escrever o número de x's anterior no sistema decimal podemos escrever:

$$\begin{aligned}246_{sete} &= (2 \times 7 \times 7) + (4 \times 7) + (6 \times 1)\\ &= (2 \times 49) + (4 \times 7) + (6 \times 1)\\ &= 98 + 28 + 6\\ &= 132_{dez}\end{aligned}$$

Reagrupe os x's acima para mostrar que existe 1 grupo (dez × dez), 3 grupos de dez e mais 2. Isto lhe ajudará a entender que $246_{sete} = 132_{dez}$.

<u>Exercícios 2-4</u>

1. Agrupe os x's abaixo e escreva o número de x's na base sete:

a.
x x x x x
x x x x x

b.
x x x x x
x x x x x
x x x x
x x x x

c.
x x x x x x x x x
x x x x x x x x x
x x x x x x x x x
x x x x x x x x x
x x x x x x x x x
x x x x x x x x x
x x x x x x x x

2. Desenhe x's e agrupe-os para mostrar o significado dos seguintes numerais

a. 11_{sete} b. 26_{sete} c. 35_{sete} d. 101_{sete}

3. Escreva cada um dos seguintes numerais sob a forma desenvolvida e depois na notação decimal

a. 33_{sete} b. 45_{sete} c. 100_{sete} d. 524_{sete}

4. Escreva o numeral consecutivo de cada um dos seguintes numerais

a. 6_{sete} b. 54_{sete} e. 666_{sete}

b. 10_{sete} d. 162_{sete} f. 1006_{sete}

5. Qual é o valor de " 6 " em cada um dos seguintes numerais?

a. 560_{sete} b. 56_{sete} c. 605_{sete} d. 6050_{sete}

6. No sistema de base sete, escreva o valor da quinta posição contando da direita para a esquerda a partir da posição das unidades.

7. No sistema de base sete, qual é o valor da décima posição a partir da direita?

*8. Qual é o numeral no sistema de base sete que representa o número denominado seis dúzias?

9. Qual dos números é o maior, 452_{sete} ou 432_{sete}?

10. Qual o maior dos números, 250_{sete} ou 205_{dez}?

11. Qual é o menor número, 2125_{sete} ou 754_{dez}?

12. Um número é divisível por dez se ao dividi-lo por dez achamos resto zero.

a. 30 é divisível por dez? Por que?

b. 241_{dez} é divisível por dez? Por que?

c. Como é que você pode saber num relance se um numeral da base dez é ou não divisível por dez?

*13. 30 é divisível por dez? Explique como você chegou à sua resposta. 60_{sete} é divisível por dez?

*14. a. O que se deveria entender por "um número natural é divisível por sete"?

b. 30_{sete} é divisível por sete? Por que?

*15. 31_{sete} é divisível por sete? Justifique sua resposta.

*16. Estabeleça uma regra para determinar quando um número escrito na base sete é divisível por sete. Você provàvelmente viu pelos problemas 11-15 que a maneira de determinarmos se um número é divisível por dez depende do sistema no qual está escrito. A regra de divisibilidade por dez no sistema decimal é semelhante à regra de divisibilidade por sete no sistema de base sete.

17. Dos números a seguir 24_{dez}, 31_{sete} e 68_{dez}, quais são divisíveis por 2? O que você acha? Qual é o nome de um número que é divisível por dois? Qual é o nome de um número que não é divisível por dois?

*18. O número 11_{sete} é par ou ímpar? Pode você dizer simplesmente num relance quais dos seguintes números são pares ou ímpares?

12_{sete}, 13_{sete}, 14_{sete}, 25_{sete}, 66_{sete}

O que você poderia fazer para dizer?

Novamente aqui a regra de divisibilidade na base dez não servirá para a base sete. Os critérios de divisibilidade parecem depender da base na qual estamos trabalhando.

19. <u>PROBLEMA - DESAFIO</u>

No planeta X-101 as páginas dos livros são numeradas, em ordem, da seguinte maneira:

1, ∠, △, □, ⧅, ⊠, 1-, 11, 1∠, 1△, 1□, 1⧅, ∠-, ∠1,

etc. Que base parece ser usada por êsse povo para o sistema de numeração? Por que? Como deveria escrever o número consecutivo a ∠1? Qual o símbolo correspondente ao nosso zero? Escreva os numerais para os números de □ a ⧅△.

20. <u>PROBLEMA-DESAFIO</u>

Enuncie um critério para determinar quando um número escrito na base sete é divisível por dois.

2-5. <u>Cálculo na Base Sete</u>

<u>Adição</u>

No sistema decimal, ou na base dez, existem 100 combinações de adições "básicas". Nesta altura você já conhece tudo sôbre elas. As combinações podem ser dispostas numa tabela conveniente. Parte desta é dada a seguir:

Divisão, Base Dez

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0									
1	1	2								
2				5						
3	3	4	5	6						
4	4	5	6	7	8					
5	5	6	7	8	9	10	11			
6										
7										
8										
9									17	

Os números representados na fila horizontal no alto da tabela são somados aos números da fila vertical sob o sinal " + " à esquerda. A soma de cada par de números está escrita na tabela. A soma 2 + 3 é 5, como está indicada pelas setas.

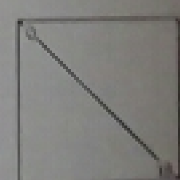
Exercícios 2-5a.

1. Efetue:

a. 6 + 5 b. 9 + 8

2. Use papel quadriculado e complete a tabela de adição acima (você usará mais tarde).

3. Desenhe uma diagonal do canto superior esquerdo ao canto inferior direito do diagrama como mostra a figura à direita:



a. 3 + 4 é o mesmo que 4 + 3?

b. Como pode a resposta da parte "a" ser determinada a partir da tabela?

c. O que você nota sôbre as duas partes da tabela?

d. O que você pode dizer a respeito do número de combinações diferentes que devem ser tabuladas? Certifique-se de que você pode se lembrar de qualquer uma destas combinações sempre que precisar delas.

4. Faça um diagrama para mostrar as somas básicas quando os números estão escritos na base sete. São dadas quatro somas para ajudá-lo.

+	0	1	2	3	4	5	6
0							
1				4			
2					6		
3						11	
4							13
5							
6							

5. a. Quantas combinações diferentes existem na tabela de base sete? Por que?

b. O que deve ser mais fácil, aprender as combinações necessárias para adicionar na base sete ou na base dez? Por que?

c. Calcule $4_{dez} + 5_{dez}$ e $4_{sete} + 5_{sete}$ pelas tabelas. Os resultados são iguais, isto é, êles representam o mesmo número?

A resposta ao problema de número 5c é uma ilustração do fato de que um número é uma idéia independente dos numerais usados para escrever seus nomes. Realmente, 9_{dez} e 12_{sete} são dois nomes diferentes para o mesmo número.

Não tente memorizar as combinações de adição para a base sete. O valor em fazer esta tabela está na ajuda que ela lhe dá para entender operações com números.

A tabela que você completou no problema 4 do último conjunto de exercícios dá as somas de pares de números de zero a seis. Na verdade, precisamos um pouco mais para estarmos capacitados a somar números grandes. Para vermos o que é ainda necessário, consideremos como as adições são efetuadas na base dez. Quais são os passos de seu pensamento quando você adiciona números como vinte e cinco, e quarenta e oito na notação decimal?

$$\begin{array}{rcll} 25 & = & 2 \text{ dezenas} + 5 \text{ unidades} = & \quad 25 \\ \underline{48} & = & \underline{4 \text{ dezenas} + 8 \text{ unidades}} = & \quad \underline{48} \\ & & 6 \text{ dezenas} + 13 \text{ unidades} = 7 \text{ dezenas} + 3 \text{ unidades} = & \quad 73 \end{array}$$

Tente somar na base sete: $14_{sete} + 35_{sete}$

$$\begin{array}{r} 1 \text{ sete } + 4 \text{ unidades} \\ \underline{3 \text{ setes } + 5 \text{ unidades}} \\ 4 \text{ setes } + 12 \text{ unidades} \end{array} = 5 \text{ setes } + 2 \text{ unidades } = 52_{sete}$$

(Você pode encontrar as somas 5 + 4 e 3 + 1 na tabela de adição na base sete)

No que os dois exemplos se parecem? No que êles diferem? Quando é necessário "redistribuir" (ou reagrupar) no sistema de base dez? E no sistema de base sete?

Tente sua habilidade em adição nos problemas seguintes. Use a tabela de adição para as somas básicas.

42_{sete}	65_{sete}	32_{sete}	254_{sete}	435_{sete}	524_{sete}
$\underline{13_{sete}}$	$\underline{11_{sete}}$	$\underline{25_{sete}}$	$\underline{105_{sete}}$	$\underline{625_{sete}}$	$\underline{564_{sete}}$

As respostas são, respectivamente, 55_{sete}, 106_{sete}, 60_{sete}, 362_{sete}, $1\,363_{sete}$ e $1\,421_{sete}$.

Subtração

Como você aprendeu a subtrair na base dez? Provàvelmente usou combinações de subtrações tais como 14-5 até ficar bastante familiarizado com elas. Você conhece a resposta dêste problema, mas, suponha por um momento que você não saiba. Você pode achar a resposta a partir da tabela para adição? Na verdade você quer fazer a seguinte pergunta: "Qual é o número que adicionado a 5 resulta 14?" Como na sétima linha da tabela de adição para base dez temos os resultados das adições de diversos números a 5, devemos procurar por 14 nessa linha. Onde você encontra a resposta para 14-5? Você respondeu "na última coluna"? Use a tabela de adição na base dez para calcular:

$$9 - 2, \quad 8 - 5, \quad 12 - 7, \quad 17 - 9.$$

A idéia discutida acima é usada em todos os problemas de subtração. Outra idéia necessária em muitos problemas é a idéia de "emprestar" ou "reagrupar". A última idéia encontra-se ilustrada abaixo para base dez afim de efetuar 761 - 283:

$$\begin{array}{rcrcr} 7 \text{ centenas } + 6 \text{ dezenas } + 1 \text{ unidade} & = & 6 \text{ centenas } + 15 \text{ dezenas } + 11 \text{ unidades} & = & 761 \\ \underline{2 \text{ centenas } + 8 \text{ dezenas } + 3 \text{ unidades}} & = & \underline{2 \text{ centenas } + 8 \text{ dezenas } + 3 \text{ unidades}} & = & \underline{283} \\ & & 4 \text{ centenas } + 7 \text{ dezenas } + 8 \text{ unidades} & = & 478 \end{array}$$

Agora tentemos subtrair na base sete. Como você acharia $6_{sete} - 2_{sete}$? Calcule $13_{sete} - 6_{sete}$. Como você usa a tabela da adição para a base sete? Encontre as respostas para os seguintes exemplos de subtração:

15_{sete}	12_{sete}	11_{sete}	14_{sete}	13_{sete}
$\underline{6_{sete}}$	$\underline{4_{sete}}$	$\underline{6_{sete}}$	$\underline{5_{sete}}$	$\underline{4_{sete}}$

As respostas são, respectivamente, 6_{sete}, 5_{sete}, 2_{sete}, 6_{sete}, 6_{sete}

Vamos trabalhar num problema difícil de subtração usando o processo empregado acima:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 43_{sete} & = & 4 \text{ setes } + 3 \text{ unidades} & = & 3 \text{ setes } + 13 \text{ unidades} & = & 43_{sete} \\ \underline{16_{sete}} & = & \underline{1 \text{ sete } + 6 \text{ unidades}} & = & \underline{1 \text{ sete } + 6 \text{ unidades}} & = & \underline{16_{sete}} \\ & & & & 2 \text{ setes } + 4 \text{ unidades} & = & 24_{sete} \end{array}$$

Não se esqueça de notar que as "13 unidades" acima são no sistema de base sete, e portanto representam "um sete, 3 unidades". Se você desejasse encontrar o número que somado a 6_{sete} resulta 13_{sete}, como você poderia usar a tabela para ajudá-lo?

Pratique nestes exemplos de subtração:

56_{sete}	61_{sete}	34_{sete}	452_{sete}	503_{sete}
$\underline{14_{sete}}$	$\underline{35_{sete}}$	$\underline{26_{sete}}$	$\underline{263_{sete}}$	$\underline{140_{sete}}$

As respostas são, respectivamente, 42_{sete}, 23_{sete}, 5_{sete}, 156_{sete} e 333_{sete}.

Exercícios 2-5b

1. Cada um dos exemplos seguintes está escrito na base sete. Faça a adição. Confira mudando os numerais para a notação decimal e adicione na base dez como no exemplo:

Base Sete		Base Dez
16_{sete}	=	13
$\underline{23_{sete}}$	=	$\underline{17}$
42_{sete}		30

Temos $42_{sete} = 30$?

a. 25_{sete} / 31_{sete} b. 56_{sete} / 21_{sete} c. 214_{sete} / 53_{sete}

d. $160_{sete} + 430_{sete}$ e. $45_{sete} + 163_{sete}$

f. $403_{sete} + 563_{sete}$ g. $645_{sete} + 605_{sete}$

h. $6245_{sete} + 5314_{sete}$ i. $6204_{sete} + 234_{sete}$

j. $645_{sete} + 666_{sete}$ k. $5406_{sete} + 6245_{sete}$

2. Use a tabela de adição na base sete para achar:

a. $6_{sete} - 4_{sete}$ b. $11_{sete} - 4_{sete}$

c. $12_{sete} - 5_{sete}$

3. Cada um dos exemplos seguintes está escrito na base sete. Subtraia. Confira mudando para numerais decimais.

a. 10_{sete} / 5_{sete} b. 65_{sete} / 26_{sete} c. 200_{sete} / 4_{sete} d. 160_{sete} / 6_{sete}

e. $44_{sete} - 35_{sete}$ f. $641_{sete} - 132_{sete}$

g. $502_{sete} - 266_{sete}$ h. $5000_{sete} - 4261_{sete}$

i. $634_{sete} - 52_{sete}$ j. $134_{sete} - 65_{sete}$

k. $3451_{sete} - 2164_{sete}$ l. $253_{sete} - 166_{sete}$

4. Agrupando os x's mostre que:

a. 4 dois = 11_{sete} c. 3 cincos = 21_{sete}

b. 6 três = 24_{sete} d. 5 seis = 42_{sete}

Multiplicação

Para multiplicar podemos usar uma tabela de resultados básicos. Complete a tabela seguinte em numerais decimais e esteja seguro de que pode se lembrar instantaneamente do produto de 2 (dois) números quaisquer compreendidos entre zero e nove.

Multiplicação, Base Dez

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0								
1	0	1								
2			4	6						
3				9	12					
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Exercícios 2-3e.

1. Basei-se na tabela precedente.

a. Explique a linha de zeros e a coluna de zeros

b. Que linha da tabela é exatamente igual a linha de cima? Por que?

2. Imagine uma diagonal desenhada do sinal x na tabela até o canto inferior direito. O que pode você dizer sôbre as duas partes triangulares da tabela de cada lado da diagonal?

3. Complete a tabela de multiplicação abaixo para a base sete. Sugestão: Para encontrar $4_{sete} \times 3_{sete}$ você pode escrever quatro x's três vêzes e reagrupar para mostrar o numeral na base sete. Melhor ainda, você pode pensar nesta multiplicação como:

$$3_{sete} + 3_{sete} + 3_{sete} + 3_{sete}$$

Multiplicação, Base Sete

x	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2					11	13	
3							
4				15			
5							
6							51

4. Há menos cruzamentos na tabela da base sete que na base dez. O que isto lhe diz sôbre a facilidade de multiplicação na base sete?

5. Imagine a diagonal desenhada com o sinal " x " até o canto inferior direito da última tabela.

   a. Como estão os elementos acima da diagonal relacionados aos que estão abaixo da mesma?

   b. De acôrdo com a observação da parte a, o que você diz de $3_{sete} \times 4_{sete}$?

Não vale a pena memorizar a tabela para a base sete. Seu valor reside no fato de você poder compreendê-la.

6. Multiplique os seguintes números em numerais da base dez.

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 63 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 249 \\ \times\ 75 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4627 \\ \times\ 436 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7434 \\ \times\ 89 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 51043 \\ \times\ 78 \\ \hline \end{array}$$

Você já sabe reagrupar na adição, já tem experiência com multiplicação na base dez. Use a tabela de multiplicação na base sete para calcular os seguintes produtos:

$$\begin{array}{r} 52_{sete} \\ \times 3_{sete} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34_{sete} \\ \times 6_{sete} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 421_{sete} \\ \times 4_{sete} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 621_{sete} \\ \times 2_{sete} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 604_{sete} \\ \times 35_{sete} \\ \hline \end{array}$$

As respostas são, respectivamente, 216_{sete}, 303_{sete}, 2314_{sete}, 1542_{sete}, 31406_{sete}

Confira a multiplicação da direita e a seguir responda as seguintes questões: Como você encontra o elemento 123 na terceira linha? Como você achou o elemento 201 na quarta linha? Por que o 1 da quarta linha está sob o 2 da terceira linha? Por que está o zero da quarta linha sob o 1 da terceira linha? Se você não sabe porque os elementos da terceira linha e quarta linha são adicionados para obtermos a resposta, você estudará isto em profundidade mais tarde.

$$\begin{array}{r} 45_{sete} \\ \times\ 32_{sete} \\ \hline 123 \\ 201 \\ \hline 2133_{sete} \end{array}$$

U'a maneira de conferir seu trabalho é mudar os numerais da base sete para a base dez assim:

$$604_{sete} = (6 \times 49) + (0 \times 7) + (4) = 294 + 4 = 298_{dez}$$

$$\times\ 35_{sete} = (3 \times 7) + (5) = 21 + 5 = \times\ 26_{dez}$$

$$\begin{array}{r} 604_{sete} \\ \times\ 35_{sete} \\ \hline 4226 \\ 2415 \\ \hline 31406_{sete} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 298_{dez} \\ \times\ 26_{dez} \\ \hline 1788 \\ 596 \\ \hline 7748_{dez} \end{array}$$

$$31406_{sete} = (3 \times 2401) + (1 \times 343) + (4 \times 49) + (0 \times 7) + (6) = 7748_{dez}$$

Divisão

Deixamos para você a divisão como um exercício. Você poderá achar que não é fácil. Trabalhando na base sete você deverá compreender porque alguns meninos e meninas tem dificuldades com divisão na base dez. Aqui estão dois exemplos que você poderá querer examinar. Todos os numerais dos dois exemplos estão escritos na base sete. Como você pode usar a tabela de multiplicação neste caso?

Divisão na Base Sete

$$\begin{array}{r|l} 4053_{sete} & 6_{sete} \\ \cline{2-2} 33 & 454_{sete} \\ \cline{1-1} 45 & \\ 42 & \\ \cline{1-1} 33 & \\ 33 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126123_{sete} & 45_{sete} \\ \cline{2-2} 123 & 2013_{sete} \\ \cline{1-1} 112 & \\ 45 & \\ \cline{1-1} 333 & \\ 332 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Exercícios 2-3c

1. Multiplique os seguintes números em numerais de base sete e confira seus resultados na base dez.

a. $14_{sete} \times 3_{sete}$

b. $6_{sete} \times 23_{sete}$

c. $63_{sete} \times 12_{sete}$

d. $5_{sete} \times 461_{sete}$

e. $56_{sete} \times 43_{sete}$

f. $654_{sete} \times 453_{sete}$

g. $3046_{sete} \times 24_{sete}$

h. $5643_{sete} \times 652_{sete}$

i. $250_{sete} \times 341_{sete}$

j. $26403_{sete} \times 45_{sete}$

*2. Divida. Todos os numerais neste exercício estão escritos na base sete.

a. $42_{sete} \,\underline{|\, 6_{sete}}$

b. $433_{sete} \,\underline{|\, 5_{sete}}$

c. $2316_{sete} \,\underline{|\, 4_{sete}}$

d. $2625_{sete} \,\underline{|\, 21_{sete}}$

3. Escreva sob a forma desenvolvida:

a. 403_{sete}

b. 189_{dez}

4. Qual dos numerais do Exercício 3 representa o número maior?

5. Efetue as seguintes adições:

a. $52_{sete} + 14_{sete}$

b. $$\begin{array}{r} 65_{sete} \\ \underline{25_{sete}} \end{array}$$

b. $$\begin{array}{r} 434_{sete} \\ \underline{324_{sete}} \end{array}$$

d. $601_{sete} + 304_{sete}$

6. Faça as seguintes subtrações:

a. $$\begin{array}{r} 13_{sete} \\ \underline{6_{sete}} \end{array}$$

b. $30_{sete} - 1_{sete}$

c. $$\begin{array}{r} 402_{sete} \\ \underline{35_{sete}} \end{array}$$

7. Reescreva o parágrafo seguinte mudando os numerais de base sete para a base dez.

Luiza tem aulas de Matemática de nível 10_{sete} na sala 234_{sete}. O livro que ela usa chama-se MATEMÁTICA PARA O CURSO GINASIAL, grau 10_{sete}, tem 21_{sete} capítulos e 1102_{sete} páginas. Sua classe tem 44_{sete} alunos que se encontram 5_{sete} vêzes por semana durante 106_{sete} minutos diàriamente. 16_{sete} dos alunos são meninas e 25_{sete} são meninos. O aluno mais moço da classe tem 14_{sete} anos e um deles tem 123_{sete} centímetros de altura.

2-6. Mudança da Base Dez para a Base Sete

Você já aprendeu como mudar um número escrito com numerais na base sete para numerais na base dez. Também é fácil mudar da base dez para a base sete. Vejamos como se faz isto:

Na base sete, os valores posicionais são: um, sete^1, sete^2, sete^3, e assim por diante; são um e as potências de sete.

$$\text{Sete}^1 = 7_{dez}$$

$$\text{Sete}^2 = (7 \times 7) \text{ ou } 49_{dez}$$

$$\text{Sete}^3 = (7 \times 7 \times 7) \text{ ou } 343_{dez}$$

Suponha que você queira mudar 12_{dez} para numerais na base sete. Desta vez nós de-
vemos pensar em grupos de potências de sete ao invés de, na verdade, agrupar mar-
cas. Qual é a maior potência de sete que está contida em 12_{dez}? Sete^1 é a maior?
sete^2 (quarenta e nove) ou sete^3 (trezentos e quarenta e três)? Podemos ver que sò-
mente sete^1 é bastante pequeno para estar contido em 12_{dez}.

Quando dividimos 12 por 7 temos:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{7} & 1 \\ 5 & \end{array}$$

O que significa o 1 da direita? O que significa o 5? Êles nos contam que 12_{dez} contém 1 sete e restam 5 unidades, ou que

$$12_{dez} = (1 \times \text{sete}) + (5 \times \text{um}). \text{ Portanto, } 12_{dez} = 15_{sete}$$

Você precisa conhecer bem qual é a posição em um numeral da base sete que tem o valor $sete^2$, o valor $sete^3$, o valor $sete^4$, e assim por diante.

Como reagruparemos 54_{dez} para numerais da base sete?

Qual é a maior potência de sete que está contida em 54_{dez}?

Em 54_{dez} temos ___?___ x $sete^2$ + ___?___ x sete + ___?___ x um

$$\begin{array}{r|l} 54 & 49 \\ \cline{2-2} -49 & 1 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Temos (<u>1</u> x $sete^2$) + (<u>0</u> x sete) + (<u>5</u> x um)

Logo, $54_{dez} = 105_{sete}$

Suponha que o problema consiste em mudar 524_{dez} para base sete. Como 524_{dez} é maior que 343 ($sete^3$), descubra quantos 343 existem.

$$\begin{array}{r|l} 524 & 343 \\ \cline{2-2} -343 & 1 \\ \hline 181 & \end{array}$$

Portanto 524 contém um $sete^3$ e deixa resto 181 ou

524 = (1 x $sete^3$) + 181, e haverá um " 1 " na posição $sete^3$.

Agora encontre quantos 49's ($sete^2$) que existem no resto, 181.

$$\begin{array}{r|l} 181 & 49 \\ \cline{2-2} -147 & 3 \\ \hline 34 & \end{array}$$

Portanto 181 contém 3 quarenta e noves deixando resto 34, ou 181 = (3 x $sete^2$) + 34, e haverá um " 3 " na posição $sete^2$.

Quantos setes estão contidos no resto 34?

$$\begin{array}{r|l} 34 & 7 \\ \cline{2-2} -28 & 4 \\ \hline 6 & \end{array}$$

Portanto 34 contém 4 setes deixando resto 6, ou 34 = (4 x sete) + 6, e haverá um " 4 " na posição dos setes. O que haverá no lugar das unidades? Temos:

524_{dez} = (1 x $sete^3$) + (3 x $sete^2$) + (4 x sete) + (6 x um)

$524_{dez} = 1346_{sete}$

Não olhe para as respostas abaixo até que você tenha feito as mudanças sòzinho.

10_{dez} = (1 x sete) + (3 x um) = 13_{sete}

46_{dez} = (6 x sete) + (4 x um) = 64_{sete}

162_{dez} = (3 x $sete^2$) + (2 x sete) + (1 x um) = 321_{sete}

1738_{dez} = (5 x $sete^3$) + (0 x $sete^2$) + (3 x sete) + (2 x um) = 5032_{sete}

Ao passar da base dez para a base sete, primeiramente selecionamos o <u>maior</u> valor posicional da base sete (isto é, potência de sete) que está contida no número. Dividimos o número por esta potência de sete e achamos o quociente e o resto. O quociente é o primeiro algarismo no numeral da base sete. Dividimos o resto pela potência de sete imediatamente menor e êste quociente é o segundo algarismo. Continuamos a dividir os restos por cada potência sucessiva de sete em ordem decrescente para determinar todos os algarismos restantes do numeral da base sete.

<u>Exercícios 2-6</u>

1. Mostre que:

   a. $50_{dez} = 101_{sete}$ b. $145_{dez} = 265_{sete}$

   c. $1024_{dez} = 2662_{sete}$

2. Mude os seguintes numerais da base dez para base sete:

   a. 12 d. 53

   b. 36 e. 218

   c. 44 f. 1320

Os problemas 3, 4 e 5 o ajudarão a descobrir outro método para mudar numerais da base dez para numerais da base sete.

3. Divida 1958_{dez} por dez. Qual é o quociente? Qual é o resto? Divida o quociente por dez. Qual é o novo quociente? O novo resto? Continue assim, dividindo cada quociente por dez até que você encontre um quociente zero. Como estão os restos sucessivos relacionados ao número inicial? Tente o mesmo processo com $123\ 456\ 789_{dez}$. Tente isto com outro número qualquer.

4. Divida 324_{dez} por sete. Qual é o quociente? O resto? Divida o quociente por sete e continue dividindo como no Exercício 3, exceto que desta vez a divisão é por sete e não por dez. Agora escreva 324_{dez} como um numeral da base sete e compare isto com os restos que você obteve.

5. Pode você agora descobrir outro método para mudar os numerais da base dez para a base sete?

6. Em cada um dos exemplos abaixo estão faltando alguns numerais. Coloque os numerais que tornarão os exemplos corretos. Lembre-se de que se não é dado o nome da base, então a base é dez.

a. Adição
$$\begin{array}{r} 6\,7\,5 \\ \underline{4\,8\,6} \\ ?\,?\,?\,? \end{array}$$

b. Adição
$$\begin{array}{r} 8\,9\,4 \\ \underline{?\,?\,?} \\ 1\,1\,6\,9 \end{array}$$

c. Adição
$$\begin{array}{r} 4\,3\,2_{sete} \\ \underline{?\,?\,?_{sete}} \\ 1\,4\,1\,6_{sete} \end{array}$$

d. Adição
$$\begin{array}{r} 2\,3\,0\,5_{sete} \\ \underline{?\,?\,?}_{\,sete} \\ 3\,1\,0\,0_{\,sete} \end{array}$$

e. Adição
$$\begin{array}{r} 2\,6\,4_{sete} \\ 3\,5\,2_{sete} \\ \underline{1\,4\,0_{sete}} \end{array}$$

f. Multiplicação
$$\begin{array}{r} 5\,1\,4_{sete} \\ \underline{?_{sete}} \\ 2\,1\,4\,5_{sete} \end{array}$$

*g. Multiplicação
$$\begin{array}{r} ?\,?\,?_{sete} \\ \underline{\times\,5\,4_{sete}} \\ 3\,6\,2\,0\,1_{sete} \end{array}$$

2-7. Numerais em Outras Bases

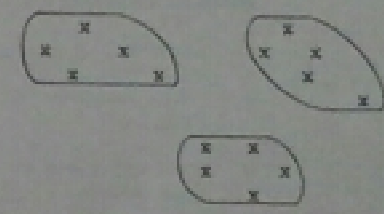
Você estudou os numerais na base sete, portanto você sabe agora que é possível expressar números em sistemas diferentes do decimal. Muitas pessoas pensam que o sistema decimal é usado porque a base dez é superior às outras bases ou porque o número dez tem propriedades especiais. No comêço dissemos que provàvelmente o uso de dez como base era porque os homens possuem dez dedos. Sòmente foi natural para os povos primitivos contar fazendo comparações com seus dedos. Se os homens tivessem seis dedos ou oito dedos, êles provàvelmente contariam nas bases seis ou oito.

