CAPÍTULO II

ESCALAS

Não se pode representar geomètricamente um objeto senão depois de ter medido tôdas as suas partes, tendo-se prèviamente escolhido a unidade de comprimento.

A razão constante que existe entre as linhas do desenho e as do objeto a representar denomina-se **escala numérica**.

As linhas do objeto e as suas correspondentes no desenho, sendo linhas homólogas, a escala numérica não é mais do que a **razão de semelhança** entre o desenho e a figura por êle representada.

Esta razão é geralmente, representada por uma fração ordinária, e para simplificar costuma-se fazer o numerador igual à unidade. Assim, a forma geralmente dada à escala é $\frac{1}{M}$.

Se a escala é dada pela fração $\frac{1}{25}$, quer isto dizer que um comprimento de um metro, no desenho, representa um comprimento de 25 metros no objeto; um comprimento de um centímetro no desenho, corresponde a um comprimento de 25 centímetros no objeto; um comprimento de uma polegada, um palmo, uma vara, no desenho, tem no objeto um comprimento homólogo de 25 polegadas, 25 palmos, 25 varas e assim sucessivamente.

Se a escala é expressa por uma fração decimal 0,04, dá-se-lhe a forma de fração ordinária, ou $\frac{4}{100}$; isto é, 4 metros no desenho correspondem a 100 metros da figura a representar, ou 4 centímetros do desenho correspondem a 100 centímetros da figura.

Para simplificar a escala $\frac{4}{100}$ dividem-se ambos os termos por 4 o que dá $\frac{1}{25}$.

Um comprimento qualquer tomado no desenho, denomina-se **distância gráfica** e o seu homólogo na figura **distância natural**.

A razão entre a distância gráfica e a distância natural é a **escala**.

Chamando **d** a distância gráfica e D a distância natural, tem-se

$$\frac{\mathbf{d}}{D} = \frac{1}{M} \ (1) \text{ donde } \mathbf{d} = \frac{D}{M} \text{ ou } \mathbf{d} = D \times \frac{1}{M} \ (2) \text{ e}$$

$$D = \mathbf{d} \times M \ (3) \text{ e ainda } M = \frac{D}{\mathbf{d}} \ (4)$$

A igualdade (2) indica que **a distância gráfica é igual à distância natural multiplicada pela escala**.

A igualdade (3) indica que **a distância natural é igual ao produto da distância gráfica pelo denominador da escala**.

Da igualdade (4) se deduz que **o denominador da escala é igual ao quociente da divisão da distância natural pela distância gráfica**.

A escala sendo representada pela fração $\frac{1}{M}$, para a determinar, conhecendo os máximos comprimentos gráfico e natural correspondentes, basta calcular M pela relação (4).

Assim, se tivermos de desenhar uma figura, cuja maior dimensão seja 8 metros, em um papel, no qual se possa dispôr para o desenho de um comprimento máximo de 0m,40, teremos pela relação

$$M = \frac{8}{0{,}40} = \frac{800}{40} = 20, \text{ de onde a escala é igual a } \frac{1}{20}.$$

A relação (2) permite determinar as dimensões do papel a empregar, quando se conhece a maior dimensão da figura e a escala.

Assim, se se tem de determinar as dimensões do papel em que devemos desenhar uma figura dada, cujas máximas dimensões no sentido do comprimento e da largura sejam 15 metros e

8 metros, sendo $\frac{1}{25}$ a escala, tem-se $\mathbf{d} = \frac{15}{25} = 0{,}6$ e $\mathbf{d} = \frac{8}{25} = 0{,}32$, o que quer dizer que o papel precisa ter 0,6m por 0,32m, devendo ainda adicionar-se as margens necessárias ao desenho.

Quando em um desenho não está indicada a escala na qual foi construído, é possível determiná-la quando se sabe qual a distância gráfica correspondente a um certo comprimento natural L, que se conhece; basta para isso determinar o denominador M da escala pela relação (4).

Se o comprimento natural é de 1,50m e o comprimento gráfico correspondente é de 0,03m tem-se: $M = \frac{1{,}50}{0{,}03} = 50$, o que dá para escala do desenho $\frac{1}{50}$.

Por extensão chama-se **escala gráfica** a uma figura geométrica por meio da qual se pode determinar imediatamente a distância gráfica, conhecendo-se a distância natural e recìprocamente.

Título da escala é a fração $\frac{1}{M}$, que exprime a razão entre uma linha gráfica e uma linha natural.

O comprimento que no desenho se toma para representar a unidade de comprimento escolhida é a **divisão principal** ou a **unidade da escala**.

Se $\frac{1}{M}$ é o título de uma escala, obtém-se a divisão principal procurando o quociente da divisão entre 1 e M.

Êste quociente é, pois, uma fração decimal da unidade escolhida para a medida das linhas naturais.

Assim, se $\frac{1}{200}$ é o título de uma escala, a divisão principal ou a unidade da escala é o quociente da divisão de 1 por 200 ou 0,005.

Isto é, 5 milímetros quando se empregar o metro para medir as linhas da figura, ou 5 centìmetros, ou 5 decímetros, quando se empregar o decímetro, o hectômetro ou mede 5 milésimos do braço, da vara, quando a unidade adotada fôr a braça ou a vara.

Quando não é designada a espécie da unidade escolhida para a medida das linhas naturais, subentende-se que ela é o metro.

A escolha de uma escala é subordinada às dimensões do papel em que se tem de desenhar e aos detalhes da figura que se tem de representar gràficamente.

A escala escolhida deve ser tal, que os erros que se cometam na medida das linhas naturais, não se tornem apreciáveis no desenho.

A experiência mostra que o **êrro ou tolerância gráfica**, isto é, o limite máximo dos comprimentos que se podem apreciar sôbre o papel, quer a ôlho nú, quer por meio do compasso, é de um quinto de milímetro ou 0,0002m.

Pode-se, pois, achar a expressão geral do êrro que se pode cometer na medida das linhas naturais; para isso basta dividir um quinto de milímetro pela expressão geral da escala $\frac{1}{M}$, donde

$$\frac{0,001}{5} : \frac{1}{M} = \frac{1}{5000} \times \frac{1}{M} = \frac{M}{5000},$$

Portanto, se em uma escala qualquer $\frac{1}{M}$ pode-se cometer o êrro gráfico igual ou inferior a 0,0002, na medida das linhas naturais pode-se cometer o êrro igual ou inferior a $\frac{M}{5000}$.

Assim para a escala $\frac{1}{250}$ a quantidade que se pode desprezar na medida das linhas naturais será

$$\frac{250}{5000} = \frac{25}{500} = \frac{1}{20} = 0{,}05m$$

As escalas gráficas se dividem em: **ordinárias** ou **simples** e **decimais** ou **de transversais**.

65 ***Construir a escala ordinária ou simples para um título dado.***

$\frac{1}{50}$ título dado, fig. 150.

1 — Determine-se a divisão principal ou a unidade da escala; para o título dado esta divisão é de 2 centímetros.

2 — Trace-se uma reta indefinida e sôbre ela marque-se, a partir de um ponto arbitrário A, sucessivamente para a direita, os comprimentos AB, BC, CD, . . . iguais, cada um, à divisão principal 2 centímetros.

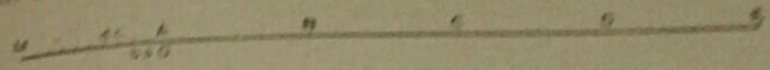


Fig. 150

3 — Para a esquerda do ponto A marque-se sòmente uma vez o comprimento AM, também igual a 2 centímetros.

4 — A **graduação** ou **numeração** da escala começa no ponto A, no qual se coloca, pois, um zero; no ponto B, imediatamente seguinte ao zero, se coloca o número 1, no ponto C, segundo ponto seguinte ao zero, se escreve o número 2 e assim seguidamente.

5 — Para a esquerda, havendo sòmente um ponto M, seguinte ao zero, se coloca neste ponto o número 1.

6 — Divida-se o comprimento AM em 10 partes, a fim de ter as subdivisões da unidade principal; a quinta divisão se assinala com um traço mais longo; o comprimento AM assim dividido, denomina-se **talão da escala**.

7 — Os comprimentos 0 a 1, 1 a 2, 2 a 3, . . . , representam os metros da escala, e as divisões **Oa, ab, bc,** . . . , do talão, representarão os decímetros.

8 — Para ter os centímetros da escala, tome-se à esquerda de M um comprimento igual a **Oa** e divida-se êsse comprimento em 10 partes iguais; cada uma destas divisões será igual a 2 decimilímetros e representarão os centímetros da escala. Como já vimos, que 2 decimilímetros é a menor quantidade gráfica apreciável, conclui-se que as frações inferiores a um centímetro não podem ser avaliadas nesta escala.

Pode-se dar à escala a forma de um retângulo, como indica a fig. 151.

É sempre possível, portanto, em uma escala dada, saber qual é a fração da unidade natural, que deixa de ser apreciada na escala gráfica.

Geralmente costuma construir-se o talão indicando apenas os décimos da unidade, sendo as frações inferiores a um décimo, apreciadas a ôlho.

Se a divisão principal fôr muito pequena para se desenhar a escala, torna-se o comprimento dela duas, três, quatro... dez vezes maior, até que se obtenha uma grandeza conveniente à cons-

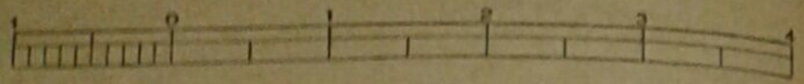


Fig. 151

trução da escala e neste caso indicar-se-á por meio da numeração ou da graduação, o número de unidades contidas no comprimento tomado para o traçado da escala.

Assim, por exemplo, querendo construir-se uma escala cujo título seja $\frac{1}{1000}$ verifica-se que a divisão principal, que neste caso é de 1 milímetro, tem um comprimento muito pequeno.

Multiplica-se esta divisão principal por um número qualquer, seja por 20; neste caso os comprimentos iguais AB, BC, CD,..., fig. 152, terão 20 milímetros cada um e pela graduação 20, 40,

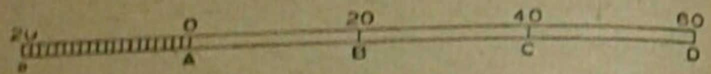


Fig. 152

60,..., indica-se que eles contêm cada um 20 unidades, cuja grandeza de cada uma se acha representada nas divisões do talão AM.

Geralmente costuma tornar-se a divisão principal um múltiplo de 10, de 100, de 1000,..., para que os comprimentos AB, BC, CD,..., representem um decâmetro, um hectômetro, um quilômetro, ...

66 Construção gráfica para ter as divisões do talão.

1 — Seja $\frac{1}{20}$ o título da escala; a divisão principal será de 5 centímetros.

2 — Marque-se em uma tira de papel um comprimento AB igual a 5 centímetros.

3 — Leve-se essa tira sôbre o triângulo, fig. 153, e corra-se horizontalmente a tira, fazendo coincidir os pontos A e B com as linhas extremas.

4 — Nessa posição, marquem-se os pontos 0, 1, 2, 3, 4,...: será cada uma dessas divisões um decímetro da escala.

5 — Se em uma outra escala a divisão principal fôr, por exemplo, de 0,27m proceder-se-á do mesmo modo.

6 — A fig. 153 dá, portanto, a divisão dos **talões** de diferentes escalas.

7 — Para os centímetros da escala tem-se na fig. 154 um triângulo semelhante ao precedente.

8 — A construção do triângulo da fig. 153 é a seguinte: tome-se uma base igual a 10 centímetros, por exemplo.

9 — Trace-se uma altura de comprimento qualquer, 20 centímetros por exemplo.

10 — Divida-se a base em 10 partes iguais e tracem-se as retas convergentes para F.

11 — Para traçar as horizontais 0, 8, 7, 6,..., calculem-se as alturas FH, FL..., pela fórmula $x = \frac{B'h}{B}$ em que **B** é a base constante 10 centímetros, B' o número de centímetros da horizontal que se quer traçar e **h** a altura constante 20 centímetros; convém tomar **h** múltiplo de B.

12 — Esta fórmula resulta da proporção $\frac{B}{B'} = \frac{h}{x}$ que representa a proporção seguinte de geometria: as bases de triângulos semelhantes são proporcionais às suas alturas.

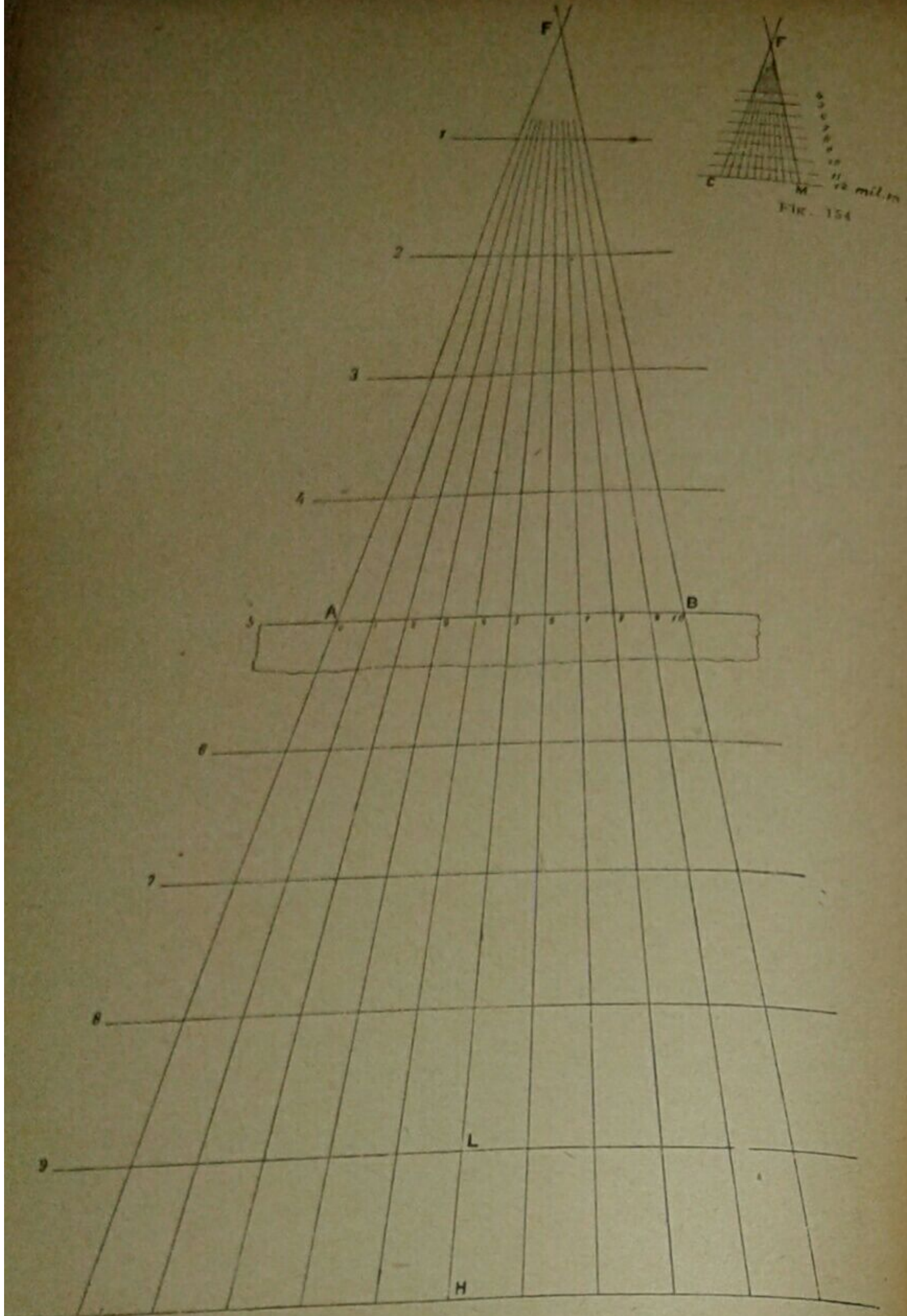


Fig. 153

Fig. 154

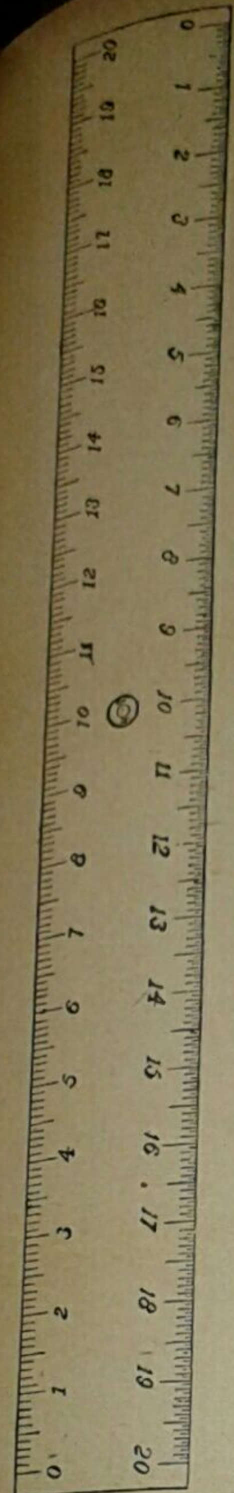


Fig. 155

67 Uso da escala ordinária ou simples

1 — Os comprimentos AB, BC, CD, . . . da escala, fig. 150, representando, como já vimos, os metros, e as divisões do talão os decímetros, para ter-se um comprimento de 3,3m leva-se uma ponta do compasso ao ponto **D** e a outra ao ponto **c** do talão, no comprimento. Dc = DA + Ac; tem-se em DA três metros e em Ac três divisões do talão ou 3 decímetros.

2 — Se no comprimento a avaliar houvesse ainda a tomar 5 centímetros, isto é, se fosse 3,35m, bastaria abrir o compasso de mais uma quantidade igual à metade da divisão **cd** do talão.

3 — Se o comprimento a avaliar fôr 3,33m tomam-se os 3,3m, como foi indicado acima, e avaliam-se os centímetros a ôlho procurando tomar 3 décimos de uma divisão do talão.

DUPLO DECÍMETRO

O duplo decímetro, fig. 155, é uma régua, geralmente de madeira, de marfim ou de metal, que tem dois decímetros de comprimento; de um lado cada decímetro é dividido em centímetros e cada centímetro em milímetros; o outro lado tem esta mesma divisão sendo ainda os milímetros divididos ao meio.

Um pequeno botão colocado ao meio da régua permite manobrá-la com facilidade.

Esta régua é empregada como escala ordinária ou simples; serve, pois, para determinar a medida de um comprimento.

Pode servir também como esquadro, porque as divisões de um e outro lado, quando o instrumento é bom acham-se sôbre uma perpendicular comum a êsses lados.

68 Dada uma escala gráfica simples, determinar-lhe o título.

Sendo o título da escala a fração $\frac{1}{M}$ e sendo $\frac{1}{D} = \frac{1}{M}$ basta, para ter o título, procurar a razão entre o número que mede a distância gráfica representada pela divisão principal e o número de unidades naturais a que ela corresponde.

Seja a escala dada pela fig. 156.

1 — A numeração da escala está indicando que cada um dos comprimentos (0-1), (1-2), (2-3)..., representa um metro.

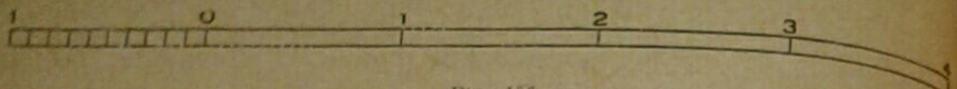


Fig. 156

2 — Determine-se, com o duplo decímetro, o número de milímetros contidos na divisão principal (0-1); para a escala em questão, encontram-se 0,025m.

3 — E como 0,025m corresponde a um metro, tem-se que o título é dado pela razão:

$$\frac{1}{D} = \frac{0{,}025\text{m}}{1\text{m}} = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40}$$

4 — Pràticamente é preferível determinar o denominador M pela relação $M = \frac{D}{d}$ de onde $M = \frac{1}{0{,}025} = \frac{1000}{25} = 40.$

Seja a escala dada pela fig. 157.

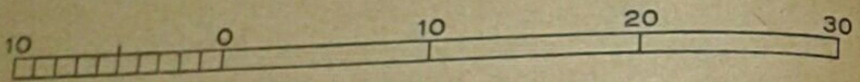


Fig. 157

1 — O comprimento que representa a divisão principal tem 0,025m.

2 — A numeração indica que êsse comprimento gráfico corresponde a 10 metros.

3 — O título será, pos, $\frac{0{,}025}{10} = \frac{25}{1000} = \frac{1}{400}$.

69 Construção da escala de transversais.

Título dado $\frac{1}{2500}$, fig. 158.

1 — Determine-se a divisão principal, o que dá 0,0004m; multiplicando-a por 100, a fim de obter uma grandeza conveniente à construção da escala, obtém-se 0,04m para representar 100 metros.

2 — Sôbre uma reta AE, tome-se um comprimento AB e, em seguida, divida-se êste comprimento em 10 partes iguais; AB representando 100 metros, cada divisão de AB representará 10 metros.

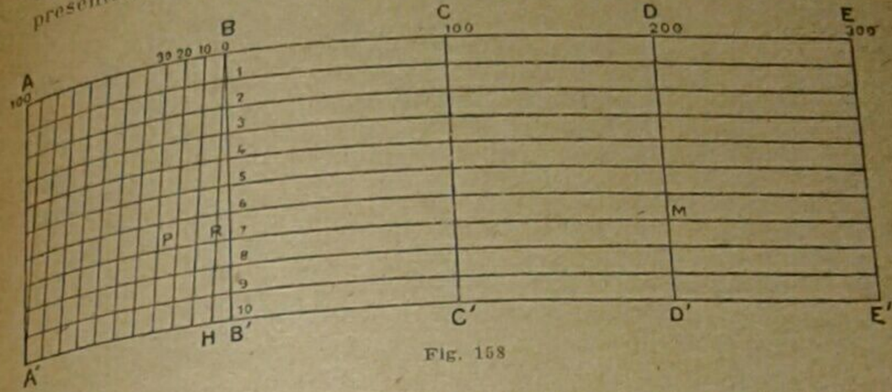


Fig. 158

3 — Numerem-se as divisões de AB sucessivamente de 0 até 100, de 10 em 10 a partir de B para A.

4 — À direita de B tomem-se seguidamente comprimentos BC, CD,..., iguais a AB, o número de vezes que fôr conveniente; numerem-se essas novas divisões pelos números 100, 200, 300,...,

5 — Pelos pontos A, B, C, D,..., tracem-se à reta AE as perpendiculares AA', BB', CC'...

6 — Sôbre a perpendicular BB', marquem-se, a partir de B, dez comprimentos arbitrários iguais entre si e pelos pontos de divisão 1, 2, 3, 4,..., tirem-se paralelas a AE.

7 — Na última paralela B'E', tome-se para a esquerda de B' um comprimento B'H igual a um décimo de AB; ligue-se o ponto H a B e pelos outros pontos de divisão de AB tracem-se paralelas a HB; o retângulo ABB'A' forma assim tracejado o talão da escala.

8 — As centenas de metros são representadas pelas divisões de BE, as dezenas de metros pelas divisões de AB e os nove primeiros múltiplos do metro pelas partes das paralelas a AE, compreendidas no triângulo B'BH.

9 — A porção R7, por exemplo, da sétima paralela corresponde a 7 décimos de uma das divisões de AB ou 7 metros; com efeito, os triângulos semelhantes BB'H e B7R dão:

$\frac{B7}{B'B} = \frac{R7}{B'H}$ e sendo B7, por construção, 7 décimos de BB', será R7 também 7 décimos de B'H ou 7 metros, visto que B'H contém 10m.

10 — Se se quer saber qual o comprimento correspondente a 237 metros, leva-se uma das pontas do compasso sôbre a interseção P da paralela a BB', que corresponde à divisão 30 de AB, com a paralela a AE, que passa pela divisão 7 de BB', e leva-se a outra ponta do compasso sôbre a paralela a BB', assinalada pela divisão 200; no comprimento PM = PR + R7 + 7M tem-se em 7M duzentos metros, em PR trinta metros e o segmento R7 dá os 7 metros restantes.

Observação — Se as divisões BC, CD,. . ., da escala, representarem um metro, as divisões de AB serão os decímetros, e os centímetros serão dados pelas porções das paralelas compreendidas no triângulo BB'H. Em geral, as divisões de AB são sempre os décimos do comprimento representado em BC, e as partes das paralelas compreendidas no triângulo BB'H são os décimos dos comprimentos representados nas divisões de AB, ou os centésimos de BC.

Pode-se também achar os milímetros da divisão principal, para isso basta traçar 100 paralelas equidistantes à reta AE; neste caso, BB' fica dividida em 100 partes; as porções das paralelas compreendidas no triângulo BB'H seriam os centésimos das divisões de AB, ou os milésimos de BC. Seria preciso, porém, neste caso dar ao retângulo AA'BB' uma grande altura, o que tornaria a escala inconveniente.

CAPÍTULO III

PROBLEMAS DE GEOMETRIA

LINHA RETA

70 Por dois pontos dados traçar uma linha reta.

P e Q pontos dados, fig. 159.

1 — Coloque-se a aresta da régua ou do esquadro passando a distâncias iguais e muito pequenas dos pontos dados P e Q.

2 — Com o lapis, ou com o tira-linhas, ou com o giz, se se desenha no quadro preto, mova-se a mão apoiando, sempre do mesmo modo, sôbre a parte lateral da régua ou do esquadro, o

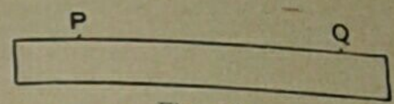


Fig. 159

instrumento e fazendo-o escorregar tão perto quanto possível da aresta que assenta sôbre o papel ou sôbre o quadro negro.

Observação — A exata coincidência da ponta do instrumento que risca com a aresta da régua é impossível; por isso as distâncias muito pequenas que ficam entre os pontos dados e essa aresta são necessárias para que se possa dirigir o instrumento de modo que a reta traçada passe exatamente pelos pontos dados.

Entretanto, diz-se para abreviar, que para traçar uma reta passando por um ponto ou por dois pontos dados, faz-se passar a aresta da régua por êsses pontos.

Só a prática pode ensinar com vantagem o que há de perfeito neste traçado.

71 Descrever um arco de circunferência sendo dados o centro e o raio.

N e R centro e raio dados, fig. 160.

1 — Dê-se ao compasso uma abertura igual ao raio R.

2 — Firme-se a ponta sêca no centro N.

3 — Tome-se o compasso pela parte superior e imprima-se-lhe um movimento suave de rotação, apoiando a outra ponta no

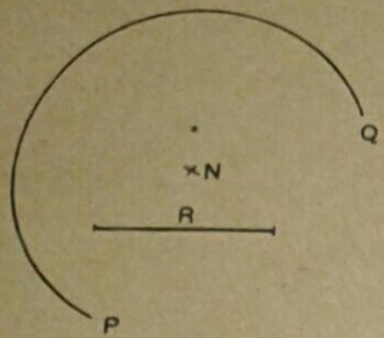


Fig. 160

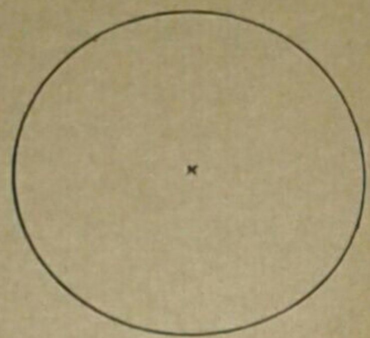


Fig. 161

papel, levemente por seu próprio pêso. Por êste movimento pode dar-se ao arco a extensão que se quiser, PQ por exemplo.

Observação — Se se quiser descrever uma circunferência, deve continuar-se o movimento dado ao compasso até que a ponta movel volte ao ponto de partida, fig. 161.

Se o centro da circunferência não é dado, convém marcá-lo primeiramente; nunca se traça uma circunferênca sem que se lhe tenha assinalado o centro.

72 Levantar uma perpendicular ao meio de um segmento de reta.

KL segmento dado, fig. 162.

1 — Dos extremos K e L, como centros, e com um raio maior que a metade de KL, descrevam-se dois arcos de circunferência, que se cortem, em S e T.

2 — A reta ST resolve o problema.

Este problema é sempre possível e determinado. A perpendicular ao meio de um segmento de reta é a **mediatriz** dêsse segmento.

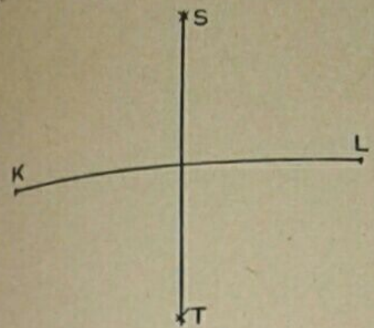


Fig. 162

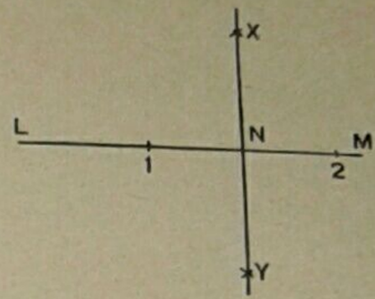


Fig. 163

73 Por um ponto tomado numa reta levantar uma perpendicular a essa reta.

1.ª construção:

LM e N reta e ponto dados, fig. 163.

1 — Do ponto N marque-se para a direita e para a esquerda os pontos 1 e 2, equidistantes de N.

2 — Trace-se uma perpendicular ao meio de 1-2, (problema anterior); a reta XY resolve o problema.

Este problema é sempre possível e determinado.

2.ª construção:

RS e T reta e ponto dados, fig. 164.

1 — Tome-se um ponto qualquer V fora de RS.

2 — De V, como centro e com raio VT, descreva-se uma circunferência, que corte RS, em U.

3 — Trace-se o diâmetro UVP.

4 — Trace-se PN, que resolve o problema.

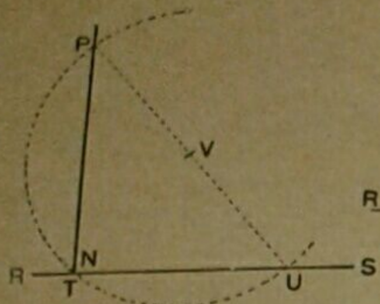


Fig. 164

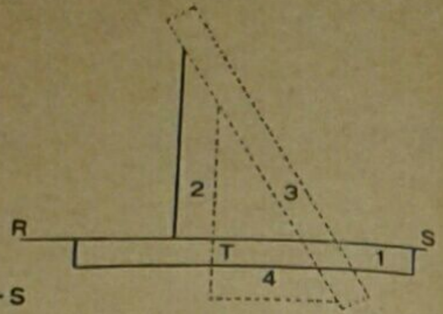


Fig. 165

3.ª construção:

RS e T reta e ponto dados, fig. 165.

1 — Coloque-se a régua coincidindo com RS. Posição 1.

2 — Fixando-a nessa posição, coloque-se o esquadro na posição 2.

3 — Firmando o esquadro em 2, coloque-se a régua contra a hipotenusa. Posição 3.

4 — Firmando a régua em 3, faça-se escorregar o esquadro até a posição 4 em que o lado perpendicular a RS passa pelo ponto dado.

Observação — Com dois esquadros a construção é a mesma, servindo um deles como régua, fig. 166.

Pode-se também com dois esquadros, proceder do seguinte modo:

RS e T reta e ponto dados, fig. 167.

1 — Faça-se coincidir um dos lados de um qualquer dos esquadros com a reta dada. Posição 1.

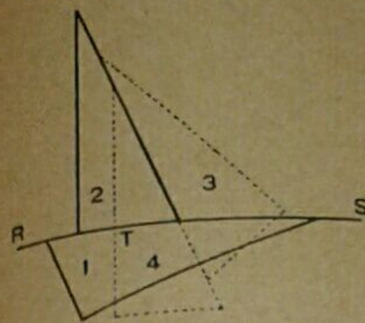


Fig. 166

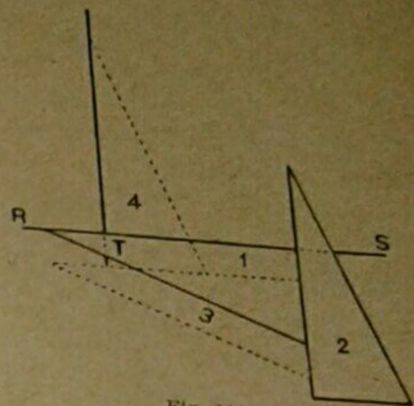


Fig. 167

2 — Firmando-o nessa posição, coloque-se o outro esquadro na posição 2.

3 — Firmando em 2, faça-se escorregar o outro até a posição 3, abaixo de RS.

4 — Firmando em 3, coloque-se 2 sôbre 3 e faça-se-o escorregar até a posição 4, em que o lado perpendicular a RS passa por T.

Ainda se pode com dois esquadros ou com uma régua e um esquadro proceder como se segue, sendo esta a mais simples construção; ela permite traçar a perpendicular pela hipotenusa do esquadro. (Veja-se também problema 54).

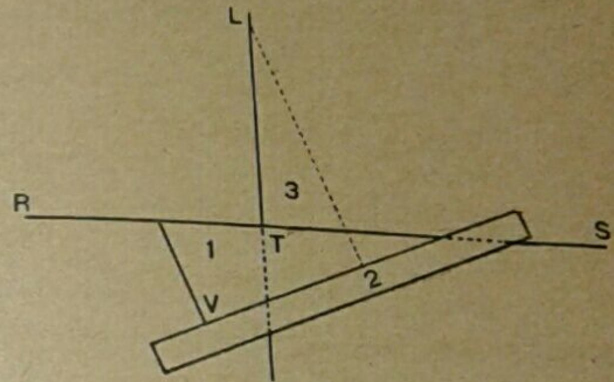


Fig. 168

RS e T reta e ponto dados, fig. 168.

1 — Faça-se coincidir a hipotenusa do esquadro com a reta dada. Posição 1.

2 — Firmando o esquadro nessa posição, coloque-se o outro esquadro ou a régua na posição 2.

3 — Firmando a régua em 2, dê-se ao esquadro uma rotação em tôrno do vértice V do ângulo reto e faça-se com que êle, escorregando sôbre o catêto, que não estava juxtaposto à régua, venha a passar a sua hipotenusa pelo ponto dado T. Posição 3; TL é a perpendicular pedida.

Na construção precedente foi a hipotenusa do esquadro que coincidiu com a reta dada; pode-se executar a mesma construção fazendo coincidir um catêto do esquadro com a reta dada.

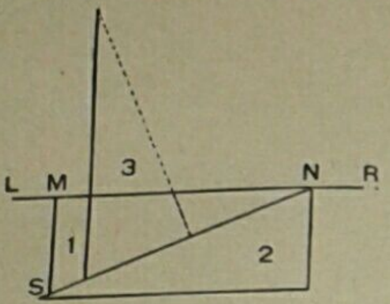


Fig. 169

1 — Faça-se coincidir o catêto MN, fig. 169, do esquadro com a reta dada LR.

2 — Fixe-se o esquadro na posição 1.

3 — Contra a hipotenusa NS da posição 1, coloque-se um esquadro, ajustado pela hipotenusa. Posição 2.

4 — Firmando o esquadro na posição 2, desloque-se o esquadro da posição 1, para colocar na posição 3 em que um de seus catêtos deve correr ao longo da hipotenusa NS da posição 2.

5 — A hipotenusa NS dá a direção da perpendicular à reta dada LR (veja-se problema 54, observação, fig. 115).

4.ª construção, com o transferidor:

NS e O reta e ponto dados, fig. 170.

1 — Faça-se coincidir a linha de fé com a reta dada, de modo que o centro do transferidor fique no ponto O.

2 — Marque-se a divisão 90º.

3 — A reta traçada por O e pela divisão 90º é a perpendicular pedida.

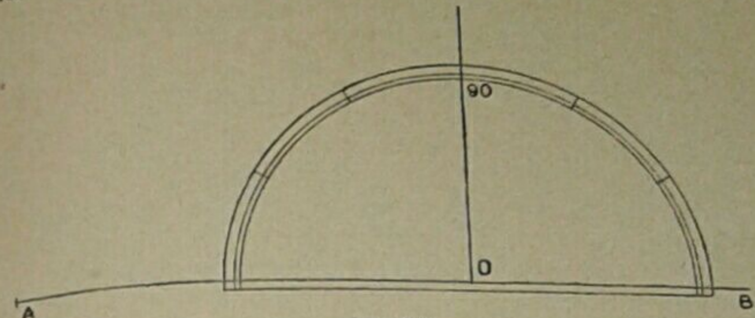


Fig. 170

74 De um ponto dado fora de uma reta baixar uma perpendicular a essa reta.

1.ª construção:

PQ e N reta e ponto dados, fig. 171.

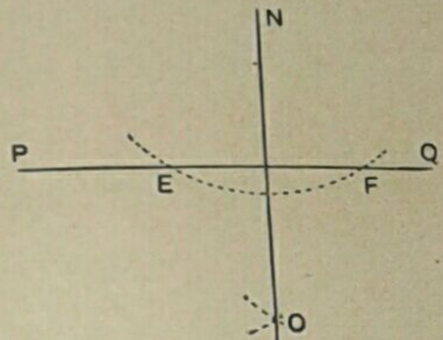


Fig. 171

1 — Do ponto N, como centro e com um raio que corte PQ, descreva-se o arco EF.

2 — Levante-se uma perpendicular ao meio de EF, problema 72. NO é a perpendicular pedida.

2.ª construção:

PQ e N reta e ponto dados, fig. 172.

1 — Por N tire-se uma reta inclinada qualquer NS.

2 — Sôbre NS, como diâmetro, descreva-se uma semi-circunferência, que corte PQ, em M.

3 — Trace-se NM, que resolve o problema.

3.ª construção, com os esquadros:

1 — O jogo dos esquadros é nesta construção exatamente o mesmo que no problema 73, devendo, porém, a posição 2 do esquadro, fig. 165, passar pelo ponto dado fora da reta.

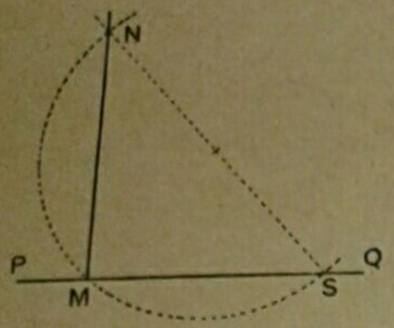


Fig. 172

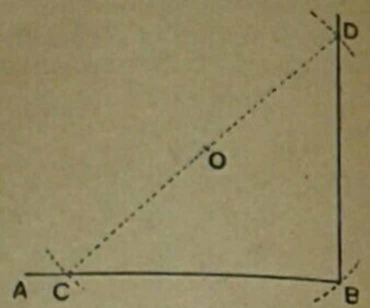


Fig. 173

75 Levantar uma perpendicular pela origem de uma semi-reta.

1.ª construção:

BA semi-reta dada, fig. 173.

1 — De um ponto qualquer O, como centro e com raio OB, descreva-se o arco DBC, que corte BA, em C.

2 — Ligue-se O a C e prolongue-se até encontrar em D o arco descrito.

3 — Trace-se DB, que resolve o problema.

2.ª construção:

BA, semi-reta dada, fig. 174.

1 — Da origem B, como centro, e com um raio qualquer, descreva-se um arco que corte a semi-reta em C.

2 — Marque-se no arco a grandeza do raio de C para D, e em seguida, de D para E.

3 — Dos pontos D e E, como centros, e com um raio maior que a metade de DE, descrevam-se os arcos que se cortem, em F.

4 — Trace-se BF, que resolve o problema.

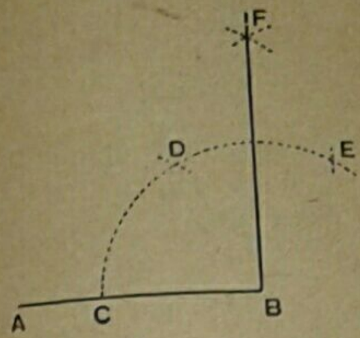


Fig. 174

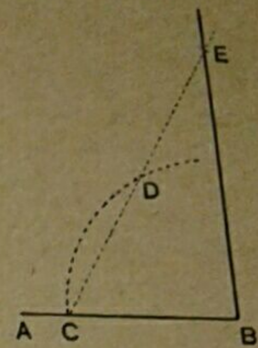


Fig. 175

3.ª construção:

BA, semi-reta dada, fig. 175.

1 — Da origem B, como centro e com um raio qualquer, descreva-se um arco que corte a semi-reta em C.