Nosso sistema decimal de notação é superior ao egípcio, ao babilônio e a outros porque usa a idéia de valores posicionais e tem um símbolo zero e não porque a base é dez. O sistema egípcio tinha um sistema de base dez mas faltava-lhe eficiência por outras razões.

As Bases Cinco e Seis

Nosso sistema decimal usa dez símbolos. No sistema de base sete você sòmente usou sete símbolos; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Quantos símbolos usariam os esquimós para contar na base cinco? Quantos símbolos são necessários para a escrita na base seis? Pensando um pouco nas questões precedentes, você encontrará as respostas certas. Você pode imaginar quantos símbolos serão necessários para a base vinte?

Os x's à direita estão agrupados em conjuntos de cinco. Quantos grupos de cinco existem? Quantos x's estão fora dos grupos?

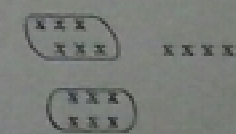


O numeral decimal para o número de x's existentes neste diagrama é 16. Usando os símbolos 0, 1, 2, 3 e 4, como 16_{dez} seria representado na base cinco? Um esquimó, contando na base cinco, pensaria: "Há 3 grupos de cinco e mais um".

$$16_{dez} = (3 \times \text{cinco}) + (1 \times \text{um})$$

$$16_{dez} = 31_{cinco}$$

No desenho à direita temos dezesseis x's agrupados de seis em seis. Quantos grupos de x's temos? Existem x's que não partencem aos grupos? Como escreveria você 16_{dez} na base seis?



Existem dois grupos de seis e mais quatro.

$$16_{dez} = (2 \times \text{seis}) + (4 \times \text{um})$$

$$16_{dez} = 24_{seis}$$

Escreva dezesseis x's. Agrupe-os de quatro em quatro. Você pode escrever o numeral 16_{dez} na base quatro? Quantos grupos de quatro existem? Lembre-se de que você não pode usar o símbolo " 4 " na base quatro. Uma tabela das potências de quatro em numerais decimais vem a seguir.

(quatro³)	(quatro²)	(quatro¹)	(um)
(4 x 4 x 4)	(4 x 4)	(4)	(1)
(64)	(16)	(4)	(1)

Para escrever dezesseis x's na base quatro precisamos (1 grupo de quatro²) + (0 grupos de quatro) + (0 um). Isto é, $16_{dez} = 100_{quatro}$.

Exercícios 2-7

1. Desenhe dezesseis x's. Agrupe-os em conjuntos de três.

   a. Existem ________ grupos de três e ________ são deixados de lado

   b. Suas respostas da parte "a" são algarismos do sistema de base três? Por que?

   c. Nos dezesseis x's existem (________ grupos de três²) + (______ grupos de três) + (________ deixados de lado).

   d. 16_{dez} = ____________ $_{três}$?

2. Desenhe grupos de x's para mostrar os números representados pelos numerais seguintes. Depois escreva os numerais decimais para êste número.

   a. 23_{quatro} b. 15_{seis} c. $102_{três}$ d. 21_{cinco}

3. Escreva na base cinco os números de 1 a 30. Comece uma tabela assim:

base dez	0	1	2	3	4	5	6	7
base cinco	0	1	?	?	?	?	?	?

4. a. Quantos três existem em $20_{três}$?

   b. Quantos quatros existem em 20_{quatro}?

   c. Quantos cincos existem em 20_{cinco}?

   d. Quantos seis existem em 20_{seis}?

5. Escreva os numerais seguintes na notação desenvolvida. Depois escreva o numeral na base dez para cada um dêles como no exemplo dado.

Exemplo: $102_{cinco} = (1 \times 25) + (0 \times 5) + (2 \times 1) = 27$

   a. 245_{seis} c. $1002_{três}$

   b. 412_{cinco} d. 1021_{quatro}

6. Escreva os numerais decimais seguintes nas bases seis, cinco, quatro e três. Lembre-se dos valores das potências de cada uma dessas bases. Note o exemplo:

$$7_{dez} = 11_{seis} = 12_{cinco} = 13_{quatro} = 21_{três}$$

   a. 11_{dez} b. 15_{dez}

   c. 28_{dez} d. 36_{dez}

7. Qual é o menor número inteiro que pode ser usado como uma base para o sistema de notação?

8. Faça os seguintes cálculos:

   a. Adicione: $132_{quatro} + 211_{quatro}$

   b. Adicione: $15_{seis} + 231_{seis} + 420_{seis}$

   c. Subtraia: $1211_{três} - 202_{três}$

   d. Subtraia: $1423_{cinco} - 444_{cinco}$

   e. Multiplique: $13_{quatro} \times 3_{quatro}$

   f. Multiplique: $121_{seis} \times 5_{seis}$

   g. Divida: $452_{seis} \div 4_{seis}$

   h. Divida: $121_{três} \div 2_{três}$

9. PROBLEMA-DESAFIO

   Construa um sistema de valores posicionais onde os seguintes símbolos são usados:

Símbolo	Valor Decimal	Nome
0	0	dó
1	1	ré
∧	2	mi
≥	3	fá
10	4	ré dó

Escreva os numerais para os números de zero a vinte neste sistema. Escreva os nomes literalmente usando "dó, ré", etc.

10. PROBLEMA-DESAFIO

Usando os símbolos e a escala do problema anterior complete as tabelas para adição e multiplicação que estão abaixo:

+	0	1	∧	≥
0				
1				
∧				
≥				

x	0	1	∧	≥
0				
1				
∧				
≥				

2-8. Os sistemas Binário e Duodecimal

Existem outras duas bases de interêsse especial. A base dois ou binária que é usada por algumas máquinas computadoras modernas de alta velocidade. Êstes computadores, às vêzes erradamente denominadas "cérebros eletrônicos", usam a base dois da mesma maneira como usamos a base dez. A base doze ou duodecimal é considerada por muitas pessoas como uma base melhor para um sistema de notação que a base dez.

O Sistema Binário

Os historiadores nos dão notícias de povos primitivos que usavam o sistema binário. Algumas tribus australianas ainda contam aos pares "um, dois, dois e um, dois dois, dois dois e um", e etc.

O sistema binário agrupa por pares como está feito com os três x's à direita. Quantos grupos de dois estamos vendo? Quantos x's sòzinhos são deixados? Três x's significa um grupo de dois e um. Na notação

binária escrevemos o numeral 3_{dez} assim: 11_{dois}. Começamos a contar no sistema binário do seguinte modo:

Numerais Decimais	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Numerais Binários	1	10	11	100	101	110	111	?	?	?

Quantos símbolos são necessários para numerais da base dois? Note que o numeral 101_{dois} representa o número de dedos de u'a mão. O que significa 111_{dois}?

$$111_{dois} = (1 \times dois^2) + (1 \times dois^1) + (1 \times um) = 4 + 2 + 1 = 7_{dez}$$

Como você escreveria 8_{dez} na notação binária? E 10_{dez}? Compare êste numeral com 101_{dois}.

Computadores modernos de alta velocidade são operados eletrônicamente. Um interruptor simples tem sòmente duas posições: ligado (ON) e desligado (OFF). Os computadores operam com êste princípio. Devido ao fato de existirem sòmente duas posições para cada lugar, os computadores usam o sistema binário de notação.

Usaremos o desenho à direita para representar um computador. Os quatro círculos representam quatro luzes de um painel, cada uma delas representa uma posição no sistema binário. Sòmente quando está passando corrente a luz está acesa representada na Figura 2-8b como . A é representada pelo "1". Quando não está passando corrente a luz está apagada, representada na Figura 2-8b por . Isto é representado pelo símbolo "0".

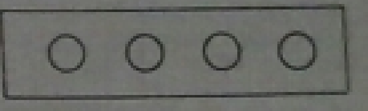


Figura 2-8a.

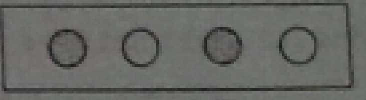


Figura 2-8b

O painel na Figura 2-8b representa o numeral binário 1010_{dois}. Que numeral decimal é representado por êste numeral? A tabela à direita nos mostra os valores das posições para as primeiras cinco posições de numerais na base dois.

$dois^4$	$dois^3$	$dois^2$	$dois^1$	um
2 x 2 x 2 x 2	2 x 2 x 2	2 x 2	2	1
16	8	4	2	1

$$1010_{dois} = (1 \times dois^3) + (0 \times dois^2) + (1 \times dois^1) + (0 \times um)$$

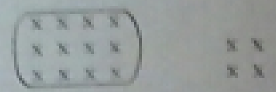
$$= (1 \times 8) + (0 \times 4) + (1 \times 2) + (0 \times 1)$$

$$= 10_{dez}$$

O Sistema Duodecimal

No sistema de base doze ou duodecimal nós agrupamos por conjuntos de doze. Freqüentemente contamos de doze em doze, como uma dúzia de ovos, uma dúzia de cilindros ou uma dúzia de lápis. Doze dúzias (12 x 12) é chamada uma grosa. As escolas às vêzes compram lápis por grozas.

Os dezesseis x's que estão à direita estão agrupados num grupo de doze com 4 x's de lado. Escrito como um numeral na base doze



$$16_{dez} = (1 \times \text{doze}) + (4 \times \text{um}) = 14_{doze}$$

Desenhe vinte e cinco x's num pedaço de papel. Desenhe círculos em volta dos grupos de doze. Quantos grupos de doze existem? Ficou algum x de lado? Como você escreveria 25_{dez} na base de notação duodecimal? Você sabe dizer por que escrevemos 21_{doze}?

$$25_{dez} = (2 \times \text{doze}) + (1 \times \text{um}) = 21_{doze}$$

Para escrever numerais na base doze é necessário criar novos símbolos para serem acrescentados dos dez símbolos do sistema decimal. Quantos símbolos novos são necessários? A base doze requer doze símbolos, dois mais que o sistema decimal. Podemos usar "D" para dez e "Z" para onze como na tabela abaixo:

Base Dez	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Base doze	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D	Z	10	11	12	?	?

Note que "D" é uma outra maneira de escrever 10 e "Z" é uma maneira de escrever 11 no sistema duodecimal. Por que está escrito 12_{dez} como 10_{doze}? Para escrever 195_{doze} na notação desenvolvida procedemos do seguinte modo:

$$195_{doze} = (1 \times \text{doze}^2) + (9 \times \text{doze}^1) + (5 \times \text{um})$$

$$= (1 \times 144) + (9 \times 12) + (5 \times 1)$$

$$= 257_{dez}$$

Exercícios 2-8

1. Faça uma tabela na base dois para os números de zero a trinta e três.

Base Dez	1	2	3	4	. . .	33
Base Dois	1	10	11		. . .	

2. Copie e complete a tabela da adição para a base dois que está à direita. Quantas operações você precisa efetuar?

Adição, Base dois

+	0	1
0		
1		

3. Usando a mesma forma usada no Exercício 2, faça a tabela da multiplicação para a base dois. Quantos resultados existem? Como podemos comparar as tabelas? Isto faz com que seja fácil ou difícil trabalhar com o sistema binário? Justifique suas respostas.

4. Escreva os seguintes numerais binários na notação desenvolvida e depois na base dez.

a. 111_{dois} c. 10101_{dois}

b. 1000_{dois} d. 11000_{dois}

e. 10100_{dois}

5. Escreva na notação duodecimal os três números consecutivos a partir de vinte e um.

6. Para escrever $2D0_{doze}$ na notação desenvolvida, temos:

$$2D0_{doze} = (2 \times \text{doze}^2) + (D \times \text{doze}) + (0 \times \text{um})$$

Para escrever $2D0_{doze}$ como um numeral decimal podemos primeiro escrever como

$$(2 \times 144) + (10 \times 12) + (0 \times 1)$$

Qual é o numeral decimal para $2D0_{doze}$?

7. Escreva os numerais seguintes na notação desenvolvida e depois na base dez.

a. 111_{doze} c. 477_{doze}

b. $3D2_{doze}$ d. $D0Z_{doze}$

8. Adicione êstes números expressos na notação binária; confira exprimindo os numerais dêste exercício e suas respostas na notação decimal e adicionando da maneira comum.

a. 101_{dois} / $\underline{10_{dois}}$ b. 110_{dois} / $\underline{101_{dois}}$ c. 10110_{dois} / $\underline{11010_{dois}}$ d. 10111_{dois} / $\underline{11111_{dois}}$

9. Faça as subtrações seguintes e confira suas respostas como o fez no Exercício 8.

a. 111_{dois} / $\underline{101_{dois}}$ b. 110_{dois} / $\underline{11_{dois}}$ c. 1011_{dois} / $\underline{100_{dois}}$ d. 11001_{dois} / $\underline{10110_{dois}}$

10. Quando se opera com certas espécies de computadores de alta velocidade, é necessário expressar os números no sistema binário. Mude os seguintes numerais decimais para a notação na base dois:

a. 35   b. 128   c. 12   d. 100

11. Adicione e subtraia os numerais duodecimais seguintes. Confira mudando os números para a notação decimal e adicionando e subtraindo da maneira usual.

a. 236_{doze} / $\underline{D9_{doze}}$ b. $D32_{doze}$ / $\underline{193_{doze}}$

12. Que vantagens e desvantagens, caso existam, apresentam os sistemas binários e duodecimal comparados com o sistema decimal?

13. Escreva os seguintes numerais na notação duodecimal.

a. 425_{dez} 524_{dez}

14. PROBLEMA-DESAFIO

Um fiscal de pesos e medidas leva consigo um conjunto de pesos, que êle usa para conferir a precisão das balanças. Vários pesos são postos nas balanças para conferir a exatidão do pêso de qualquer quantidade de 1 quilo a 16 quilos. Várias provas têm de ser feitas porque uma balança que pesa com exatidão 5 quilos pode, por várias razões, não ser exata para pesos de 11 quilos ou mais.

Qual é o menor número de pesos que o fiscal pode ter nesse conjunto e quais devem ser os seus pesos para conferir a exatidão das balanças de um quilo a 15 quilos? De um quilo a trinta e um quilos?

15. PROBLEMA-DESAFIO

As pessoas que trabalham com computadores de alta velocidade às vêzes acham mais fácil expressar os números na base oito do que no sistema binário. Conversões de um sistema para outro podem ser feitas bem ràpidamente. Você pode descobrir o método usado?

Faça uma tabela de numerais como a abaixo:

Base dez	Base oito	Base dois
1	1	1
2	2	10
5	5	101
7	?	?
15	?	?
16	?	?
32	?	?
64	?	?
256	?	?

Compare as potências de oito e as de dois até 256. Estude as potências e a tabela acima. $101\ 011\ 010_{dois} = 532_{oito}$. Você sabe por quê?

2-9. Resumo

O sistema decimal resultou de esforços humanos durante milhares de anos para desenvolver um sistema viável de notação (escrita de numerais). Não é um sistema perfeito, mas tem vantagens que os outros sistemas não têm. Neste capítulo você estudou alguns dos sistemas antigos, os quais, nas suas épocas representavam tremendas façanhas do progresso humano. Você também estudou outros sistemas em bases diferentes para compreender melhor o nosso sistema.

Aprendendo sôbre outros sistemas de notação, você aprendeu que um número pode ser expresso em numerais diferentes. Por exemplo, doze pode ser escrito como ////, XII, 12_{dez}, 15_{sete}, ou 1100_{dois}, etc. Êstes numerais são diferentes, embora representem o mesmo número. Os símbolos que usamos não são êles mesmos os números. "XII" não é doze coisas, nem é "10". Êles são sòmente numerais diferentes ou símbolos para doze.

Às vêzes confundimos numerais e números. Um número é um conceito enquanto que um numeral é um símbolo para êsse conceito. Podemos escrever "2" no quadro negro para representar um conjunto de dois objetos, dois estudantes ou dois livros. Se nós apagarmos o 2 removemos o numeral, mas não destruímos o número. Da mesma maneira, a palavra lápis não é a mesma coisa que o objeto que você usa para escrever no papel.

Os egípcios podem não ter tido conhecimento que seu sistema de notação era baseado em dez. Para saber disto, êles teriam de ter sabido que é possível usar outras bases para um sistema numérico. Você sabe isto, e sabe que é possível usar qualquer número inteiro maior que um como base. Usamos alguns dêsses sistemas de numeração. O sistema binário é usado por computadores eletrônicos. Você deve ficar ciente de que um computador de alta velocidade não é um "cérebro"; melhor dizendo, é um dispositivo de alta velocidade que faz sòmente o que lhe é "dito" para fazer. Cálculos a alta velocidade com computadores são possíveis porque as máquinas operam com a velocidade da corrente elétrica e usam grandes memórias para guardar informações. Os homens foram capazes de inventar modernos computadores de alta velocidade porque êles inventaram o sistema de notação dos números usados nas operações com computadores.

Exercícios 2-9

1. Agrupe vinte dessas marcas (/) afim de mostrar o valor posicional de cada um dos números na base abaixo mencionada. Depois escreva o numeral que representa vinte em cada uma dessas bases.

   a. doze b. sete c. cinco d. dois

2. Os numerais abaixo representam o número quinze em várias bases. Escreva a base para cada numeral.

   a. $13_{\underline{\ ?\ }}$ b. $21_{\underline{\ ?\ }}$ c. $30_{\underline{\ ?\ }}$ d. $1111_{\underline{\ ?\ }}$

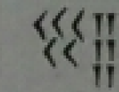
3. Escreva os numerais seguintes sob a forma desenvolvida e na notação decimal

   a. 111_{dois} b. 321_{quatro} c. 2631_{sete} d. $37D_{doze}$

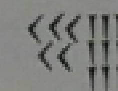
4. Escreva "mil" como um numeral na base oito e também na base dois.

5. Escreva os cinco numerais que sucedem 88_{nove}

6. Os babilônios usavam os símbolos 𒁹 e 𒌋 para um e dez, respectivamente. Repetindo êstes símbolos êles escreviam cinqüenta e nove assim:



Para escrever números maiores que cinqüenta e nove os babilônios usavam os mesmos símbolos acima e a idéia de valor posicional. Seu número de base era muito grande. Era sessenta. Como no nosso sistema decimal, a primeira posição representava a unidade, portanto



significava (59 x 1).

A segunda posição valia sessenta, portanto 𒌋𒁹𒁹 𒁹𒁹 significava

(𒌋𒁹𒁹 x sessenta) + (𒁹𒁹 x um)

= (12 x 60) + (2 x 1)

= 720 + 2

= 722

Os três primeiros valores posicionais no sistema babilônio eram:

	$sessenta^2$	sessenta	um
Significado na base dez	60 x 60	60	1

a. Os primeiros babilônios não tinham um símbolo para zero. Às vêzes êles deixavam espaços vazios onde nós colocamos zeros como 𒁹 𒁹
Isto significava que o leitor tinha de adivinhar quando estivesse lendo, se o numeral 𒁹 𒁹 significava (𒁹 + 𒁹) x um
ou (𒁹 x sessenta) + (𒁹 x um)
ou (𒁹 x $sessenta^2$) + (𒁹 x um)
Escreva os três numerais decimais para o numeral babilônio 𒁹 𒁹

b. O numeral decimal "11" tem mais de um significado possível? Por que?

c. Ache os valores decimais para: 𒁹𒁹 𒌋𒁹𒁹 𒌋𒁹

= (𒁹𒁹 × __?__) + (𒌋𒁹𒁹 × __?__) + (𒌋𒁹 × __?__)

= ? + ? + ?

= ?

d. Escreva os numerais decimais 70, 111 e 4 000 na notação babilônia.

e. Escreva 𒌋𒁹 𒌋𒁹 + 𒁹𒁹𒁹 𒌋𒌋 como um numeral babilônio.

7. No Lincoln's Gettysburg Adress, o têrmo "quatro traços e sete" é usado. Qual é a base que êle usou? Escreva o numeral decimal para êste número.

8. Um sistema numérico posicional usa os símbolos 0, A, B, C e D para representar os números de zero a quatro. Se êstes são os únicos símbolos usados no sistema, escreva o numeral decimal para DCBA0.

9. Um numeral decimal (escrito na base dez) tem três algarismos 9, 5 e outro nesta ordem. Se invertermos a ordem dos algarismos e subtrairmos o novo numeral do numeral de partida, o resultado será um numeral que tem os mesmos algarismos dispostos numa ordem diferente. Qual é o algarismo omitido?

10 <u>PROBLEMA-DESAFIO</u>

Suponha que em um sistema de valores posicionais usa letras maiúsculas do alfabeto (A, B, C, ... Y, Z) como símbolos para numerais. Retira-se a letra "O" da sua posição habitual entre N e P e é usada como símbolo para zero. Qual é a base para êste sistema de notação? Que numeral decimal representa "B E" nesta base? E "T W O"? e "F O U R"?

11. <u>PROBLEMA-DESAFIO</u>

Há diversas maneiras para mudar numerais escritos em outras bases para a base dez. Um estudante sugeriu êste método:

Exemplo A: Para mudar 46_{doze} para a base dez.

Por haver dois símbolos a mais na base doze, multiplicaremos (2×4) e adicionamos o resultado a 46_{dez}.
Êste método é viável para 46_{doze}? É válido para qualquer outro número de dois algarismos escritos na base doze?

Exemplo B: Para mudar 46_{sete} para a base dez.
Por haver três símbolos a menos, multiplicaremos (3×4) e subtraímos de 46_{dez}. O método é válido para 46_{sete}? Vale para qualquer outro número de dois algarismos escritos na base sete?

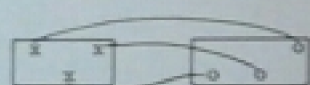
Capítulo 3

OS NÚMEROS INTEIROS

3-1. Os Números Naturais

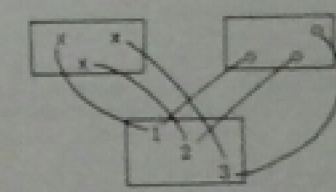
Os números naturais são números usados para responder à questão "Quantos?" Os homens primitivos desenvolveram a idéia de número pela prática de associar objetos ou elementos de um conjunto com elementos de outro conjunto. Quando uma ovelha deixava o aprisco pela manhã êle podia pôr uma pedra numa pilha quando cada ovelha saísse. Quando a ovelha voltasse à tarde êle tirava uma pedra da pilha, assim que ela entrasse no redil. Se não sobrasse nenhuma pedra na pilha quando a última ovelha entrasse no aprisco, então êle sabia que tôdas as ovelhas haviam voltado. Da mesma maneira, para se dar conta do número de animais selvagens que êle abatia, podia fazer riscos num bastão, uma marca para cada animal. Se lhe perguntassem quantos animais êle havia abatido, êle podia mostrar as marcas no bastão. Êle estava querendo dizer que abatera tantos animais quantas marcas havia no bastão. Êle estava tentando responder a questão "Quantos?" fazendo uma correspondência biunívoca entre os animais e as marcas no bastão. Êle também estava tentando responder à questão "Quantos?" fazendo uma correspondência biunívoca entre as pedras da pilha e as ovelhas do rebanho. Com correspondência biunívoca queremos dizer que cada pedra corresponde exatamente a uma ovelha e que cada ovelha corresponde exatamente a uma pedra. Isto significa que o número de ovelhas é o mesmo que o número de pedras.

Alguns de nós aprendemos o significado de número por contagem usando correspondências biunívocas. Observemos vários conjuntos de objetos como na figura abaixo



Vemos que êles possuem uma certa propriedade. Podemos descrever esta propriedade dizendo que existem "exatamente" tantas marcas em um conjunto como no outro. Podemos mostrar uma correspondência biunívoca entre os conjuntos, unindo as marcas com uma linha ou corda. Cada marca de um conjunto é ligada à outra do outro conjunto. Nem uma marca é deixada de lado em nenhum dos conjuntos e nenhuma marca é usada duas vêzes. A correspondência mostra que existem "exatamente tantas" marcas em um conjunto quantas existem no outro mas isto não nos diz "quantas" existem em têrmos de um número.

Felizmente temos um conjunto padrão que podemos usar para nos dizer "quantos" existem em cada conjunto. Êste conjunto pode também ser usado para nos afirmar que existem "exatamente tantas" em um conjunto, quanto no outro. Êste conjunto padrão é o conjuntos dos números naturais representados pelos numerais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 .... Na figura, cada conjunto de marcas está em correspondência biunívoca com o conjuntos dos numerais 1, 2, 3. O número de marcas é o mesmo número representado pelo último numeral do conjunto correspondência. Esta espécie de correspondência biunívoca entre as marcas e o conjunto dos numerais nos revela que existem "exatamente tantas" em um conjunto como no outro e também nos dá "quantas" marcas existem em cada conjunto.



Por êste processo, êstes números são usados para contar objetos de uma coleção e por isso também chamados "números de contagem". Neste texto nós os chamaremos "<u>números naturais</u>". Vamos admitir que o nosso primeiro número natural é 1. Se quisermos falar sôbre todos os números naturais <u>e o zero</u>, chamaremos êste conjunto de números, "<u>números inteiros</u>".

Exercício 3-1

1. Dê uma nova disposição a êstes numerais de maneira que os números que êles representam fiquem por ordem de grandeza crescente

   a. 1, 2, 3, 6, 4, 5

   b. 2 + 1, 1 + 1, 3 + 1, 0 + 5, 1 + 6, 3 + 1, 5 + 3

   c. IV, XI, V, VI, VII, X, IX.

   d. $(3)_{sete}$, $(10)_{sete}$, $(4)_{sete}$, $(1)_{sete}$, $(5)_{sete}$, $(2)_{sete}$, $(6)_{sete}$

2. Quais dos números representados pelos numerais 2, 5, 7, 3 são números inteiros compreendidos entre um e dez? E entre seis e onze?

3. É possível dar uma disposição conveniente a 24 marcas de maneira que possamos dizer quantas existem sem contar uma à uma? Explique ou mostre.

4. Dê uma nova disposição às marcas seguintes de maneira que o número de marcas possa ser fàcilmente determinado.

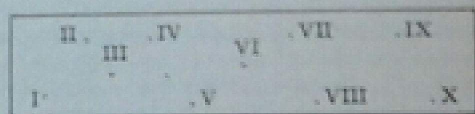
   a. | | | | | | | | | | | |

   b. - - - - - - - - - -

5. Explique dois modos de acharmos o número de pontos na figura sem contar cada um.

6. Tente descobrir o nome do primeiro número natural em algumas línguas: (Frances, Inglês, Espanhol, Alemão, Russo, etc.)

7. Na contagem de número de pontos da figura um êrro foi feito, Qual é êle?



8. Houve algum êrro na contagem do número de x's nesta figura? Caso haja, qual foi êle?

9. Suponha que 12 talões estão colocados juntos e que o primeiro tem nele o numeral 2. Qual é o numeral do último talão se êles foram dispostos em ordem

10. O dono de um teatro deseja saber quantas pessoas compareceram ao teatro na noite anterior. Êle sabe que o primeiro ingresso estava marcado com 27 o último com 81. Como êle achou que 54 pessoas compareceram ao teatro? Êle estava certo?

11. Se existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de pessoas de uma sala e o conjunto de pares de sapatos que estão na sala, então existe uma correspondência dois a um entre o conjunto de sapatos e o conjunto de pessoas da sala. Mencione alguns exemplos de correspondência dois a um e quatro a um.

12. A disposição seguinte ilustra uma correspondência um a um ou biunívoca entre os números ________ e os números ________.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & . & . & . \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & . & . & . \end{array}$$

3-2. Propriedades Comutativas dos Números Inteiros

Se você tiver três maçãs num cêsto e colocar nêle mais duas maçãs, então o número de maçãs no cêsto será obtido somando dois a três. Raciocine em têrmos de 3 + 2. Se você tivesse começado com duas maçãs no cêsto e tivesse colocado três a mais, então o número de maçãs do cêsto seria obtido somando 3 a 2. Raciocine em têrmos de 2 + 3. Em qualquer um dos casos está claro que haverá 5 maçãs no cêsto. Podemos escrever 2 + 3 = 3 + 2.

Numa aula de Aritmética o professor ditou dois números grandes para serem adicionados. Um menino não entendeu o que o professor disse quando ditou o primeiro número. Êle escreveu o segundo número e então pediu-lhe que repetisse o primeiro. Quando o professor ditou de nôvo êle escreveu-o embaixo do segundo ao invés de escrever em cima. Se todos os estudantes fizeram a adição corretamente, terá êste menino encontrado a mesma resposta que a dos outros que entenderam o ditado da primeira vez?

$$\text{O menino escreveu} \quad \begin{array}{r} 2437 \\ \underline{6254} \end{array} \quad \text{e os outros} \quad \begin{array}{r} 6254 \\ \underline{2437} \end{array}$$

Esta idéia que acaba de ser descrita é chamada propriedade comutativa de adição para números inteiros. Ela afirma que a ordem na qual adicionamos dois números não afeta o resultado. Usamos aqui a palavra propriedade, no sentido comum da palavra — é algo característico da operação de adição

3 adicionado a 4 é 7 ou 4 + 3 = 7

4 adicionado a 3 é 7 ou 3 + 4 = 7

Portanto, podemos escrever 4 + 3 = 3 + 4. Isto satisfaz a propriedade comutativa da adição para êstes dois números inteiros.

Podemos estabelecer a propriedade comutativa da adição para números inteiros por meio do seguinte enunciado:

Propriedade 1. Se a e b representam números inteiros então

$$a + b = b + a.$$

No exemplo acima a é 4 e b é 3.