2 — Marque-se nele a grandeza do raio, de C para D.

3 — Trace-se a reta CD e nela marque-se, a partir de D, um comprimento DE igual a CD.

4 — A reta BE resolve o problema.

4.ª construção, com a régua e o esquadro:

MN semi-reta dada, fig. 176.

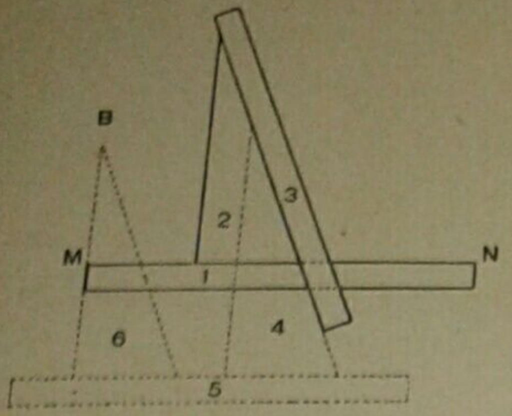


Fig. 176

1 — Coloque-se a régua coincidindo com MN. Posição 1.

2 — Fixando-a nessa posição, coloque-se o esquadro na posição 2.

3 — Firmando em 2, coloque-se a régua contra a hipotenusa. Posição 3.

4 — Firmando em 3, faça-se escorregar o esquadro até à posição 4.

5 — Firmando em 4, coloque-se a regua em 5, ajustada à posição 4.

6 — Fixando a régua em 5, mova-se o esquadro até que o lado perpendicular a MN passe pela origem M. Posição 6.

7 — A reta traçada por êsse lado é a perpendicular pedida.

76 Tirar uma paralela a uma reta dada a uma distância dada.

1.ª construção:

JK e N reta e distância dadas, fig. 177.

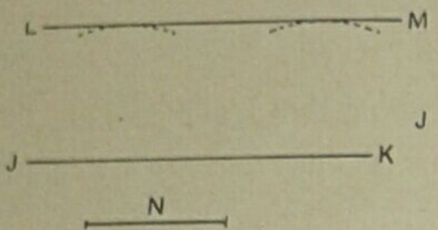


Fig. 177

1 — De dois pontos quaisquer da reta dada, como centros, e com um raio igual a N, tracem-se para o mesmo lado de JK dois arcos.

2 — Trace-se LM tangente a esses arcos: LM é a paralela pedida.

2.ª construção:

JK e M reta e distância dadas, fig. 178.

1 — De um ponto qualquer C de JK como centro, e com raio M, descreva-se um arco.

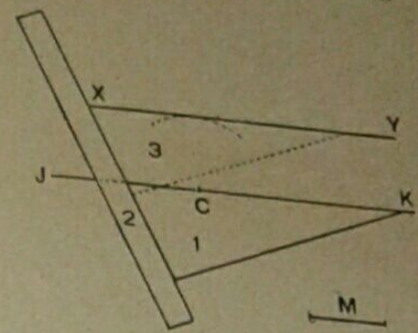


Fig. 178

2 — Faça-se coincidir um dos lados do esquadro com JK. Posição 1.

3 — Firmando-o nessa posição, coloque-se a régua na posição 2.

4 — Firmando a régua em 2, faça-se escorregar o esquadro até a posição 3 em que o lado que coincidira com JK seja tangente ao arco.

5 — A reta XY, traçada por êsse lado, resolve o problema.

77 Traçar por um ponto dado uma reta paralela a outra reta dada.

1.ª construção:

GH e I reta e ponto dados, fig. 179.

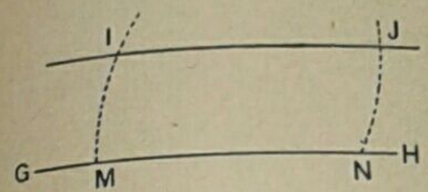


Fig. 179

1 — Tome-se um ponto qualquer N sôbre GH.

2 — De N, como centro, e com raio NI, descreva-se o arco MI.

3 — De I, como centro, e com o mesmo raio descreva-se um arco indefinido.

4 — Marque-se a corda MI em NJ e trace-se IJ que será a paralela pedida.

2.ª construção:

MN e O reta e ponto dados, fig. 180.

1 — Tome-se um ponto qualquer P sôbre MN.

2 — De P, como centro, e com raio PQ, descreva-se o arco OQ.

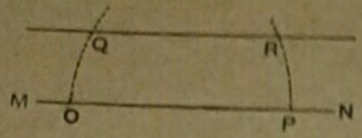


Fig. 180

3 — De O, como centro, e com o mesmo raio, trace-se um arco indefinido.

4 — Marque-se a corda OQ em PR.

5 — A reta QR resolve o problema.

3.ª construção:

TV e O reta e ponto dados, fig. 181.

1 — De um ponto qualquer X de TV, como centro, e com raio XO, descreva-se uma semi-circunferência.

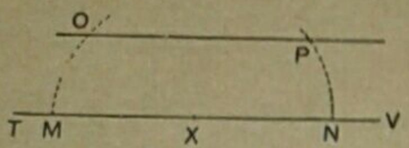


Fig. 181

2 — Marque-se a corda OM em NP e trace-se OP, que resolve o problema.

Observação. — É necessário que o ponto X não seja o pé da perpendicular abaixada de O sôbre TV.

4.ª construção:

TV e O reta e pontos dados, fig. 182.

1 — Tome-se um ponto qualquer X sôbre TV.

2 — Trace-se OX.

3 — Marque-se o meio D de OX e una-se este ponto a um outro qualquer ponto N de TV.

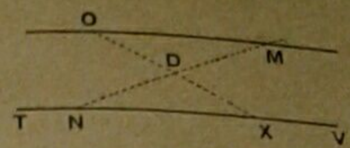


Fig. 182

4 — Prolongue-se ND e marque-se DM igual a DN.

5 — Trace-se OM, que resolve o problema.

5.ª construção, com régua e esquadro:

MN e O reta e ponto dados, fig. 183.

1 — Coloque-se o esquadro coincidindo com a reta dada, posição 1.

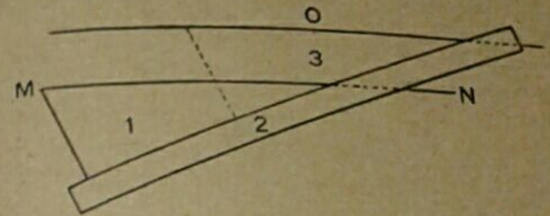


Fig. 183

2 — Fixando o esquadro nessa posição coloque-se a régua na posição 2.

3 — Firmando a régua, faça-se escorregar o esquadro até a posição 3, em que o lado que coincidia com MN passe pelo ponto dado O.

Observação — Com dois esquadros a construção é a mesma; um deles servirá então de régua.

78 Dividir um segmento de reta em um número determinado de partes iguais.

1.º caso:

Dividir em 2^n partes iguais.

1 — Para dividir em duas partes emprega-se a construção do problema 72.

2 — Para dividir em 4, 8, 16, . . ., partes iguais divida-se o comprimento dado em duas partes, depois cada uma das partes obtidas, novamente divida-se em duas partes e assim sucessivamente até a divisão que se quiser.

2.º caso:

Dividir em um número qualquer de partes iguais:

1.ª construção:

XY segmento dado, fig. 184.

1 — De um dos extremos X do segmento dado como origem, trace-se uma semi-reta formando com XY um ângulo agudo.

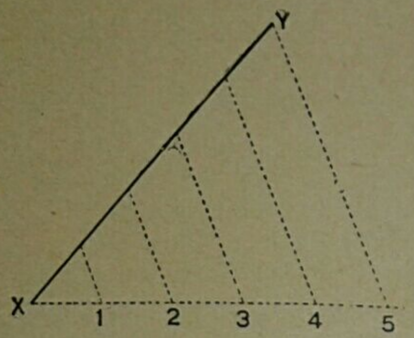


Fig. 184

2 — Marque-se a partir de X com uma abertura de compasso arbitrária um número de divisões igual àquele em que se quer dividir XY.

3 — Ligue-se o último ponto de divisão 5 ao outro extremo Y de XY.

4 — Pelos diversos pontos 4, 3, 2 e 1 tirem-se paralelas a 5Y.

5 — Essas paralelas dividem XY no número de partes pedido.

2.ª construção:

XY segmento dado, fig. 185.

1 — Depois de traçar como acima a semi-reta XZ trace-se outra YV paralela a XZ.

2 — Marque-se a partir de X e de Y as mesmas divisões 1, 2 e 3.

3 — Ligue-se X a 3 e sucessivamente 1 a 2; 2 a 1.

4 — Estes segmentos dividem XY no número de partes pedido que neste caso são três.

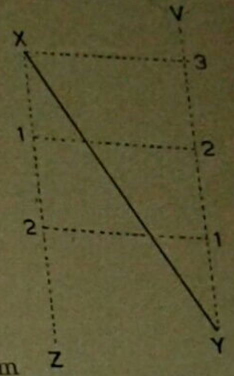


Fig. 185

3.ª construção:

AB segmento dado; quer-se dividí-lo em 7 partes iguais, figura 186.

1 — Trace-se uma paralela a AB.

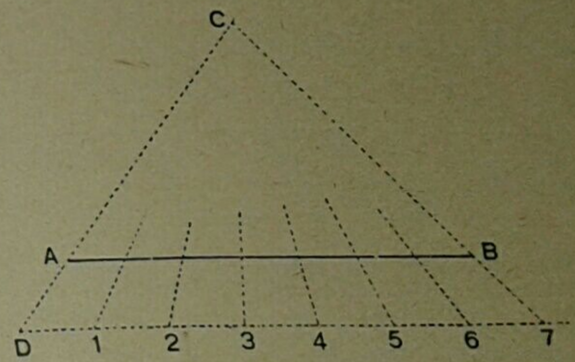


Fig. 186

2 — Marque-se sôbre ela a partir de um ponto D como uma abertura de compasso arbitrária um número de divisões igual àquele em que se quer dividir AB.

3 — Tracem-se as retas DA e 7B e prolonguem-se estas até se encontrarem; seja C o ponto de encontro.

4 — Tracem-se C1 C2 C3..., que dividem OB como se quer.

4.ª construção:

AB segmento dado; quer-se dividí-lo em 5 partes iguais, figura 187.

1 — Trace-se por um dos extremos B, uma semi-reta qualquer BY.

2 — Marque-se sôbre BY a partir de B sempre com a mesma abertura de compasso arbitrária um número de divisões igual ao número pedido e mais um.

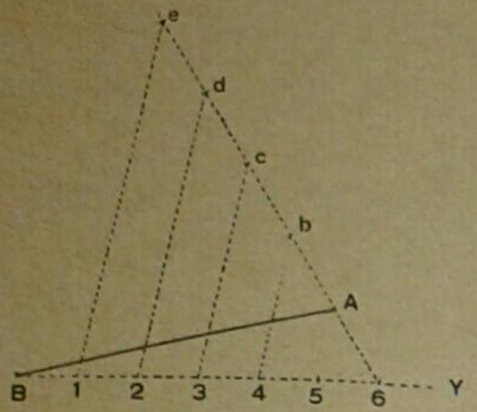


Fig. 187

3 — Ligue-se o último ponto de divisão 6 ao extremo A e sôbre esta reta marquem-se a partir de 6 cinco segmentos iguais a 6A.

4 — Tracem-se as retas que ligam os pontos **e**, **d**, **c**, **b**, que ficam de um mesmo lado de AB, aos pontos de divisão 1, 2, 3, 4, respectivamente.

Estas retas dividem AB como se pede.

Observação — Nesta construção há o inconveniente de poder ficar o ponto **e** muito distante e talvez até fora dos limites do papel

quando o comprimento 6A fôr muito grande; há porém a vantagem de dispensar o traçado de paralelas.

5.ª construção:

AB segmento dado; quer-se dividí-lo em 5 partes, fig. 188.

1 — Meça-se AB e suponha-se que tem 0,076m.

2 — Divida-se o comprimento achado por 5 o que dá para quociente 0,0152m.

3 — Multiplique-se o quociente achado sucessivamente por 2, 3 e 4, e, a partir do extremo A, marque-se sucessivamente a distância indicada pelos números achados.

Fig. 188

6.ª construção. Processos das tentativas:

AB segmento dado; dividí-lo em 7 partes iguais, fig. 189.

1 — Tomando uma abertura qualquer do compasso e aplicando-a sucessivamente, a partir de um extremo A, acontece geralmente que uma das pontas do compasso cai ou além do extremo B, em D, ou aquem desse extremo, em F.

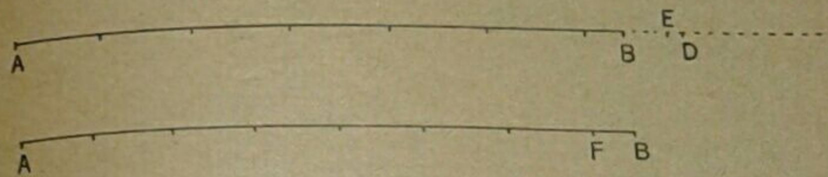


Fig. 189

O excesso BD denomina-se o **êrro** por **excesso** e BF o **êrro por falta**.

2 — Dê-se ao compasso uma abertura que pareça ser a sétima parte de AB.

3 — A partir do extremo A aplique-se essa distância tomada entre as pontas do compasso sucessivamente 7 vezes sôbre AB.

4 — Se no fim dessa operação uma das pontas do compasso cair exatamente no extremo B, está claro que a primeira abertura dada ao compasso é $\frac{1}{7}$ de AB; no caso contrário, haverá, suponha-se, um êrro por excesso BD.

5 — Nestas condições, sem deslocar a ponta do compasso colocada em C, aproxime-se gradualmente a ponta que fica em D de uma quantidade DE, que pareça ser $\frac{1}{7}$ de BD; está claro que CE deve ser $\frac{1}{7}$ de AB; mas, por mais educada que se tenha a vista, geralmente sucede que DE é menor que $\frac{1}{7}$ de BD.

6 — Nesta hipótese, CE aplicada sucessivamente sôbre AB dará ainda um êrro, que supomos ser por excesso, com o qual se procede como se procedeu com o primeiro.

7 — Repetindo as operações chega-se a um êrro cada vez menor e assim sucessivamente até tornar-se nulo êsse êrro.

Observação — Se o êrro é por falta, como BF, mesma figura, opera-se com êle como se operou com BD; sòmente se abrirá gradualmente o compasso em vez de o fechar.

Este processo, parece, à primeira vista, dificultoso e longo; entretanto, uma repetição de exercícios dá a prática necessária para que com duas operações ou até uma, executada com extremo cuidado, se possa chegar ao resultado procurado.

Se o número de partes iguais em que se quer dividir a reta dada é muito grande, o processo das tentativas não pode ser aplicado com a mesma precisão; pode-se, porém, iludir até certo ponto essa dificuldade no caso em que o número de divisão não é primo.

Neste caso, decompõe-se este número em seus fatores primos e substitui-se a divisão proposta por muitas divisões sucessivas e fáceis de efetuar.

Assim, se se quer dividir AB em 105 partes, decompõe-se 105 em seus fatores primos, o que dá $105=3\times5\times7$; esta decompo-

sição mostra que se deve dividir AB, primeiro em 3 partes, depois cada uma destas partes em 5 outras, e cada uma destas, em 7.

79 Traçar, por um ponto dado, uma reta que passe pelo ponto de interseção de duas retas dadas, quando êste ponto fica fora dos limites do papel.

1.ª construção:

AD e AE retas dadas, M ponto dado, situado dentro do ângulo das retas, fig. 190.

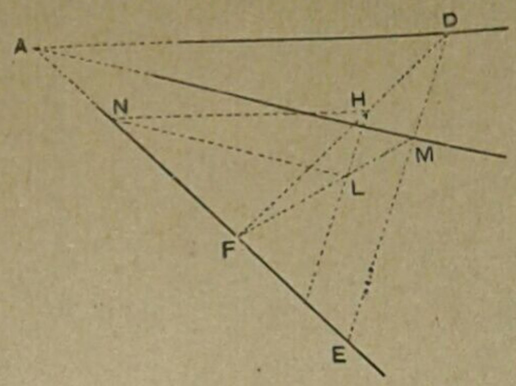


Fig. 190

1 — Trace-se por M uma reta DME que corte as retas dadas.

2 — Por um ponto qualquer F da reta AE tracem-se as retas DF e FM.

3 — Por um outro ponto N trace-se uma paralela a DA, a qual corta DF em H.

4 — Por H trace-se HL paralela a ED e ligue-se N a L.

5 — Por M tire-se MA paralela a NL; a reta MA resolve o problema.

Observação — Quando o ponto M está fora do ângulo das retas, a construção é a mesma, tomando F na reta imediatamente seguinte a M.

2.ª construção:

BF, DE e M retas e ponto dados, fig. 191.

1 — Por M tracem-se ME e MF, que cortem as retas dadas.

2 — Trace-se EF.

3 — Tire-se BD paralela a EF.

4 — Tracem-se ND e NB respectivamente paralelas a ME e MF.

5 — A reta MN resolve o problema.

Observação — Quando o ponto M está fora do ângulo das retas a construção é a mesma.

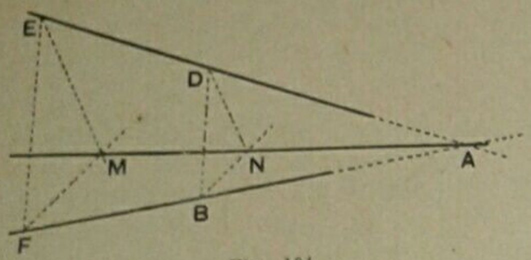


Fig. 191

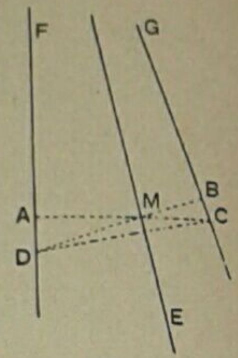


Fig. 192

3.ª construção:

AF, BG e M retas e ponto dados, fig. 192.

1 — Por M tracem-se as retas AMC e DMB respectivamente perpendiculares às retas dadas.

2 — Trace-se DC.

3 — Abaixe-se de M, sôbre DC a perpendicular ME, que resolve o problema.

Observação — DC não liga os pés das perpendiculares, e sim os extremos. Quando o ponto M está fora do ângulo das retas, a construção é a mesma.

4.ª construção:

BC e AD retas dadas, M ponto dado, dentro do ângulo das retas, fig. 193.

1 — Trace-se a transversal * qualquer BMA.

2 — Tire-se CD paralela a BA.

3 — Tome-se AE igual a CD.

4 — Trace-se BE e em seguida MF paralela a BE.

5 — Marque-se sôbre CD, a partir de D, a distância DG igual a AF.

6 — Trace-se MG, que resolve o problema.

M ponto dado, fora do ângulo das retas, fig. 194.

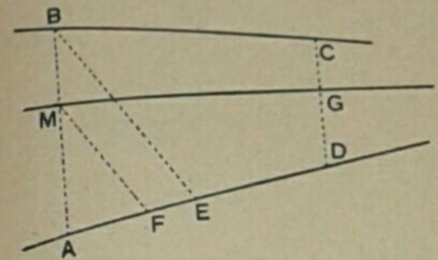


Fig. 193

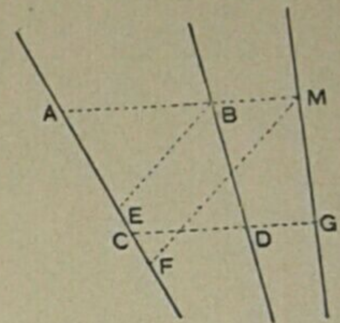


Fig. 194

1 — Trace-se a transversal ABM.

2 — Tire-se CD paralela a ABM.

3 — Tome-se AE igual a CD.

4 — Trace-se BE e em seguida MF paralela a BE.

5 — Marque-se sôbre CD, a partir de D, a distância DG igual a EF.

6 — Trace-se MG, que será a reta pedida.

(*) Transversal é tôda reta que corta uma figura formada de retas, semi-retas e segmentos de reta.

5.ª construção:

FD e GB retas dadas, M ponto dado, dentro do ângulo, fig. 195.

1 — Por M tirem-se duas transversais arbitrárias AB e CD.

2 — Liguem-se seus pés pelas retas CAE e BDE.

3 — Do ponto de interseção E trace-se a transversal qualquer EFG.

4 — Tracem-se as diagonais CF e AG do quadrilátero AFGC.

5 — Ligando H a M, a reta HM resolve o problema.

M ponto dado, fora do ângulo das retas, fig. 196.

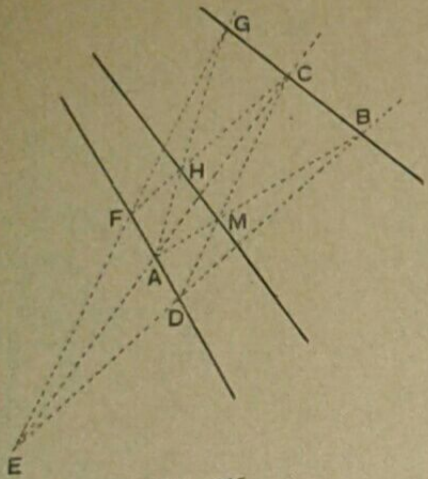


Fig. 195

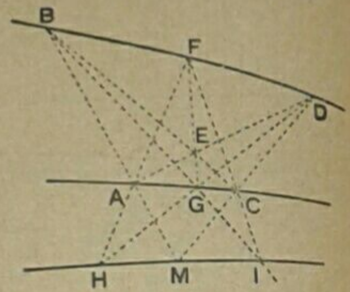


Fig. 196

1 — A construção é a mesma; assim, tirem-se por M duas transversais arbitrárias MAB e MCD.

2 — Tracem-se as diagonais CB e AD.

3 — Pelo ponto de interseção E trace-se a transversal qualquer FEG.

4 — Tracem-se as diagonais dos quadriláteros parciais DCGF e GFBA.

5 — Prolonguem-se essas diagonais; elas se cortarão duas a duas nos pontos I e H, que estão em linha reta com M.

6 — A reta HMI resolve o problema.

6.ª construção. Homológica geral.

Definições preliminares.

Duas figuras planas que se correspondem ponto a ponto e reta a reta são **homológicas** quando satisfazem a uma das duas propriedades gerais seguintes:

1.ª — Os pontos homólogos (A **a**), (B **b**), (C **c**), fig. 197, estão dois a dois, situados sôbre retas VA, VB, VC, que concorrem em um mesmo ponto V.

2.ª — As retas homólogas AB **ab**), (AC **ac**), (BC **bc**) cortam-se duas a duas em pontos **m, n, s,** situados em uma mesma reta EH.

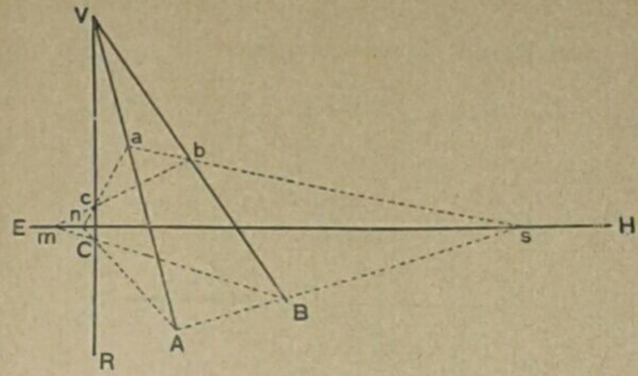


Fig. 197

As retas concorrentes VA, VB, VC chamam-se **raios de homología,** o ponto V é o **centro de homología**.

A figura **abc** denomina-se a **transformada por homología** da figura dada ABC; a reta EH é o **eixo de homología**.

Os pontos que secorrespondem nas duas figuras, denominam-se **pontos homólogos** e as linhas que ligam pontos respectivamente homólogos nas duas figuras, chamam-se **linhas homólogas**.

Sendo conhecido o eixo de homología EH e a direção de dois raios de homología, R e B, pode-se obter o ponto homólogo de qualquer ponto A do seguinte modo: fig. 197.

1 — Tome-se o ponto C e forme-se o triângulo ABC.

2 — Prolongue-se BC até encontrar o eixo de homologia, tem-se assim o ponto **m**.

3 — Como a reta homóloga de BC concorre em virtude da 2.ª propriedade no ponto **m** tire-se por este ponto uma reta qualquer **mcb;** o ponto **c** em que esta reta encontra o raio homológico que passa por C é o homólogo de **C** e o ponto **b** é o homólogo de B.

A reta **bc** é pois homóloga de BC.

4 — Para ter o ponto homólogo de A basta refletir que as retas homólogas de AC e AB passarão por **n** e **s** e pelos pontos **c** e **b** homólogos de C e de B.

5 — Tirem-se então as retas **nc** e **sb;** a interseção **a** é o ponto homólogo de A e a fig. **abc** é a transformada por homologia da fig. ABC.

A 6.ª construção é, pois, o seguinte:

M ponto dado fora das retas R e T fig. 198.

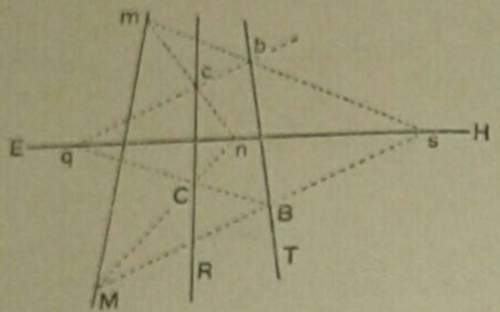


Fig. 198

1 — Tracem-se as retas MB e MC arbitrárias.

2 — Ligue-se B a C; forma-se assim um triângulo qualquer MBC de que um dos vértices é o ponto M.

3 — Procure-se a figura homológica de MBC sendo R e T os raios de homologia. Para isso trace-se uma reta qualquer EH para servir de **eixo** de homologia.

4 — Prolongue-se BC, lado oposto a M, até encontrar EH o que determina o ponto **q**.

5 — Tire-se a reta qualquer **qb**.

6 — Prolongue-se MC e MB até EH e liguem-se os pontos **n** e **s** aos pontos **c** e **b**.

O ponto de interseção **m** das retas **nc** e **sb** é o homólogo de M, e **Mm** acha-se com êle, situado no raio de homologia que resolve o problema.

Observação — Diz-se que esta construção é geral porque o eixo de homologia EH tem uma posição qualquer em relação à fig. MBC.

Quando M está dentro do ângulo das retas, a construção é a mesma.

7.ª construção. Homologia particular.

Os elementos dados são os mesmos fig. 199.

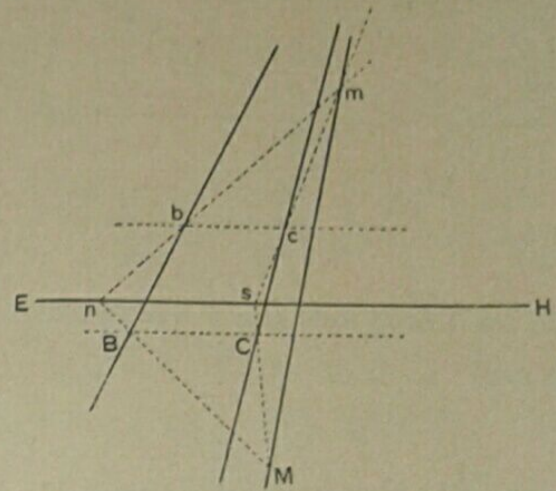


Fig. 199

1 — Forme-se como na construção precedente a fig. MBC.

2 — Trace-se o eixo EH paralelamente a um dos lados BC do triângulo MBC.

3 — Tire-se uma reta qualquer **bc** paralela a EH.

4 — Ligue-se **n** a **b** e **s** a **c;** o ponto de interseção **m** é o homólogo de M e a reta **mM** resolve o problema.

80 Medir um ângulo com o transferidor.

BAC ângulo dado, fig. 200.

1 — Prolongue-se um lado qualquer do ângulo dado AB por exemplo.

2 — Coloque-se o centro do transferidor sôbre o vértice A fazendo coincidir a linha de fé com AB.

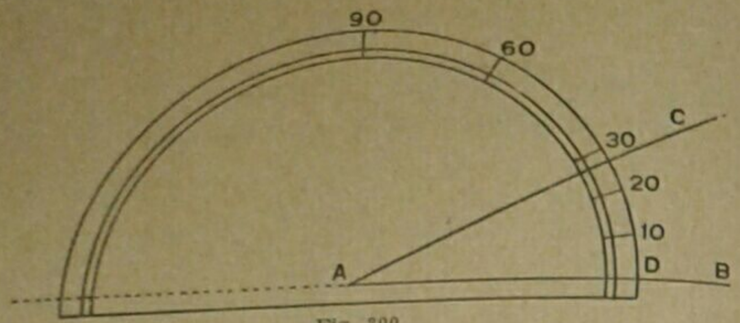


Fig. 200

3 — O número de graus e fração de grau indicados no limbo do transferidor pelo lado AC, contando a partir de D, é a medida do ângulo dado.

81 Medir um ângulo dado sem o transferidor.

A ângulo dado, fig. 201.

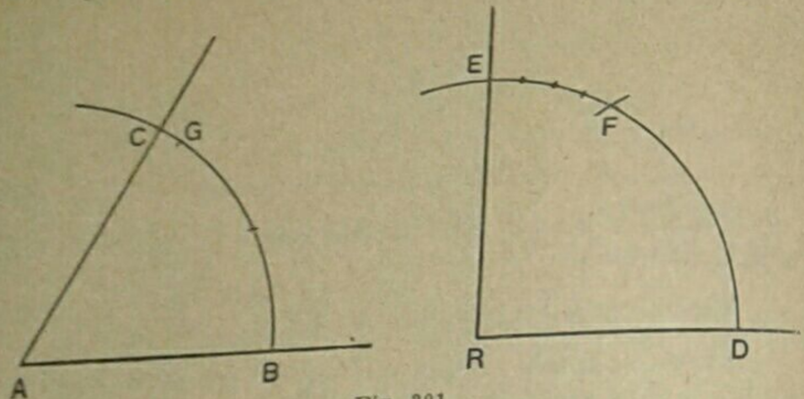


Fig. 201

1 — Trace-se, à parte, um ângulo reto ERD que será a unidade de medida e, tanto neste como no ângulo dado, dos vértices A e R e com o mesmo raio, descrevam-se os arcos BC e DE.

2 — Aplique-se o arco menor BC sôbre o maior DE o primeiro resto obtido sôbre o menor arco BC; o 2.º resto sôbre o 1.º e assim sucessivamente até chegar a um resto que se contenha exatamente no precedente.

3 — Exprimam-se depois os arcos DE e BC em função do último resto obtido; tome-se depois a relação entre êles para daí deduzir o valor de BC.

4 — Assim aplicando BC sôbre DE tem-se:

$$DE = BC + EF \qquad (2)$$

5 — Aplicando o 1.º resto EF sôbre BC tem-se:

$$BC = 2EF + CG \qquad (1)$$

6 — Aplicando-se o 2.º resto CG sôbre o 1.º tem-se:

$$EF = 4CG$$

7 — Efetuando as substituições de EF em BC e de BC em DE vem:

$$BC = 2 \times 4CG + CG = 9CG$$
$$DE = 9CG + 4CG = 13CG$$

8 — Tomando a relação entre BC e DE:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{9}{13}$$

9 — Tirando o valor de BC:

$$BC = \frac{9}{13} \times DE = \frac{9}{13} \times 90^o = \frac{810^o}{13} = 63^o\ 50'\ 46'',15$$

valor este que representa a medida procurada.

Observação — Se o ângulo dado é obtuso a operação é a mesma.

Pode acontecer que não se obtenha um resto que se contenha exatamente no precedente; neste caso leva-se a operação até que se obtenha o **menor** resto possível que pode sem êrro sensível ser desprezado; o resto anterior se contém no precedente e daí se procede como ficou explicado.

Assim como se toma o ângulo ERD que contém 9º, poder-se-ia tomar um outro ângulo qualquer para unidade contanto que se lhe conhecesse a medida em graus.

82 Construir um ângulo igual a um ângulo dado tomando para vértice um ponto dado sôbre uma reta.

1ª construção:

A e M ângulo e ponto dados, fig. 292.

1 — De A como centro, e com um raio qualquer, descreva-se um arco BC.

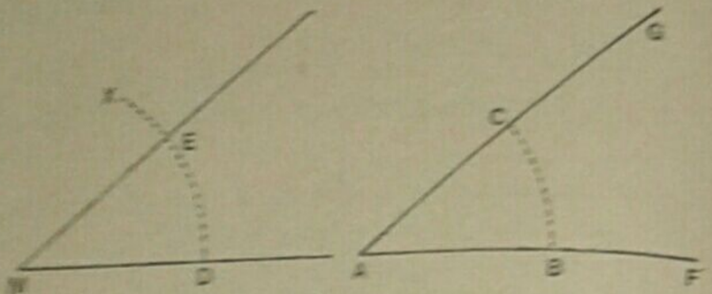


Fig. 292

2 — De M como centro, e com o mesmo raio descreva-se o arco indefinido DX.

3 — Marque-se a corda BC em DE a partir de D, e trace-se ME.

4 — O ângulo EMD resolve o problema.

2ª construção, com o transferidor:

A, ângulo dado fig. 292.

1 — Meça-se o ângulo dado A com o transferidor.

2 — Coloque-se o centro do transferidor em M, fazendo coincidir a linha de 0º com a reta dada fig. 293.

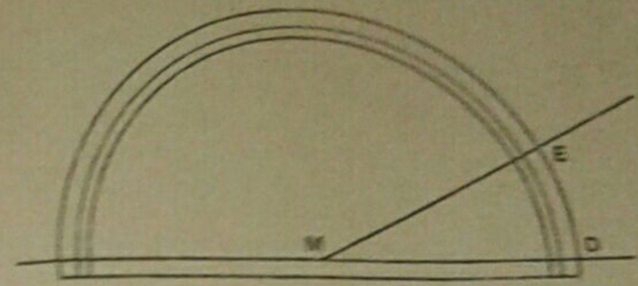


Fig. 293

3 — Marque-se em E o número de graus que mede o ângulo dado A, contando a partir de D.

4 — Trace-se ME. EMD é o ângulo pedido.

83 Em um ponto de uma reta dada, construir um ângulo de n graus pela tabela de cordas.

AB e C, reta e ponto dados, fig. 294.

1 — De C como centro, e com um raio igual a um número qualquer de centímetros, descreva-se um arco DX.

2 — Procure-se na tabela de cordas o comprimento correspondente a n graus.

3 — De D, como centro, e com um raio igual ao raio CD multiplicado pela corda achada no número 2, descreva-se o arco que corte o primeiro arco descrito em F.

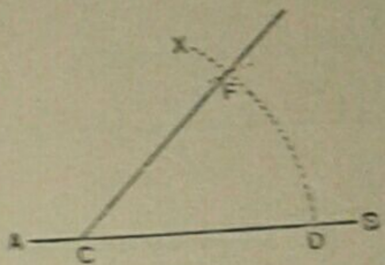


Fig. 294

4 — Trace-se CF; o ângulo FCD resolve o problema.

5 — Se é de 45º o ângulo que se quer construir, encontra-se na tabela, para 45º, a corda 0,765.

6 — Multiplique-se 0,03 (valor do raio CD) por 0,765; o produto 0,0228 é o valor numérico do raio que corte o arco DX em F.

Observação — Geralmente tomam-se 10 cm. por valor do raio CD.

84 Medir um ângulo pela tabela de cordas.

ABC ângulo dado, fig. 205.

1 — De B, como centro, e com um raio qualquer (geralmente 10 cm) descreva-se o arco que corte os lados do ângulo em F e G.
2 — Meça-se com o duplo decímetro a corda FG.
3 — Divida-se este valor numérico da corda pelo valor numérico do raio do arco que passa por GF.
4 — Procure-se na tabela de cordas o número de graus correspondentes ao quociente obtido; êste número de graus dá o valor do ângulo.

5 — A corda FG tem 0,0112m.

6 — Dividindo 0,011 por 0,026 valor numérico do raio do arco que passa por GF, tem-se 0,433.

7 — Entrando com este valor 0,431 na tabela de cordas vê-se que êle corresponde aproximadamente ao ângulo de 25º, medida do ângulo ABC.

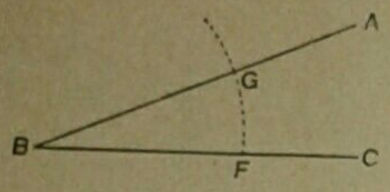


Fig. 205

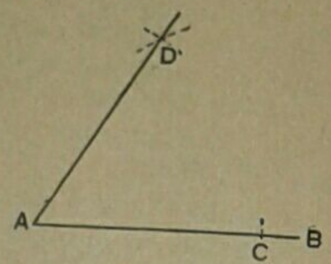


Fig. 206

85 Construir um ângulo de 60º em um ponto dado em uma reta.

AB e A reta e ponto dados, fig. 206.

1 — Tome-se sôbre AB a partir de A um comprimento arbitrário AC.

2 — De A e C como centros, e com raio igual a AC descrevam-se dois arcos que se cortem em D.
3 — Trace-se DA; o ângulo DAC mede 60º.

86 Fazer um ângulo igual à soma de outros ângulos dados.

1 2 3 ângulos dados, fig. 207.

1 — Trace-se uma semi-reta.

2 — Da origem O e com um raio arbitrário descreva-se um arco.

3 — Dos vértices 1; 2; 3 como centros, e com o mesmo raio descrevam-se arcos.

4 — Marquem-se a patrir de D sucessivamente as cordas dos ângulos 1; 2 e 3.

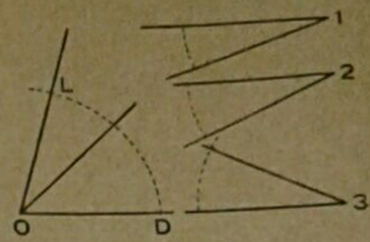


Fig. 207

5 — Trace-se OL. O ângulo LOD resolve o problema.

87 Fazer um ângulo igual à diferença de dois ângulos dados.

1 e 2 ângulos dados, fig. 208.

1 — Trace-se uma semi-reta.

2 — Da origem C como centro, e com um raio arbitrário descreva-se um arco.

3 — Dos vértices 1 e 2 como centros, e com o mesmo raio tracem-se arcos.

4 — Marque-se a corda do ângulo 1 em EM e em seguida a corda do ângulo 2 em MN a partir de M.

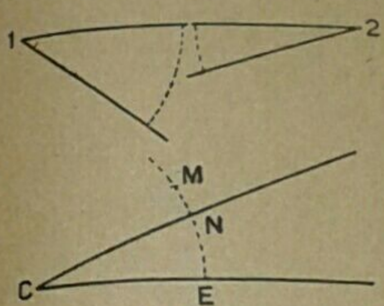


Fig. 208

5 — Trace-se CN; o ângulo NCE resolve o problema.

88 Obter gràficamente o complemento de um ângulo.

CAB ângulo dado, fig. 209.

1 — Pelo vértice A levante-se AD perpendicular a um dos lados do ângulo, AB, por exemplo.

2 — O ângulo DAC é o complemento procurado.

Observação — O ângulo dado CAB deve ficar no interior do ângulo reto DAB.

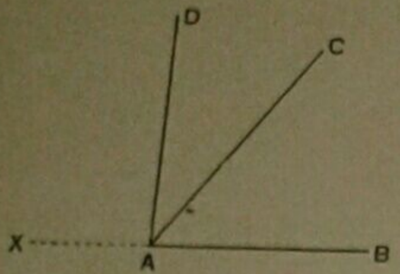


Fig. 209

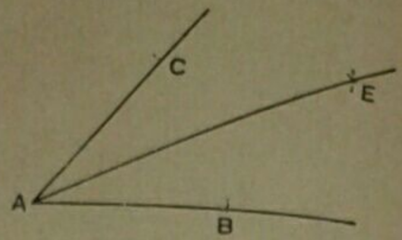


Fig. 210

89 Obter gràficamente o suplemento de um ângulo.

CAB ângulo dado, fig. 209.

1 — Prolongue-se um lado qualquer, AB, por exemplo.

2 — O ângulo CAX, formado pelo outro lado AC com o prolongamento AX, é o suplemento procurado.

90 Traçar a bissetriz de um ângulo, cujo vértice é conhecido.

1.ª construção:

A ângulo dado, fig. 210.

1 — Do vértice A, como centro, e com um raio arbitrário, descreva-se o arco BC.