A multiplicação é outra operação realizada com números. A multiplicação goza da propriedade comutativa? Vejamos como achar a resposta para esta questão.

Suponha que temos cinco filas de cadeiras com 3 cadeiras em cada fila. Depois, suponha que demos nova disposição de maneira a termos três filas de cinco cadeiras em cada uma. Sobrarão algumas cadeiras que não serão usadas na segunda disposição?

5 filas com 3 em cada : $5 \times 3 = 15$

3 filas com 5 cada: $3 \times 5 = 15$

Nas tabelas de multiplicação você aprendeu que $7 \times 5 = 35$ e que $5 \times 7 = 35$. Da mesma maneira $9 \times 8 = 72$ e $8 \times 9 = 72$. Quando os dois números são os mesmos, os produtos são iguais, não importando a ordem dos fatores.

Êstes exemplos indicam que a multiplicação goza da propriedade comutativa. Esta propriedade comutativa da multiplicação para números inteiros afirma que o produto de dois números inteiros é o mesmo se o primeiro fôr multiplicado pelo segundo ou o segundo fôr multiplicado pelo primeiro. Enunciaremos isto assim:

Propriedade 2. Se $\underline{a}$ e $\underline{b}$ representam números inteiros então

$$a \times b = b \times a$$

Podemos usar esta propriedade para descobrir êrros que possam ser cometidos ao efetuar a multiplicação de um número por outro. Encontramos êsses produtos:

436	125
125	436
2180	730
872	365
436	600
54500	63380

Nêste cálculo, a propriedade comutativa mostra que fizemos pelo menos um êrro. Descubra todos os êrros.

Tanto na Propriedade 1 como na Propriedade 2 usamos letras para representar números. Esta idéia de usar letras para representar qualquer número em tudo que estabelece princípios gerais é uma parte muito útil da linguagem matemática. Às vêzes a letra x e o sinal de multiplicação podem ser confundidos. Para evitar isso, freqüentemente usamos um ponto para indicar multiplicação. Por exemplo, podemos escrever $4 \cdot 3$ ao invés de 4×3 e $a \cdot b$ para $a \times b$.

Muitos símbolos são usados para simplificar a escrita matemática. Qualquer símbolo pode ser introduzido e usado se primeiro convencionarmos o que o símbolo significa e sempre usá-lo com êsse significado. O ponto para multiplicação é um bom exemplo dêsse fato.

Em Matemática freqüentemente dizemos que um número é maior que outro. Para simplificar a frase "é maior que" usamos o símbolo $>$. Portanto, para escrever "5 é maior que 3" simplesmente escrevemos $5 > 3$. Para indicar que a é maior que b escrevemos $a > b$. Da mesma maneira usamos o símbolo $<$ para significar "é menor que". Assim, escreveremos $4 < 7$ para "4 é menor que 7". Note que êstes dois novos símbolos estão dirigidos para o menor dos dois números que estão sendo comparados.

Às vêzes simplesmente queremos dizer que dois números não são iguais. Usamos o símbolo $\neq$ para "não é igual a" ou "é diferente de". Por exemplo, $5 \neq 3$ e $4 \neq 0$.

Comparando três números tais como 3, 6 e 11, podemos escrever $3 < 6 < 11$ ou $11 > 6 > 3$. Note que a afirmação $3 < 6 < 11$ realmente se verifica para as duas afirmações "3 é menor que 6" e "6 é menor que 11".

Exercícios 3-2a

1. Verifique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

a. $6 + 4 = 4 + 6$

b. $13_{quatro} + 32_{quatro} < 32_{quatro} + 13_{quatro}$

c. $6 < 7 < 14$

d. $1 + 5 = 5 + 1$

e. $6 \cdot 5 = 5 \cdot 7$

f. $6 + 3 = 4 + 5$

g. $45 \cdot 36 < 36 \cdot 45$

h. $5 + 4 > 5 + 3$

i. $315 + 462 = 462 + 315$

j. $5 > 3 > 10$

k. $8 + 2 = 2 + 8$

l. $851 + 367 = 158 + 763$

m. se $16 > 7$ e $7 > 5$ então $16 > 5$

2. Adicione. Depois use a propriedade comutativa para testar o resultado

a.	b.	c.	d.
465	37 461	73 967	42_{sete}
170	73 135	81 785	32_{sete}

3. Usando os símbolos =, < e >, torne as seguintes expressões verdadeiras

a. $7 + 4 \; ? \; 4 + 7$

b. $12 . 5 \; ? \; 5 . 11$

c. $23 . 12 \; ? \; 12 . 32$

d. $33 \; ? \; 6$

e. $16 \; ? \; 9 \; ? \; 3$

f. $(3 . 2) + 5 \; ? \; 5 + (3 . 2)$

g. $8 - 3 \; ? \; 9 - 3$

h. $86 . 135 \; ? \; 135 . 86$

i. $24 \div 3 \; ? \; 3 \div 24$

j. Sendo a, b e c números inteiros: $a > b$ e $b > c$, então $a \; ? \; c$.

4. Multiplique. Depois use a propriedade comutativa para testar os resultados:

a. $\begin{array}{r} 38 \\ \underline{57} \end{array}$ b. $\begin{array}{r} 305 \\ \underline{84} \end{array}$ c. $\begin{array}{r} 476 \\ \underline{600} \end{array}$ d. $\begin{array}{r} 31_{\text{sete}} \\ \underline{25}_{\text{sete}} \end{array}$

5. Dê o número inteiro ou os números inteiros que podem ser usados no lugar de a para tornarem as afirmações verdadeiras:

a. $3 + a = 3 + 5$

b. $5 . 7 = 7 . a$

c. $2 . a < 3 . 2$

d. $3 . a < 3 . 2$

e. $132 + a = 46 + 132$

f. $2 + a < 2 + 7$

g. $7 . 3 > a . 5$

h. $a + 3 = 3 + a$

As propriedades comutativas da adição e da multiplicação foram estabelecidas simbòlicamente sob a forma:

$$a + b = b + a \qquad \text{e} \qquad a . b = b . a$$

Note como elas são semelhantes.

Você acha que a subtração goza da propriedade comutativa? Para verificar isso devemos perguntar se $a - b$ é igual a $b - a$ para todos os números inteiros a e b. Se pudermos encontrar ao menos um par de números inteiros para os quais isso não seja verdadeiro, então a subtração não poderá gozar da propriedade comutativa: $6 - 9$ é igual a $9 - 6$? Não. Pois $(9 - 6)$ é 3 e não existe número inteiro igual a $(6 - 9)$.

<u>Exercícios 3-2b.</u>

Troque entre si os números em cada uma das expressões seguintes. Em quais delas o resultado permanece o mesmo?

a. $1 + 2$

b. $6 + 8$

c. $7 . 9$

d. $4 - 5$

e. $12 \div 3$

f. $9 \div 4$

g. $5 - 4$

h. $3 \div 12$

i. $4 \div 9$

A divisão de números inteiros goza da propriedade comutativa? Dê um exemplo que ilustra a sua resposta.

Quais das seguintes atividades são comutativas?

a. Vestir um chapéu e depois um casaco.

b. Vestir meias e depois sapatos.

c. Derramar tinta vermelha numa tinta azul.

d. Fechar a escotilha e submergir o submarino.

e. Calçar seu sapato esquerdo e depois o sapato direito.

Inventaremos a operação "M" que significará escolher o maior de dois números. Se os números forem os mesmos podemos escolher qualquer um dêles. Esta operação é comutativa?

Exemplo: $3 \text{ M } 4 = 4$

Quais das operações definidas abaixo são comutativas?

a. "D" significa achar a soma do primeiro e o dôbro do segundo. Exemplo: $3 \text{ D } 5 = 3 + (2 . 5)$ ou 13.

b. "Z" significa achar a soma do primeiro e o produto do segundo pelo primeiro. Exemplo: $4 \text{ Z } 7 = 4 + (4 . 7)$ ou 32.

c. "F" significa achar o produto do primeiro pelo consecutivo do segundo. Exemplo: $8 \text{ F } 0 = 8 . 1$ ou 8.

d. "Q" significa achar três vêzes a soma do primeiro e o segundo. Exemplo: $8 \text{ Q } 5 = 3 (8 + 5)$ ou 39.

6. Mencione algumas atividades que são comutativas e outras que não são comutativas.

3-3. Propriedades Associativas dos Números Inteiros

O que entendemos por 1 + 2 + 3? Isto significa (1 + 2) + 3 onde adicio-
namos 1 e 2 e depois adicionamos 3 ao resultado ou quer dizer 1 + (2 + 3) onde a-
dicionamos 2 e 3 e em seguida adicionamos 1 ao resultado? Ou isto não faz diferen-
ça? Nós vimos que a ordem pela qual dois números são adicionados não altera a soma
(propriedade comutativa de adição). Vemos agora que a maneira de agrupar três núme-
ros para adicioná-los não altera a soma. Por exemplo:

$$(1 + 2) + 3 = 3 + 3 = 6 \quad e$$

$$1 + (2 + 3) = 1 + 5 = 6$$

Denominamos esta idéia de agrupar números de maneiras diferentes, sem alterar a so-
ma , propriedade associativa da adição. Esta propriedade pode ser usada para tornar
a adição mais fácil se a adição de um par dos três números for mais fácil que a adição
de outros pares. Se lhe pedirmos para adicionar 12 + 4 + 2, você poderia adicionar
primeiro 12 e 4 e depois adicionar 2 a 16. Ou primeiro você poderia adicionar 4
a 2 e depois adicionar 6 a 12. Se adicionarmos cada um dos seguintes exemplos reunin
do os números de maneiras diferentes estaremos mostrando aplicações da propriedade
associativa.

$$7 + 9 + 11 = 7 + (9 + 11) = 7 + 20 = 27$$

$$12 + 7 + 33 = 12 + (7 + 33) = 12 + 40 = 52$$

$$97 + 53 + 100 = (97 + 53) + 100 = 150 + 100 = 250$$

A propriedade associativa pode ser usada para se achar a soma de 12 e 7. Talvez vo
cê a use sempre mas não tenha percebido e não sabia o seu nome. Note como ela pode
ser usada: 12 + 7 = (10 + 2) + 7 = 10 + (2 + 7) = 19.

Exatamente como estabelecemos a propriedade comutativa da adição, agora
estabeleceremos a propriedade associativa da adição.

Propriedade 3. Se a, b e c representam números inteiros quaisquer

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Todos os dias falamos em adição ou combinação de várias coisas. Se tais combinações
gozam ou não da propriedade associativa, isto depende das coisas que combinamos. É
(gasolina + fogo) + água o mesmo que gasolina + (fogo + água)?.

A propriedade comutativa da adição afirma que podemos mudar a ordem de
dois números quaisquer sem alterar a soma. Exatamente como existe uma proprieda-
de comutativa para a adição e multiplicação, podemos esperar que a propriedade asso-
ciativa seja válida para ambas as operações.

O que entendemos por 2 . 5 . 4? Quer dizer (2 . 5) . 4 onde primeiro
multiplicamos 2 por 5 e depois multiplicamos 10 por 4 ou quer dizer 2 . (5 . 4) on
de primeiro multiplicamos 5 por 4 e depois multiplicamos por 2 . 20? Ambos dão
a mesma resposta e concluímos que podemos dar qualquer um dos significados a 2 .
5 . 4 . Isto é verdadeiro para quaisquer números inteiros.

Propriedade 4. Se a, b e c representam números inteiros quaisquer

$$(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$$

Esta é uma maneira simbólica de estabelecermos a propriedade associativa da multipli-
cação para números inteiros. As vêzes é conveniente alterar a ordem dos números que
devem ser adicionados ou multiplicados para tornar a operação mais fácil. Isto pode
ser feito por meio da propriedade comutativa. Então podemos efetuar a adição ou mul-
tiplicação agrupando os números de acôrdo com a propriedade associativa. Os seguin-
tes exemplos são ilustrações dos usos de ambas as propriedades no mesmo problema.

$$17 + (19 + 13) = 17 + (13 + 19) = (17 + 13) + 19 =$$

$$= 30 + 19 = 49$$

$$50 \,.\, (17 \,.\, 4) = 50 \,.\, (4 \,.\, 17) = (50 \,.\, 4) \,.\, 17 =$$

$$= 200 \,.\, 17 = 3400$$

Existe uma propriedade associativa para a subtração? Talvez você possa
resolver essa questão considerando sòmente um exemplo. Vejamos 10 - (6 - 4) que
é 10 - 2 ou 8. Mas (10 - 6) - 4 = 0 portanto, 10 - (6 - 4) não é igual a (10 - 6) -
- 4. Isto indica que a subtração não goza da propriedade associativa. No começo você
pode achar que um exemplo não é o suficiente e que essa propriedade pode se verificar
se usarmos outros números. Mas se existir uma propriedade associativa para a sub-
tração então ela deve se verificar para todos os números inteiros. Portanto, se en-
contrarmos um conjunto de três números inteiros para os quais a propriedade não é ver
dadeira sabemos que ela não pode ser uma propriedade válida para todos os números
inteiros.

Você acha que a divisão goza de propriedade associativa? O que significa
16 ÷ 4 ÷ 2? Não podemos dizer. Pode significar (16 ÷ 4) ÷ 2 ou pode significar
16 ÷ (4 ÷ 2). A primeira expressão é igual a 2 e a segunda igual a 8, portanto elas
não são iguais entre si. Isto mostra que a divisão não goza da propriedade associativa.

Estas observações sôbre a subtração e a divisão nos mostram também que
expressões como 10 - 6 - 4 e 16 ÷ 4 ÷ 2 não têm qualquer significado. Naturalmen-
te as expressões (10 - 6) - 4 e 10 - (6 - 4) têm significados e êles são diferentes.

Também, $(16 \div 4) \div 2$ e $16 \div (4 \div 2)$ têm sentido, mas seus significados são diferentes.

Exercícios 3-3

1\. Exemplo: $(4 + 3) + 2 = 4 + (3 + 2)$
Aqui, $(4 + 3) + 2 = 7 + 2 = 9$ e $4 + (3 + 2) = 4 + 5 = 9$.
Isto ilustra a propriedade associativa da adição. Mostre que as seguintes expressões são verdadeiras da maneira feita acima. Enuncie a propriedade ilustrada em cada problema.

a. $(4 + 7) + 2 = 4 + (7 + 2)$

b. $8 + (6 + 3) = (8 + 6) + 3$

c. $46 + (73 + 98) = (46 + 73) + 98$

d. $(6 \,.\, 5) \,.\, 9 = 6 \,.\, (5 \,.\, 9)$

e. $(21 + 5) + 4 = 21 + (5 + 4)$

f. $(9 \,.\, 7) \,.\, 8 = 9 \,.\, (7 \,.\, 8)$

g. $436 + (476 + 1) = (436 + 476) + 1$

h. $(57 \,.\, 80) \,.\, 75 = 57 \,.\, (80 \,.\, 75)$

2\. a. $(10 - 7) - 2$ é igual a $10 - (7 - 2)$?

b. $18 - (5 - 2)$ é igual a $(18 - 5) - 2$?

c. Que generalização pode você fazer relativamente à propriedade associativa da subtração?

3\. a. $(32 \div 8) \div 2$ é igual a $32 \div (8 \div 2)$?

b. $(60 \div 30) \div 2$ é igual a $60 \div (30 \div 2)$?

c. Coloque parêntesis em $75 \div 15 \div 5$ de maneira que ela se torne igual a 1.

d. Coloque parêntesis em $75 \div 15 \div 5$ de maneira que ela seja igual a 25.

e. Coloque parêntesis em $80 \div 20 \div 2$ de maneira que ela fique igual a 8.

f. Coloque parêntesis em $80 \div 20 \div 2$ de maneira que ela fique igual a 2.

g. Que generalização pode ser feita a respeito da propriedade associativa e a divisão?

4\. Reescreva êstes problemas usando as propriedades associativa sempre que isto tornar a operação mais fácil. Use parêntesis para mostrar a operação que deve ser efetuada primeiro. Ache as respostas. Exemplo:

$25 + (36 + 75)$

$= 25 + (75 + 36)$ pela propriedade comutativa da adição

$= (25 + 75) + 36$ pela propriedade associativa da adição

$= 100 + 36$

$= 136$

a. $(6 + 1) + 9$

b. $2 \,.\, (13 \,.\, 10)$

c. $(12 \,.\, 9) \,.\, 10$

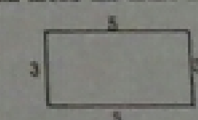
d. $4 \,.\, (25 \,.\, 76)$

e. $340 + (522 + 60)$

f. $(5 \,.\, 67) \,.\, 2$

3-4. A Propriedade Distributiva

Para achar o perímetro de um tampo de uma mesa um aluno mede o comprimento de cada lado em decímetros e encontra as medidas indicadas no diagrama. Em seguida êle calcula o perímetro em decímetros fazendo a adição $5 + 3 + 5 + 3 = 16$. Outro aluno disse que êste cálculo estava certo, mas, que êle exige mais trabalho que o necessário. Diz êle que teria adicionado 5 e 3 e em seguida multiplicado a soma por dois. Êste raciocínio dará a mesma resposta? Um terceiro disse achar melhor multiplicar 5 por 2 e 3 por 2 e depois adicionar êstes produtos. Êstes dois últimos alunos podem não saber o nome do princípio que estão usando mas êle é muito útil e importante. Chama-se a propriedade distributiva. Em têrmos do problema acima, ela afirma simplesmente que



$$2 \,.\, (5 + 3) = (2 \,.\, 5) + (2 \,.\, 3)$$

e

$$2 \,.\, (5 + 3) = (2 \,.\, 8)$$

Oito meninas e quatro meninos estão planejando uma festa de patinação. Então, cada menina convida outra menina e cada menino outro menino. O número inicial de meninas dobra, o mesmo acontecendo com o número de meninos. O número total de crianças dobrou ou não? Vejamos. No total haverá $(2 \,.\, 8)$ meninas e $(2 \,.\, 4)$ meninos, ou seja, um total de $(2 \,.\, 8) + (2 \,.\, 4) = 24$ crianças na festa. Vejamos isto sob outro aspecto. Quando a festa foi planejada havia $(8 + 4) = 12$ crianças. O número final de crianças é $2 \,.\, (8 + 4)$ ou $2 \,.\, 12$.

Nós vimos que $(2 \,.\, 8) + (2 \,.\, 4) = 16 + 8 = 24$

e $2 \,.\, (8 + 4) = 2 \,.\, 12 = 24$

Portanto podemos escrever $(2 \,.\, 8) + (2 \,.\, 4) = 2 \,.\, (8 + 4)$.

Você tem usado esta propriedade de diversas maneiras há algum tempo. Considere, por exemplo, $3 \,.\, 13$ ou $\begin{array}{r} 13 \\ \underline{\times 3} \\ 39 \end{array}$. Você na verdade já usou a propriedade distributiva

porque:

$$3 \,.\, 13 = 3 \,.\, (10 + 3) = (3 \,.\, 10) + (3 \,.\, 3) = 30 + 9 = 39.$$

Vejamos como é que você usou a propriedade distributiva para achar o produto $9 \,.\, 36$. Provàvelmente você realizou a multiplicação assim:

$$\begin{array}{r} 36 \\ \underline{\times 9} \\ 324 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{rl} 36 & \\ \underline{\times 9} & \\ 54 & (9 \times 6) \\ \underline{270} & (9 \times 30) \\ 324 & \end{array}$$

Você percebe que o exemplo à esquerda é uma maneira de encurtar o problema? Na realidade você esteve usando a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned} 9 \,.\, 36 &= 9 \,.\, (30 + 6) \\ &= (9 \,.\, 30) + (9 \,.\, 6) \quad \text{propriedade distributiva} \\ &= 270 + 54 \\ &= 324 \end{aligned}$$

A propriedade distributiva também é importante para operações com frações. Vejamos quanto é o produto de 8 por $12\frac{1}{4}$. Primeiro vamos lembrar que $12\frac{1}{4}$ é o mesmo que $12 + \frac{1}{4}$. Então

$$\begin{aligned} 8 \,.\, 12\tfrac{1}{4} &= 8 \,.\, (12 + \tfrac{1}{4}) \\ &= (8 \,.\, 12) + (8 \,.\, \tfrac{1}{4}) = 96 + 2 \\ &= 98 \end{aligned}$$

A propriedade distributiva é:

<u>Propriedade 5.</u> <u>Se</u> a, b <u>e</u> c <u>são números inteiros qualquer então</u>

$$a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c).$$

A propriedade distributiva é a única das três propriedades que estudamos neste capítulo que envolve duas operações, a saber: adição e multiplicação. Isto não significa que qualquer problema onde estas se encontrem é resolvido pelo emprêgo da propriedade distributiva. Por exemplo, $(3 \,.\, 5) + 14$ significa que devemos achar o produto de 3 por 5 e depois adicioná-lo a 14: $(3 \,.\, 5) + 14 = 15 + 14 = 29$; entretanto, $3 \,.\, (5 + 14) = (3 \,.\, 5) + (3 \,.\, 14) = 15 + 42 = 57$.

A propriedade comutativa da multiplicação nos permite escrever $(b + c) \,.\, a = (b \,.\, a) + (c \,.\, a)$. Vejamos porque. Primeiro:

$(b + c) \,.\, a = a \,.\, (b + c)$, propriedade comutativa

e $a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$, propriedade distributiva

Portanto, $(b + c) \,.\, a = (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$.

Também, $(a \,.\, b) = (b \,.\, a)$ propriedade comutativa

$(a \,.\, c) = (c \,.\, a)$ propriedade comutativa

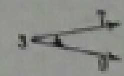
Logo, $(b + c) \,.\, a = (b \,.\, a) + (c \,.\, a)$.

Isto justifica a multiplicação de $12\frac{1}{4}$ por 8 sob a forma

$$\begin{aligned} 12\tfrac{1}{4} \,.\, 8 &= (12 + \tfrac{1}{4}) \,.\, 8 = (12 \,.\, 8) + (\tfrac{1}{4} \,.\, 8) \\ &= 96 + 2 = 98 \end{aligned}$$

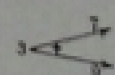
Alguns de vocês gostarão de usar um esquema que auxilia a lembrar que devemos distribuir o primeiro fator em relação a todos os números que estão sendo adicionados no segundo fator. Um diagrama dêstes está aqui ilustrado. Por exemplo, consideremos o produto $3 \,.\, (7 + 9)$:

<u>Esquema</u>



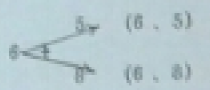
$(3 \,.\, 7)$

$(3 \,.\, 9)$ $= 21 + 27 = 48$

Note que  indica que o 3 multiplica tanto 7 quanto 9 e que êsses produtos são depois adicionados. As setas sempre estão dirigidas para os números que devem ser adicionados. Outro exemplo pode ser:

6 . (5 + 8)

Esquema:



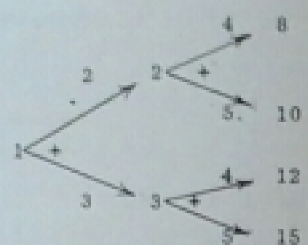
= 30 + 48 = 78

ou

= 78

Outro exemplo (isto poderá ajudá-lo no problema 7 dos exercícios):

(2 + 3) . (4 + 5)



= (8 + 10) + (12 + 15) = 45

Exercícios 3-4.

1. Use os esquemas acima ilustrados para fazer as operações indicadas.

a. 5 . (6 + 4)
b. 3 . (9 + 6)
c. 12 . (6 + 7)
d. 9. (13 + 17)
e. (6 + 4) . (8 + 7)
f. (20 + 7) . (10 + 4)

2. Mostre que as expressões abaixo são verdadeiras, fazendo as operações indicadas. Exemplo: 3 . (4 + 3) = (3 . 4) + (3 . 3)

3. (4 + 3) = 3 . 7 = 21

(3 . 4) + (3 . 3) = 12 + 9 = 21

a. 4 . (7 + 5) = (4 . 7) + (4 . 5)

b. (3 . 6) + (4 . 6) = 6 . (3 + 4)

c. (8 + 6) + (7 + 6) = (8 + 7) . 6

d. 23 . (2 + 3) = (23 + 2) + (23 + 3)

e. 11. (3 + 4) = (11 . 3) + (11 . 4)

f. (6 . 5) + (6 . 3) = 6 . (5 + 3)

g. 2 . (16 + 8) = (2 . 16) + (2 . 8)

h. 12 . $(5 + \frac{1}{4})$ = (12 . 5) + $(12 . \frac{1}{4}$

i. (67 . 48) + (67 . 52) = 67 . (48 + 52)

j. $(72 . \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} . 72) = 72 . (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$.

3. Torne cada uma das expressões seguintes numa afirmação verdadeira que exemplifica a propriedade distributiva.

a. 3 . (4 +) = (3 . 4) + (3 . 3)

b. 2 . (+ 5) = (2 . 4) + (. 5)

c. 13 . (6 + 4) = 13 . ( ) + 13 . ( )

d. (2 . 7) + (3 .) = ( ) . 7

e. (. 4) + (. 4) = (6 + 7) . ( )

4. Reescreva cada uma das expressões seguintes usando a propriedade distributiva. Exemplo:

(1) 5 . (2 + 3) = (5 . 2) + (5 . 3)

(2) (6 . 4) + (6 . 3) = 6. (4 + 3)

a. (9 . 8) + (9 . 2)
b. 8 . (14 + 17)
c. 12 . (5 . 7)
d. (13 + 27) . 6
e. 15 . (6 + 13)
f. (5 . 12) + (4 . 12)

5. Usando a idéia da propriedade distributiva podemos reescrever, por exemplo:

(1) 10 + 15 como (5 . 2) + (5 . 3) ou 5 . (2 + 3)

(3) $15 + 21$ como $(3 . 5) + (3 . 7)$ ou $3 . (5 + 7)$

Use a propriedade distributiva para reescrever as expressões seguintes de maneira análoga:

a. $35 + 40$

b. $12 + 15$

c. $55 + 10$

d. $27 + 81$

e. $100 + 118$

f. $30 + 21$

6. Quais das expressões seguintes são verdadeiras?

a. $3 + (4 . 2) = (3 + 4) . (3 + 2)$

b. $3 . (4 - 2) = (3 . 4) - (3 . 2)$

c. $(4 + 6) . 2 = (4 . 2) + (6 . 2)$

d. $(4 + 6) \div 2 = (4 \div 2) + (6 \div 2)$

e. $3 + (4 . 2) = (3 . 4) + (3 . 2)$

*7. Podemos escrever 45 como $(40 + 5)$ e 23 como $(20 + 3)$. Usando a propriedade distributiva, o produto de 45 e 23 será:

$(40 + 5) . (20 + 3)$ ou

$40 . (20 + 3) + 5 . (20 + 3)$ ou ainda

$(40 . 20) + (40 . 3) + (5 . 20) + (5 . 3)$

Prova

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 23 \\ \hline 135 \\ 90 \\ \hline 1035 \end{array}$$

Completando as operações temos:

$800 + 120 + 100 + 15$ ou 1035

Reescreva as expressões seguintes usando a propriedade distributiva e teste como acima. Use o método do esquema com (a) e (d).

a. $27 . 34$

b. $13 . 22$

c. $37 . 33$

d. $64 . 66$

e. $75 . 75$

f. $21 . 29$

8. PROBLEMA-DESAFIO

Indique que propriedade foi usada na passagem de uma linha para a seguinte:

a. $[(2 . 5) + (3 . 2)] + (5 . 2) . 7$

b. $[(5 . 2) + (3 . 2)] + (5 . 2) . 7$ propriedade comutativa da multiplicação

c. $[(5 . 2) + (3 . 2)] + 5 . (2 . 7)$ " ? "

d. $[(3 . 2) + (5 . 2)] + 5 . (2 . 7)$ " ? "

e. $(3 . 2) + [(5 . 2) + 5 . (2 . 7)]$ " ? "

f. $(3 . 2) + [(5 . 2) + 5 . (7 . 2)]$ " ? "

g. $(3 . 2) + [(5 . 2) + (5 . 7) . 2]$ " ? "

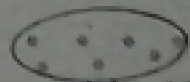
h. $[3 + [5 + (5 . 7)]] . 2$ " ? "

3-5. Os Conjuntos e a Propriedade do Fechamento

Se você quizesse se referir às estrêlas da figura abaixo como faria? Você diria o conjunto de estrêlas? O grupo de estrêlas? A coleção de estrêlas? Se você falasse dos alunos de uma certa sala de aula você poderia dizer "a classe da sala da Professôra Julia". Teria o mesmo significado "o conjunto de alunos da classe da Professôra Julia"? E "a coleção de alunos da sala da Professôra Julia"? Ambas as palavras, coleção ou conjunto podem ser usadas aqui. Elas têm o mesmo significado. (se você estiver estudando francês pode lhe ocorrer que ensemble poderia ser usado). Quando precisarmos de uma dessas palavras em Matemática, usaremos a palavra conjunto, como um conjunto de números, um conjunto de marcas numa página, um conjunto de estrêlas num diagrama.

Um conjunto de números: 5, 36, 7, 8

Um conjunto de marcas: / / / / / / / /

Um conjunto de estrêlas num diagrama: 

Outros exemplos de conjuntos são: o conjunto das moedas de seu bolso, o conjunto das vogais no seu alfabeto, um conjunto dos peões do xadrez, um conjunto de ovelhas (você poderia dizer um rebanho), o conjunto das cidades do Brasil que têm uma população de mais de um milhão de habitantes.

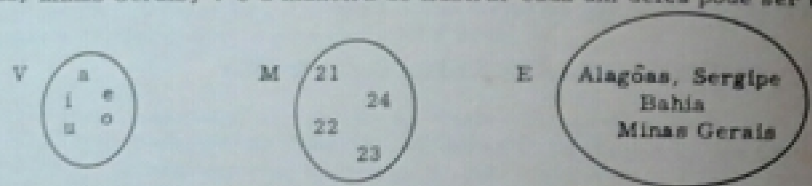
Os números naturais formam um conjunto. Lembre-se que os números naturais são 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... onde os três pontos indicam que o conjunto de números continua indefinidamente. Não existe um último número. Nós usaremos N para representar o conjunto dos números naturais e colocaremos os números naturais entre chaves { } para indicar que êles são os elementos do conjunto que é representado por N. Portanto, podemos escrever

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

e leremos "N é o conjunto dos números naturais".

Podemos escolher qualquer letra maiúscula para representar um conjunto. Se temos o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ podemos descrever isto dizendo S é o conjunto dos números naturais de 1 a 7 inclusive, ou S é o conjunto formado pelos números naturais menores que 8.

Alguns exemplos a mais de conjuntos e a maneira abreviada de escrevê-los ajudarão a tornar o conceito claro. "V é o conjunto das vogais do nosso alfabeto" torna-se "V = {a, e, i, o, u }". "M é o conjunto dos números naturais que são maiores que 20 e menores que 25" torna-se " M = { 21, 22, 23, 24 }". "E é o conjunto de estados brasileiros atravessados pelo rio S. Francisco" torna-se "E = {Alagôas, Sergipe, Bahia, Minas Gerais}". U'a maneira de ilustrar cada um dêles pode ser útil.



No primeiro conjunto os elementos são letras, no segundo os elementos são números, no terceiro cada elemento é um estado. Usamos a palavra <u>elemento</u> para qualquer objeto de um conjunto. Assim, um elemento pode ser uma letra, um número, uma palavra, um gato, uma bolinha de gude ou o que quer que seja de um conjunto que temos em mente.

Agora usaremos o conjunto dos números naturais para nos ajudar a entender outra nova idéia para conjuntos. Esta é a idéia de <u>fechamento</u>. Se adicionarmos dois números naturais quaisquer, a soma é um certo número natural. Por exemplo: $7 + 9 = 16$, $234 + 543 = 777$, onde cada soma é um número natural. Se a soma de dois elementos quaisquer de um conjunto é um elemento do conjunto, dizemos que o conjunto é <u>fechado</u> em relação à adição. Como a soma de dois números naturais quaisquer é um número natural, o conjunto N dos números naturais é fechado em relação à adição. Devemos realçar aqui que <u>dois quaisquer</u> significa todo par de elementos. O conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ não é fechado em relação à adição pois, podemos achar dois números do conjunto cuja soma não está no conjunto. Por exemplo: $5 + 6 = 11$ e 11 não está no conjunto. O conjunto $M = \{21, 22, 23, 24\}$ é fechado

em relação à adição? Justifique a sua resposta. Note que se existe pelo menos um par de elementos em M cuja soma não está em M, então M não é fechado em relação à adição. O fechamento diz respeito a uma propriedade de conjuntos em relação a uma operação dada. Não é necessário que o conjunto seja o dos números naturais. A operação pode não ser a adição. Por exemplo, seja T o conjunto de todos os números naturais que terminam em 0 (zero)ou 5 (cinco). Êste conjunto é fechado em relação à multiplicação. Não é fechado em relação a divisão pois, por exemplo, $(20 \div 5)$ não é um elemento de T.

<u>Exercícios 3-5a</u>.

1. Seja $Q = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \ldots\}$ o conjunto de todos os números ímpares.

   a. A soma de dois números ímpares é sempre ímpar?

   b. O conjunto Q é fechado em relação à adição?

2. O conjunto dos números pares é fechado em relação à adição?

3. O conjunto de todos os números múltiplos de 5 (5, 10, 15, 20, 25, etc) é fechado em relação à adição?

4. O que se pode afirmar dos conjuntos de números dos exercícios 1, 2, 3, em relação à multiplicação?

5. Os conjuntos numéricos seguintes são fechados em relação à adição ?

   a. O conjunto dos números naturais maiores que 50.

   b. O conjunto dos números naturais de 100 até 999.

   c. O conjunto dos números naturais menores que 48.

   d. O conjunto dos números naturais cujos numerais terminam por 0?

6. Os conjuntos de números do Exercício 5 são fechados em relação à multiplicação?

7. Todos os conjuntos de números naturais que são fechados em relação à adição são tambem fechados em relação à multiplicação? Por que?

8. Alguns dos conjuntos numéricos do Exercício 5 são fechados em relação à subtração?

9. Alguns dos conjuntos numéricos do Exercício 5 são fechados em relação à divisão?

Exercícios 3-5b.

Prática em Processos Aritméticos

1. Adicione: a. $\begin{array}{r} 476 \\ 398 \\ 7256 \\ 89 \\ 305 \\ \underline{54} \end{array}$ b. $\begin{array}{r} 403 \\ 213 \\ 414 \\ 898 \\ 777 \\ \underline{460} \end{array}$

2. Subtraia: $\begin{array}{r} 40302 \\ \underline{20305} \end{array}$

3. Multiplique: $\begin{array}{r} 728 \\ \underline{304} \end{array}$

4. Divida: $15059 \; \underline{|\; 37}$

5. Adicione $\begin{array}{r} 7\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{4} \\ 9\frac{1}{4} \\ \underline{8\frac{3}{4}} \end{array}$

6. a. $32172 \; \underline{|\; 7}$

   b. $11760 \; \underline{|\; 8}$

   c. $20324 \; \underline{|\; 4}$

7. Adicione: Cr\$ 7,50
   Cr\$ 8,30
   Cr\$ 4,70

8. Subtraia Cr\$ 593,60 de Cr\$ 983,40.

9. Arredonde 4795 para a centena mais próxima.

10. Escreva literalmente: 2 070 351.

11. Se 8 laranjas custam Cr\$ 48,00, qual é o custo de uma dúzia?

12. Multiplique: a. $\begin{array}{r} 9816 \\ \underline{8} \end{array}$ b. $\begin{array}{r} 50\,106 \\ \underline{9} \end{array}$ c. $\begin{array}{r} 357082 \\ \underline{7} \end{array}$

3-6. Operações Inversas

Freqüentemente fazemos alguma coisa e depois a desfazemos. Abrimos uma porta; fechamos a porta. Abrimos uma janela; fechamos a janela. Uma operação é o inverso da outra. O inverso de vestir seu casaco é tirar o seu casaco. A operação inversa da divisão é a multiplicação. A operação inversa da adição é a subtração.

Suponha que você tem Cr\$220 000 no banco e que você adiciona Cr\$ 10 000 a êle. Então você tem Cr\$ 220 000 + Cr\$ 10 000 = Cr\$ 230 000. Agora desfaça isto retirando Cr\$ 10 000. A quantidade que fica é Cr\$230 000 - Cr\$ 10 000 = Cr\$ 220 000. O fundo de esportes de sua escola pode ter Cr\$ 180 000 no banco e depois de um jôgo ter arrecadado Cr\$ 30 000. Então o fundo terá os Cr\$ 180 000 + Cr\$ 30 000 = Cr\$ 210 000. Mas o time precisa de uniformes novos que custam Cr\$ 30 000 e você retira Cr\$ 30 000 para comprá-los. A quantidade que fica é Cr\$ 210 000 - Cr\$ 30 000, ou seja, os Cr\$ 180 000. Estas operações se anulam entre si. A subtração é o inverso da adição.

Naturalmente, podemos expressar esta idéia em têrmos mais gerais. Seja x o número de cruzeiros que existia no início no banco. Se a quantidade depositada é b, então $x + b = a$, onde a representa o número de cruzeiros que temos agora no banco. Como anularemos esta operação? Do número de cruzeiros representados por a, subtraímos o número de cruzeiros retirados, representados por b, e teremos o número de cruzeiros representados por x. Escreveremos $x = a - b$.

Você usa a idéia de operação inversa quando você faz uso da adição para conferir uma subtração. Por exemplo:

$$\begin{array}{r} 203 \\ \underline{-\;96} \\ 107 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a \\ \underline{-\;b} \\ x \end{array} \qquad \text{Prova:} \quad \begin{array}{r} 107 \\ \underline{+\;96} \\ 203 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x \\ \underline{+\;b} \\ a \end{array}$$

Você usa também a idéia de operação inversa quando multiplica para conferir uma divisão. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 288 & \underline{16} \\ \underline{160} & 18 \\ 128 & \\ \underline{128} & \\ 0 & \end{array} \qquad \text{Prova:} \quad \begin{array}{r} 16 \\ \underline{\times\;18} \\ 128 \\ \underline{160} \\ 288 \end{array}$$

ou $288 \div 16 = 18$ Prova: $288 = 18 \times 16$.

Note que se a e b são números inteiros, e se $a > b$, então existe um número inteiro x tal que $b + x = a$. Exemplos: Se a é 17 e b é 10, então x

é o número inteiro 7 tal que $10 + 7 = 17$, se a é 41 e b é 35, então x é o número inteiro 6 tal que $35 + 6 = 41$. Quando a é maior que b é sempre possível encontrarmos x tal que $a = b + x$. Pode você fazer a mesma generalização se mudarmos a operação acima $b + x = a$, para a multiplicação, $b \cdot x = a$? Se você substituir 2 por b e 3 por a você verá que não há número <u>inteiro</u> que pode ser substituído por x tal que $2 \cdot x = 3$. Se substituirmos certos números — por exemplo, se $a = 20$ e $b = 4$ — então existe um número inteiro que podemos substituir por x tal que $4 \cdot x = 20$. Neste exemplo, x deve representar 5, pois $4 \cdot 5 = 20$. Temos o 5 dividindo 20 por 4. Também:

Se b fôr 6 e a fôr 24 então x deve ser 4 pois $6 \cdot 4 = 24$.

Se b fôr 5 e Q fôr 40 então x deve ser 8 pois $8 \cdot 5 = 40$.

Se b fôr 3 e a fôr 30 então x deve ser 10 pois $3 \cdot 10 = 30$.

Em cada um dos exemplos achamos o número x dividindo o número representado por a pelo número representado por b. Em geral, se existe um número natural x que pode ser multiplicado por um número natural b para obtermos o número natural a, então podemos achar êsse número x dividindo a por b. Escrevemos isso como $b \cdot x = a$. Multiplicamos x por b para obter a. Para anular esta operação devemos realizar a operação inversa, ou seja, devemos dividir a por b para obter x: $a \,\underline{|\; b \;}\; x$. A operação inversa de multiplicar por b é dividir por b.

<u>Exercícios 3-6</u>

1. Selecione as palavras ou frases que descrevem operações que têm uma inversa. Uma operação seguida pela sua inversa volta à situação inicial.

   a. Pegar lápis (lembre-se de que <u>não</u> pegar o lápis não é uma operação inversa. "Não pegar o lápis" não anula a operação de pegar).

   b. Vestir o seu chapéu

   c. Entrar num carro

   d. Estender sua mão

   e. Multiplicar

   f. Construir

   g. Cheirar a rosa

   h. Dar um passo à frente

   i. Saltar de um avião em vôo

   j. Adição

   k. Cortar o rabo de um cachorro

   l. Subtração

   m. Olhar as estrêlas

   n. Conversar

   o. Tirar o pneu de um carro

2. Escreva a operação inversa de cada uma das operações selecionadas no Exercício 1.

3. Efetue a operação indicada e confira pela operação inversa:

   Subtraia de (a) até (f)

   a. 89231 − 42760 b. Cr\$ 805,60 − Cr\$ 297,90 c. 803 cm − 297 cm

   d. Cr\$ 4 302, 14 − Cr\$ 2 889,36 e. Cr\$ 8 000,20 − Cr\$ 6 898,90 f. Cr\$ 10 040,50 − Cr\$ 8 697,80

   g. 25404 ⌊ 29 h. 37506 ⌊ 38 i. 21546 ⌊ 27

   j. 13243 ⌊ 19

   k. Cento e vinte menos oitenta e sete

   l. A soma de seiscentos e quarenta e sete e oitocentos e vinte e nove

   m. Setenta e seis mais sessenta e sete

   n. O produto de trezentos e seis e cento e dezenove

4. Achar, se possível, um número inteiro que possa ser substituído por x em cada uma das expressões seguintes para torná-las afirmações verdadeiras. Se não existir nenhum número inteiro que possa ser substituído por x, então diga simplesmente que êle não existe.

a. $9 + x = 14$

b. $x + 9 = 14$

c. $x + 1 = 2$

d. $4 + x = 11$

e. $10 + x = 7$

f. $5 + x = 5$

g. $10 = x + 2$

h. $x = 9 - 5$

i. $x = 11 - 8$

j. $8 + x = 11$

k. $6 + x = 3$

l. $x = 13 - 6$

m. $3 + x = x + 3$

n. $3 \cdot x = 12$

o. $4 \cdot x = 20$

p. $x = 20 \div 4$

q. $2 \cdot x = 18$

r. $x = 18 \div 2$

s. $5 \cdot x = 30$

t. $2 \cdot x = 0$

u. $x = 0 \div 2$

v. $9 \cdot x = 0$

w. $x = 0 \div 9$

x. $3 \cdot x = 3$

y. $x = 3 \div 3$

z. $11 \cdot x = 11$

5. a. Se uma estante tem capacidade para 128 livros e outra 100 livros, quantos livros a mais a primeira pode receber que a segunda?

b. Um teatro vendeu 4 789 ingressos em um mês e 6 781 ingressos no mês seguinte. Quantas pessoas a mais compareceram ao teatro no segundo mês?

c. Se um prédio tem 900 janelas e outro prédio tem 811 janelas, quantas janelas a mais tem o primeiro prédio?

d. A população de uma cidade era de 19 891 habitantes. Cinco anos depois a população passa a ser 30 110 pessoas. Qual foi o aumento de população nesses cinco anos?

e. Se uma carroça pode carregar 2 099 caixas, quantas caixas poderão carregar 79 carroças iguais a essa?

f. Quantos cabides são necessários para estocar 208 cadeiras se cada cabide sustenta 16 cadeiras?

g. Numa festa existia 288 pedaços de bôlo para 48 crianças. Quantos pedaços caberia para cada criança?

h. Uma companhia de bandeirantes tem 29 meninas. Cada menina tem que vender caixas de doces. Se a companhia tem 580 caixas para vender, quantas caixas cada menina terá que vender afim de que não sobre nenhuma caixa?

6. Efetue as operações seguintes:

a. Adicione 16 a 17. Da soma subtraia 12.

b. Subtraia 24 de 89. A esta diferença adicione 19.

c. Multiplique 27 por 34. Divida o produto por 9 e em seguida adicione 100.

d. Adicione 9, 9 e 9. Dela subtraia 4, seis vêzes.

e. Tome 308 e divida-o por 28. Multiplique o quociente por 5. Subtraia 9 do produto.

f. Calcule a diferença entre 47 e 38. Divida esta diferença por 3 e depois adicione 17.

g. Divida 272 por 16, multiplique o quociente por 12 e subtraia 100 do produto.

h. Multiplique 12 e 13 e adicione 39. Divida a soma pelo produto de 3 e 13.

i. Adicione 26 e 42 e divida a soma por 17. Ao resultado adicione 117 e divida esta soma por 11.

j. Calcule a diferença entre 87 e 49. Multiplique esta diferença por 10 e subtraia 40. Divida êste último resultado por 68 e depois adicione 6.

3-7. A Ordenação e a Reta Numérica

A maneira pela qual os números inteiros se relacionam pode ser mostrada com uma figura. Escolha algum ponto numa reta como abaixo e marque-o com zero (0). Ao primeiro ponto marcado à direita do zero atribua o primeiro número natural e a cada ponto depois dêste à direita os números inteiros sucessivos

À esta configuração freqüentemente nos referimos como a Reta Numérica. Qualquer número inteiro é menor que qualquer um dos números que estão à sua direita e maior que os que estão à sua esquerda. Por exemplo, 3 é menor que 5 e maior que 2. Podemos escrever isto assim $2 < 3 < 5$, pois 2 é menor que 3 e 3 é menor que 5. Com a reta numérica podemos também determinar quantos números inteiros existem entre dois números inteiros quaisquer. Por exemplo, para saber quantos números inteiros temos entre 6 e 11 podemos olhar para a figura e contá-los. Vemos quatro dêles, 7, 8, 9 e 10.

Exercícios 3-7

1. Quantos números inteiros existem entre:

a. 7 e 25 e. 25 e 25

b. 30 e 25 f. 28 e 25

c. 20 e 25 g. 26 e 25

d. 17 e 25 h. 114 e 25

*i. Se $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são números inteiros e $a > b$, o número de números inteiros entre a e b é:

(1) $b - a$? (3) $a - (b + 1)$?

(2) $(a - 1) + b$? (4) $(a - b) + 1$?

2. Qual o número inteiro que corresponde ao ponto médio entre:

a. 7 e 13 e. 17 e 19

b. 9 e 13 f. 17 e 27

c. 20 e 28 g. 12 e 20

d. 10 e 50 h. 12 e 6

3. Quais dos seguintes pares de números inteiros têm um número inteiro médio entre êles?

a. 6, 8 d. 8, 13 g. 9, 17

b. 6, 10 e. 7, 12 h. 19, 36

c. 8, 18 f. 26, 33 i. a, b sendo a e b números inteiros pares

j. a, b a e b sendo números inteiros ímpares

k. a, b a sendo ímpar e b sendo par

4. Os números inteiros a, b e c, estão dispostos de tal maneira na reta numérica que b está entre a e c, e $c > b$.

a. Temos $c > a$? Explique com uma reta numérica

b. Temos $b > a$? Explique com uma reta numérica

c. Temos $b < c$? Explique com palavras

5. Os números inteiros a, b, c e d estão localizados da tal forma na reta numérica que b está entre $\underline{a}$ e $\underline{c}$, e $\underline{a}$ está entre $\underline{b}$ e $\underline{d}$. Existe alguma relação entre $\underline{b}$, $\underline{c}$ e $\underline{d}$?

3-8. O Número Um

O número um é um número especial sob vários aspectos. Um é o menor número natural. Podemos construir qualquer número, não importa quão grande possa ser, começando com 1 e adicionando 1's até que tenhamos o número desejado. Por exemplo, para obter o número cinco, podemos começar com o nosso número especial 1 e repetir a adição de 1, $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$, $4 + 1 = 5$. Não existe o maior número natural.

Também, será observado que para qualquer dos números naturais (1, 2, 3, ...) que escolhermos, teremos o número natural consecutivo adicionando 1. Isso pode lhe parecer óbvio porque você já conhece os números naturais. Em algumas operações fundamentais não obtemos o número inteiro seguinte usando sòmente o número 1; por exemplo: $3 \cdot 1 = 3$, $3 - 1 = 2$. Em um caso apenas não obtemos um número natural. Observe o que acontece quando usamos a operação subtração $1 - 1 = 0$. Zero não é um número natural.

Na multiplicação, se desejarmos obter um numeral diferente para um número, poderemos multiplicar por uma forma escolhida do número especial 1. Desta maneira podemos obter um numeral diferente, mas êle representa o mesmo número. Você pode se lembrar que reescrevendo 4 como $\frac{8}{2}$, você terá simplesmente multiplicado 4 por $\frac{2}{2}$. Naturalmente $\frac{2}{2}$ é nosso número especial 1. Multiplique $\frac{1}{3}$ por $\frac{3}{3}$ para obter $\frac{3}{9}$, multiplique $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{2}$ para obter $\frac{8}{10}$. Êstes são exemplos de multiplicação pelo número 1 nas formas escolhidas $\frac{3}{3}$ e $\frac{2}{2}$. Isto significa que as novas frações são diferentes da original na forma, mas elas representam o mesmo número. O número especial 1 quando é usado como um multiplicador torna o produto idêntico ao multiplicando. Devido ao fato do produto de qualquer número natural e um ser o número natural inicial, chamamos o número um "elemento identidade" para a multiplicação.

Sendo a divisão a operação inversa da multiplicação, o número um é também especial para a divisão? O que acontece se dividimos qualquer número natural por um? Obteremos o mesmo número natural. Mas se dividirmos 1 por um número natural não obteremos um número natural. Por esta razão não podemos dizer que o número um é o elemento identidade para a divisão. Um número natural multiplicado por 1 é o próprio número, assim como 1 multiplicado pelo número natural, mas a mesma coisa não pode ser dita para a divisão. Se C representa qualquer número natural, podemos expressar esta multiplicação e divisão usando o número 1 das seguintes maneiras:

$$C \cdot 1 = 1 \cdot C;$$

$$C \div 1 = C;$$

$$C \div C = 1;$$

$$1 \div C \neq C \text{ se } C \neq 1.$$

Aprendemos que 10^2 significa $10 \cdot 10$; 10^3 significa $10 \cdot 10 \cdot 10$; 10^6 significa $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$. Os números "2", "3", "6" são denominados expoentes. Os expoentes são pequenos, mas os números representados por 10^2, 10^3, 10^6 são muito grandes. Se ao invés de 10 usarmos 1, isto não será verdade. Pois, $1^2 = 1 \cdot 1$; $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1$ e $1^6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ e temos ainda o número 1. Na verdade 1^2 ou 1^{200} ou 1^{3056} é ainda 1.

Quando dizemos 1^2 ou 1^{200} é sòmente o 1, estamos justamente dando nomes diferentes à mesma coisa. A verdade é que o número representado por essas expressões é 1. Você pode pensar em algumas outras combinações de símbolos que representam 1? Que números representam $5 - 4$ e $X - IX$?

Nossa discussão sôbre o número um pode ser brevemente resumida pelas sentenças matemáticas abaixo. Poderá você traduzí-las em palavras? A letra C aqui representa qualquer número natural.

a. $C = 1$ ou $(1 + 1)$ ou $(1 + 1 + 1)$ ou ... etc.

b. $1 \cdot C = C$

c. $C \div 1 = C$

d. $C \div C = 1$

e. $1^C = 1$

Exercícios 3-8

1. Entre os símbolos seguintes, escolha aqueles que representam o número 1.

a. 1
b. $\frac{4}{4}$
c. $5 - 4$
d. $1 - 0$
e. $1 + 0$
f. $1 \cdot 2$
g. $\frac{6}{4}$
h. $\frac{4}{1}$
i. 1
j. $1 \cdot 0$
k. $\frac{200}{200}$
l. 1
m. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
n. $1 \cdot 100$
o. $\frac{8 - 1}{12 - 5}$
p. $\frac{2 - 1}{1}$

2. Copie e preencha os claros:

a. $100 \cdot 1 =$ ______
b. $10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 =$ ______
c. $\frac{14}{1} =$ ______
d. $1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 =$ ______
e. $0 \cdot 1 =$ ______
f. $1 \cdot 0 =$ ______

3. Pode você obter qualquer número natural de qualquer outro número natural pela adição repetida de 1, ou a subtração repetida de 1? Dê um exemplo para justificar sua conclusão.

4. Pelo processo acima, pode você obter um número que não é número natural? Dê um exemplo para justificar sua conclusão.

5. Roberto disse: "O conjunto dos números naturais não é fechado em relação à subtração iterada de "um", mas êle é fechado em relação a adição iterada de "um". Mostre, por um exemplo, o que Roberto quis dizer.

6. Efetue as operações indicadas:

a. $878429 \;\begin{array}{|l}\hline (4-3)\end{array}$

b. $878533 \;\begin{array}{|l}\hline 1\end{array}$

c. $897838 \;.\; (3 - 4)$

d. $896758 \;.\; \frac{4}{4}$

e. $3479 \;.\; 1^{110}$

f. $97 \;.\; x^{6}$ (se x é 1)

g. $1^{7} \;.\; (489 \div 489)$

h. $\frac{8}{8} \;.\; 1^{5} \div 1^{4}$

3-9. O Número Zero

Outro número especial é zero. Ocasionalmente você ouvirá ao invés do no-me zero outros nomes como "nada". Embora o zero não pertença ao conjunto dos nú-meros naturais êle é considerado como um número inteiro. Na maioria das vêzes o u-samos de acôrdo com regras de contagem com os números naturais e, num certo senti-do, êle é usado para contar. Se você retirar todo o seu dinheiro do banco poderá dizer que sua conta no banco é o número especial zero. Se errar tôdas as questões de uma prova, sua nota pode ser zero. Se não existir nenhum apagador na sua sala de aula, o número de apagadores será zero. Em todos êstes casos, nenhum dinheiro no banco, ne-nhuma resposta correta, nenhum apagador, o zero indica que não existe objetos ou ele-mentos no conjunto de objetos que está sendo discutido. Se não existir elementos no conjunto, êste chamar-se-á vazio.

O número zero é o número de elementos do conjunto vazio. Nêste sentido, algumas pessoas dizem que zero significa "nenhum". Outras dizem que significa "na-da" porque não existe coisa alguma no conjunto. Como vemos, êstes são conceitos po[u]co precisos e confusos do zero.

Numa manhã muito fria, Paulo queria saber a temperatura. Depois de olhar o termômetro êle disse, "zero". Êle queria dizer "nenhum"? Êle queria dizer "nada"? Não, êle queria dizer que a coluna de mercúrio estava no ponto específico da escala cha-mado zero. José tinha um altímetro em seu carro de maneira que podia saber a altitu-de em que estava quando andava pela Serra do Mar. Numa das viagens êle foi a Santos. Quando lá chegou, José exclamou "Olhe, a altitude é zero!" Quando o altímetro indi-ca zero, não significa que não há "nada", significa que estamos a uma altitude especí-

fica chamada zero. É tão específica e real quanto uma altitude de 1 534 metros.

Observe que a adição de um número natural e um é sempre o número maior seguinte. A adição de um número e zero é sempre o número natural original. Por e-xemplo, $4 + 0 = 4$. Podemos expressar isto simbòlicamente $C + 0 = C$ onde C é número natural qualquer. Ou também podemos expressar isto dizendo que zero é o "elemento identidade" para a adição.

A diferença entre dois números naturais iguais é o número especial zero. Por exemplo, $4 - 4 = 0$. Você notou que nesta subtração não obtivemos um número natural? Para colocar a idéia numa linguagem mais elegante diríamos que o conjunto dos núme-ros naturais não é fechado em relação à subtração.

Vejamos como se comporta o número especial zero em relação à multiplica-ção. O que poderia significar $3 \;.\; 0$? Podemos pensar no número de cadeiras de 3 sa-las com cada sala tendo zero cadeiras. Assim, qualquer número de salas que têm zero cadeiras, teria zero como número total de cadeiras. Podemos expressar esta idéia sim-bòlicamente escrevendo $C \;.\; 0 = 0$, onde C é um número natural qualquer.

O produto $0 \;.\; 3$ é sempre mais difícil de explicar. Sabemos, pela proprie-dade comutativa da multiplicação, que $3 \;.\; 0 = 0 \;.\; 3$ e já vimos que $3 \;.\; 0 = 0$ e por-tanto devemos ter $0 \;.\; 3 = 0$ se quizermos que a propriedade comutativa da multiplica-ção seja verdadeira para <u>todos</u> os números inteiros. Se a é um número inteiro qual-quer, podemos expressar isto escrevendo $a \;.\; 0 = 0 \;.\; a = 0$. Se fôr zero devemos ter $0 \;.\; 0 = 0$.

Um princípio muito importante está expresso nos símbolos acima, mas pode não ser reconhecido à primeira vista. Você observou que se o produto de dois ou mais números inteiros é zero, então um dos números deve ser zero? Por exemplo, $4 \;.\; 5 \;.\; 0 = 0$. Em Matemática êste fato é usado constantemente.

Vejamos se o zero segue as regras para divisão dos números naturais.

O que poderia significar zero dividido por 3? Se tivermos uma sala com ze-ro cadeiras e dividirmos esta sala em três partes, poderia significar o número de cadei-ras em cada parte da sala. Com êste significado, $0 \div 3$ deve ser 0. Se $\begin{array}{r|l} 0 & 3 \\ \hline & 0 \end{array}$, en-tão 0×3 deve ser zero pela operação inversa. Isto está de acôrdo com a definição de multiplicação por zero?

Ocasionalmente os estudantes esquecem que a divisão de zero por um núme-ro natural é sempre zero e nunca um número natural. Por exemplo $\frac{0}{7} = 0$, $\frac{0}{7} \neq 7$.

Se $\frac{0}{7} = 0$, quanto é $\frac{7}{0}$? $7 \;\begin{array}{|l}\hline 0\end{array}$ é um número natural?