2 — De B e C, como centros, e com um raio maior do que a metade da distância BC, descrevam-se dois arcos, que se cortem, em E.

3 — Trace-se AE, que será a bissetriz procurada.

Observação — A bissetriz AE resolve o problema da divisão do ângulo CAB em duas partes iguais.

Para dividir em um número de partes igual a uma potência de 2, basta dividir cada um dos ângulos EAC e EAB em duas partes iguais, e em seguida cada um dos ângulos obtidos novamente em duas partes iguais e assim sucessivamente, até o número de partes que se quiser.

2.ª construção:

A, ângulo dado, fig. 211.

1 — Marquem-se sôbre os lados, a partir do vértice, os comprimentos AB = AC e AD = AE.

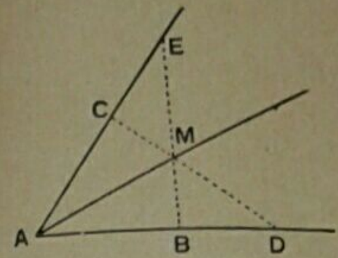


Fig. 211

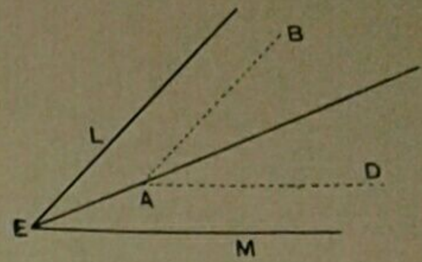


Fig. 212

2 — Tracem-se os segmentos BE e CD.

3 — Ligando o ponto de interseção M ao vértice A, tem-se em AM a bissetriz procurada.

3.ª construção:

E, ângulo dado, fig. 212.

1 — Tracem-se à mesma distância dos lados L e M, problema 76, as paralelas AB e AD, que se cortem, em A.

2 — Ligue-se o vértice E a A; a semi-reta EA resolve o problema.

91 Traçar a bissetriz de um ângulo, cujo vértice não é conhecido.

1.ª construção:

L e M lados do ângulo dado, fig. 213.

1 — Trace-se uma transversal qualquer AB.

2 — Tracem-se as bissetrizes AC, BC, AD, e BD dos ângulos formados por AB com L e M.

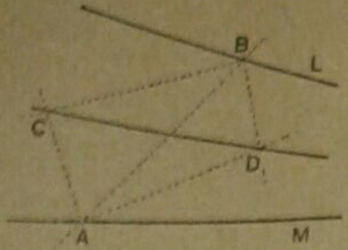


Fig. 213

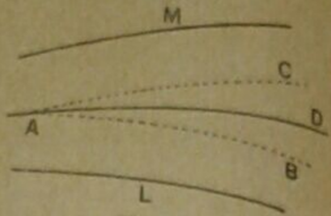


Fig. 214

3 — A reta CD, que passa pelos pontos de interseção das bissetrizes, resolve o problema.

2.ª construção:

L e M lados dados, fig. 214.

1 — Tracem-se à mesma distância dos lados L e M, problema 76, as paralelas AB e AC.

2 — A bissetriz AD do ângulo BAC resolve o problema.

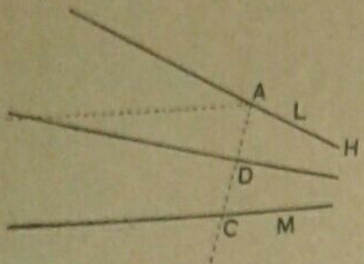


Fig. 215

3.ª construção:

L e M lados dados, fig. 215.

1 — De um ponto qualquer A tomado sôbre L, tire-se AB paralela a M.

2 — Trace-se a bissetriz AC do ângulo BAH.

3 — Trace-se DE perpendicular ao meio de AC; a reta DE resolve o problema.

92 Dividir um ângulo reto em 3 ângulos iguais.

A, ângulo dado, fig. 216.

1 — Do vértice A, com um raio arbitrário, descreva-se o arco BC.

2 — A partir de B e C, sôbre o arco BC, marquem-se os pontos D e E com cordas iguais a AB.

3 — Liguem-se D e E ao vértice A; o problema fica resolvido.

93 Dividir um ângulo em um número qualquer de ângulos iguais com transferidor.

A, ângulo dado, quer-se dividí-lo em 5 partes iguais, fig. 217.

1 — Meça-se o ângulo dado com o transferidor, suponha-se que tem 63°.

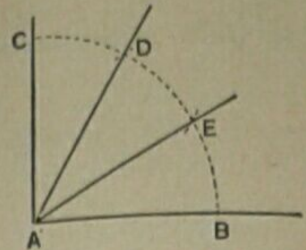


Fig. 216

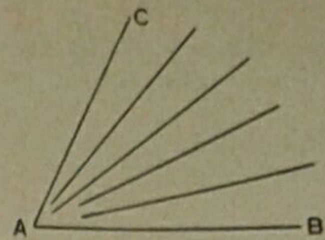


Fig. 217

2 — Divida-se êsse número de graus por 5, o que dá para quociente 12° 36'.

3 — Multiplique-se o quociente achado sucessivamente por 2, 3, 4 e 5, o que dá a seguinte tabela:

12°	36'
25°	12'
37°	48'
50°	24'
63°	

4 — Coloque-se o centro do transferidor em A, fazendo coincidir a linha de fé com o lado AB, e marque-se sucessivamente, a partir desse lado, cada um dos números indicados nas parcelas da tabela.

5 — Unindo ao vértice A cada um dos pontos marcados, o ângulo fica dividido como se pede.

94 Sôbre uma reta dada construir um segmento circular capaz de um ângulo dado.

AB e M reta e ângulo dados, *fig.* 218.

1 — Faça-se em B o ângulo ABC igual a M.
2 — Levante-se DE perpendicular ao meio de AB.
3 — Por B tire-se BF perpendicular a BC.
4 — Do ponto de interseção O, como centro, e com raio igual a OB, descreva-se uma circunferência.
5 — O segmento circular ASB resolve o problema.

RETAS PROPORCIONAIS

95 Dividir um segmento de reta em partes proporcionais a outros segmentos dados.

AB segmento dado, quer-se dividí-lo em partes proporcionais a M, N, P, *fig.* 219.

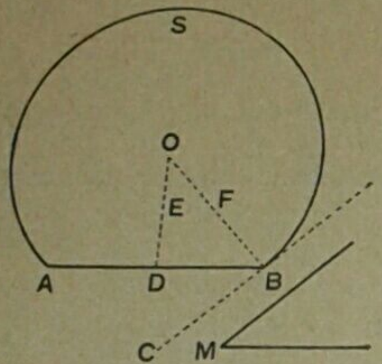


Fig. 218

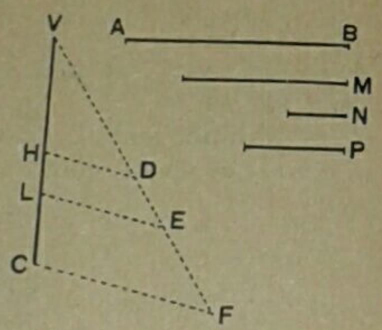


Fig. 219

1 — Faça-se um ângulo V, qualquer.
2 — Sôbre um lado marque-se VC = AB.
3 — Sôbre o outro lado marquem-se sucessivamente VD = M, DE = N e EF = P.

4 — Ligue-se C a F e por E e D tirem-se EL e DH paralelas a CF.
5 — Os pontos H e L dividem VC, ou AB, em três segmentos proporcionais a M, N e P:

$$\frac{VH}{M} = \frac{HL}{N} = \frac{LC}{P}$$

96 Construir a quarta proporcional a três segmentos de reta dados.

1.ª construção:

M, N, P segmentos dados, fig. 220.

1 — Pede-se um segmento X que seja o quarto termo da proporção $\frac{M}{N} = \frac{P}{X}$.
2 — Faça-se um ângulo qualquer BAC.
3 — Sôbre um lado AB marque-se AD = M e DE = N.
4 — Sôbre o outro lado AC marque-se AF = P.
5 — Trace-se DF; e depois EG paralela a DF.
6 — O segmento FG é a quarta proporcional pedida.

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AF}{FG \text{ ou } X}$$

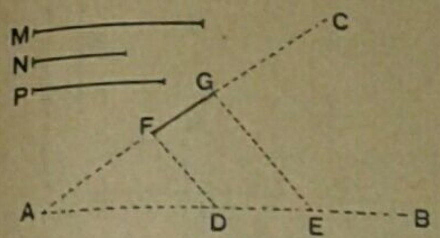


Fig. 220

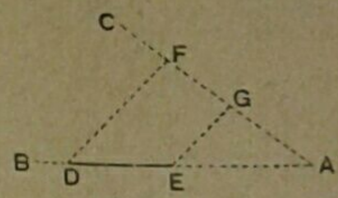


Fig. 221

2.ª construção:

M, N, P, segmentos dados, fig. 220.

1 — Faça-se, como na primeira construção, o ângulo BAC, fig. 221.

2 — Sôbre um lado AC marquem-se os comprimentos M e N, a partir do mesmo ponto A, sendo AF = M e AG = N.
3 — Sôbre o outro lado AB tome-se AE = P.
4 — Trace-se EG e depois DF paralela a EG; DE é a quarta proporcional pedida: $\frac{AF}{AG} = \frac{AD}{DE \text{ ou } X}$

97 Construir uma terceira proporcional a dois segmentos de reta dados.

1.ª construção:

M e N, segmentos dados, fig. 222.
1 — Pede-se um segmento X, que seja o quarto termo da proporção $\frac{M}{N} = \frac{N}{X}$.
2 — A primeira construção é a mesma que a do problema precedente, sòmente os comprimentos DE e AF da fig. 220, são iguais a N.
3 — A terceira proporcional é FG:

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AF \text{ ou } DE}{FG \text{ ou } X}$$

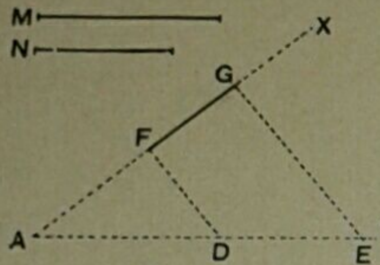


Fig. 222

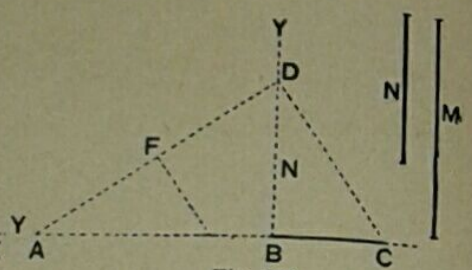


Fig. 223

2.ª construção:

M e N segmentos dados, fig. 223.
1 — Sôbre uma reta marque-se AB = M.
2 — Em B levante-se BY perpendicular a essa reta.
3 — Tome-se em BY um comprimento BD = N.

4 — Trace-se AD; e depois DC perpendicular a AD.
5 — O segmento BC é a 3.ª proporcional pedida:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$$

98 Construir a média proporcional de dois segmentos de reta dados.

1.ª construção:

M e N segmentos dados, fig. 224.
1 — Sôbre uma reta tome-se AB = M e em seguida BC = N.
2 — Sôbre AC, como diâmetro, descreva-se uma semi-circunferência.
3 — Por B levante-se uma perpendicular.
4 — BD é a média proporcional pedida:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$$

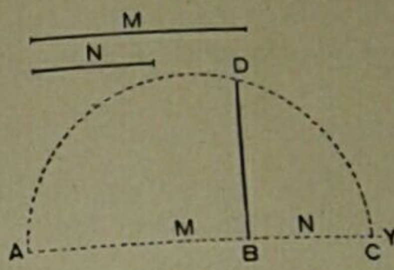


Fig. 224

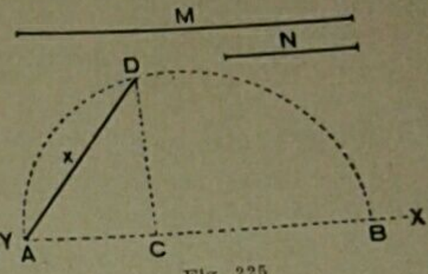


Fig. 225

2.ª construção:

M e N segmentos dados, fig. 225.
1 — Sôbre uma reta tome-se, a partir de A, AB = M e AC = N.
2 — Sôbre AB, como diâmetro, descreva-se uma semi-circunferência.
3 — Levante-se CD perpendicular a AB e trace-se AD, que resolve o problema:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC}$$

3.ª construção:

M e N segmentos dados, fig. 226.

1 — Sôbre AX a partir de A, marque-se, AB = M e AC = N.

2 — Descreva-se uma circunferência, que passe por B e C (*).

3 — Por A tire-se a tangente AT (**), que resolve o problema:

$$\frac{AB}{AT} = \frac{AT}{AC}$$

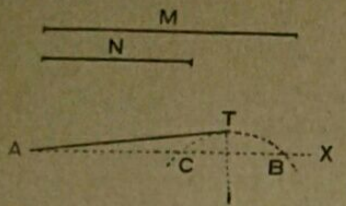


Fig. 226

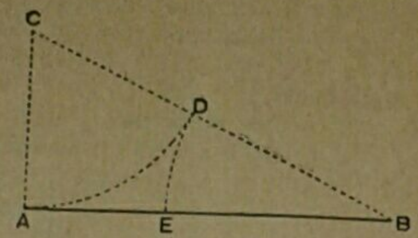


Fig. 227

99 Dividir um segmento de reta em média e extrema razão (divisão áurea).

AB segmento dado, fig. 227.

1 — Pedem-se duas porções de AB, tais que uma delas seja média proporcional entre a outra e todo o segmento AB.

2 — Levante-se em A uma perpendicular e tome-se AC igual à metade de AB.

3 — De C, como centro, e com raio igual a CA, descreva-se um arco de circunferência.

4 — Trace-se BC.

5 — Será BD ou BE a maior porção de AB, e AE o menor:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{AE}$$

BE é o **segmento áureo** de AB.

(*) Veja Problema 107.
(**) Veja Problema 115.

100 Construir um ângulo de redução.

1.ª construção:

1 — Trace-se uma reta e sôbre ela marque-se, com uma grandeza arbitrária, **m** divisões iguais (fig. 228).

2 — Por B tire-se BC perpendicular a AB.

3 — Sôbre BC marquem-se **n** das divisões de AB, sendo **n** menor do que **m.**

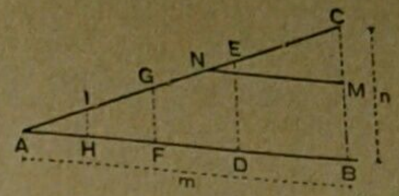


Fig. 228

4 — Trace-se AC; o ângulo CAB é o ângulo de redução pedido.

5 — Da construção se vê que a razão entre AB e BC é $\frac{m}{n}$, portanto, se por um ponto qualquer D de AB tira-se DE paralela a BC, tem-se que a razão entre AD e DE é igual $\frac{m}{n}$.

6 — Supondo AB dividida em sete partes iguais e BC contendo três dessas partes, tem-se BC = $\frac{3}{7}$ de AB; DE = $\frac{3}{7}$ de AD; FG = $\frac{3}{7}$ de AF...

7 — Conclui-se então que tôdas as paralelas a BC, tiradas pelos diversos pontos de AB, representam, neste caso particular, $\frac{3}{7}$ de uma certa grandeza, que é o comprimento que vai de A à paralela respectiva.

8 — Reciprocamente, a razão entre BC e AB é $\frac{n}{m}$; por-

tanto, se por um ponto qualquer M de BC se tira MN paralela a AB tem-se que a razão entre MN e MC é igual a $\frac{n}{m}$.

9 — Supondo então BC dividida em 3 partes iguais e AB contendo 7 dessas partes, tem-se AB = $\frac{7}{3}$ de BC, logo MN = $\frac{7}{3}$

10 — Segue-se daí que tôdas as paralelas a AB, tiradas pelos diversos pontos de BC, representam $\frac{7}{3}$ de uma certa grandeza, que é o comprimento que vai de C à paralela respectiva.

11 — Desta construção se deduz que no ângulo CAB, para uma grandeza tal como AD, a paralela DE é menor do que AD; e no ângulo ACB para uma grandeza tal como CM, a paralela MN é maior do que CM; isto faz denominar o primeiro, CAB, de **ângulo de redução,** como acima já se disse, e o segundo ângulo, ACB, **ângulo de ampliação**.

2.ª construção, fig. 229.

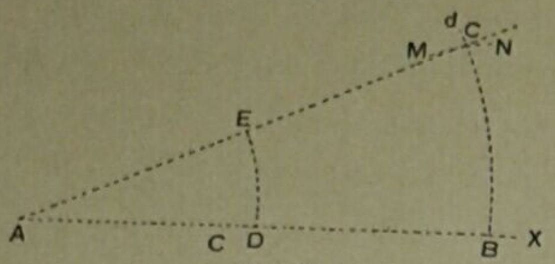


Fig. 229

1 — Trace-se uma reta AX, e a partir de um ponto A, marque-se, com uma grandeza arbitrária, **m** divisões iguais.

2 — Do último ponto B, com um raio igual a **n** divisões de AB, descreva-se um arco MN, sendo **n** menor do que **m**.

3 — De A, como centro, e com raio AB, descreva-se um arco Bd.

4 — Ligue-se o ponto de interseção C ao ponto A.

5 — O ângulo CAB é o ângulo de redução pedido.

6 — A razão entre AB e a corda BC é $\frac{m}{n}$ donde BC é igual

à fração $\frac{n}{m}$ de AB; do mesmo modo as cordas de todos os arcos concêntricos com BC representam uma fração $\frac{n}{m}$ do raio de cada arco.

7 — Assim, se AB está dividida em 9 partes e BC contém 4 dessas partes, têm-se BC = $\frac{4}{9}$ de AB; DE = $\frac{4}{9}$ de AD.

8 — Esta mesma construção dá o **ângulo de ampliação;** basta para isso dividir AB em **n** partes e tomar o raio BC com **m** dessas partes.

A razão entre BC e AB será, nesta hipótese, $\frac{m}{n}$.

3.ª construção, fig. 230.

1 — Sôbre uma reta OX marque-se um comprimento arbitrário OA.

2 — Por A levante-se uma perpendicular a OX.

3 — Marque-se de A até B **n** divisões iguais e de A até C **m** dessas divisões, sempre supondo **n** menor do que **m**.

4 — Tirem-se OB e OC.

5 — O ângulo BOA é o ângulo de **redução** e o ângulo COA é o ângulo de **ampliação.**

6 — A razão entre AC e AB é $\frac{m}{n}$, donde AB é igual à fração $\frac{n}{m}$ de AC; do mesmo modo os comprimentos tais como EF de todos os segmentos paralelos a AC e tirados pelos pontos de OA, representam a fração $\frac{n}{m}$ dos comprimentos tais como DF.

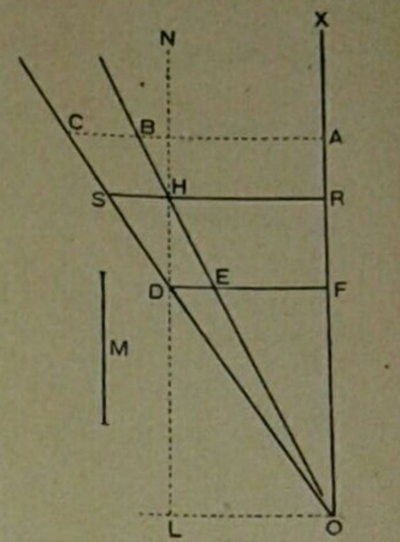


Fig. 230

Reciprocamente, o comprimento AC é igual à fração $\frac{m}{n}$ de AB, donde os comprimentos tais como DF representam a fração $\frac{m}{n}$ dos comprimentos tais como EF.

101 Reduzir ou ampliar um comprimento dado.

1.ª construção:

Reduzir a $\frac{n}{m}$ (fig. 228).

1 — Tome-se sôbre AB um comprimento AH igual ao comprimento dado.
2 — Por H tire-se uma paralela a BC.
3 — HI é o comprimento reduzido na razão dada.
4 — Na fig. 228, problema 100, já vimos que BC = $\frac{3}{7}$ de AB, logo IH = $\frac{3}{7}$ de AH.

Ampliar para $\frac{m}{n}$.

1 — Tome-se sôbre BC, fig. 228, um comprimento CM igual ao comprimento dado.
2 — Por M tire-se uma paralela a AB.
3 — MN, é o comprimento ampliado na razão dada.
4 — Na fig. 228, já vimos que AB = $\frac{7}{3}$ de BC, logo MN = $\frac{7}{3}$ de MC.

2.ª construção:

Reduzir a $\frac{n}{m}$ (fig. 229).

1 — De A, como centro, e com um raio AD, igual ao comprimento dado, descreva-se um arco DE.
2 — A corda DE é o comprimento reduzido na razão dada.
3 — O ângulo de redução da fig. 229, **reduz** na razão de 4 para 9; assim DE = $\frac{4}{9}$ de AD.

Ampliar para $\frac{m}{n}$.

1 — Construido o ângulo de ampliação, como ensina a 2.ª construção do problema 100, para ampliar o comprimento dado M, proceda-se do mesmo modo como para o reduzir.

3.ª construção:

Reduzir a $\frac{n}{m}$.

M comprimento dado, fig. 230.
1 — Sôbre OX, levante-se a perpendicular OL = M.
2 — Por L tire-se LN paralela a OX.
3 — Pelo ponto de interseção D tire-se DF paralela a OL.
4 — EF é o comprimento reduzido na razão dada.
5 — Na fig. 230, a razão entre AB e AC é de $\frac{5}{7}$, o que quer dizer que AB = $\frac{5}{7}$ de AC; logo EF = $\frac{5}{7}$ de DF ou de OL ou de M.

Ampliar para $\frac{m}{n}$.

1 — Pelo ponto H tire-se SR paralela a OL, mesma figura.
2 — SR é o comprimento ampliado de M na razão dada.
3 — Na figura, a razão entre AC e AB é $\frac{7}{5}$; logo SR = $\frac{7}{5}$ de HR ou de OL ou de M.

Observação — Desta 3.ª construção para reduzir ou ampliar o comprimento M se conclui claramente que o ângulo de redução dado na 3.ª construção, fig. 230, do problema 100, é pràticamente o mais cômodo, porque conhecido o comprimento DF, relativo ao ponto D, que fornece o comprimento reduzido EF, tem-se imediatamente o ponto H, que dá a ampliação dêsse comprimento na razão **recíproca** da primeira.

102 Copiar um traçado retilíneo.

1.ª construção:

ABCDEF traçado dado, fig. 231.

1 — Tome-se um ponto qualquer O e tirem-se as semi-retas OA, OB, OC...

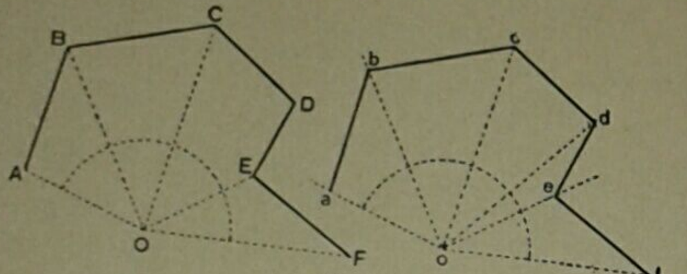


Fig. 231

2 — Por outro ponto **o** tomado à parte, tire-se uma semi-reta **oa** e a partir dela construam-se sucessivamente os ângulos **aob, boc, cod, doe**.... respectivamente iguais aos ângulos AOB, BOC, COD...

3 — Sôbre cada lado daquêles ângulos tome-se **oa** = OA, **ob** = OB...

4 — Ligando, dois a dois, os pontos **a, b, c, d,**... tem-se o traçado **abcdef** = ABCDEF.

2.ª construção:

ABCD traçado dado, figura 232.

1 — Trace-se uma reta MN e pelos pontos A, B, C, D, tirem-se-lhe as perpendiculares AE, BF, CG, DH.

2 — Sôbre uma reta **mn**, traçada à parte, a partir de um ponto **e** tomem-se, **ef** = EF; **fg** = FG; **gh** = GH...

3 — Pelos pontos **e, f, g, h,** levantem-se perpendiculares a **mn** e sôbre cada uma delas tome-se **ea** = EA; **fb** = FB; **gc** = GC; **hd** = HD.

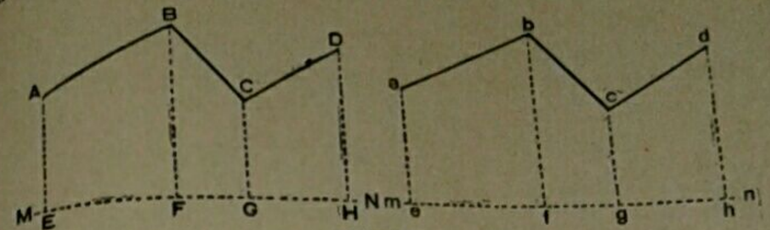


Fig. 232

4 — Ligando dois a dois, os pontos **a, b, c, d,** tem-se o traçado **abcd** = ABCD.

Observação — Esta construção recebe a denominação de **método das ordenadas**.

103 Copiar um traçado curvilíneo.

AG traçado dado, fig. 233.

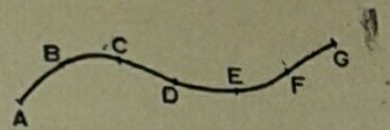


Fig. 233

1 — Tome-se sôbre êsse traçado uma série de pontos B, C, D...

2 — Qualquer das duas construções do problema precedente, aplicada aos pontos B, C... resolvem o problema.

3 — Os pontos **a, b, c**... obtidos na cópia, ligam-se por um traço contínuo.

104 Reduzir um traçado retilíneo.

ABCDE traçado dado; reduzí-lo a $\frac{4}{9}$, fig. 234.

1 — Tome-se um ponto qualquer O e tirem-se as retas OA, OB...

2 — Por um ponto qualquer **o**, tomado à parte, tire-se **oX** e a partir dêle construam-se os ângulos **Xo1, 1o2**... iguais a AOB, BOC...

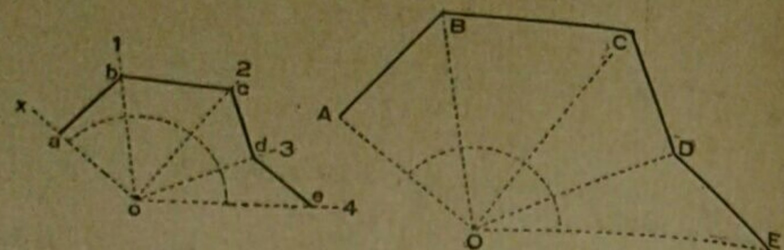


Fig. 234

3 — Reduzem-se os compromissos OA, OB, OC... na razão dada, problema 101.

4 — Marquem-se êsses comprimentos reduzidos em **oa, ob, oc**...

5 — Ligando dois a dois os pontos **a, b, c**...

tem-se um traçado **abcde** $= \frac{4}{9}$ ABCDE.

Observação — Empregando o **método das ordenadas** é preciso reduzir não sòmente os comprimentos EF, FG... das abcissas fig. 232, como também os comprimentos das ordenadas AE, BF... fig. 232.

Se fôr dado um traçado curvilíneo, a operação gráfica é exatamente a mesma; unindo-se, porém, os pontos **a, b, c**... obtidos na redução, por um traço contínuo.

Se se trata de **ampliar** um traçado dado, opera-se do mesmo modo, empregando, porém, o ângulo de ampliação.

CIRCUNFERÊNCIA

105 Achar o diâmetro de uma circunferência dada.

A circunferência dada, fig. 235.

1 — Trace-se uma corda qualquer AB.

2 — Levante-se a perpendicular ao meio de AB.

3 — O segmento CD é o diâmetro procurado.

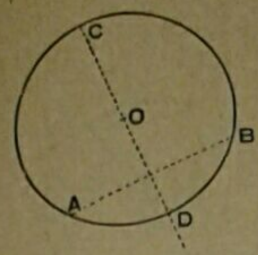


Fig. 235

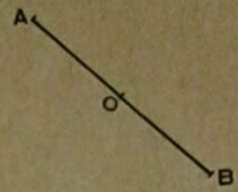


Fig. 236

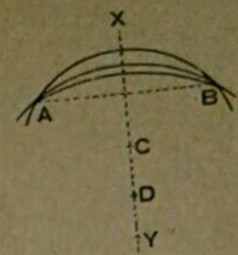


Fig. 237

106 Dado o diâmetro de uma circunferência, achar o centro e o raio.

AB diâmetro dado, fig. 236.

1 — Tome-se o meio O de AB.

2 — O ponto O é o centro e OA o raio.

107 Traçar muitos arcos de circunferência que passem por dois pontos dados.

A e B pontos dados, fig. 237.

1 — Ligue-se A a B.

2 — Levante-se ao meio de AB uma perpendicular indefinida XY.

3 — Qualquer ponto C, D,..., de XY é o centro de um arco, de circunferência que passe pelos pontos A e B.

108 Descrever uma circunferência que passe por 3 pontos dados, não em linha reta.

A, B, C pontos dados, fig. 238.

1 — Tracem-se os segmentos AB e BC.

2 — Tracem-se perpendiculares ao meio de AB e de BC.

3 — O ponto de interseção O é o centro; a distância de O a qualquer dos pontos A, B ou C, é o raio.

Observação — *Se os três pontos A, B, C estão em linha reta, o problema é impossível.*

Na prática não é necessário traçar AB e BC.

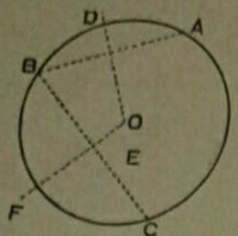


Fig. 238

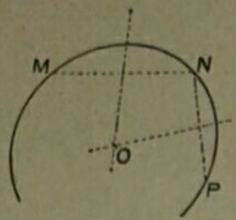


Fig. 239

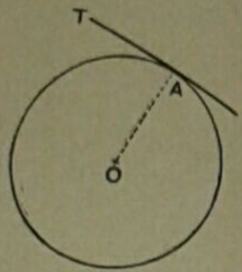


Fig. 240

109 Dado um arco de circunferência, achar o centro da circunferência a que êle pertence.

Arco dado, fig. 239.

1 — Tome-se sôbre êle três pontos M, N, P.

2 — A construção do problema 108, aplicada aos pontos M, N, P dá o centro O procurado.

Observação — Se em vez de um arco, se dá uma circunferência a construção é a mesma.

110 Traçar a tangente num ponto dado da circunferência

1.ª construção:

O e A circunferência e ponto dados, fig. 240.

1 — Trace-se o raio OA, que termina no ponto dado.

2 — Levante-se por A uma perpendicular a OA.

3 — A perpendicular AT é a tangente pedida.

2.ª construção:

O e A circunferência e ponto dados, fig. 241.

1 — Com um raio igual ao da circunferência dada, marque-se, a partir de A, o ponto B.

2 — De B, como centro, e com o mesmo raio, descreva-se o arco AX.

3 — Sôbre o arco AX, a partir de A, aplique-se sucessivamente duas vezes o mesmo raio, o que determina o ponto N.

4 — Ligue-se N a A; será NA a tangente pedida.

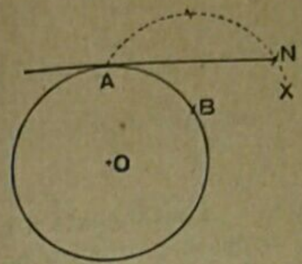


Fig. 241

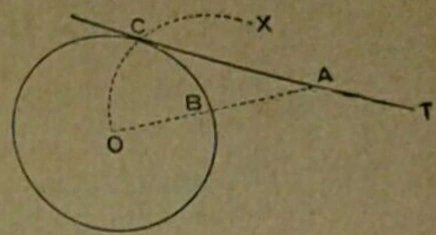


Fig. 242

111 Achar o ponto de contacto de uma tangente a uma circunferência.

O e T circunferência e sua tangente, fig. 242.

1 — Ligue-se um ponto qualquer A, da tangente ao centro O.

2 — Tome-se o meio B de OA.

3 — De B, como centro, e com o raio BO descreva-se o arco OX.

4 — A interseção C dêste arco com a circunferência, dá o ponto de contacto procurado.

Observação — Com os esquadros obtém-se o ponto de contacto, abaixando do centro O uma perpendicular sôbre a tangente.

112 Dado um ponto sôbre uma circunferência, traçar uma outra, de raio dado, que lhe seja tangente exterior ou interior.

O, A e R circunferência, ponto e raio dados, figs 243 e 244.

1 — Tire-se a reta OA, que passa pelo ponto dado A.

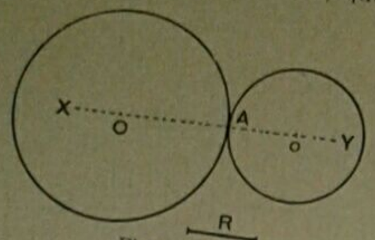


Fig. 243

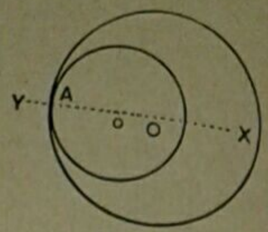


Fig. 244

2 — Marque-se Ao igual ao raio R para um ou para outro lado de A.

3 — Com **o** para centro, e raio Ao descreva-se uma circunferência, que será a pedida.

113 Descrever uma circunferência, que seja tangente a uma reta dada em um ponto dado, e passe por outro ponto qualquer dado fora da reta.

AB, D, C reta e pontos dados, fig. 245.

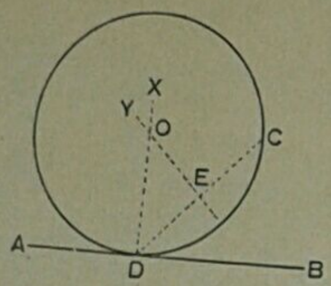


Fig. 245

1 — Por D tire-se DX perpendicular a AB.

2 — Ligue-se D a C.

3 — Levante-se EY perpendicular ao meio de DC.

4 — De O, como centro, e com o raio DO descreva-se a circunferência, que resolve o problema.

114 Por dois pontos dados, traçar uma circunferência tangente a uma reta dada.

LP, A e B reta e pontos dados, fig. 246.

1 — Trace-se a reta, AB, que passa pelos pontos dados, e prolongue-se até tocar LP em C.

2 — Procure-se a média proporcional CX aos comprimentos AC e BC, problema 98.

3 — Marque-se CE = Ce igual à média geométrica CX.

4 — Trace-se MN perpendicular ao meio de AB.

5 — Por E e **e** levantem-se perpendiculares a LP, até que encontrem MN; O e **o** são os centros; OE e **oe** os raios das circunferências, que resolvem o problema.

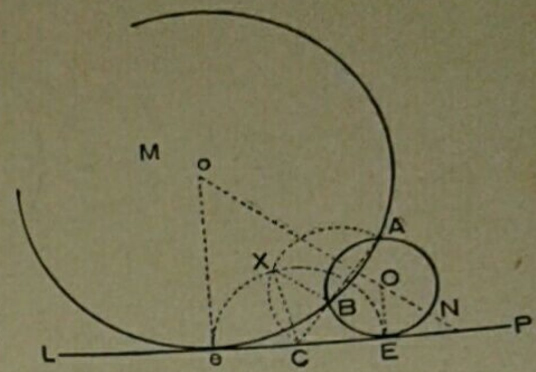


Fig. 246

Observação — Se os pontos A e B estiverem na paralela a LP, determine-se o ponto C traçando uma perpendicular ao meio

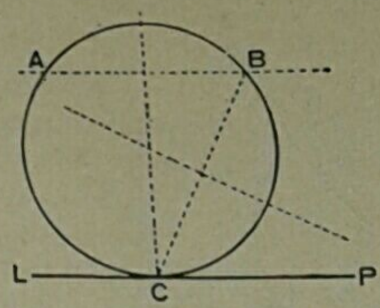


Fig. 247

de AB, fig. 247, e depois por C, A e B faça-se passar uma circunferência, que resolve o problema. Neste caso há apenas uma solução.

115 Por um ponto exterior traçar uma tangente a uma circunferência dada.

1.ª construção:

O e A circunferência e ponto dados, fig. 248.
1 — Ligue-se A ao centro O.
2 — Tome-se o meio **o** de AO.
3 — Com **o** para centro e raio **oA** descreva-se um arco de circunferência, que corte a circunferência dada, em D e E.

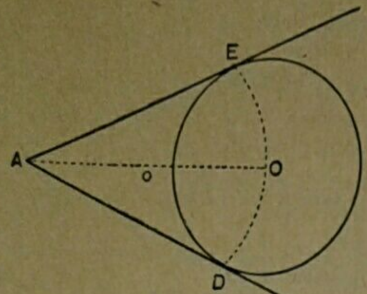


Fig. 248

4 — Trace-se AE, que será a tangente pedida.
5 — O problema admite uma 2.ª solução, dada pela reta AD.

2.ª construção:

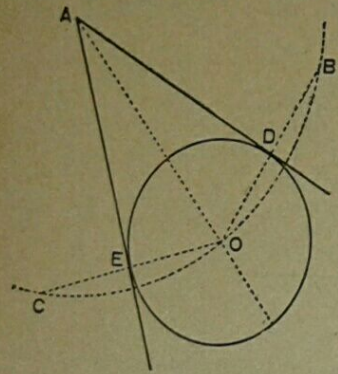


Fig. 249

O e A circunferência e ponto dados, fig. 249.

1 — Trace-se AO.

2 — De A, como centro, e com o raio AO, descreva-se o arco BOC.

3 — De O, como centro, e com raio igual ao diâmetro da circunferência O, marquem-se os pontos B e C.

4 — Tracem-se as cordas BO e CO, que cortam a circunferência em D e E.

5 — As retas AD e AE resolvem o problema.

3.ª construção:

O e M circunferência e ponto dados, fig. 250.

1 — Tirem-se do ponto M duas secantes MB e MD.

2 — Tracem-se as cordas BD e AC, prolongando-as até se encontrarem em L.

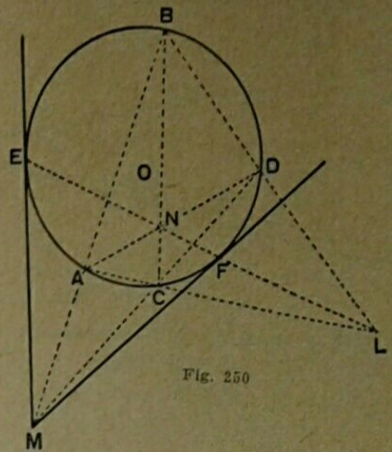


Fig. 250

3 — Tirem-se as diagonais AD e BC do quadrilátero ABDC e ligue-se o seu ponto de interseção N ao ponto L.

4 — A reta LN, que se denomina a **polar** do ponto M, determina, na circunferência, os pontos de contacto F e E.

5 — As retas ME e MF são as tangentes pedidas.

Observação — Convém que uma das secantes MB seja um pouco aproximada do centro O, a fim de se poder determinar com facilidade o ponto L.

Esta construção apresenta sôbre as precedentes a vantagem de ser executada sòmente a régua.

116 Traçar uma tangente comum exterior a duas circunferências.

1.ª construção:

O e **o** circunferências dadas, fig. 251.

1 — Trace-se a linha dos centros O**o**.

2 — Em uma direção qualquer tracem-se os raios OA e **o**B paralelos.

3 — Trace-se AB que, prolongada, encontra O**o** no ponto S, que se denomina **centro de semelhança exterior.** *

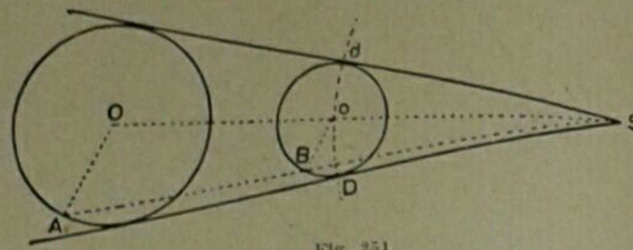


Fig. 251

4 — Por S tirem-se, à circunferência **o**, as tangentes SD e S**d**, que, prolongadas, são também tangentes à circunferência O; o problema tem, portanto, duas soluções.

2.ª construção:

O e **o** circunferências dadas, fig. 252.

1 — Trace-se O**o**.

2 — Sôbre o raio OA marque-se, a partir de A, um comprimento AB igual ao raio da circunferência menor.

3 — De O, como centro, e raio OB descreva-se uma circunferência.

4 — A esta circunferência tirem-se as tangentes **o**D e **o**E.