Suponhamos que $7 \;\begin{array}{|l}\hline 0\end{array}$ seja igual a um certo número representado por N. Isto sig-nifica que 7 é igual a zero vêzes certo número N. $(7 = 0 \times N)$. O produto de qual-quer número por zero é zero, portanto não existe o número N que deve ser igual a $7 \;\begin{array}{|l}\hline 0\end{array}$. Numa linguagem mais elegante, podemos dizer que $\frac{7}{0}$ não é o nome de qualquer número natural ou zero. Portanto, não podemos efetuar a operação. <u>Não podemos dividir um número natural por zero</u>. Podemos dividir zero por zero? Simbolicamente a questão é "$\frac{0}{0} = ?$". Ou $0 \,\big|\, \underline{\;0\;}$ / ?. Se zero dividido por zero fôr igual a algum número n então, pela mesma definição de multiplicação, $0 \times n = 0$. Que números podem substituir n? Poderia n ser 3? Naturalmente n poderia ser qualquer número natural ou zero. Como $0 \div 0$ pode ser qualquer número inteiro, o símbolo $\frac{0}{0}$ tem muitos significados. Portanto, devemos nos lembrar de que não podemos dividir um número natural por zero nem zero por zero.

Maria resumiu as operações com o número especial zero nestes símbolos. Estabeleça-as literalmente sendo que u e w representam números inteiros quaisquer e C representa qualquer número natural.

a. $w + 0 = w$

b. $0 + w = w$

c. $w - 0 = w$

d. $0 \cdot w = 0$

e. $w \cdot 0 = 0$

f. Se $u \cdot w = 0$, então ou u ou w é zero ou ambos são zero.

g. $0 \div C = 0$

h. $C \div 0$ não tem sentido.

<u>Exercícios 3-9</u>

1. Selecione os símbolos que representam zero:

a. $1 + 0$

b. 0

c. $\frac{4}{0}$

d. $\frac{0}{4}$

e. $5 - 4$

f. $7 - 7$

g. $\frac{a}{0}$

h. $0 + 0$

i. $1 - 1$

j. $100 - 100$

k. $0 \cdot 4$

l. $4 \cdot 0$

m. $0 \cdot 0$

n. $\frac{0}{10}$

o. $\frac{4 - 4}{2}$

p. $\frac{4}{2 - 2}$

q. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

r. $14 \cdot 25$

s. $12 \cdot 0$

t. $0 + 12$

u. $2 \cdot (4 + 6 + 0)$

v. $(2 \cdot 4) + 0$

w. $\frac{4}{4}$

x. $\frac{36}{9} - \frac{36}{12}$

2. Efetue as operações indicadas, se possível:

a. $376 \cdot 49$

b. $678 \cdot 946$

c. $8984 \div 62$

d. $9484 \div 62$

e. $87 \times$ Cr\$419,90

f. $69 \times$ Cr\$876,40

g. Cr\$989,20 $\cdot (2 - 2)$

h. $1 \times$ Cr\$846,20

i. $5 \times$ Cr\$14 $\cdot 10$

j. $679 \cdot \frac{4}{4}$

k. $379\,(146,8 - 145,8)$

l. $(34,6 - 33,6) \times 897$

m. Cr\$397,10 $\div (4 - 3)$

n. Cr\$897,40 $\div (3 - 3)$

o. $(480 \div 24) \div 20$

p. Cr\$1 846,00 $\div (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$

q. $487,97 \times \frac{4}{4} \times 0$

r. $49 \cdot 0 \cdot 47 \cdot 97$

s. Cr\$97,80 $\times 0 \times 0$

t. $(9 - 9) \cdot \frac{7 + 2}{8 + 1}$

u. $976 \cdot 1^6$

v. $1^{12} \times$ Cr\$97,40

3. Sendo a e b números inteiros pode você encontrar um êrro em qualquer uma das seguintes afirmações?

a. $4 \cdot 0 = 0$

b. $0 \cdot 4 = 0$

c. $2 \cdot 1 = 2$

d. $1 \cdot 2 = 2$

e. Se $a \cdot b = 0$, a ou b = 0

f. Se $a \cdot b = 1$, a ou b = 1

g. Se $a \cdot b = 2$, a ou b = 2

h. Se $a \cdot b = 3$, a ou b = 3

i. Se $a \cdot b = C$, a ou b = C

3-10. Resumo

1. O conjunto dos numerais {1, 2, 3, 4, 5, . . .} é o conjunto dos símbolos para os números naturais.

2. O conjunto dos numerais {0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .} é o conjunto dos símbolos para os números inteiros.

3. A propriedade comutativa da adição é $a + b = b + a$, onde a e b são números inteiros quaisquer.

4. A propriedade comutativa da multiplicação é $a \cdot b = b \cdot a$ onde a e b são números inteiros quaisquer.

5. A propriedade associativa da adição é $a + (b + c) = (a + b) + c$, onde a, b e c são números inteiros quaisquer.

6. A propriedade associativa para a multiplicação é $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ onde a, b e c são números inteiros quaisquer.

7. A propriedade distributiva é $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$, onde a, b, c são números inteiros quaisquer.

8. Símbolos novos: { conjunto de elementos }, $>$ é maior que; $<$ é menor que; $\neq$ não igual a ou diferente de.

9. Conjunto e fechamento. Um conjunto é fechado em relação a uma operação se a combinação de dois elementos quaisquer do conjunto resulta um elemento do conjunto. O conjunto dos números naturais é fechado em relação à adição e à multiplicação mas não em relação à divisão e à subtração.

10. Operações inversas. A subtração é o inverso da adição, mas a subtração nem sempre é possível no conjunto dos números inteiros. Divisão é o inverso da multiplicação mas divisão nem sempre é possível no campo dos números inteiros, isto é, divisão de um número inteiro por outro número inteiro nem sempre é um número inteiro.

11. A reta numérica e a ordenação. Cada número inteiro está associado a um ponto da reta numérica. Nem sempre existe um número inteiro entre dois números inteiros.

12. Números especiais: 0 e 1. O zero é a identidade para a adição; 1 é a identidade para a multiplicação; a multiplicação por zero não tem um inverso; a divisão por zero não é possível.

Como Você está progredindo?

(Algumas Questões de Revisão, Capítulos 1-3)

1. $(122)_{três} = (\quad)_{dez} = (\quad)_{cinco}$

2. Uma menina foi à dispensa com um recipiente com capacidade de 5 copos e um com capacidade de 3 copos para pegar 4 copos de farinha. Isto pôde ser feito usando sòmente os dois recipientes que ela levou? Se for possível, explique como.

3. Qual é a probabilidade de sair 2 jogando-se um dado uma vez?

4. Escreva MCXI em numerais hindus-arábicos

5. Qual é outra maneira de se escrever 178^7?

6. Quando um caixeiro está calculando nosso trôco depois de termos feito uma compra, êle está praticando adição ou subtração?

7. A base do sistema numérico que tem os mais fáceis resultados de multiplicação para se aprender é _______________?

8. $(2010)_{três}$ escrito sob a forma desenvolvida seria:

   $(2 \times \_\_) + (0 \times \_\_) + (1 \times \_\_) + (0 \times 1)$.

9. Se tivessemos de usar para a numeração a base 31, teríamos ___________ símbolos diferentes.

10. O valor de 4 em $(4512)_{seis}$ é _________ vêzes o valor de 4 em $(41)_{vinte\ e\ sete}$

11. O conjunto dos números inteiros difere em que aspecto (se existe algum) do conjunto dos números naturais?

12. Esta afirmação é verdadeira? "Posso mostrar que o conjunto dos números inteiros é fechado em relação à operação de subtração se eu puder encontrar um exemplo tal como $12 - 8 = 4$ para elucidar isto".

13. $(7 \cdot 3) + (3 \cdot 13) = (7 \cdot 3) + (13 \cdot 3)$, neste exemplo que propriedade dos números inteiros está ilustrada?

14. No conjunto dos números naturais a identidade para a multiplicação é

   ____

15. O zero está incluído no nosso conjunto de números inteiros para que ______ (Estabeleça uma das propriedades especiais do zero).

16. Use a propriedade distributiva e reescreva: (12 . 13) + (5 . 13).

17. Use a propriedade associativa da adição de maneira que a soma possa ser encontrada fàcilmente: 136 + 25 + 75.

18. Confira pela operação inversa para ver se 715 ÷ 11 = 65

19. O número de números naturais, entre 6 e 47 é ______________

20. Se tivermos a expressão (7 . 3) + (6 . 5). 3 e aplicarmos a propriedade associativa da multiplicação teremos ______

Capítulo 4

GEOMETRIA NÃO-MÉTRICA

Êste ano você está estudando uma grande quantidade de coisas novas sôbre números e suas propriedades, mas os números não são as únicas coisas em Matemática que interessam às pessoas. Vivendo como nós na "Era Espacial" ouvimos falar muito de pontos, retas, planos e espaços. O estudo de conceitos como êstes é denominado Geometria.

Há cêrca de 4 000 anos que os homens estudam Geometria tentando entender melhor o mundo em que vivemos. A Geometria que estudamos é a mesma estudada pelos gregos há cêrca de 2 000 anos atrás. Um famoso matemático grego chamado Euclides escreveu vários livros sôbre esta geometria. Até hoje chamamos esta parte da Matemática "Geometria Euclidiana". Nossa geometria é a mesma, mas a nossa linguagem e os aspectos sob os quais abordamos os assuntos são diferentes.

Neste capítulo usaremos os números sòmente para calcular. Não usaremos a idéia de distância ou medida. Êste capítulo chama-se "Geometria Não Métrica", mas pode também ser chamado geometria "sem o uso da medida". Você percebeu que não-métrica significa sem o uso da medida? Hoje, quando estamos mandando foguetes à Lua e pondo satélites em órbita, o estudo de conceitos geométricos é importante como nunca o foi.

4-1. Pontos, Retas e Espaço

Pontos

A idéia de um ponto em Geometria é sugerida pela ponta de um lápis ou uma marca no quadro-negro. Imaginamos um ponto geométrico como sendo tão pequeno que não tem tamanho. Em Geometria, não damos uma definição para o têrmo "ponto". O que fazemos, ao invés disso, é descrever muitas propriedades dos pontos. Desta maneira vamos compreender o que os matemáticos entendem pelo têrmo "ponto".

Espaço

Pensamos no espaço como um conjunto de pontos. Existe uma quantidade ilimitada de pontos no espaço. De certa maneira, imaginamos os pontos do espaço como descritos ou determinados pela posição — se êles estão nesta sala, no mundo ou no universo.

Retas

Para nós, uma reta é um conjunto de pontos no espaço, não qualquer conjunto de pontos, mas, um tipo particular de conjunto de pontos. Uma reta é sugerida pela aresta de uma régua ou pela intersecção de uma parede lateral e a parede frontal de sua sala de aula. Uma reta geométrica estende-se indefinidamente em cada um dos dois sentidos. Não termina em nenhum ponto. A intersecção da parede lateral com a parede frontal de sua sala de aula acaba no teto e no assoalho. A reta sugerida por esta intersecção estende-se tanto para cima como para baixo, indefinidamente.

Se você conhece inglês, provàvelmente já ouviu ou leu a expressão "as the crow flies", que traduzida ao pé da letra, quer dizer: "como o corvo voa", porém, em inglês tal expressão quer dizer "em linha reta". Um corvo usualmente voa diretamente de um lugar de pouso a outro; êle não bate as asas como faz o morcêgo. A trajetória do vôo de um corvo, portanto, sugere uma reta geométrica. Devemos entender que a "reta" não começa nem acaba nos pontos de partida e chegada do corvo. Estende-se indefinidamente em ambos os sentidos.

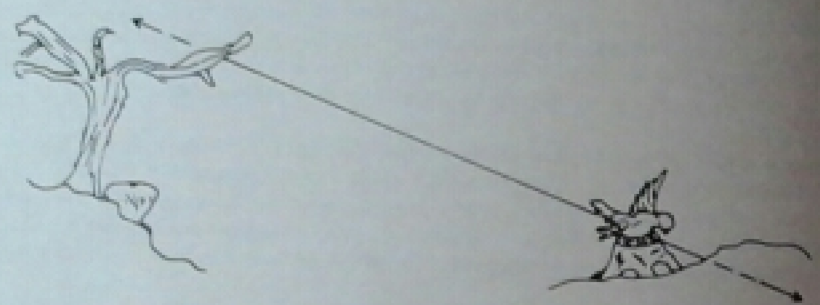


Figura 4-1.

Imagine dois estudantes segurando um cordão esticado entre êles. Em alguma posição quando esticado, o cordão determina uma porção de uma reta. É a reta que passa através da mão de um estudante e também através da mão do outro estudante. A reta pròpriamente dita vai além de onde êles estão segurando o cordão. O cordão não é a reta ou alguma parte da reta. Simplesmente representa a reta que sabemos existir.

Com as mãos dos estudantes nas mesmas posições, haverá mais de uma posição possível para a colocação do cordão esticado? Provàvelmente você pensa "claro que não" e acerta. Você acaba de descobrir uma propriedade básica do espaço.

Propriedade 1: Por dois pontos distintos quaisquer do espaço passa sòmente uma reta.

Como você pode ver, existe uma quantidade ilimitada de retas no espaço!

Fazendo uso das retas podemos ter uma boa idéia de como é o espaço. Considere um ponto no canto esquerdo superior de sua carteira. Agora, considere o conjunto de pontos sugeridos pelas paredes, assoalho e teto de sua sala de aula. Então, por cada ponto dêste conjunto existe uma reta que passa por êle e pelo ponto escolhido de sua carteira. Cada reta é um conjunto de pontos. O espaço é formado por todos

êsses pontos de tôdas essas retas. Lembre-se de que essas retas estendem-se para fora da sala.

Assim como não definimos precisamente "ponto" e "reta", também não definiremos precisamente "espaço". Estudamos suas propriedades e desta maneira o entenderemos. Lembramos que esta idéia de espaço é a mesma já conhecida pelos antigos gregos e tem sido estudada pelos estudantes desde àquela época. Na verdade podemos compreender idéias como "espaço" e "ponto" sòmente depois de um certo tempo de estudo. Não podemos pretender aprender tudo sôbre elas em alguns dias, uma semana, ou mesmo neste ano.

Problemas para Discussão em Classe

1. Considere uma das retas que passam pela ponta do seu lápis e pela maçaneta da porta de entrada de sua sala de aula. Que objetos na sala são "perfurados" por esta reta? Que objetos fora da sala são também "perfurados" por esta reta?

2. Um poeta matemático pode dizer "Espaço é como um ouriço, um porco-espinho". Sob que aspectos é esta descrição semelhante a aquela que se seguiu à discussão do estabelecimento da Propriedade 1?

Exercícios 4-1

1. Para a decoração de um salão de festas, tiras de papel crepon foram drapeadas entre dois pontos das paredes do ginásio de esporte. Isto mostra, contràriamente à Propriedade 1, que pode haver várias retas geométricas através de dois pontos?

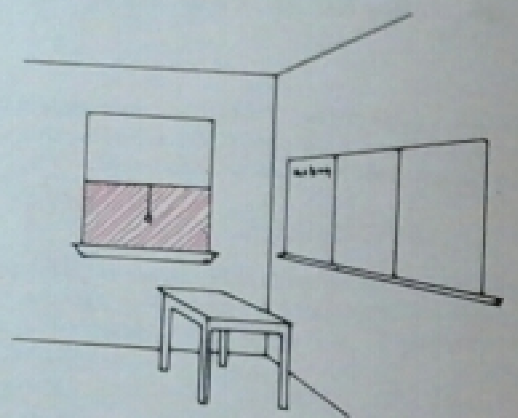
2. Quando um agrimensor marca os limites de uma porção de terra, êle coloca "monumentos" de pedras (pequenos blocos de pedra) nas esquinas. Um pequeno buraco ou prego no tôpo de cada marco representa um ponto. Êle sabe que, se os marcos não forem removidos de suas posições, os limites originais podem ser determinados depois de muito tempo. Como êle pode estar certo disto?

3. Um harpista ou violinista deve aprender exatamente onde colocar seus dedos nas cordas do instrumento de maneira a produzir os sons que êle deseja ouvir. Uma corda poderá arrebentar e ser substituída por uma nova. Como êle sabe, sem olhar, onde seus dedos devem ser devidamente colocados de maneira a produzirem os mesmos sons na corda nova?

4-2. Planos

Qualquer superfície como a parede de uma sala, o piso, o tampo de uma mesa, um pedaço de madeira compensada, ou uma porta em qualquer posição, sugere a idéia de um plano em Matemática. Como uma reta, imaginamos um plano como sendo ilimitado em extensão. Se você começa por um ponto de partida num plano e segue trajetórias no plano em tôdas as direções possíveis, estas trajetórias ficarão no plano e não terão ponto final. Um plano,então, não deve ter fronteiras.

Imaginamos um plano de maneira que contenha muitos pontos e muitas retas. Olhando para a parede você pode imaginar muitos pontos nela e as retas que passam por êsses pontos. A aresta onde a parede lateral encontra o teto sugere uma reta que está tanto no plano representado pelo teto como no plano representado pela parede lateral. As arestas do porta-giz do quadro-negro representam retas na sala de aula. Ao menos uma delas está no plano representado pelo quadro-negro. Podemos marcar qualquer número de pontos e retas no quadro-negro para representar pontos e retas.



Os matemáticos imaginam um plano como um conjunto de pontos no espaço. Não é simplesmente qualquer conjunto de pontos, mas uma espécie particular de conjunto. Já vimos que uma reta é um conjunto de pontos no espaço, uma espécie particular de conjunto e uma espécie diferente daquela do plano. Um plano é uma maneira do matemático imaginar o "ideal" de uma superfície.

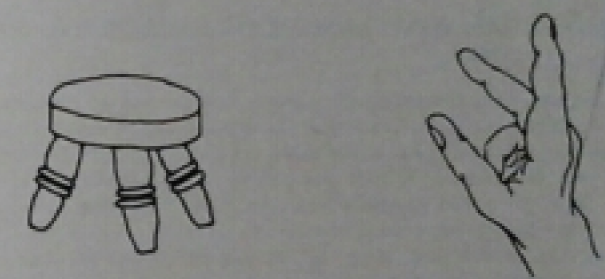
Marcando dois pontos no quadro-negro, podemos traçar precisamente uma reta passando por êsses pontos. É isto o que a Propriedade 1 afirma? Esta reta está no quadro-negro. O plano representado pelo quadro-negro contém o conjunto de pontos representados pela reta que você desenhou.

Imagine dois pontos marcados num pedaço de madeira compensada. Parte da reta que passa por êsses pontos pode ser desenhada na madeira. Esta reta deve estar no plano da madeira? Podemos agora concluir:

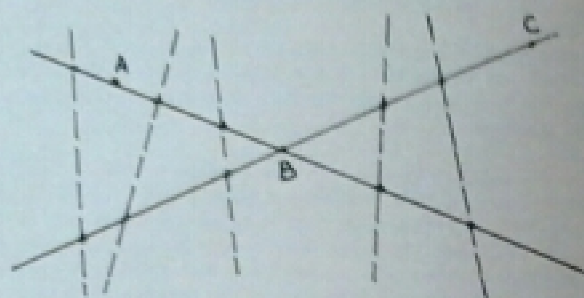
Propriedade 2: Se uma reta contém dois pontos distintos de um plano, ela está contida nesse plano.

Repare num par de cantos do teto de sua sala. Em quantos planos está contido êste par de pontos? Se pensarmos nos extremos da lombada de seu bloco de papeis como um par de pontos, poderemos ver que os planos representados pelas fôlhas do bloco contêm êsses pontos.

Podemos perguntar "Quantos planos contém um par específico de pontos?" O bloco de papeis com suas fôlhas espalhadas sugere que existem muitos planos passando por um par específico de pontos. A parede frontal e o teto representam dois planos que passam pela reta determinada pelos dois cantos frontais superiores da sala. Mostre, por meio de movimento da mão, as posições dos outros planos que passam por êsses dois pontos. Uma porta em diversas posições representa muitos planos passando por um par de pontos -- as suas dobradiças. Podemos dizer "Muitos planos contém um par de pontos".



Suponhamos a seguir que temos três pontos não na mesma reta. Três cantos do tampo de sua escrivaninha é um exemplo. As extremidades dos pés de um banco de três pés é um outro exemplo. Tal banco permanecerá bem assentado no piso, enquanto que com uma cadeira de quatro pés nem sempre isto acontece, a menos que ela tenha sido muito bem construida. Distribua em posições diferentes o polegar e os dois primeiros dedos de sua mão direita como na figura acima. Mantenha-os inflexivelmente e imagine suas pontas como sendo pontos. Agora tome um livro ou outra superfície plana e tente colocá-la de maneira que fique sôbre as pontas do polegar e dos outros dedos (sôbre três pontos). Você pode manter o livro apoiado nas pontas do seu polegar e dois dedos. Se você dobrar o seu pulso e mudar a posição do polegar e dedos, o livro ainda poderá ser mantido na nova posição? Com sua mão numa posição qualquer, existe mais de uma maneira na qual a superfície plana possa ser mantida apoiada nas pontas de seus dedos? Parece ser claro que existe sòmente uma posição para a superfície plana.



<u>Propriedade 3:</u> <u>Três pontos quaisquer não alinhados estão sòmente em um plano.</u>

Você vê porque esta propriedade sugere que se os pés de uma cadeira não tiverem exatamente o mesmo comprimento que você será capaz de assentar perfeitamente num plano uma cadeira de três pés, mas não uma de quatro? Na figura, temos três pontos A, B e C em um plano. A reta que passa pelos pontos A e B e a reta que passa pelos pontos B e C estão desenhadas. As retas interrompidas estão desenhadas de maneira a conter dois pontos do plano de A, B e C. Cada reta interrompida contém um ponto da reta que passa por A e B, e um ponto da reta que passa por B e C. As retas interrompidas estão contidas no plano. Que propriedade afirma isto? Os conjuntos dos pontos representados pelas retas interrompidas estão contidos no plano. O plano que contém A, B e C agora pode ser determinado. É o conjunto de todos os pontos que estão nas retas que contém dois pontos da figura formada pelas retas que passam por A e B e por B e C.

<u>Problemas para Discussão em Classe</u>

1. Um plano contém três pontos sugeridos pelos dois pés da frente da mesa do professor e pela ponta do seu lápis. O plano passa por quais objetos da sala? Por quais objetos fora da sala?

2. Coloque uma régua sôbre sua carteira com a aresta para cima. Tome uma superfície, como por exemplo um pedaço de um cartão, e mova-o de modo que êle fique em contacto com o tampo da carteira mas ao mesmo tempo mantenha a superfície em contato com a linha superior da régua. Faça a superfície se inclinar gradualmente, até apresentar um grande declive. Em quantas posições inclinadas diferentes pode a superfície ser colocada? Sôbre sua carteira, perto mas não alinhado com a régua, coloque um apagador, uma bolinha de gude ou algum outro objeto pequeno de maneira que possa sugerir

um ponto. Coloque a superfície sôbre êste objeto e a aresta superior da régua. Em quantas posições oblíquas diferentes pode a superfície ser colocada desta vez? Como estas duas situações ilustram os significados da Propriedade 2 e da Propriedade 3?

<u>Exercícios 4-2</u>

1. Num certo arranjo de três pontos diferentes no espaço, podemos achar os pontos pertencendo a cada um de muitos planos. Como estão os pontos dispostos?

2. Em outro arranjo, os três pontos pertencem sòmente a um plano. Como estão os pontos dispostos?

3. Fotógrafos, agrimensores e artistas geralmente usam tripés para apoiar seus equipamentos. Por que o uso de tripés é melhor para êste propósito do que um dispositivo de quatro pés? Como se aplica a Propriedade 3 nesse caso?

4. Quantas retas diferentes podem conter:

   a. Um dado ponto?

   b. Um dado par de pontos?

5. Quantos planos diferentes podem conter:

   a. Um dado ponto?

   b. Um dado par de pontos?

   c. Um dado conjunto de três pontos?

6. Por que a palavra "plano" é usada nas seguintes denominações: aeroplano? planalto? Verifique o que os dicionários afirmam sôbre prancheta e planografia.

* 7. Quantas retas podem ser desenhadas passando por quatro pontos, um par dêles de cada vez, se os pontos estão:

   a. No mesmo plano

   b. Não no mesmo plano

5. PROBLEMA-DESAFIO

Explique o seguinte: se duas retas diferentes se interceptam, um, e sòmente um, plano contém ambas as retas.

4-3. Nomes e Símbolos

É costume atribuir uma letra a um ponto e dizer "ponto A" ou "ponto B" de acôrdo com a letra que foi atribuída. Abreviações como estas são boas, mas devemos estar certos de que seus significados estão claramente entendidos.

Um sinal representa um ponto. Devemos mencionar que pontos temos em mente colocando uma letra (usamos maiúscula) tão próxima quanto possível. Na figura abaixo, que ponto está mais perto da margem esquerda? Que ponto está mais perto da margem direita?

A.

B. C.

D.

Uma reta pode ser representada de duas maneiras, como esta

ou simplesmente como esta . No primeiro desenho, o que as setas sugerem? A reta se estende indefinidamente nos dois sentidos? O desenho, portanto, sugere todos os pontos da reta, não sòmente aquêles que podem ser indicados na página.

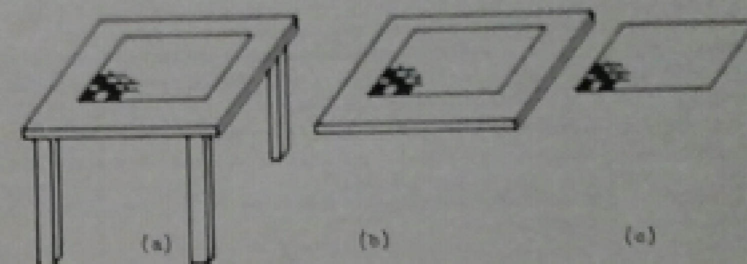
Se desejarmos chamar atenção para vários pontos de uma reta, poderemos fazer isto assim:

A B C

e a reta pode ser chamada "reta AB". Um símbolo para esta reta é $\overleftrightarrow{AB}$. Outros nomes para a reta acima são "reta AC" ou "reta BC". Os símbolos correspondentes são, respectivamente, $\overleftrightarrow{AC}$ ou $\overleftrightarrow{BC}$. Note a frequência com que aparece a palavra "representa" nesta exposição. Um ponto está simplesmente "representado" por um sinal porque o sinal é visível, tem tamanho. Mas um ponto, em Geometria, não tem tamanho. Também as retas desenhadas com giz são largas e ondulantes e geralmente irregulares. As retas geométricas na verdade são assim? O desenho de uma reta feita por um lápis bem apontado em papel muito fino é mais parecida com a nossa idéia de linha reta, mas suas imperfeições aparecerão sob uma lente de aumento. Assim, por um sinal simplesmente indicamos a posição de um ponto. O desenho de uma linha reta, meramente repre-

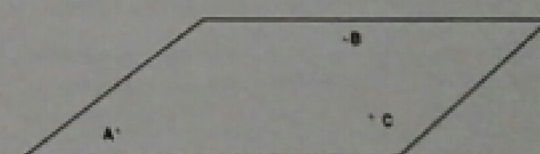
senta a reta. O desenho não é, na realidade, uma reta. Não é errado desenhar uma reta a mão livre (sem uma régua ou esquadro) mas devemos ser bastante cuidadosos ao fazê-lo.

Assim como necessitamos representar ponto e reta, achamos necessário "representar" um plano. A Figura (a) é um quadro de um tabuleiro de xadrez que está em cima de uma mesa de jôgo; a Figura (b) é o mesmo quadro sem os pés da mesa e a Figura (c) o tabuleiro de xadrez sòzinho.

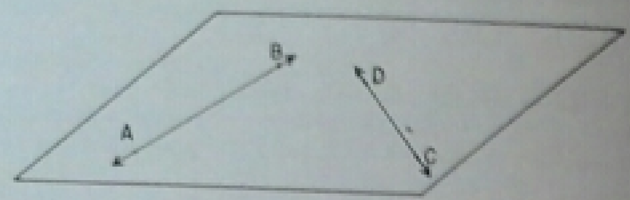


(a) (b) (c)

O tampo de uma mesa sugere uma porção de um plano. Neste caso, o tabuleiro de xadrez sugere uma porção menor e os quadradinhos do tabuleiro sugerem porções ainda menores do plano. Se desejarmos fazer um desenho num pedaço de papel, usaremos uma forma como na figura abaixo. Representamos os pontos de um plano, da mesma maneira que os pontos de uma reta:

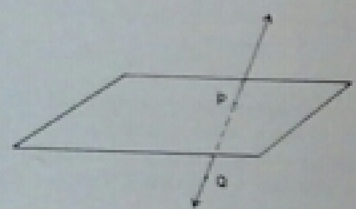


Na figura acima, os pontos A e C parecem estar mais próximos de você do que o ponto B? Imagine o ponto B como uma pedra oposta na aresta distante do tabuleiro de xadrez. Então A e C seriam pedras que pertenceriam a você.



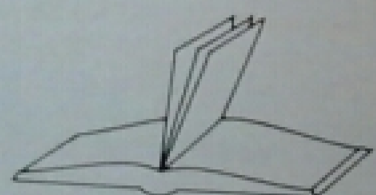
Na figura acima, A, B, C e D são considerados como pontos no plano do tabuleiro. Desenhamos a reta que passa por A e B e outra que passa por C e D. De acôrdo com a Propriedade 2, o que podemos dizer da reta $\overleftrightarrow{AB}$? A Propriedade 2 afirma "Se uma reta contém dois pontos de um plano, ela está contida nesse plano". O que podemos dizer de $\overleftrightarrow{DC}$?