5 — Tracem-se os raios OD e OE, que passam pelos pontos de contacto, e prolonguem-se estes raios até F e C.

6 — Por F e C tirem-se C**c** e F**f** paralelas respectivamente a **o**E e **o**D, que serão as tangentes pedidas.

(*) Também chamado centro de homotetia direta.

Observação — Esta construção, mais longa que a precedente, resolve a dificuldade que nela se encontra, quando o ponto S, fig. 251, se acha fora dos limites do papel.

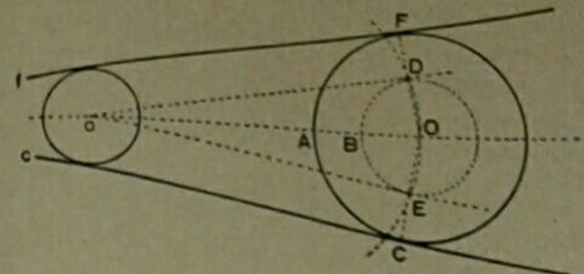


Fig. 252

117 Traçar uma tangente comum interior a duas circunferências.

1.ª construção:

O, e **o** circunferências dadas, fig. 253.

1 — Trace-se **Oo**.

2 — Tirem-se os raios OA e **o**B paralelos mas de sentidos contrários.

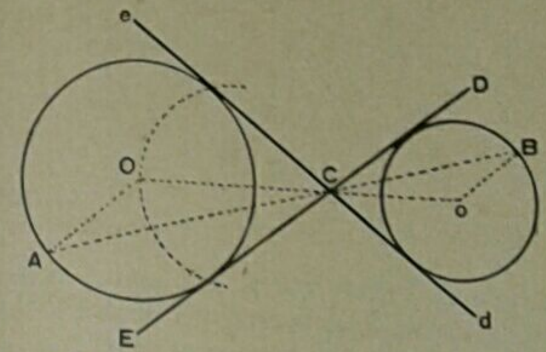


Fig. 253

3 — Trace-se AB; o ponto C denomina-se **centro de semelhança interior.** *

(*) Também chamado centro de homotetia inversa.

4 — De C tirem-se, à circunferência O, as tangentes DE e d e, que resolvem o problema.

2.ª construção:

O e **o** circunferências dadas, fig. 254.

1 — Trace-se **Oo**.
2 — Sôbre esta linha, a partir de B, marque-se BC = **oA**.
3 — De O, como centro, e com o raio OC descreva-se uma circunferência.
4 — De **o** tirem-se, a esta circunferência, as tangentes oD e **od** e depois os raios de contacto OF e OH.
5 — Por E e G tracem-se, respectivamente paralelas a OF e OH; são as retas ET e Gt, que resolvem o problema.

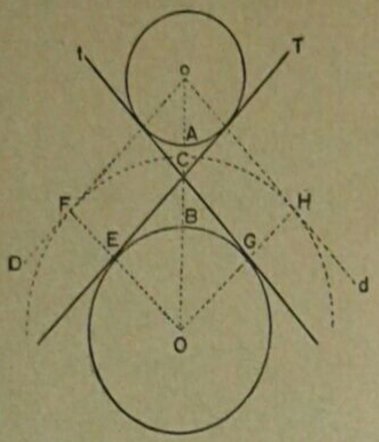


Fig. 254

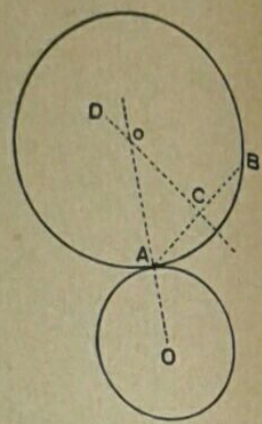


Fig. 255

118 Dada uma circunferência, um ponto sôbre ela, e um ponto exterior, descrever outra circunferência que seja tangente à primeira no ponto dado e que passe pelo ponto exterior.

O, A e B circunferência e pontos dados, fig. 255.

1 — Tire-se a reta OA e prolongue-se.
2 — Trace-se AB.

3 — Levante-se CD perpendicular ao meio de AB.
4 — De **o**, como centro, e com o raio **oA** ou **oB** descreva-se a circunferência, que resolve o problema.

Observação — Se o ponto B estiver na direção da tangente à circunferência dada no ponto A o problema é impossível.

119 Dada uma circunferência, traçar-lhe uma tangente paralela a uma reta dada.

O e AB circunferência e reta dadas, fig. 256.

1 — Trace-se OX, perpendicular a AB.
2 — Por C tire-se CT paralela a AB; será CT a tangente pedida.
3 — Prolongando-se OX até **c**, êste ponto dá uma segunda tangente **ct** paralela à AB; o problema tem, pois, duas soluções.

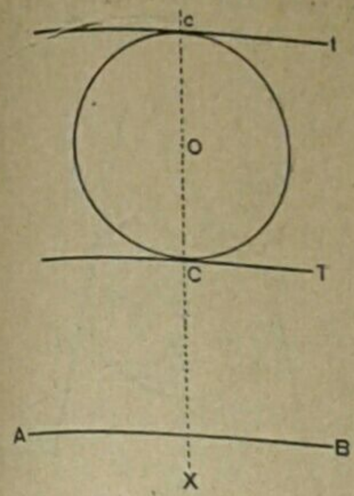


Fig. 256

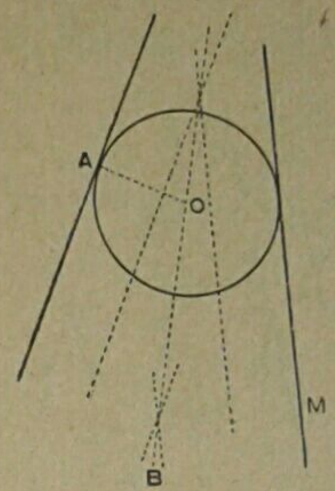


Fig. 257

120 Descrever uma circunferência tangente a duas retas concorrentes.

L e M retas dadas, fig. 257.

1 — Trace-se a bissetriz B, problema 91.

2 — De um ponto qualquer O de B, abaixe-se OA, perpendicular a L.

3 — De O, como centro e com o raio OA descreva-se a circunferência, que resolve o problema.

Observação — Este problema tem muitas soluções, porque a bissetriz B é o **lugar geométrico** dos pontos equidistantes de L e M.

Se fôr dado o raio da circunferência, a construção será a seguinte, fig. 258.

1 — Tirem-se CE e DF paralelas a L e M a uma distância igual a R, raio dado.

2 — O ponto de interseção O, que é um ponto da bissetriz, é o centro da circunferência procurada.

3 — De O, como centro, e com o raio R descreva-se a circunferência, que resolve o problema.

Quando é dado um ponto A de tangência sôbre uma das linhas M, por exemplo, a construção é a seguinte, fig. 259.

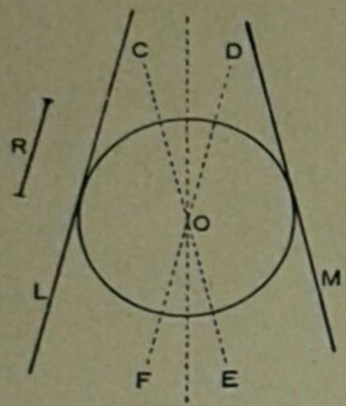


Fig. 258

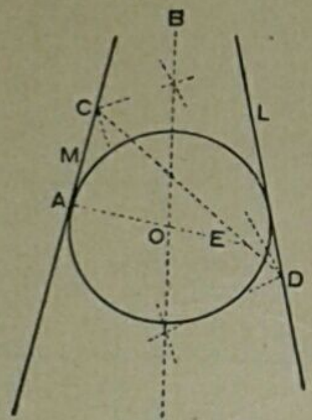


Fig. 259

1 — Tire-se a bissetriz B, problema, 91.

2 — Por A trace-se AE perpendicular a M.

3 — Do ponto de interseção O, como centro e raio OA descreva-se a circunferência, que resolve o problema.

121 Descrever uma circunferência tangente a 3 retas, que se cortam.

AD, AB, BC retas dadas, fig. 260.

1 — Tirem-se as bissetrizes AX e BY.

2 — De seu ponto de interseção O abaixe-se OE perpendicular a uma das retas.

3 — De O, como centro, e com raio OE descreva-se a circunferência pedida.

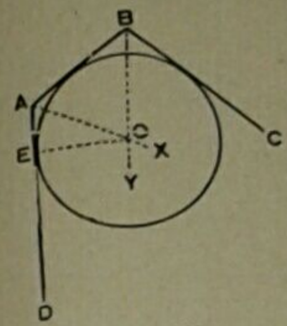


Fig. 260

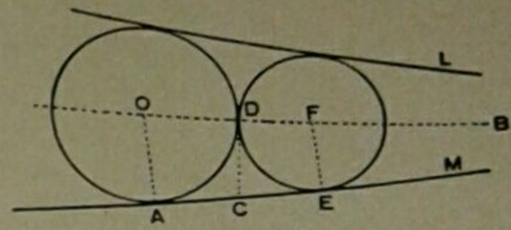


Fig. 261

122 Descrever circunferências tangentes entre si e a duas retas concorrentes.

L e M retas dadas, fig. 261.

1 — Trace-se a bissetriz B, problema 91.

2 — Tome-se um ponto qualquer O sôbre B.

3 — De O abaixe-se OA perpendicular a uma das retas, M.

4 — De O, como centro e raio OA descreva-se a primeira circunferência.

5 — Por D levante-se DC perpendicular à bissetriz B.

6 — Marque-se CD em CE.

7 — Por E levante-se EF perpendicular a M.

8 — De F, como centro, e com o raio FE descreva-se a segunda circunferência e assim por diante.

123 Por um ponto dado fazer passar uma circunferência tangente a duas retas dadas.

X, Y e A retas e ponto dados, fig. 262.

1 — De A abaixe-se AC perpendicular a VP, bissetriz do ângulo XVY.

2 — Tome-se **Ba** = BA.

3 — Construa-se CD, média proporcional entre **Ca** e CA.

4 — Sôbre VY, a partir de C, marque-se CM = **Cm** = CD.

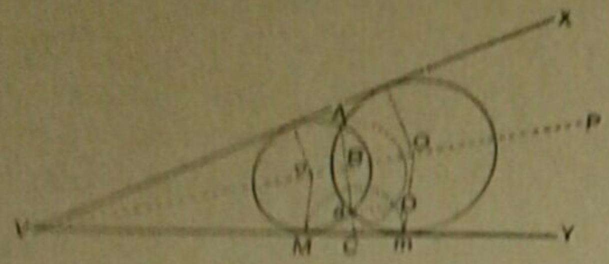


Fig. 262

5 — De M e **m** tirem-se **Mo** e **mO** perpendiculares a VY.

6 — De O e **o**, como centros, e com os raios **Om** e **oM** descrevam-se duas circunferências, que resolvem o problema.

Observação — Para construir a média proporcional CD, procede-se assim (problema 98, 2.ª construção):

1 — Trace-se sôbre AC a semi-circunferência ADC.

2 — Levante-se **a**D perpendicular a AC.

3 — A corda CD é a média proporcional.

124 Descrever com um raio dado uma circunferência tangente a duas outras.

O, **o** e R circunferências e raio dados, fig. 263.

1 — Represente-se por 1 o raio da circunferência O e por 2 o raio da circunferência **o**.

2 — De O como centro e raios iguais a R + 1 (na fig. representado por 6) e R — 1 (na fig. representado por 5) descrevam-se duas circunferências. Em seguida, de **o** como centro e raios iguais a R + 2 (na fig. representado por 3) e R — 2 (na fig. representado por 4) descrevam-se outras duas circunferências. Estas 4 circunferências se cortam em 8 pontos (MN), (**mn**), (PR), (QS).

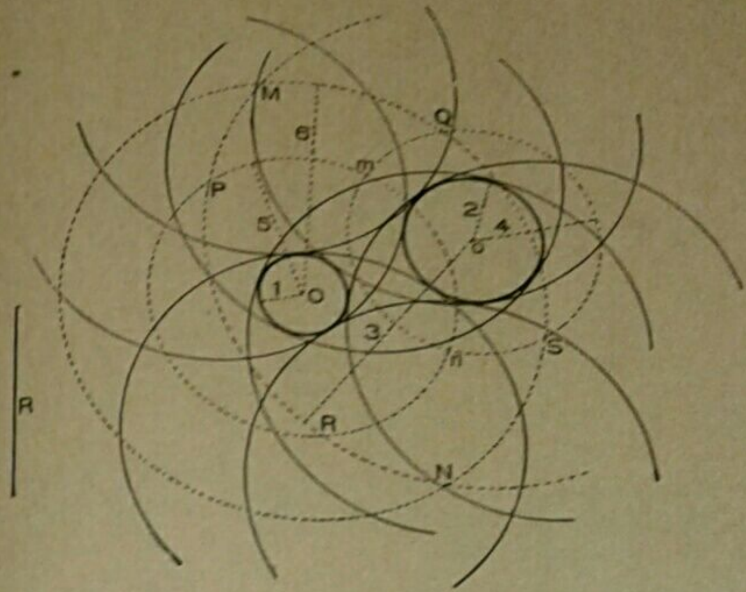


Fig. 263

3 — Dêstes pontos, como centros, e com o raio dado R descrevam-se 8 circunferências, que resolvem o problema.

Observação — Este problema tem no máximo 8 soluções; nem sempre, porém, se encontram tôdas; pode acontecer mesmo que não se encontre nenhuma, isto é, que o problema seja impossível.

125 Traçar uma circunferência tangente a uma reta em um ponto dado desta e a outra circunferência dada.

O, AB e C circunferência, reta e ponto dados, fig. 264.

1 — Por C trace-se DX perpendicular a AB.

2 — Marque-se o raio da circunferência O em CD e CF.

3 — Trace-se OD e OF.

4 — Levantem-se EG e LM perpendiculares ao meio de OD e de OF.

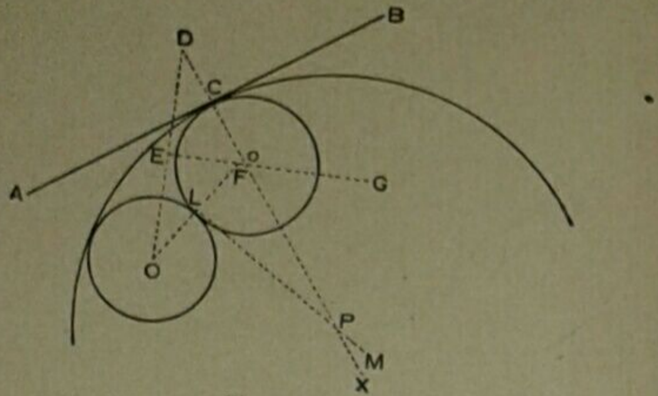


Fig. 264

5 — Dos pontos o e P, de interseção daquelas perpendiculares com DX, tracem-se duas circunferências, que tenham respectivamente os raios oC e PC.

6 — Estas circunferências resolvem o problema.

126 Descrever uma circunferência tangente a duas outras dadas, sendo dado o ponto de tangência sôbre uma delas.

O, P e A circunferências e ponto dados, fig. 265.

1 — Trace-se a reta PA.

2 — Para um e outro lado de A marque-se AB e AC iguais ao raio da circunferência O.

3 — Tracem-se as retas OB e OC.

4 — Levantem-se perpendiculares ao meio de OC e OB, prolongando-as até encontrarem PA.

5 — Dos pontos de interseção M e N, como centros, e com os raios, MA e NA descrevam-se duas circunferências, que resolvem o problema.

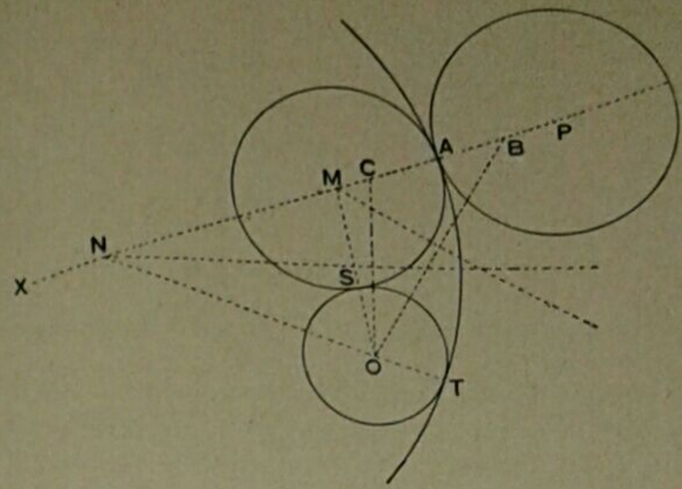


Fig. 265

6 — Os pontos de contacto T e S se obtêm traçando as retas NO e MO.

Observação. — Este problema tem duas soluções.

Há um único caso em que êle só tem uma solução: quando uma das retas, OC ou OB, tiver posição perpendicular a PA.

Está claro que, quando OC fôr perpendicular a PA, a reta OB não o será, e vice versa; tem-se assim, nesta hipótese, ou um centro M, ou um centro N, e o problema terá uma só solução.

127 Dada a corda e a flecha de um arco descrever êsse arco.

AB e F corda e flecha dadas, fig. 266.

1 — Levante-se DX perpendicular ao meio de AB

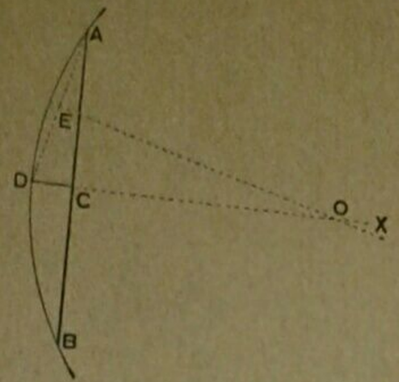


Fig. 266

2 — Marque-se de C para D o comprimento da flecha F.

3 — Trace-se AD.

4 — Levante-se EO perpendicular ao meio de AD.

5 — De O, como centro e com o raio OD descreva-se o arco ADB pedido.

Observação — Sendo dados os valores numéricos da corda e da flecha, o raio obtém-se pela fórmula: $R = \dfrac{C^2 + 4F^2}{8F}$ em que C é a corda e F a flecha.

128 Traçar uma circunferência que passe por dois pontos dados e seja tangente a outra circunferência dada.

O, A e B circunferência e pontos dados, fig. 267.

1 — Faça-se passar por A e B uma circunferência T, que corte a circunferência dada O; têm-se assim os pontos de interseção D e E.

2 — Tracem-se as retas AB e DE e de seu ponto de interseção F tirem-se tangentes à circunferência O; é bastante sòmente determinar os pontos de contacto H e G dessas tangentes.

3 — Pelos pontos G, A, B e H, A, B façam-se passar as circunferências S e R, que resolvem o problema.

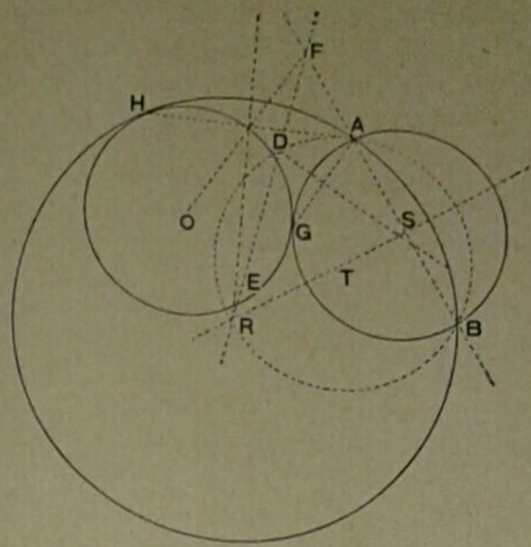


Fig. 267

129 Traçar uma circunferência que passe por um ponto dado e seja tangente a duas circunferências dadas.

O, Q e A circunferências e ponto dados, fig. 268.

1 — Trace-se a tangente TtS comum exterior às duas circunferências dadas, problema 116.