É possível que uma reta possa atravessar ou "furar" um plano. O exemplo dêste caso pode aparecer assim:

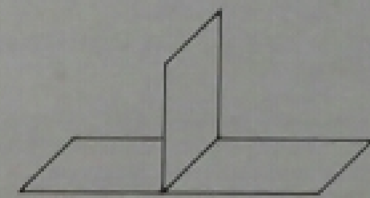


A porção interrompida de $\overleftrightarrow{PQ}$ deve estar escondida da vista se a parte do plano representada fôr a superfície superior de algum objeto como a mesa de jôgo.

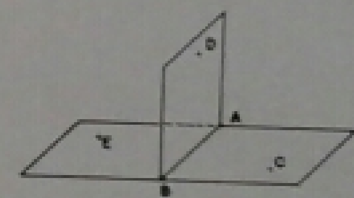
Uma vez mais, vemos que o desenho sòmente "representa" a situação. Êste é o desenho de um livro aberto:



Se tôdas as páginas do livro exceto uma, a vertical, forem removidas, então teremos o seguinte desenho:



Êste desenho sugere a intersecção de dois planos, um que contém a capa e a contra-capa do livro e outro contendo uma única página. Já que existe mais de um plano na figura, é necessário agora atribuir nomes. Atribuamos letras a alguns dos pontos da figura.



Como podemos usar a Propriedade 3 para identificar os planos da figura acima? Devemos nos lembrar de que a Propriedade 3 afirma: "Três pontos quaisquer não alinhados estão apenas em um plano. As letras A, B e D sugeririam a fôlha vertical ou a capa do livro? Note que os pontos A, B e D não estão alinhados. "Muitas pessoas achariam que a fôlha vertical está identificada por estas três letras. A fôlha em questão sugere um plano que pode agora ser designado como "plano ABD". Seguindo êste mesmo arranjo, podemos chamar a capa do livro "plano ABC", mas parece que "plano ABE" seria uma outra maneira de indicar a capa do livro! Para mostrar que aparentemente dois nomes para o mesmo plano podem ser dados, devemos poder escrever plano ABC = plano ABE se tivermos certeza de que o sinal de igualdade tem o mesmo significado que lhe atribuimos até aqui.

A noção de "conjunto" será útil para ajudar a explicar o que entendemos por "igual" quando aplicado dêste modo. Vejamos que fatos podem ser averiguados sôbre a situação descrita pela figura:

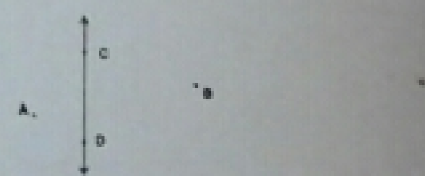
1. O plano ABC é um conjunto de pontos que se estende além da capa do livro.

2. O plano ABE é um conjunto de pontos que se estende além da capa do livro.

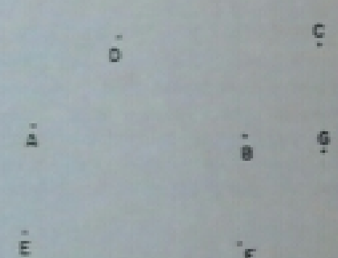
3. Os pontos A, B, C, E e outros não indicados estão no plano ABC e também no plano ABE.

Em outras palavras, todos os elementos do plano ABC, (um conjunto de pontos) e os elementos do plano ABE (um conjunto de pontos) parecem estar contidos em ambos os conjuntos (planos). Diremos: "Dois conjuntos são <u>iguais</u> se, e sòmente se, êles contiverem os mesmos elementos". De acôrdo com isto, plano ABC = plano ABE. Em outras palavras, dizemos que o conjunto M é igual ao conjunto N se M e N são dois nomes para o mesmo conjunto.

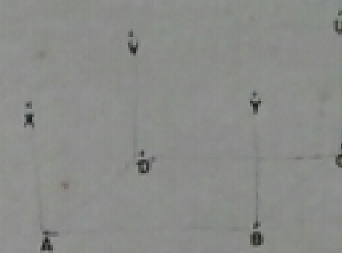
Exercícios 4-3



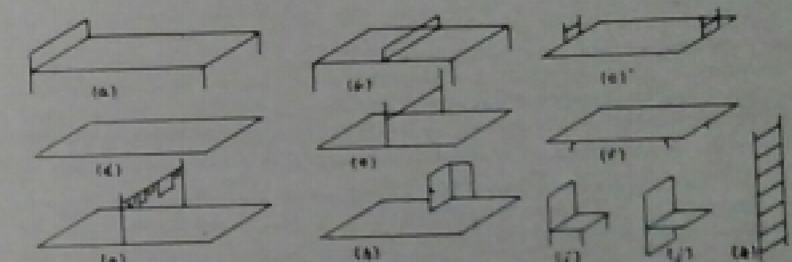
1. Na figura acima, que ponto indicado está à esquerda de CD? À direita? Quais dos pontos indicados estão mais próximos do alto da página? Do fim da página?



2. Copie os pontos da figura acima num pedaço de papel. De agora em diante nos referiremos à cópia que você fez. Com uma porção de reta, ligue A a B, B a C, C a D, D a A nesta ordem. Agora una A a E, B a F, C a G. Que peça conhecida de móvel pode êsse esbôço representar?



3. Faça uma cópia da figura acima. Una A a B, B a C, C a D, D a A, A a X, B a Y, e C a U. O que aconteceu à mesa?



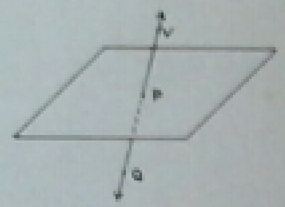
4. Cada um dos esboços acima representa um objeto conhecido dos mencionados abaixo. Marque os esboços com nomes.

Cama de lona	Campo de futebol	Varal de roupa
Mesa de ping-pong	Salto em altura	Escada de mão
Tapete	Mesa de café	Porta aberta
Cadeira		Prateleira

5. Faça esboços que representem cada um dos seguintes:

Carteira	Pirâmide de base quadrada
Cubo	Caixa de cereais

6. Na figura abaixo, o ponto V é um ponto de $\overleftrightarrow{PQ}$? O ponto Q é um elemento do plano? E V? Quantos pontos de $\overleftrightarrow{PQ}$ são elementos do plano?



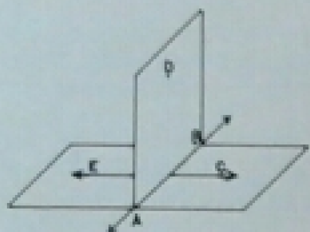


Figura (a)

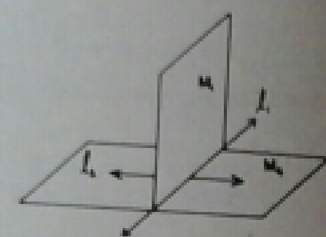


Figura (b)

7. A figura (b) é uma cópia da figura (a) exceto no que diz respeito às denominações. Três meninos chamados "Paulo" que estão na mesma classe podem ser chamados P_1, P_2 e P_3 para evitar que confundamos um com outro. Da mesma maneira, três retas diferentes podem ser denominadas $\ell_1 \ell_2$ e ℓ_3

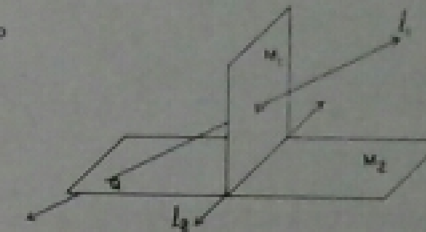
Os números pequenos não são expoentes, são chamados "índices". O plano ABD na figura (a) corresponde a M_1 na figura (b). $\overleftrightarrow{AB}$ na figura (a) corresponde a ℓ_1 na figura (b).

Na coluna da esquerda abaixo estão enumeradas as partes da figura (a). Compare-as com as partes da figura (b) enumeradas na coluna da direita:

Partes da figura (a)	Partes da figura (b)*
1. $\overleftrightarrow{EC}$	a. ℓ_1
2. Plano ABC	b. ℓ_2
3. Plano ABD	c. M_1
4. Plano EBA	d. M_2
5. $\overleftrightarrow{AB}$	
6. Intersecção dos planos ABC e ABD	

* A segunda coluna oferece vantagens se usarmos índices para fazer as identificações?

8. Na figura à direita, (a) ℓ_1 atravessa M_1? (b) Também M_2? (c) ℓ_1 é a única reta que passa por P e Q? (d) Qual é a intersecção de M_1 e M_2? (e) ℓ_1 está em M_2? (f) ℓ_1 encontraria ℓ_2? (g) ℓ_1 e ℓ_2 estão no mesmo plano?



4-4. Intersecção de Conjuntos

Introduziremos agora algumas idéias importantes e muito usadas sôbre conjuntos.

Seja o conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, }

Seja o conjunto B = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 }

Seja C o conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto A e também ao conjunto B. Podemos escrever conjunto C = {2, 4, 6, 8 }. Chamamos êsse conjunto C <u>intersecção</u> dos conjuntos A e B.

Seja R o conjunto dos alunos de cabelos pretos

Seja S o conjunto de alunos que sabem nadar

Pode acontecer que um elemento do conjunto R (um estudante de cabelos pretos) possa ser um elemento do conjunto S (um estudante que sabe nadar). Na verdade, pode não existir elementos comuns ou pode haver muitos. Em qualquer caso, o conjunto dos nadadores de cabelos pretos é a intersecção dos conjuntos S e R.

Um conjunto sem elementos é denominado "conjunto vazio". Assim, se não houver nadador de cabelos pretos, então a intersecção do conjunto R como conjunto S é o conjunto vazio.

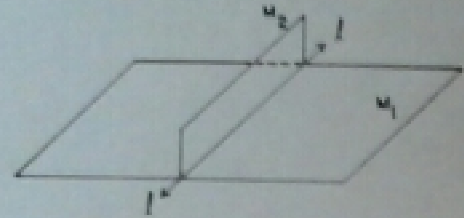
Seja H o conjunto de estudantes de sua classe e seja K o conjunto de pessoas de menos de dois anos de idade. A intersecção dos conjuntos H e K é o conjunto vazio. Não existe estudante na sua classe que tenha menos de 2 anos de idade!

Usamos o símbolo $\cap$ para representar "intersecção", isto é, $E \cap F$ significa "intersecção do conjunto E com o conjunto F". Assim, voltando aos conjuntos que acabamos de estudar, escreveremos:

$A \cap B$ é {2, 4, 6, 8}

$R \cap S$ é o conjunto dos nadadores de cabelos pretos

$H \cap K$ é o conjunto vazio



M_1 parece uma mesa de ping-pong. M_2 parece uma rêde.

A figura acima sugere dois planos M_1 e M_2. A reta ℓ parece estar tanto em M_1 como em M_2. Todo ponto de M_1 que também está em M_2 parece pertencer à reta ℓ. Assim, a seguinte afirmação parece ser verdadeira: $M_1 \cap M_2 = \ell$

Algumas pessoas falam sôbre intersecções de uma maneira ligeiramente diversa da exposta aqui. Quando dizemos que a intersecção de dois conjuntos é o conjunto vazio, elas dizem que os dois conjuntos não se interceptam. Quando dizemos que a intersecção de dois conjuntos não é vazia, elas dizem que os dois conjuntos se interceptam. As idéias são as mesmas mas a linguagem é um pouco diferente.

Exercícios 4-4

1. Escreva o conjunto cujos elementos são:

   a. Os números inteiros maiores que 17 e menores que 23

   b. As cidades que tem mais de 80 000 habitantes no seu Estado

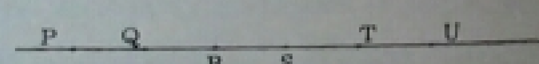
   c. Os alunos da sua classe que têm menos de 4 anos de idade.

2. Escreva três elementos de cada um dos seguintes conjuntos:

   a. Os números inteiros ímpares.

   b. Os números inteiros divisíveis por 5

   c. Os conjuntos de pontos da reta abaixo, alguns dos quais estão indicados na figura:



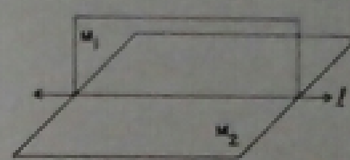
3. Dê os elementos das intersecções dos pares seguintes de conjuntos:

   a. Os números inteiros de 2 até 12 e os números inteiros de 0 até 20.

   b. Os membros da sua classe e as meninas loiras.

   c. O conjunto de pontos na reta k_1 e o conjunto de pontos da reta k_2

   d. O conjunto de pontos do plano M_1 e o conjunto de pontos de plano M_2



4. Seja $S = \{4, 8, 10, 12, 15, 20, 23\}$

   $T = \{2, 7, 10, 13, 15, 21, 23\}$

   Achar $S \cap T$.

5. Pense nas seis faces de uma caixa de giz como sendo conjuntos de pontos.

   a. Qual é a intersecção de dois lados que se encontram?

   b. Qual é a intersecção do tampo da caixa com o fundo?

6. Seja S o conjunto dos Estados do Brasil, T o conjunto dos Estados que começam com a palavra Rio e seja V o conjunto dos Estados que fazem divisas com Minas Gerais.

   a. Mencione os Estados dos três conjuntos S, T e V usando a notação { }

   b. Qual é $S \cap T$?

   c. Qual é $S \cap V$?

   d. Qual é $V \cap T$?

*7. O conjunto dos números inteiros que são múltiplos de 3 é fechado em relação à adição.

   a. O conjunto dos números inteiros que são múltiplos de 5 é fechado em relação à adição?

b. A intersecção dos conjuntos descritos neste exercício é fechada em relação à adição? Por que?

8. PROBLEMA-DESAFIO

Explique porque a "intersecção" goza da propriedade de fechamento e também das propriedades comutativa e associativa. Em outras palavras, se X, Y e Z são conjuntos, explique porque:

a. $X \cap Y$ é um conjunto

b. $X \cap Y = Y \cap X$

c. $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.

4-5. Intersecções de Retas e Planos

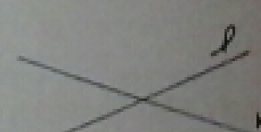
Duas Retas

Olhe para a caixa de giz e pense nas arestas como representantes de retas. Algumas dessas retas se interceptam e outras não. Na parte de cima temos algumas retas (arestas) que se interceptam e algumas não. Se pensarmos nas retas do tampo e nas retas do fundo da caixa, veremos pares que não se interceptam mas que têm a mesma direção e pares que não se interceptam e que não têm a mesma direção. Isto também acontece com as arestas de sua sala de aula? (Uma aresta é a reta da intersecção de duas paredes, uma parede e o teto ou uma parede e o piso).

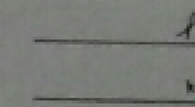
Você pode manter os seus braços numa posição tal que êles representem retas que se interceptam? Pode você mantê-los numa posição de maneira que as retas que êles representam não se interceptam mas têm a mesma direção? Idem em outra posição de maneira que as retas que êles representam não se interceptam e não têm a mesma direção? Existem outras possibilidades?

As intersecções de duas retas diferentes podem ser descritas em três casos. Temos figuras para representar os primeiros dois casos, mas, não para o terceiro. Assim que você tiver lido o terceiro caso, verá a razão pela qual se torna difícil representá-las numa figura. Olhe na figura do problema 8 dos Exercícios 4-3. Pode ela ser usada para ilustrar o terceiro caso?

1º Caso - ℓ e k se interceptam ou $\ell \cap k$ não é o conjunto vazio. ℓ e k não podem conter um mesmo par de pontos. Por que?

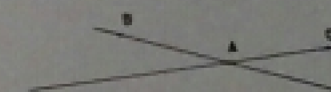


2º Caso - ℓ e k não se interceptam e estão no mesmo plano. $\ell \cap k$ é o conjunto vazio e ℓ e k estão no mesmo plano. ℓ e k são ditas paralelas.



3º Caso - ℓ e k não se interceptam e não estão no mesmo plano. $\ell \cap k$ é o conjunto vazio, e ℓ e k não estão no mesmo plano. Dizemos que ℓ e k são retas reversas.

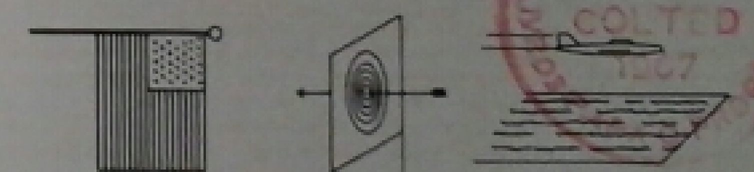
No Problema-Desafio da seção 4-2 pedíamos para você explicar porque duas retas estão no mesmo plano se elas se interceptam. Na figura abaixo temos duas retas que se interceptam no ponto A. B é um ponto de uma das retas e C é um ponto da outra reta. Pela Propriedade 3, existe apenas um plano que contém A, B e C.



Pela Propriedade 2, AB está nesse plano.

Pela Propriedade 2, AC está nesse plano.

Existe sòmente um plano que contém as duas retas.



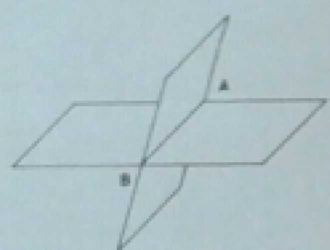
(a) (b) (c)

Uma Reta e um Plano

Existe u'a maneira de dispor uma reta e um plano tal que sua intersecção contenha sòmente um ponto. Algum dos desenhos acima sugere esta maneira? Existe uma outra maneira de dispor uma reta e um plano de maneira que sua intersecção contenha muitos pontos? Qual dos desenhos acima ilustra isto? Existe ainda uma outra maneira de dispor uma reta e um plano de maneira que sua intersecção não contenha absolutamente pontos? Se os dois primeiros desenhos foram escolhidos corretamente você não terá dificuldade em escolher o desenho correto desta vez. Se nos referirmos a cada uma das disposições acima como um "caso", então, êstes três "casos" podem também ser ilustrados pelos lados e pelas arestas de uma caixa de giz, uma caixa de sapatos, ou as paredes e arestas de uma sala de aulas.

Dois Planos

Em seguida, vamos pensar em dois planos diferentes no espaço. Suponhamos que sua intersecção não seja vazia. A intersecção contém mais de um ponto? Note que os planos da parede frontal e uma parede lateral de uma sala se interceptam em mais de um ponto. Se você tiver dois pedaços de papel e pegar um em cada mão pode parecer que os pedaços de papel podem ser seguros de maneira que êles tenham sòmente um ponto de intersecção. Mas, se considerarmos os planos dos pedaços e não sòmente os próprios pedaços, vemos que se êles tiverem um ponto em comum, sua intersecção necessàriamente conterá outros pontos. Você pode segurar os dois pedaços de maneira que êles fiquem planos e que ainda representem planos que se interceptam sòmente em dois pontos? Mantendo os pedaços tão planos quanto possível, você pode segurá-los de maneira que êles se interceptem numa curva como um arco de uma ponte?

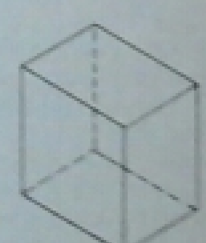


(d)

(e)

Sejam A e B dois pontos, cada um dos quais está na intersecção de dois planos como na figura (d). Pela Propriedade 2, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ deve pertencer a cada um dos planos. Portanto, a intersecção dos dois planos contém a reta; mas, se como na figura (e), a intersecção contém um ponto C, que não está na reta $\overleftrightarrow{AB}$, então os dois planos seriam o mesmo plano. Pela Propriedade 3 deveria existir apenas um plano contendo A, B, C. Agora enunciaremos:

Propriedade 4: Se a intersecção de dois planos distintos não for vazia, será uma reta.



Se a intersecção de dois planos for o conjunto vazio, então os planos serão chamados paralelos. Vários exemplos de pares de planos paralelos são representados

por paredes de uma sala ou prateleiras de estante. Você pode pensar em outros?

Tratando da intersecção de dois planos distintos, consideremos dois casos. Sejam α e β* os dois planos.

1º Caso - $\alpha \cap \beta$ não é vazio. $\alpha \cap \beta$ é uma reta

2º Caso - $\alpha \cap \beta$ é vazio. α e β são paralelos.

Existem outros casos? Por que?

Exercícios 4-5

1. Mencione os três casos para a intersecção de uma reta com um plano. Indique se a intersecção contém 0, 1 ou mais de um ponto.

2. Descreva dois pares de retas reversas sugeridas pelas arestas de sua sala.

3. No seu papel, marque três pontos A, B e C tais que $\overleftrightarrow{AB}$ não seja $\overleftrightarrow{AC}$. Desenhe as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. O que é $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{AC}$?

4. Cuidadosamente, dobre um pedaço de papel ao meio. A dobra sugere uma reta? Coloque o papel dobrado numa mesa ou escrivaninha de maneira que a dobra não toque a mesa. O papel forma uma espécie de tenda. O tampo da mesa e o papel dobrado sugerem três planos? Existe algum ponto comum a todos os três planos? Qual é a intersecção de todos três planos? Existem dois planos paralelos?

5. Coloque o papel dobrado na mesa com uma extremidade da dobra tocando a mesa. Temos três planos sugeridos? Existe algo comum aos três planos? Qual é a intersecção dos três planos?

6. Segure o papel dobrado de maneira que a dobra esteja sôbre o tampo da mesa. Temos três planos sugeridos? Existe algum ponto em todos os três planos? Qual é a intersecção dos três planos?

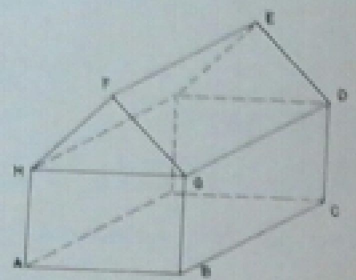
7. Em cada uma das situações dos exercícios 4, 5 e 6 considere sòmente a reta da dobra e o plano do tampo da mesa. Quais são as intersecções desta reta e dêste plano? Você deve ter três respostas, uma para cada um dos exercícios 4, 5 e 6.

---

* α (alfa) e β (beta) são duas letras do alfabeto grego. As letras do alfabeto grego serão usadas daqui por diante para designar planos, assim como as minúsculas e maiúsculas do alfabeto latino são usadas para designarmos as retas e os pontos, respectivamente.
Isto tornará mais fácil o seu estudo de Geometria sobretudo quando tiver de estudar as demonstrações de teoremas.

8. Considere três retas diferentes num plano. Quantos dêstes pontos pertencem no mínimo a duas retas? Desenhe 4 figuras mostrando como 0, 1, 2 ou 3 pode ter sido sua resposta. Por que sua resposta não pode ter sido 4 pontos?

9. Considere êste esbôço de uma casa. Marcamos oito pontos na figura. Pense nas retas e planos sugeridos pela figura.



Designe as retas por um par de pontos e planos por três pontos. Designe:

a. Um par de planos paralelos.

b. Um par de planos cuja intersecção é uma reta.

c. Três planos que se interceptam num ponto.

d. Três planos cuja intersecção é uma reta.

e. Uma reta e um plano cuja intersecção é vazia.

f. Um par de retas paralelas.

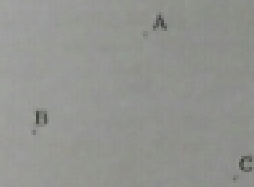
g. Um par de retas reversas.

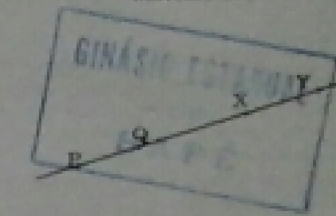
h. Três retas cuja intersecção é um ponto.

i. Quatro planos que têm exatamente um ponto em comum

4-6. Segmentos

Considere três pontos A, B e C como na figura seguinte. Dizemos que qualquer um dêles está compreendido entre os outros dois? Não, habitualmente não dizemos.





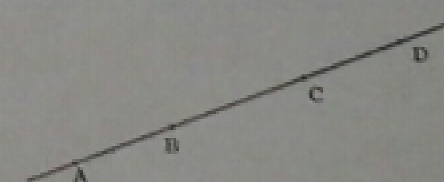
Usamos a palavra "entre" sòmente quando os pontos em questão estão numa mesma reta (ou numa mesma trajetória). Olhe para os pontos P, Q e Y acima. Êstes pontos representam pontos de uma reta. X está entre Q e Y? Q está entre P e Y? P está entre X e Y? Se você disse sim, sim e não, nesta ordem, você acertou. Todos nós temos um bom senso natural do que queremos dizer quando falamos que um ponto está entre dois outros pontos de uma reta. Sabemos que enquanto Q está entre P e X existem muitos outros pontos entre P e X, mas não marcamos qualquer um dêsses.

Você observará, quando dizemos que um ponto P está entre dois pontos A e B, queremos dizer duas coisas: Primeiro, existe uma reta contendo A, B e P. Segundo, nesta reta, P está entre A e B.

Vamos olhar para a figura de nôvo. Existe algum ponto entre P e Q? Não marcamos nenhum, mas admitimos a existência de muitos. Na verdade, para dois pontos quaisquer, A e B, no espaço; entendemos que a situação é a mesma para P e Q. Existe uma reta contendo A e B e nesta reta existem pontos entre A e B.

Finalmente, somos capazes de dizer o que entendemos por um segmento de reta. Pense em dois pontos distintos A e B. O conjunto de pontos formado por A, B e todos os pontos entre A e B é chamado segmento AB. A e B são chamados extremidades. Designamos o segmento de extremidade A e B por $\overline{AB}$. Outro nome para êste segmento é $\overline{BA}$.

Todo segmento tem sòmente duas extremidades. Como foi sugerido acima, cada segmento contém outros pontos além de suas extremidades. Às vêzes usamos a denominação segmento de reta. Não é errado chamá-lo assim, mas é desnecessário. Entendemos de qualquer maneira que um segmento é uma parte de uma reta.



Na figura acima, encontramos os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ e $\overline{DC}$. Existem outros segmentos? Sim, existem os segmentos $\overline{CA}$, $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$. Você se lembra de que já aprendemos intersecção de conjuntos. Qual é a intersecção de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$?

Não sòmente podemos falar sôbre intersecção de conjuntos, mas, também achar conveniente falar de "reunião" de conjuntos. A palavra "reunião" sugere reunir ou combinar dois conjuntos num nôvo conjunto. A <u>reunião</u> de dois conjuntos é formada por aqueles elementos que pertencem ao menos a um dos conjuntos. Por exemplo, na figura ao lado, a reunião de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ é formada por todos os pontos de $\overline{AB}$, e todos os pontos de $\overline{BC}$, isto é, o segmento $\overline{AC}$.

Usamos o símbolo $\cup$ para representar "reunião". Isto é, $X \cup Y$ significa "a reunião dos conjuntos X e Y". Suponha que o conjunto X é o conjunto dos números $\{1, 2, 3, 4\}$ e o conjunto Y é o conjunto dos números $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. Tem você uma idéia do que seja $X \cup Y$? Sim, é $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$. Na reunião de dois conjuntos não imaginamos que um elemento que pertence a ambos os conjuntos apareça duas vêzes na reunião. Ao invés disso, aparece uma só vez. Novamente, imaginemos o conjunto dos alunos de cabelos pretos e o conjunto de todos alunos que sabem nadar. Podemos imaginar:

Seja R o conjunto de alunos de cabelos pretos.
Seja S o conjunto de alunos que sabem nadar.

Então $R \cup S$ é o conjunto de todos os alunos que tem cabelos pretos (sabendo ou não nadar) e alunos que sabem nadar (tendo ou não cabelos pretos).

<u>Exercícios 4-6</u>

1. Desenhe uma reta horizontal. Marque nela quatro pontos P, Q, R e S nesta ordem da esquerda para direita. Designe dois segmentos:

   a. Cuja intersecção é um segmento.

   b. Cuja intersecção é um ponto.

   c. Cuja intersecção é vazia.

   d. Cuja reunião <u>não</u> é um segmento.

2. Desenhe uma reta. Marque três pontos da reta A, B e C com B entre A e C.

   a. O que é $\overline{AB} \cap \overline{BC}$?

   b. O que é $\overline{AC} \cap \overline{BC}$?

   c. O que é $\overline{AB} \cup \overline{BC}$?

   d. O que é $\overline{AB} \cup \overline{AC}$?

3. Desenhe um segmento. Designe suas extremidades por X e Y. Existe um par de pontos de $\overline{XY}$ com Y entre êles? Existe um par de pontos de $\overleftrightarrow{XY}$ com Y entre êles?

4. Desenhe dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ para os quais $\overline{AB} \cap \overline{CD}$ é vazia mas $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ é um ponto.

5. Desenhe dois segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$ para os quais $\overline{PQ} \cap \overline{RS}$ é vazia mas, $\overleftrightarrow{PQ}$ é $\overleftrightarrow{RS}$.

6. Sejam A e B dois pontos. É verdade que existe sòmente um segmento contendo A e B? Desenhe uma figura para explicar êste problema e a sua resposta.

7. Desenhe uma reta vertical ℓ. Designe por A e B dois pontos à direita de ℓ. Marque um ponto C à esquerda de ℓ. $\overline{AB} \cap \ell$ é vazia? $\overline{AC} \cap \ell$ é vazia?

8. <u>PROBLEMA-DESAFIO</u>

   Em alguns livros antigos de geometria os autores não fazem distinção entre uma reta e um segmento. Êles chamam ambos "linha reta". Tomando "linha reta" para significar qualquer uma dessas duas coisas, explique porque não podemos dizer que "por dois pontos passa sòmente uma reta".

9. <u>PROBLEMA-DESAFIO</u>

   Explique porque a "reunião" goza da propriedade de fechamento e também da comutativa e da associativa. Em outras palavras, se X, Y e Z são conjuntos, explique porque:

   a. $X \cup Y$ é um conjunto

   b. $X \cup Y = Y \cup X$

   c. $(X \cup Y) \cup Z = (X \cup Y) \cup Z$

*10. Mostre que para todo conjunto X temos:

$$X \cup X = X$$

4-7. <u>Separações</u>

Nesta seção devemos considerar uma idéia muito importante — a idéia de separação. Veremos esta idéia aplicada em três casos diferentes.

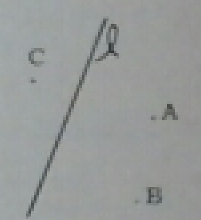
Seja α o nome do plano do quadro negro. Este plano separa o espaço em dois conjuntos: (1) O conjunto dos pontos do seu lado em relação ao plano do quadro negro e (2) o conjunto de pontos do lado oposto ao seu em relação ao quadro negro (atrás do quadro negro). Êstes dois conjuntos são chamados semi-espaços. O plano α não pertence a nenhum dêstes semi-espaços.

Sejam A e B dois pontos quaisquer do espaço não situados no plano α, do quadro negro. Então, A e B estão de um mesmo lado do plano α se a interseção de $\overline{AB}$ com α fôr vazia, isto é, se $\overline{AB} \cap \alpha$ é vazia. A e B estão em lados opostos do plano α se a intersecção de $\overline{AB}$ e α não fôr vazia, em outras palavras, existe um ponto de α entre A e B.

Todo plano α separa o espaço em dois semi-espaços.

Se A e B estão no mesmo semi-espaço, $\overline{AB} \cap \alpha$ é vazia. Se A e B estão em semi-espaços diferentes, $\overline{AB} \cap \alpha$ não é vazia. Chamamos α a fronteira de cada um dos semi-espaços.

Consideremos agora sòmente o plano α da face frontal do quadro negro. Você percebe como o próprio plano α pode ser dividido em dois semi-planos? Qual seria nesse caso a fronteira dos dois semi-planos? Observe a figura seguinte constituída da reta ℓ e

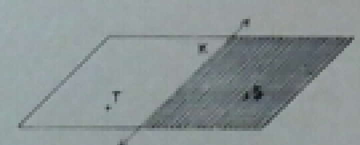


dos três pontos A, B e C. $\overline{AB} \cap \ell$ é o conjunto vazio? $\overline{BC} \cap \ell$ é o conjunto vazio? Que dizer de $\overline{AC} \cap \ell$? Podemos dizer que:

Qualquer reta ℓ do plano α separa o plano em dois semi-planos.

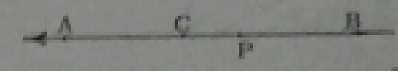
Chamamos os dois semi-planos nos quais ℓ separa α, os lados de ℓ. Indicamos os lados de ℓ nos referindo ao lado-A de ℓ ou lado-C de ℓ. Note que na figura acima, o lado-B de ℓ = lado-A de ℓ. A reta ℓ não está em nenhum dos semi-planos.

Na figura abaixo, o lado-S da reta k está hachurado e o lado-T de k não.



Agora considere a reta ℓ. Como você definiría uma semi-reta? Você pode dizer alguma coisa sôbre os segmentos nesta definição como o fizemos na definição

de semi-planos e semi-espaços? O que seria a fronteira? A fronteira seria um conjunto de pontos?



Se o ponto P separa a reta da figura em duas semi-retas, A e B estão na mesma semi-reta? E A e C? P está entre B e C?

O nosso terceiro caso deve agora estar claro. Você pode enunciá-lo?

É importante notar que êstes três casos são quase análogos. Êles lidam com a mesma idéia em situações distintas. Assim:

(1) Um plano qualquer separa o espaço em dois semi-espaços

(2) Uma reta qualquer de um plano separa o plano em dois semi-planos

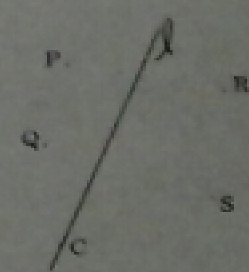
(3) Um ponto qualquer de uma reta separa a reta em duas semi-retas

Há uma outra definição que é útil. Um raio é uma semi-reta mais a sua origem. Um raio tem uma extremidade. Um raio sem a extremidade é uma semi-reta. Geralmente desenhamos uma raio assim $\longrightarrow$. Se A é a extremidade de um raio e B um outro ponto do raio, então representamos o raio por $\overrightarrow{AB}$. Note que $\overrightarrow{BA}$ não é $\overrightarrow{AB}$. Usamos o têrmo raio no mesmo sentido que é usado na expressão "raio de luz".

Na linguagem diária, às vêzes não fazemos distinções entre retas, raios e segmentos. Em Geometria devemos distinguí-los. Uma "reta de visão" na verdade se refere a um raio. Você não descreve alguem como estando na sua reta de visão se êsse alguém estiver atrás de você.

Exercícios 4-7

1. Na figura à direita, o lado-R de ℓ é o mesmo que o lado-S de ℓ? E o mesmo que o lado-Q? As intersecções de ℓ e $\overline{PQ}$, ℓ e $\overline{RS}$ são vazias? E de ℓ e $\overline{QS}$, ℓ e $\overline{PR}$? Considerando os lados de ℓ, as duas respostas anteriores são o que você deveria esperar?



2. Desenhe uma reta que contenha os pontos A e B. O que é $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$? O que é o conjunto de pontos que não estão em $\overleftrightarrow{AB}$?

3. Desenhe uma reta horizontal. Marque quatro pontos A, B, C e D nesta ordem da esquerda para a direita.
Mencione dois raios (usando êstes pontos para sua descrição):

a. Cuja reunião é a reta.

b. Cuja reunião não é a reta, mas contém A, B, C e D.

c. Cuja reunião não contém A.

d. Cuja intersecção é um ponto.

e. Cuja intersecção é vazia.

4. Um segmento separa um plano? Uma reta separa o espaço?

5. Desenhe duas retas horizontais k e ℓ no seu papel. Estas retas são paralelas. Marque um ponto P em ℓ. Todo ponto de ℓ está no lado-P de k? Isto é o mesmo que perguntar "O lado-P de k contém ℓ"?

6. A idéia de um plano separando o espaço está relacionado à idéia de superfície de uma caixa separando o interior do exterior. Se P é um ponto interior e Q é um ponto exterior da caixa, $\overline{PQ}$ intercepta a superfície?

*7. Explique como a reunião de dois semi-planos pode ser um plano.

*8. Se A e B são pontos do mesmo lado do plano α (no espaço), $\overleftrightarrow{AB} \cap \alpha$ deve ser vazia? $\overline{AB} \cap \alpha$ pode ser vazia?

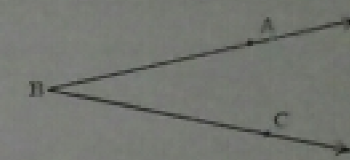
4-8. Ângulos e Triângulos

Ângulos

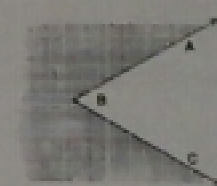
Algumas das idéias mais importantes da Geometria tratam com ângulos e triângulos. Um ângulo é um conjunto de pontos formado por dois raios de extremidade comum e ambos não na mesma reta. Vamos dizer isto de outra maneira. Sejam $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ dois raios tais que A, B e C não estão todos na mesma reta. O conjunto de pontos formado por todos os pontos de $\overrightarrow{BA}$ e todos os pontos de $\overrightarrow{BC}$ é chamado ângulo ABC. Um ângulo é a reunião de dois raios. O ponto B chama-se vértice do ângulo. Os raios $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ chamam-se lados (ou as vêzes raios) do ângulo. Um

ângulo tem sòmente um vértice e sòmente dois lados.

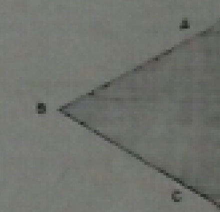
Está desenhado um ângulo na figura abaixo. Você com certeza está lembrado da seção 4-3 e portanto na verdade o que temos é "uma representação desenhada do ângulo". Temos três pontos do ângulo marcados de maneira que o ângulo é lido "ângulo ABC" e podemos notá-lo assim: "$\angle$ ABC". A letra do vértice está sempre mencionada no meio. Portanto, $\angle$ ABC é $\angle$ CBA. Note que para marcarmos êste ângulo a ordem de A e C não importa, mas B deve estar no meio. $\angle$ ABC será o mesmo que $\angle$ BAC (não desenhado)?



Da figura parece que o ângulo determina uma partição no plano que o contém. É verdade que o ângulo determina uma separação no plano. As duas regiões nas quais o ângulo separa o plano parecem de alguma maneira diferentes. Elas têm o seguinte aspecto:



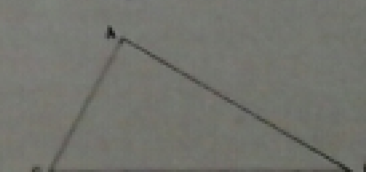
e



Chamamos a região da direita de interior do ângulo e a da esquerda de exterior. Podemos definir o interior de $\angle$ ABC como a intersecção do lado A da reta BC e o lado C da reta AB. É a intersecção de dois semi-planos e não inclui o ângulo. O exterior é o conjunto de todos os pontos do plano que não estão no ângulo nem no seu interior.

Triângulos

Sejam A, B e C três pontos não colineares. O triângulo ABC, notado por $\triangle$ ABC, é a reunião de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Você deve estar lembrado de que a reunião de dois conjuntos é constituída por todos os elementos de um conjunto e todos os elementos do outro conjunto. Podemos também definir $\triangle$ ABC de outra maneira. O triângulo ABC é o conjunto dos pontos A, B e C, todos os pontos de $\overleftrightarrow{AB}$ entre A e B, todos pontos de $\overleftrightarrow{AC}$ entre A e C e todos os pontos de $\overleftrightarrow{BC}$ entre B e C. Os pontos A, B e C chamam-se "vértices" do triângulo. O triângulo ABC está representado na figura abaixo:



Ângulos de um Triângulo

Dizemos que $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, e $\overline{BC}$ são lados do triângulo. Dizemos também que $\angle$ ABC, $\angle$ ACB e $\angle$ BAC são ângulos do triângulo. Êstes são os ângulos determinados pelo triângulo. Os lados do triângulo estão contidos no triângulo? Os ângulos de um triângulo estão contidos nesse triângulo? Você pode indagar por que chamamos $\angle$ ABC um ângulo do $\triangle$ ABC quando $\angle$ ABC não está contido no $\triangle$ ABC. (Leia novamente os parágrafos sôbre ângulos). Nós falamos nos graduados de uma escola embora êles não estejam na escola.

Note que um triângulo é um conjunto de pontos em apenas um plano. Todo ponto do $\triangle$ ABC está no plano ABC. Olhe para a figura anterior. O $\triangle$ ABC determina uma partição no plano a que êle pertence? Sim, certamente êle parece fazer isto. É verdade que êle o faz. O $\triangle$ ABC tem um interior e um exterior. O interior é a intersecção dos interiores dos três ângulos do triângulo. O exterior é o conjunto de todos os pontos do plano ABC que não estão no $\triangle$ ABC nem no interior do $\triangle$ ABC.

Exercícios 4-8

1. Marque três pontos A, B e C não colineares. Desenhe $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. (a) Trace hachuras no lado-C de $\overleftrightarrow{AB}$. Faça o mesmo no lado-A de $\overleftrightarrow{BC}$. Que conjunto está agora duplamente hachurado? (b) Trace hachuras no lado-B de $\overleftrightarrow{AC}$. Que conjunto está agora triplamente hachurado?

2. Marque três pontos X, Y e Z não colineares.

   a. Desenhe $\angle$ XYZ e $\angle$ XZY. Êles são ângulos diferentes? Por que?

   b. Desenhe $\angle$ YXZ. Êste é diferente dos outros dois que você já desenhou?

   c. Cada ângulo é um conjunto de pontos que está apenas num plano. Por que isto é verdadeiro?

3. Desenhe um triângulo ABC.

   a. No triângulo o que é $\overline{AB} \cap \overline{AC}$?

   b. O triângulo contém alguns raios ou semi-retas?

   c. No desenho estenda $\overline{AB}$ em ambos os sentidos para obter $\overleftrightarrow{AB}$. O que é $\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{AB}$?

   d. O que é $\overleftrightarrow{AB} \cap \triangle$ABC?

4. O que se segue refere-se à figura à direita

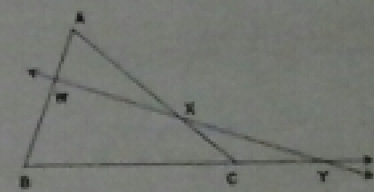
   a. O que é $\overline{YW} \cap \triangle$ ABC?

   b. Enuncie os quatro triângulos da figura.

   c. Quais dos pontos marcados, se existir algum, estão no interior de algum dos triângulos?

   d. Quais dos pontos marcados, se existir algum, estão no exterior de algum dos triângulos?

   e. Mencione um ponto do mesmo lado do $\overleftrightarrow{WY}$ como C e um no lado oposto.



5. Desenhe uma figura como a do Exercício 4.

   a. Marque um ponto P que não esteja no interior de qualquer dos triângulos.

   b. Marque um ponto Q interno a dois triângulos.

   c. Se possível, marque um ponto R no interior do $\triangle$ ABC mas não no interior de qualquer um dos outros triângulos.

6. Se possível, faça esboços nos quais a intersecção de uma reta e um triângulo é:

   a. O conjunto vazio.

   b. Um conjunto de dois elementos.

   c. Um conjunto de um elemento.

   d. Um conjunto de apenas três elementos.

7. Se possível, faça esboços nos quais a intersecção de dois triângulos é:

   a. O conjunto vazio
   b. Apenas dois pontos
   c. Apenas quatro pontos
   d. Apenas cinco pontos

8. Na figura ao lado, o que é o seguinte:

   a. $\angle$ ABC $\cap$ $\overleftrightarrow{AC}$

b. $\triangle ABC \cap \overleftrightarrow{AB}$

c. $\ell_1 \cap \angle ACB$

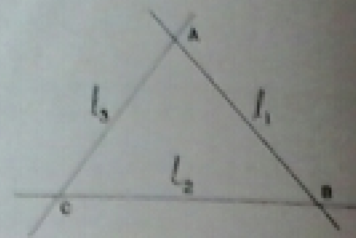
d. $\overline{AB} \cap \ell_2$

e. $\angle BCA \cap \angle ACB$

f. $\overline{BC} \cap \angle ABC$

g. $\overrightarrow{BC} \cap \angle ACB$

h. $\angle ABC \cap \triangle ABC$



*9. Num plano, se dois triângulos têm um lado em comum, os seus interiores devem se interceptar? Se três triângulos têm um lado em comum, dois de seus interiores devem se interceptar?

*10. Desenhe $\angle ABC$. Marque pontos X e Y no interior e P e Q no exterior.

a. Todo ponto de $\overline{XY}$ deve estar no interior?

b. Todo ponto de $\overline{PQ}$ está no exterior?

c. Você pode achar pontos R e S no exterior tais que $\overline{RS} \cap \angle ABC$ não seja vazia?

d. $\overline{XP} \cap \angle ABC$ pode ser vazia?

4-9. Correspondências Biunívocas

No Capítulo 3 usamos a idéia de "correspondência biunívoca" quando falamos dos números naturais. Esta idéia é também útil à Geometria. Por "correspondencia biunívoca" entendemos uma associação de cada elemento de um certo conjunto com um elemento correspondente do outro conjunto. Antes de usarmos esta idéia em Geometria, voltemos à nossa experiência anterior.

Um exemplo usado no Capítulo 3, relativo ao homem primitivo, foi da correspondência de cada ovelha de seu rebanho com uma pedra. Como você deve estar lembrado, o pastor teria que construir um pilha de pedras cada manhã, composta de uma pedra para cada ovelha, quando o rebanho deixasse o aprisco para o pasto. De tarde êle teria que transferir as pedras para uma nova pilha, uma de cada vez, quando cada ovelha entrasse no aprisco. Se tôdas as pedras fossem transferidas, o pastor saberia que tôdas as ovelhas haviam voltado ao aprisco. Isto é verdade porque para cada pedra havia uma ove-

lha correspondente, e para cada ovelha havia uma pedra correspondente.

Vejamos um outro exemplo. Suponhamos que você vendeu dezessete entradas para uma festa da escola. Seja T o conjunto de entradas que você vendeu. Seja C o conjunto de pessoas que foram admitidas na festa por meio destas entradas. Existe uma correspondência biunívoca entre T e C? Como você sabe?

Considere o conjunto dos números naturais menores que onze. Formemos dois conjuntos desses números. O conjunto A formado pelos números ímpares: {1, 3, 5, 7, 9} e conjunto B, formado pelos números pares: {2, 4, 6, 8, 10}. Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto A e o conjunto B? A resposta, naturalmente, é sim, porque todo número ímpar pode ser associado a um número par. Vamos verificar isto usando o seguinte esquema:

1	3	5	7	9
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
2	4	6	8	10

Esta é a única maneira pela qual os elementos dêstes dois conjuntos podem ser associados? Faça uma associação sua.

O jôgo musical de cadeiras é divertido porque está baseado no fato de não haver uma correspondência biunívoca. Por que isto acontece? Existe alguma correspondência biunívoca em algum estágio do jôgo?

São dados o conjunto A: {a, b, c, d, e, f, g} e conjunto B {I, II, III, IV, V}. Existe uma correspondência biunívoca entre êstes dois conjuntos? Justifique sua resposta com o esquema usado anteriormente para os conjuntos de números pares e ímpares.

Exercícios 4-9

1. Existe uma correspondência biunívoca entre os alunos e as carteiras da sua classe? Por que?

2. Existe uma correspondência entre os estados do Brasil e as cidades brasileiras que tem mais de 1 000 000 de habitantes? Por que?

3. Você ouvirá a expressão: "Vamos contar cabeças". Isto implica numa situação de correspondência biunívoca? Se implicar, qual é?

4. Mostre que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números inteiros pares e o conjunto dos números inteiros ímpares.

5. Se o conjunto R está numa correspondência biunívoca com o conjunto S e o conjunto S com o conjunto T, o conjunto R está numa correspondência biunívoca com o conjunto T? Por que?

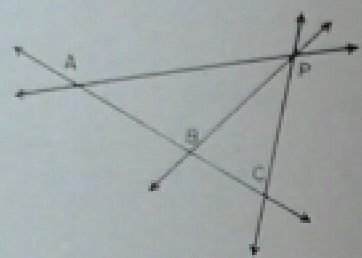
6. PROBLEMA-DESAFIO

Estabeleça uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números inteiros pares e o conjunto dos números inteiros.

Agora vejamos como podemos usar a idéia de correspondência biunívoca em Geometria.

Exercícios para Discussão em Classe

Seguindo as instruções dadas, faça um desenho de algum modo parecido com a figura abaixo.



Perguntas estão espalhadas através das instruções. Responda as questões à medida que você fôr avançando.

1. Desenhe uma reta e denomine-a ℓ.

2. Marque um ponto P não em ℓ.

3. Marque um ponto A na reta ℓ.

4. Desenhe a reta $\overleftrightarrow{PA}$

   a. $\overleftrightarrow{PA} \cap \ell$ é o conjunto vazio?

   b. A intersecção de $\overleftrightarrow{PA}$ e ℓ tem sòmente um elemento? Por que?

5. Escolha dois outros pontos B e C em ℓ. Desenhe $\overleftrightarrow{PB}$ e $\overleftrightarrow{PC}$.

   a. Através dêsses dois novos pontos você pode traçar uma reta que também passe pelo ponto P?

   b. Seja K o conjunto formado por tôdas as retas que interceptam ℓ e passam por P. Quantos elementos de K foram desenhados até agora?

   c. Cada elemento indicado de K contém um ponto de ℓ?

   d. Cada elemento indicado de K pode estar em correspondência com um ponto indicado de ℓ?

   e. Você pensa que se mais elementos de K forem desenhados e mais elementos de ℓ forem marcados, cada elemento de K poderia corresponder a um elemento de ℓ?

6. Marque os pontos D e E em ℓ. Desenhe elementos de K que podem estar em correspondência com êstes pontos. É verdade que para cada elemento de K (indicado ou não) existe um elemento correspondente de ℓ e para cada elemento de ℓ existe elemento correspondente de K?

7. Desenhe um elemento de K.

   a. Êle intercepta ℓ?

   b. Em quantos pontos êle encontra ℓ?

8. Copie e complete as sentenças seguintes de maneira torná-las verdadeiras:

A uma __________ passando por P e encontrando ℓ corresponde um __________ de ℓ e a um __________ de ℓ corresponde uma __________ que passa por P e encontra ℓ. Em outras palavras, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto K de retas e o conjunto ℓ de pontos.

Os fatos que você aprende sôbre os números e os fatos que você aprende no estudo da Geometria, geralmente serão combinados num assunto conhecido como "Geometria Analítica ou Geometria com uso de Coordenadas". Grandes progressos em ciência e tecnologia foram feitos devido a esta combinação. Para entendermos como é feita esta reunião de números e Geometria, devemos uma vez mais recorrer às idéias de "reta no sentido geométrico", "reta numérica" e "correspondência biunívoca".

Exercícios 4-9b.

1. Descreva uma correspondência biunívoca entre os pontos A, B e C que determinam um triângulo e os lados do triângulo. Você pode fazer isto de mais de um modo?

2. Desenhe um triângulo com vértices A, B e C. Marque um ponto P no interior do triângulo ABC. Seja R o conjunto de todos os raios que têm extremida-

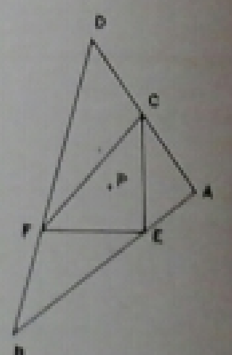
de P. Estamos admitindo que elementos de H estão no plano do triângulo ABC. Desenhe vários raios de H. Você pode observar uma correspondência biunívoca entre H e o triângulo ABC? Para todo ponto do triângulo ABC há apenas um raio de H que o contém? Todo raio de H contém apenas um ponto do triângulo ABC?

3. Desenhe um ângulo XYZ com vértice em Y. Desenhe o segmento $\overline{XZ}$. Pense em K como sendo um conjunto de raios no plano XYZ com extremidade comum Y. K é o conjunto de todos êsses raios que não contêm pontos no exterior do ângulo XYZ. $\overrightarrow{YX}$ e $\overrightarrow{YZ}$ são dois dos muitos elementos de K. Desenhe outros elementos de K. Êle intercepta $\overline{XZ}$? Para cada elemento de K existirá um tal ponto correspondente de $\overline{XZ}$? Marque D, um ponto de $\overrightarrow{YX}$ e E, um ponto de $\overrightarrow{YZ}$. Trace $\overline{DE}$. Existe uma correspondência biunívoca análoga entre o conjunto de pontos de $\overline{XZ}$ e o conjunto de pontos de $\overline{DE}$?

°4. Descreva uma correspondência biunívoca entre o conjunto de pontos de uma superfície de uma bola e o conjunto de raios com extremidade comum no interior da bola.

°5. Descreva numa correspondência biunívoca entre o conjunto H de tôdas as retas de um plano que passam por um ponto e um conjunto K de todos os planos que passam por uma reta no espaço. (Pense numa porta giratória e no assoalho debaixo dela).

°6. Seja S o conjunto de todos os raios do plano ABD com extremidade P. (a) Existe uma correspondência biunívoca entre S e o Δ ABD? (b) Existe uma correspondência biunívoca entre S e o Δ FCE? (c) Entre uma correspondência biunívoca entre Δ ABD e Δ FCE? Por que?



4-10. Curvas Simples Fechadas

Nos jornais e revistas você frequêntemente vê gráficos como das figuras a e b. Êstes gráficos representam o que chamamos curvas. Devemos considerar as curvas como tipos especiais de conjuntos de pontos. Às vêzes, trajetórias que vagueiam pelo espaço são tidas como curvas. Nesta secção, entretanto, restringiremos nossa

atenção a curvas que estejam contidas em um plano. Podemos representá-las por figuras que desenhamos no quadro negro ou em um pedaço de papel.

Uma curva é um conjunto de pontos que pode ser representado por um desenho a lápis sem deixar o mesmo se erguer do papel. Segmentos e triângulos são exemplos de curvas que já estudamos. Curvas podem ou não conter porções que são retas. Na linguagem diária usamos o têrmo "curva" neste sentido. O jogador no jôgo de futebol lança a bola, esta parece ir em linha reta por um momento e em seguida "quebra" ou "curva-se".

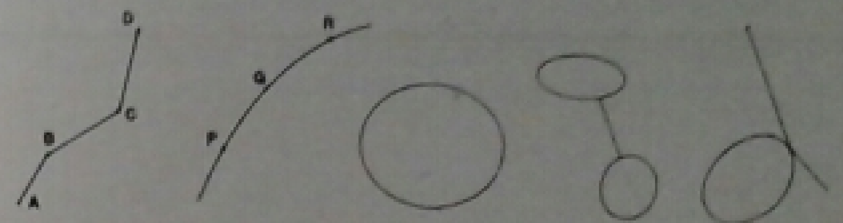


Fig. a Fig. b Fig. c Fig. d Fig. e

Um tipo importante de curva é a chamada linha curva quebrada. É a reunião de vários segmentos de retas, isto é, formado por todos os pontos de vários segmentos de retas. A Figura a representa uma linha curva quebrada. Os pontos da curva A, B, C e D estão indicadas. Também dizemos que a curva contém ou passa por êsses pontos. As Figuras de b até i também representam curvas. Na Figura b, os pontos P, Q e R estão indicados na curva. Naturalmente, pensamos na curva contendo muitos outros pontos além de P, Q e R.

Uma curva é dita curva fechada simples se puder ser representada por uma figura desenhada da maneira seguinte. O desenho começa e acaba num mesmo ponto. Além disso, nenhum ponto é percorrido duas vêzes. As Figuras c, g, h e i representam curvas fechadas simples. As outras figuras desta seção não o são. A Figura j representa duas curvas fechadas. Uma cêrca que se estende em volta de um campo sugere uma curva fechada simples.

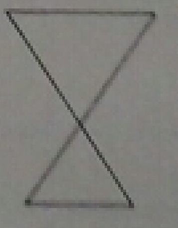


Fig. f

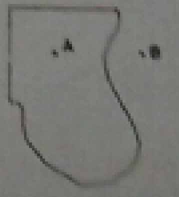


Fig. g

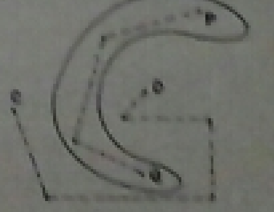


Fig. h

Os exemplos que mencionamos, incluindo aquêle do triângulo, sugerem uma propriedade muito importante das curvas simples fechadas. Cada curva fechada simples, tem um interior e um exterior no plano. Além disso, qualquer curva que contenha um ponto no interior e outro no exterior deve interceptar a curva fechada simples. Como um exemplo, considere qualquer curva que contenha A e B da Figura g e que está no plano. Também dois pontos quaisquer no interior (ou dois pontos quaisquer no exterior) podem ser unidos por meio de uma linha quebrada curva que não intercepta a curva fechada simples. A Figura h indica isto. Uma curva simples fechada é fronteira (ou contôrno) do seu interior e também do seu exterior.

Chamamos região o interior de uma curva fechada simples. Existem outros tipos de conjuntos no plano que também são regiões. Na Figura j, a porção do plano entre duas curvas fechadas simplés é chamada região. Usualmente uma região (como um conjunto de pontos) não inclue a sua fronteira.

Fig. i

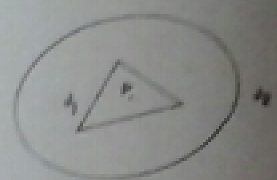


Fig. j

Considere a Figura j. A curva fechada simples (representada por) J_1 está no interior da curva simples fechada J_2. Podemos obter uma correspondência biunívoca entre J_1 e J_2 da seguinte maneira: considere um ponto P no interior de J_1. Considere o conjunto de raios de extremidade P. Cada um dêsses raios intercepta J_1 e J_2 em um único ponto. Além disso, cada ponto de J_1 e cada ponto de J_2 está num dêsses raios. Um ponto de J_1 corresponde a um ponto de J_2 se dois pontos estiverem no mesmo raio de extremidade P. Note que êste procedimento pelo uso de raios não determinaria uma correspondência biunívoca se uma das curvas simples fechadas fosse como a da Figura i.

<u>Exercícios 4-10</u>

1. Desenhe uma figura que represente duas curvas fechadas simples cuja intersecção seja apenas dois pontos. Quantas curvas fechadas simples estão representadas na sua figura?

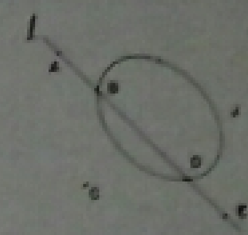
2. Na Figura j, descreva a região entre as curvas usando os têrmos intersecção, interior e exterior.

3. Desenhe dois triângulos cuja intersecção seja um lado de cada um. A reunião dos outros lados dos dois triângulos é uma curva fechada simples? Quantas curvas fechadas simples estão representadas na sua figura?

4. Num mapa do Brasil, a reunião dos limites dos Estados de São Paulo e Goiás representa uma curva fechada simples?

5. Imagine X e Y como "percevejos" que podem arrastar-se para qualquer lugar do plano. Mencione três conjuntos simples diferentes de pontos no plano cada um dos quais provendo um contôrno que separa X e Y.

6. A reta ℓ e a curva fechada simples J são mostradas na figura.



   a. O que é $J \cap \ell$?

   b. Desenhe uma figura e sombreie a intersecção do interior de J e o lado-C de ℓ

   c. Descreva por meio de raios o conjunto de pontos de ℓ que <u>não</u> estão no interior de J.

°7. Desenhe duas curvas fechadas simples, uma no interior da outra, tais que, não exista um ponto P para o qual os raios com essa extremidade estabeleçam uma correspondência biunívoca entre as duas curvas. Considere a Figura i.

°8. Desenhe duas curvas fechadas simples cujos interiores se interceptam em três regiões diferentes.

9. <u>PROBLEMA-DESAFIO</u>

Explique porque a intersecção de uma curva fechada simples e uma reta não pode conter apenas três pontos se a curva atravessa a reta quando ela a intercepta.

Capítulo 5

FATORAÇÃO E NÚMEROS PRIMOS

5-1. Números Primos

Nos capítulos anteriores estudamos algumas propriedades dos números naturais. Aqui iremos discutir como êles podem ser expressos como produtos de outros números naturais. Por exemplo:

$$6 = 2 \times 3 = 1 \times 2 \times 3 = 1 \times 3 \times 2 = 1 \times 6 = 6 \times 1.$$

$$5 = 1 \times 5 = 5 \times 1 = 5 \times 1 \times 1.$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 4 \times 3 = 1 \times 2 \times 6 = 1 \times 3 \times 4.$$

Existem outras maneiras pelas quais êstes números possam ser expressos como produtos de números naturais? Expresse os números seguintes como produtos de números naturais de várias maneiras: 15, 18, 30.

Nos produtos mencionados acima, que são iguais a 6, vemos que 1, 2, 3 e 6 dividem exatamente 6. Ou seja, se dividirmos 6 por qualquer um desses quatro números, teremos o resto zero. Da mesma forma, 1 e 5 são os únicos números naturais que dividem 5 exatamente, enquanto que 1, 2, 3, 4, 6 e 12 dividem 12 exatamente. Dois outros modos de fazer a mesma afirmação são:

1) O número 6 é divisível por 1, 2, 3 e 6

2) O número 6 é um múltiplo de 1, 2, 3 e 6

Assim, 5 é divisível por 1 e 5, ou 5 é um múltiplo de 1 e 5; também 12 é divisível por 1, 2, 3, 4, 6 e 12, ou 12 é um múltiplo de cada um dos números 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

Por outro lado, 12 não é divisível por 5, pois se dividirmos 12 por 5 acharemos resto 2. Por uma razão semelhante, 6 não é divisível por 4.

Do ponto de vista desta seção, o número 1 está numa situação particular pois, todo número natural é divisível por 1. Não é verdade que todo número natural é divisível por 2 (3 não é); anàlogamente, nem todo número natural é divisível por 23 (24 não é); nem todo número natural é divisível por 1976 (5 não é).

Todo número natural é um múltiplo de 1 como vimos. Quais são os múltiplos de 2 que são maiores que 2? Vejamos uma maneira de responder esta questão sistemàticamente: Primeiro escreva os números, por exemplo, de 1 a 30 inclusive. O primeiro múltiplo de 2 maior que dois é 4; risque o 4 e todo segundo número depois dêle. Para marcar os múltiplos escreva um 2 embaixo de cada número que você riscar. A lista então vai ser análoga à seguinte:

1	2	3	$\cancel{4}_{2}$	5	$\cancel{6}_{2}$	7	$\cancel{8}_{2}$	9	$\cancel{10}_{2}$	11	$\cancel{12}_{2}$
13	$\cancel{14}_{2}$	15	$\cancel{16}_{2}$	17	$\cancel{18}_{2}$	19	$\cancel{20}_{2}$	21	$\cancel{22}_{2}$	23	$\cancel{24}_{2}$
25	$\cancel{26}_{2}$	27	$\cancel{28}_{2}$	29	$\cancel{30}_{2}$						

Não riscamos o "2" nem escrevemos um 2 sob êle porque êle é o número cujos múltiplos estamos considerando. Os números acima que não estão riscados são 1, 2 e os números menores que 31 que não são múltiplos de 2.

Nosso segundo passo seria ir pela mesma tabela e riscar os múltiplos de 3 que são maiores que 3. Então a tabela ficaria assim:

1	2	3	$\cancel{4}_{2}$	5	$\cancel{6}_{2,3}$	7	$\cancel{8}_{2}$	$\cancel{9}_{3}$	$\cancel{10}_{2}$	11	$\cancel{12}_{2,3}$	13
$\cancel{14}_{2}$	$\cancel{15}_{3}$	$\cancel{16}_{2}$	17	$\cancel{18}_{2,3}$	19	$\cancel{20}_{2}$	$\cancel{21}_{3}$	$\cancel{22}_{2}$	23			
$\cancel{24}_{2,3}$	25	$\cancel{26}_{2}$	$\cancel{27}_{3}$	$\cancel{28}_{2}$	29	$\cancel{30}_{2,3}$						

Aqui riscamos todo terceiro número começando por 6, mas não riscamos 3 pois, êste é o número cujos múltiplos estamos considerando. (Alguns múltiplos de três já haviam sido riscados pois êles são também múltiplos de 2.) Exceto os números 1, 2 e 3, nenhum dos números não riscados são múltiplos ou de 2 ou 3.

Como exercício de classe, escreva os números de 1 a 100 inclusive. Primeiro risque todos os múltiplos de 2 e 3 exceto 2 e 3 como fizemos acima. O número quatro e todos os múltiplos de quatro já foram riscados pois qualquer múltiplo de 4 é também um múltiplo de 2. O número seguinte não riscado é 5. Assim, nosso terceiro passo visa riscar todo quinto número depois de 5 (isto é, comece por 10 e escreva 5 debaixo de cada número riscado. Para o quarto e quinto passos, da mesma maneira risque os múltiplos de 7 e 11 que forem maiores que 7 e 11. Marque os múltiplos da mesma forma anterior. Você riscou alguns números novos enquanto esteve considerando múltiplos de 11? Riscaríamos alguns números novos se considerassemos múltiplos de 12? E de 13?

Da maneira pela qual a tabela foi construida, você vê que todo número riscado é um múltiplo de um número menor diferente de 1. Êstes números chamam-se números compostos.

Definição: Um número composto é um número natural que é divisível por um número natural menor, diferente de 1.

A tabela que você construiu com números riscados é chamada "Crivo de

Erastótenes" para os primeiros 100 números. Denomina-se "crivo" porque nele você separou todos os números compostos menores de 100. Note que quando riscamos os múltiplos de 2 e 3 menores de 31, o número composto 25 ficou. Entretanto, o número 25 foi eliminado quando riscamos os múltiplos de 5 no terceiro passo. Da mesma forma o número 49 não foi riscado no Crivo de Erastótenes até que riscamos os múltiplos de 7.

Exceto o número 1, os números do Crivo de Erastótenes que não foram riscados são chamados <u>números primos.</u>

<u>Definição</u>: Um número primo é um número natural, diferente de 1, que é divisível sòmente por êle mesmo e por 1.

Em virtude do Crivo de Erastótenes eliminar os números compostos, é uma boa maneira para acharmos a lista de todos os números primos até um certo ponto. Os números compostos são riscados e os números primos permanecem. Por que os números não riscados são números primos?

O número 1 não está incluído no conjunto dos primos em parte porque êle é divisível sòmente por êle mesmo. Daremos uma razão mais forte para isto mais tarde.

<u>Exercícios 5-1</u>

1. a. Escreva os números primos menores que 100.

   b. Agora escreva os números primos menores do que 130 porém maiores que 100.

2. a. Quantos números primos são menores que 50?

   b. Quantos números primos são menores que 100?

   c. Quantos números primos são menores que 130?

Faça os problemas 3, 4 e 5 primeiro sem usar o Crivo de Erastótenes e depois use-o para conferir os resultados.

3. Escreva todos os múltiplos de 5 menores do que 61.

4. Escreva o conjunto de números menores que 50 que são múltiplos de 7.

5. Escreva o conjunto de números que são menores que 100 e que também são multíplos de 3 e 5.

6. Na tabela abaixo, os números de cima representam valores de a e os da coluna à esquerda representam valores de b. Em cada caso se a é divisível por b, escreva os valores de $\frac{a}{b}$ na coluna a e linha b. Se a não for divisível por b, escreva "não" na coluna a e linha b.

	a=12	14	17	18	20	25	27
b=1							
b=2							
b=3							
b=4							
b=5							
b=6							
b=7							

7. Expresse cada um dos números naturais seguintes como produto de dois números naturais menores ou indique que é impossível fazer isto:

a.	12	f.	11	k.	6
b.	36	g.	35	l.	41
c.	31	h.	5	m.	82
d.	7	i.	30	n.	95
e.	8	j.	42		

8. a. 24 é divisível por que números?

   b. O número 24 é um múltiplo de que números?

   c. Os conjuntos de números que você achou nas partes a e b são os mesmos? Por que?

9. Escreva 12 de tôdas as maneiras possíveis como um produto de números naturais maiores que 1.

10. Dê os pares de números primos menores que 100 cuja diferença entre si seja 2. Quantos são êles? Tais pares são chamados <u>primos gêmeos</u>

11. Expresse cada número par entre 4 e 22 como uma adição de dois números primos. (Lembre-se de que um número par é divisível por 2). Muitos matemá-

ticos acreditam que todo número par maior que 2 pode ser a soma de dois números primos mas nenhum foi capaz de demonstrar êste fato.

12. Há três números que possam ser chamados ternos primos?

13. a. Localize os números de 1 a 50 numa reta numérica.

b. Sublinhe os numerais que estão em todo segundo lugar, começando por 1.

c. Encerre num círculo os numerais dos números primos.

d. Você necessita fazer isto para algum numeral que não foi sublinhado? Caso precise, escreva todos êsses numerais.

14. Qual é a intersecção do conjunto dos números primos e o conjunto dos números ímpares menores que 30?

5-2. Fatores

A palavra "fator" é bastante usada em Matemática. Embora o têrmo possa ser nôvo para você, a idéia não é nova. Sabemos que 5 x 2 = 10. Ao invés de chamarmos um dos números de multiplicando e o outro de multiplicador, damos a ambos o mesmo nome — fator. Assim, 5 e 2 são fatores de 10; 6 e 7 são fatores de 42, pois, 6 x 7 = 42. Também, 42 = 2 x 3 x 7; portanto 2, 3 e 7 são fatores de 42.

Exemplo 1: Escreva 12 como um produto de fatores

$12 = 1 \times 12,$

ou $12 = 2 \times 6$

ou $12 = 3 \times 4$

ou $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

Quando dizemos "os fatores" queremos dizer "todos os fatores" de um número. Por exemplo, o número 6 tem quatro fatores, 1, 2, 3 e 6. O número 1 e o próprio número são fatores de um número.

Exemplo 2: Escreva o conjunto de fatores de 20.

O conjunto dos fatores de 20 é {1, 2, 4, 5, 10, 20}

A idéia de fatores está associada à multiplicação. Em símbolos matemáticos, definimos fator da seguinte maneira:

Definição: Se a, b e c são números inteiros e se ac = b, então o número a chama-se um fator de b. (Sob estas condições c é também um fator de b).

Usando os têrmos da primeira seção, dizemos que 3 é um fator de 12 porque 12 é divisível por 3. Pelos símbolos da definição, vemos que o número a é um fator de b se b for divisível por a.

Pelo mesmo motivo dizemos que a é um divisor de b. Divisor e fator são palavras sinônimas.

O número 1 tem um só fator, êle mesmo. Cada número primo tem apenas dois fatores, êle próprio e 1. Um número composto tem quantos fatores?

Considere o número 24. Êle pode ser escrito como 4 x 6. Tanto 4 como 6 são números compostos pois podem ser escritos como produtos de números naturais menores: 4 = 2 x 2 e 6 = 2 x 3. Assim,

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

Entretanto, 2 e 3 são números primos pois êles não podem ser expressos como produtos de números naturais menores. Não podemos ir mais longe neste processo. Dizemos então que 2 x 2 x 2 x 3 é uma fatoração completa de 24.

Definição: Se um número natural for escrito como um produto de números primos, êste produto é chamado uma fatoração completa do número dado.

Exemplo 1: Achar uma fatoração completa de 20.

$$20 = 4 \times 5 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$$

Aqui 4 x 5 não é uma fatoração completa de 20 pois, 4 não é um número primo; mas, 2 x 2 x 5 e $2^2 \times 5$ são fatorações completas. A fatoração completa, escrita sob a forma mais compacta, de 20 é $2^2 \times 5$.

Exemplo 2: Achar uma fatoração completa de 72.

Método 1

$72 = 8 \times 9$

$72 = (4 \times 2) \times (3 \times 3)$

$72 = (2 \times 2) \times 2 \times (3 \times 3)$

$72 = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3)$

Usando expoentes,

$72 = 2^3 \times 3^2$

Método II

Usando divisões sucessivas

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Usando expoentes,

$72 = 2^3 \times 3^2$

Poderíamos ter usado um número bem menor de passagens.

Note que em ambos os exemplos, os únicos fatores que aparecem nos últimos produtos são números primos. Nem todos os fatores de 20 e 72 (como 4) aparecem na fatoração completa final. É conveniente, mas não necessário, usar expoentes sempre que possível.

Note que $2 \times 5 \times 2$ é também uma fatoração completa de 20, mas é a mesma que $2 \times 2 \times 5$ exceto quanto à ordem dos fatores. Da mesma maneira, na fatoração de 72, $2^2 \times 3 \times 2$ é a mesma que $2^3 \times 3$ exceto quanto à ordem dos fatores. De fato, uma propriedade bastante fundamental dos números naturais é que existe sòmente u'a maneira de escrever uma fatoração completa de qualquer número natural exceto no que diz respeito à ordem dos fatores primos que aparecem. A esta propriedade dá-se o nome especial:

Unicidade da Decomposição dos Números Naturais:

Todo número natural maior que 1 pode ser decomposto em fatores primos de uma maneira única exceto quanto à ordem na qual os fatores ocorrem.

A palavra "unicidade" pode não ser familiar a alguns de vocês neste sentido; simplesmente significa que existe sòmente uma fatoração a menos da ordem dos fatores.

Aqui temos uma outra razão para excluir o 1 do conjunto dos números primos. Se chamássemos o número 1 de primo, então 5 poderia ser expresso como um produto de primos de maneiras diferentes: 5×1, $5 \times 1 \times 1$, $5 \times 1 \times 1 \times 1$, ... E aqui o produto não seria único a menos da ordem dos fatores.

Exercícios 5-2

1. Dê o conjunto dos fatores de cada um dos números seguintes:

   a. 10 b. 15 c. 9 d. 18 e. 27

   f. 24 g. 11

2. Fatore os números abaixo de tantas maneiras quantas forem possíveis, usando sòmente dois fatores de cada vez. Devido à propriedade comutativa, devemos dizer que $3 \cdot 5$ não é diferente de $5 \cdot 3$.

   a. 10 e. 24

   b. 15 f. 16

   c. 9 g. 72

   d. 100 h. 81

3. Escreva uma fatoração completa de:

   a. 10 b. 15 c. 9 d. 30 e. 45 f. 50

   g. 13

4. De acôrdo com a nossa definição de fator, zero é um fator de 6? 6 é um fator de zero? Justifique suas respostas.

5. a. Que fatores de 20 não aparecem numa fatoração completa de 20?

   b. Que fatores de 72 não aparecem numa fatoração completa de 72 ?

6. Achе uma fatoração completa de:

   a. 105 f. 345

   b. 42 g. 311

   c. 75 h. 1 000

   d. 300 i. 301

   e. 64 j. 323

Definição: Se um número inteiro é divisível por dois, êle é um número par. Se um número inteiro não é divisível por dois, êle é um número ímpar.

7. Diga se êstes números são ímpares ou pares:

a.	2 x 5	f.	3 x 2 x 6
b.	3 + 7	g.	128 - 37
c.	6 x 5 x 3	h.	3 x 3 x 7
d.	2 + 16	i.	3 . (4 + 7)
e.	7 + 6	j.	5 . (9 + 13)

8. Classifique cada um dos números seguintes como ímpares ou pares:

a.	$11_{\text{três}}$	c.	33_{cinco}
b.	12_{cinco}	d.	101_{dois}

9. A partir dos resultados do Problema 8 você diria que a divisibilidade é uma propriedade do numeral ou uma propriedade do número? Justifique sua resposta.

*10. Copie a tabela seguinte para os números naturais N e complete-a até N = 30.

N	Fatores de N	Número de Fatores	Soma dos Fatores
1	1	1	1
2	1, 2	2	3
3	1, 3	2	4
4	1, 2, 4	3	7
5	1, 5	2	6
6.	1, 2, 3, 6	4	12
7	1, 7	2	8
8	1, 2, 4, 8	4	15

a. Que números representados por N na tabela acima têm apenas dois fatores?

b. Que números N tem apenas três fatores?

c. Se $N = p^2$ (onde p é número primo), quantos fatores N tem?

d.* Se $N = pg$ (onde p e g são números primos diferentes) quantos fatores tem N? Qual é a soma de seus fatores?

e. Se $N = 2^k$ (onde k é um número natural), quantos fatores N tem?

f. Se $N = 3^k$ (onde k é um número natural), quantos fatores N tem?

g. Se $N = p^k$ (onde p é um número primo e k é um número natural), quantos fatores tem N?

h. Que números têm 2N para a soma de seus fatores? Êstes números são chamados números perfeitos. Não sabemos quantos números perfeitos existem nem se existem alguns números perfeitos ímpares.

5-3. Divisibilidade

Para achar os fatores de um número podemos sempre tentar, mas será muito mais fácil se pudermos dizer simplesmente olhando para o número se êle tem ou não um dado fator. Do Capítulo 2 ou do Crivo de Erastótenes é claro que um número escrito no sistema decimal é par se o último algarismo fôr par. Pelo menos isto é verdade para o maior Crivo que pudermos construir. Assim:

Um número natural escrito no sistema decimal é par se seu último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8. Se o último algarismo não fôr nenhum dêstes, êle é ímpar.

Suponha que queremos ver porque isto é assim. Para fazer isto, lembre-se de que maneira encontramos os múltiplos de 2, quando começamos a construir o Crivo de Erastótenes. Começavamos com o número 2 e íamos somando sempre 2. Os últimos algarismos se repetiam no padrão 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, 6, 8, 0, ... Isto continuaria não importando até onde a tabela fosse. Isto mostra que os números pares são aqueles cujo último algarismo é um dos cinco números: 2, 4, 6, 8, 0.

No Problema 4 abaixo pediremos que você comece com 5 e adicione 5 continuadamente para mostrar o seguinte:

Um número natural expresso no sistema decimal é divisível por 5 se seu último algarismo fôr 0 ou 5. Caso contrário, êle não é divisível por 5.

O que poderíamos dizer acêrca da divisibilidade por 3? Podemos dizer algo para o último algarismo? Os primeiros dez múltiplos de 3 são:

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Nesta lista aparecem como últimos algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Por outro lado, nenhum dos números seguintes é divisível por 3 muito embora seus últimos algarismos sejam os mesmos da lista anterior:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31.

Podemos ver, então, que não podemos dizer se um número é divisível por 3 sòmente olhando para o último algarismo.

Mas suponhamos que adicionemos os algarismos dos múltiplos de 3. Para 12 temos $1 + 2 = 3$; para 15 temos $1 + 5 = 6$; para 18 temos $1 + 8 = 9$. Por êste meio podemos formar a seguinte tabela:

Múltiplo de 3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39
Soma dos algarismos	0	3	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9	12

Múltiplos de 3	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72
Soma dos algarismos	6	9	12	6	9	12	6	9	12	15	9

Você pode fazer alguma afirmação que pareça ser verdadeira em relação à soma dos algarismos de todos os múltiplos de 3? Você verá que em cada caso a soma dos algarismos é divisível por 3. Além disso, se você somar os algarismos de qualquer número que não seja divisível por 3 (tome 25 onde a soma dos algarismos é 7) a soma dos algarismos também não é divisível por 3. Você percebe porque isto é verdadeiro para todos os números? Veja o Problema 3 no próximo conjunto de exercícios.

Você pode notar que tôda terceira soma de algarismos na tabela acima, é divisível por 9, e todo terceiro múltiplo de 3 é divisível por 9. Portanto temos a seguinte regra de divisibilidade por 9.

Um número é divisível por 9, se a soma de seus algarismos for divisível por 9. Caso contrário, não será divisível por 9.

Existem também critérios mais complicados de divisibilidade por 11 e 13. Isto será dado como unidade suplementar de divisibilidade.

Vamos aplicar o que aprendemos de divisibilidade em alguns exemplos:

Exemplo 1. Ache uma fatoração completa de 232. Como o número dado tem 2 como último algarismo, êle é par e tem 2 como um fator. Portanto $232 = 2 \times 116$. Mas 116 tem 2 por fator e temos $232 = 2^2 \times 58$. Então temos $232 = 2^3 \times 29$, podemos ver que 29 é um número primo olhando para nossa tabela do Crivo de Erastótenes ou experimentando os fatores primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 menores que 29. Alguns de vocês podem ser capazes de ver porque é necessário tentar sòmente 2, 3 e 5.

Uma maneira tabular para achar uma fatoração completa é a seguinte:

232	116	58	29
2	2	2	29

onde 2 é o primeiro fator e 116 é o quociente, depois 2 é um fator de 116 e 58 é o quociente, etc. Uma fatoração completa está então na segunda linha.

Exemplo 2. Ache uma fatoração completa de 573. Aqui o último algarismo é ímpar e portanto 2 não é um fator. Mas a soma dos algarismos é 15, que é divisível por 3. Portanto 3 é um fator de 573 e, dividindo, temos $573 = 3 \times 191$. Pelas nossas regras 2, 3 e 5 não são fatores de 191. Podemos verificar que 7, 11 e 13 também não são fatores e portanto 191 é um número primo. Por que não é necessário tentar alguns números primos maiores que 13? Logo, $573 = 3 \times 191$ é a fatoração completa.

Exemplo 3. Ache uma fatoração completa de 539. Nossas regras mostram que nem 2 nem 3 nem 5 são fatores. Se tentarmos 7 veremos que $539 = 7 \times 77 = 7^2 \times 11$ que é uma fatoração completa. É importante notar que as regras de divisibilidade dadas nesta seção dependem muito do fato do número estar escrito na notação decimal. Por exemplo, escrevemos o número 21 do sistema decimal como 30_{sete} no sistema de base sete. E êste número 30_{sete} não é par apesar de seu último algarismo ser zero. Entretanto, como 30_{sete} significa $(3 \times \text{sete}) + 0$, apesar de ter para último algarismo zero sabemos que é divisível por 7. Se escrevemos um número na base sete é muito fácil dizer se êle é ou não divisível por 7, simplesmente olhamos para ver se seu último algarismo é ou não zero.

A propriedade de um número ser um fator de outro não depende da maneira como êle está escrito, por exemplo, sete é sempre um fator de vinte e um, não importa como êle esteja escrito. Mas as regras de divisibilidade que demos aqui dependem do sistema de numeração no qual o número está escrito.

Exercícios 5-3

1. Ache o menor fator primo de cada um dos seguintes números:

   a. 115 b. 135 c. 321 d. 484 e. 539 f. 121

2. Ache uma fatoração completa de cada um dos números seguintes:

   a. 39 b. 60 c. 81 d. 98 e. 180 f. 258

   g. 378 h. 432 i. 576 j. 729 k. 1098 l. 2324

3. Repare na lista dos múltiplos de 3. Indo de 9 a 12, o algarismo das unida-
des decresce de 9 a 2 e o das dezenas cresce de 0 a 1; logo, a soma dos
algarismos decresce de 7 - 1, ou, de 6. Da mesma maneira, de 18 a 21, o
primeiro algarismo aumenta de 1 e o segundo decresce de 7. Isto é sempre
verdade quando o algarismo das dezenas aumenta de 1? O que acontece
de 99 a 102, de 999 até 1002, etc.? Disto você pode deduzir que para um múl
tiplo de 3, sempre é verdade que a soma dos algarismos é um múltiplo de 3?

4. Mostre que o critério de divisibilidade por 5 dado é sempre verdadeiro.

5. Faça uma lista dos múltiplos de 9 e veja se pode deduzir daí um critério de divisibilidade por 9.

6. Você pode dar o critério de divisibilidade por 6, no sistema decimal?

7. Você pode dar uma regra de divisibilidade por 15 no sistema decimal?

8. Quais dos seguintes números são divisíveis por 2?

a. 1111_{dez} b. 1111_{sete} c. 1111_{seis} d. $111_{três}$

9. Suponha um número escrito no sistema de base sete. É divisível por dez se seu último algarismo fôr zero? É divisível por três se a soma dos seus algarismos fôr divisível por três?

*10. Responda as questões acima para um sistema de numeração de base doze.

*11. Enuncie um critério de divisibilidade por 6 no sistema de numeração de base sete.

*12. Enuncie um critério de divisibilidade por 4 no sistema decimal.

5-4. <u>Máximo Divisor Comum</u>

Consideremos os números 10 e 12. Vemos que tanto 10 como 12 são números pares. Êles são ambos divisíveis por 2, ou podemos dizer que 10 e 12 são números múltiplos de 2. Devido ao fato de 2 ser um fator de 10 e também de 12, dizemos

que 2 é um "fator comum" de 10 e 12.

Todos os números inteiros são múltiplos de 1. Assim, 1 é <u>fator comum</u> dos elementos de qualquer conjunto de números inteiros. Logo, quando procuramos fatores comuns geralmente procuramos números diferentes de 1.

Que fator, além de 1, é comum a 12 e 15? Dois é fator comum? Como 15 é ímpar, 2 não é um fator de 15. Logo, é impossível 2 ser fator comum de 12 e 15. Entretanto, 12 e 15 são ambos múltiplos de 3. Portanto, 3 é um fator comum de 12 e 15.

Os números 12 e 30 possuem fatores comuns? Escrevendo o conjunto de fatores de 12 e o conjunto de fatores de 30 como mostrados à direita, vemos que existem vários fatores comuns. Os números 1, 2, 3 e 6 são os fatores comuns de 12 e 30.

Conjunto de fatores de 12 é {1, 2, 3, 4, 6, 12}
Conjunto de fatores de 30 é {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}

Os números 10 e 21 possuem fatores comuns? Escrevendo o conjunto dos fatores de 10 e o conjunto de fatores de 21, como vemos à direita, observamos que 10 e 21 não tem fatores comuns, além de 1.

Conjunto de fatores de 10 {1, 2, 5, 10}
Conjunto de fatores de 21 {1, 3, 7, 21}

Logo, vemos que dois quaisquer conjuntos de fatores de números inteiros têm o fator comum 1. Para alguns conjuntos de números inteiros existe um fator comum diferente de 1, e para alguns outros conjuntos de números inteiros existem vários fatores comuns além de 1.

O reconhecimento de fatores comuns é útil de diversos modos. Você já usou a idéia de fator comum para transformar frações em outros têrmos menores. Por exemplo, simplificando $\frac{10}{12}$ para $\frac{5}{6}$ você usa o fator comum 2 de 10 e 12.

Para $\frac{12}{30}$ podemos ver que 2 é um fator comum de 12 e 30. Dividindo ambos os têrmos por êsse fator o resultado é $\frac{6}{15}$. Entretanto, vemos que para $\frac{6}{15}$ existe um fator comum 3 de 6 e 15. Assim, $\frac{6}{15}$ pode ser escrito como $\frac{2}{5}$. É possível passar $\frac{12}{30}$ para $\frac{2}{5}$ usando um único número ao invés de 2 e 3. Alguns de vocês podem ter perguntado porque alguém escolheria 2 e 3 para simplificar $\frac{12}{30}$ quando seria muito mais rápido usar 6.

6 é um fator de 12 e 30? Voltando à lista anterior dêstes fatores, vemos que 12 e 30 têm os fatores comuns 1, 2, 3 e 6. Em que 6 difere dos outros fatores comuns? Êle é o maior dos fatores comuns de 12 e 30. Tal fator chama-se o "máximo divisor comum".