2 — Pelos pontos de contacto T

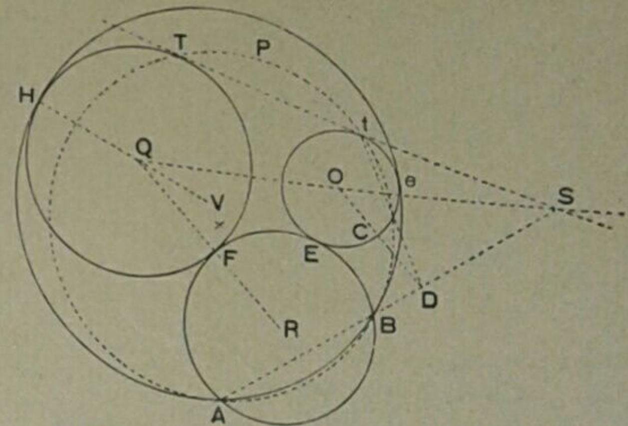


Fig. 268

e **t** e pelo ponto dado A faça-se passar uma circunferência P, problema 108.

3 — Ligue-se o ponto A ao centro de semelhança exterior S; esta reta determina na circunferência P um ponto B.

4 — Pelos pontos A e B trace-se uma circunferência tangente a uma das duas circunferências dadas O ou Q, ela será também tangente à outra, problema 128.

5 — Fazendo aplicação do problema 128, é preciso fazer passar pelos pontos A e B uma circunferência que côrte uma qualquer das circunferências dadas; a mesma circunferência P pode aqui ser aproveitada; trace-se então, como naquele problema, a secante **tD**.

6 — Determinem-se os pontos de contacto E e **e** das tangentes tiradas de D à circunferência O.

7 — Fazendo passar por E, A e B uma circunferência, tem-se uma solução do problema, é a circunferência R; obtém-se uma segunda solução fazendo passar por **e**, A e B uma circunferência V.

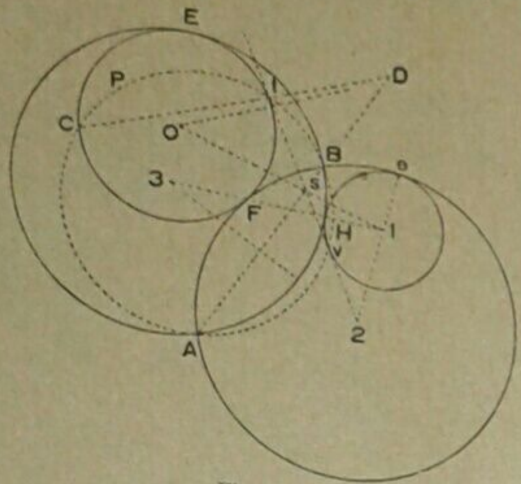


Fig. 269

8 — Para que os pontos de contacto H e F fiquem determinados com nitidez gráfica conveniente, devem-se primeiro traçar as retas HQV e QFR.

9 — Este problema admite ainda duas outras soluções, que se obtêm empregando o centro de semelhança interior das circunferências dadas.

10 — Pelos pontos **t** e **v** fig. 269, de contacto da tagente comum interior às duas circunferências dadas e pelo ponto A faça-se passar uma circunferência P.

11 — Ligando o ponto A ao centro de semelhança interior **s**, determine-se na circunferência P o ponto B.

12 — Pelos dois pontos A e B faça-se passar uma circunferência tangente a uma das duas circunferências dadas; ela será também tangente à outra.

13 — Aproveitando, como na construção precedente, a mesma circunferência P, determinem-se os pontos de contacto E e F das tangentes tiradas de D à circunferência O.

14 — Fazendo passar por E, A e B uma circunferência obtém-se uma solução: é a circunferência 3; a circunferência 2, que passa por F, A e B é a segunda solução.

15 — Convém antes de traçar as circunferências 2 e 3 assinalar os pontos de contacto **e** e H e para isso tracem-se as retas 2—1—**e** e 1—3.

Definições — Se de um ponto P tomado fora de uma circunferência O, fig. 270, se tiram duas tangentes PM e PN, a corda MN, que liga os pontos de contacto das duas tangentes denomina-se **a polar do ponto** P.

Se se têm duas circunferências exteriores O e T fig. 271, as tangentes comuns exteriores **Mm** e **Nn** prolongadas, concorrem em

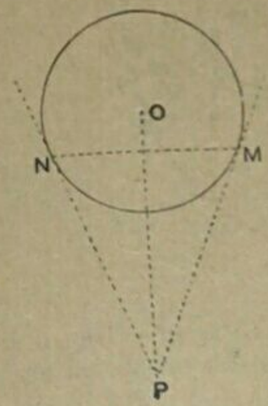


Fig. 270

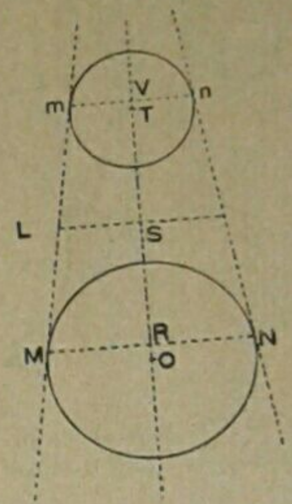


Fig. 271

um ponto C, situado na linha dos centros OT e já denominado, problema 116 n. 3, **centro de semelhança exterior;** se as tangentes são comuns interiores, este ponto é o **centro de semelhança interior.**

As retas MN e **mn** são as polares comuns ao centro de semelhança exterior.

A reta LS perpendicular ao meio de RV é o **eixo radical** ou a **dishomóloga** das duas circunferências consideradas O e T.

Para traçar o eixo radical é necessário ter traçado as polares; estas se traçam pelo problema 115, 3.ª construção.

130 Traçar uma circunferência tangente a 3 outras dadas.

1.ª construção:

Sejam então O, 1, 2 as três circunferências, dadas fig. 272.

1 — Tracem-se as polares AB e **ab** das circunferências O e 1 e em seguida a dishomóloga DE.

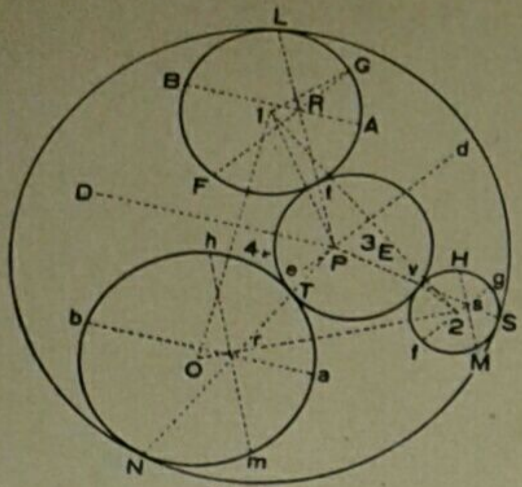


Fig. 272

2 — Tracem-se também as polares GF e **gf** e logo a dishomóloga **de**; as duas dishomólogas DE e **de** concorrem em um ponto P.

3 — Tracem-se as polares HM e **hm** das circunferências 2 e O.

4 — Em cada circunferência as polares se cortam determinando os pontos R, **r**, **s**; liguem-se êsses pontos ao ponto P; obtêm-se assim os pontos T, **t**, **v**.

5 — Faça-se passar por T, **t** e **v** uma circunferência 3, que resolve o problema.

6 — As retas PR, **Pr** e **Ps** que determinaram os pontos T, **t** e **v**, sendo prolongadas vão determinar, nas circunferências dadas, os pontos L, S e N, pelos quais, fazendo passar a circunferência 4, obtêm-se uma segunda solução do problema.

Observação — Este problema, de que Gergonne (*) se ocupou em 1814, admite oito soluções e ainda as variedades resultantes da situação relativa dos dados.

As outras seis soluções obtêm-se empregando as polares interiores combinadas com as exteriores.

Assim, têm-se duas soluções traçando as polares interiores da circunferência O combinada com cada uma das outras duas circunferências e as polares exteriores destas duas últimas circunferências.

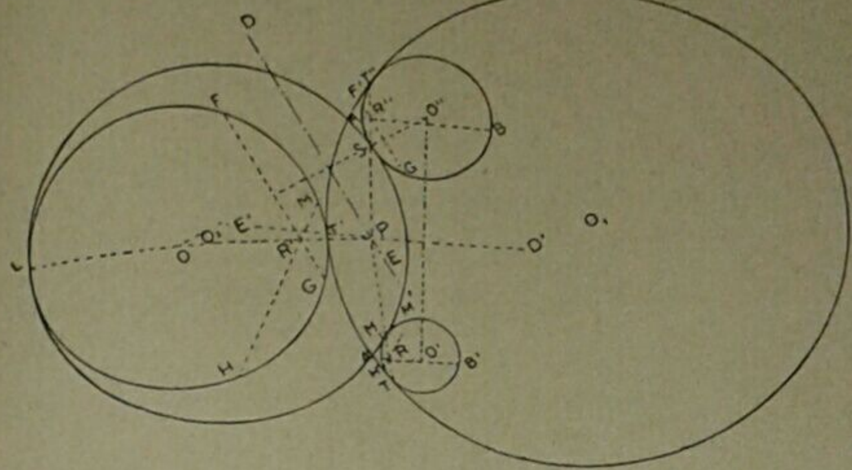


Fig. 273

A fig. 273 indica esta construção, dadas as circunferências O, O' e O"; as polares comuns de O e O" são GF e G'F'; as de O' e O são HM e H'M' as polares exteriores de O' e O" são AB e A'B'.

(*) **Gergonne (Joseph Diez)** — matemático francês, nascido em Nancy em 1771, falecido em Montpellier em 1859.

Outras duas soluções se encontram traçando, fig. 274, as polares interiores (F'G', FG) (AB, A'B'), da circunferência O" combinada com cada uma das circunferências O e O' e as polares exteriores (HM, H'M') destas duas últimas circunferências.

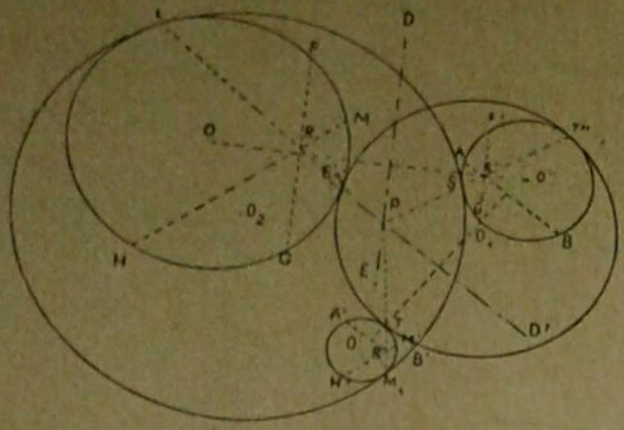


Fig. 274

Finalmente, as duas soluções restantes se obtêm traçando as polares interiores (FG, **fg**) (HM, **hm**) da circunferência 1 combinada com cada uma das circunferências O e 2 e as polares exteriores (AB, **ab**) destas duas últimas circunferências, fig. 275.

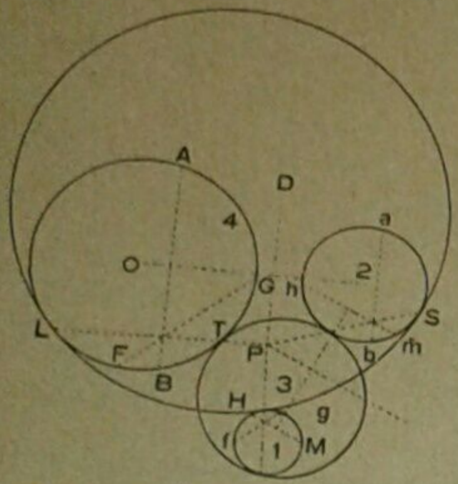


Fig. 275

2.ª construção:

O 1 e 2 circunferências dadas, fig. 276.

1 — Diminuam-se os raios das circunferências O e 2 do raio da circunferência 1; ficam aquelas reduzidas às circunferências B e a pontilhada com centro em O.

2 — Pelo ponto 1, centro da circunferência menor, façam-se passar duas circunferências, problema 129, tangentes às circunferências A e B; obtêm-se assim as circunferências C e D, cujos centros são 3 e 4.

3 — Fazendo centro em 3 e diminuindo o raio 3-1 da circunferência D de uma quantidade 1G, igual ao raio da circunferência 1, obtém-se o raio da circunferência EG, que representa uma primeira solução do problema.

4 — Aumentando o raio 4-1 da circunferência C, de uma quantidade 1-I, também igual ao raio da circunferência 1, tem-se o raio da circunferência HLI que dá a segunda solução.

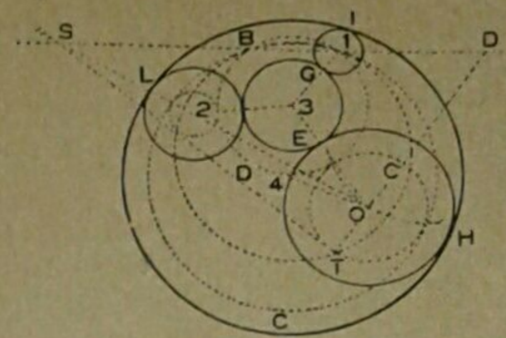


Fig. 276

5 — Para acusar com a nitidez gráfica indispensável os pontos de contacto convém, antes de descrever as circunferências pedidas 3 e 4, traçar as retas 1-3; 3-O; 3-2 e 4-O-H; 4-2-L; e 4-1-I.

6 — Como já dissemos, este problema tem 8 soluções; as duas primeiras da fig. 276 foram obtidas empregando o centro de semelhança exterior S e diminuindo os raios das circunferências O e 2 do raio da menor circunferência 1.

7 — Empregando ainda o centro de semelhança exterior S e aumentando os raios das circunferências O e 2 de um comprimen-

te igual ao raio da menor 1, obtêm-se duas outras soluções, como mostra a fig. 277.

8 — Empregando o centro de semelhança interior S e diminuindo o raio da circunferência O e aumentando o da outra 2 do

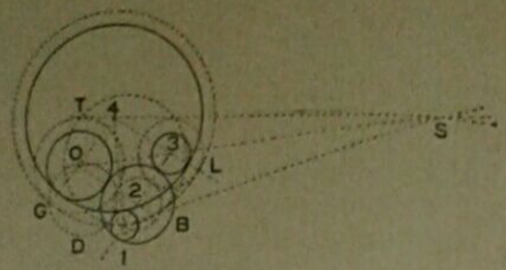


Fig. 277

raio da circunferência menor 1 obtêm-se duas outras soluções, como mostra a fig. 278.

9 — Empregando ainda o centro de semelhança interior aumentando o raio da circunferência O e diminuindo o da outra 2

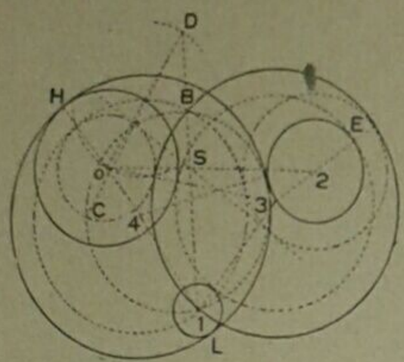


Fig. 278

do raio da circunferência 1 obtêm-se as duas outras soluções finais, como indica a fig. 279.

Observação — Como se vê, depende êste problema do problema anterior: **por um ponto dado, fazer passar uma circunferência tangente a duas outras,** para o qual, como já vimos, o centro de semelhança exterior fornece duas soluções e o interior outras duas.

Pois, 4 soluções se obtêm com o centro de semelhança exterior e diminuindo ou aumentando os raios de duas circunferências dadas do raio da menor delas.

As outras 4 se obtêm utilizando o centro de semelhança interior, aumentando o raio de uma e diminuindo o da outra, do raio da menor delas e vice-versa.

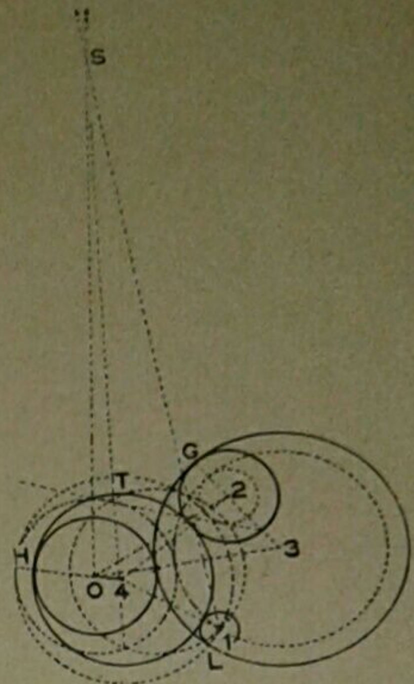


Fig. 279

131 Traçar três circunferências tangentes entre si e a uma circunferência dada.

O, circunferência dada, f. 280.

1 — Divida-se a circunferência O em três partes iguais.

2 — Tracem-se os raios OA, OC, e OB e prolongue-se OB.

3 — Em A trace-se a tangente AT e em TO tome-se TE = TA.

4 — Perpendicularmente a TO trace-se EF, que determina em OA o centro 1 da primeira circunferência, cujo raio é 1A.

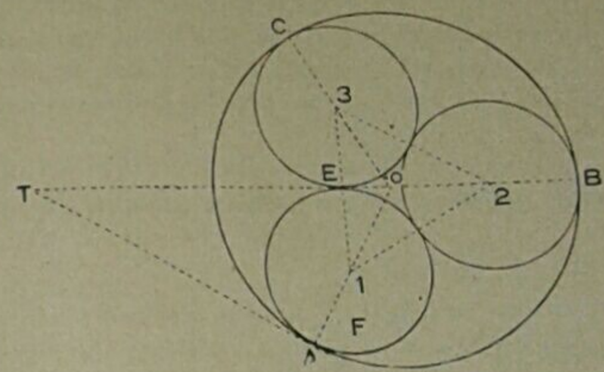


Fig. 280

5 — Tome-se B2 e C3 respectivamente iguais a A1 e têm-se em 2 e 3 os centros das duas outras circunferências, que resolvem o problema.

132 Dividir um arco de circunferência em duas partes iguais.

AB arco dado, fig. 281.

1 — De A e B, como centros, e, com um raio maior que a metade da corda AB, descrevam-se dois arcos, que se cortem, em C e E.

2 — Trace-se CE; D será o meio do arco.

Observação — Quando se conhece o centro do arco é desnecessário determinar E; une-se C ao centro.

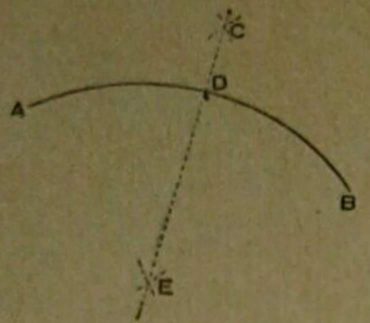


Fig. 281

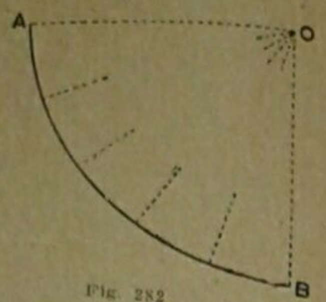


Fig. 282

Para dividir o arco AB em um número de partes igual a uma potência de 2 basta dividir cada um dos arcos AD e BD em duas partes iguais, em seguida dividir cada um dos arcos obtidos, em duas partes iguais e assim sucessivamente até o número de partes que se quiser.

133 Dividir um arco em um número qualquer de partes iguais.

AB arco dado, fig. 282.

1— Unam-se os extremos do arco ao centro O.

2 — Divida-se o ângulo AOB no número de partes em que se quer dividir o arco, problema 93.

3 — As semi-retas que dividem o ângulo, prolongadas, dividem o arco como se pede.

134 Retificar um arco menor de 90°.

AB arco dado, fig. 283.

1 — Trace-se o diâmetro AD e prolongue-se de um comprimento DF igual ao raio do arco.

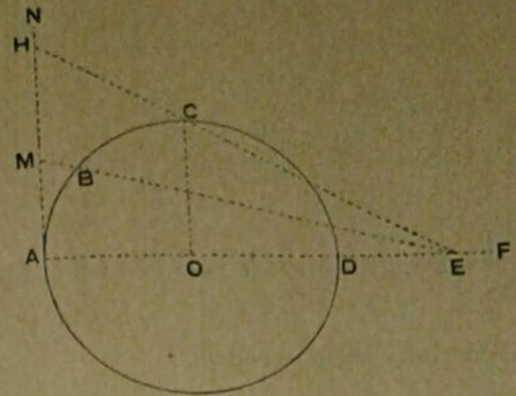


Fig. 283

2 — Divida-se DF em quatro partes iguais e a última destas partes divida-se por sua vez em 5 partes iguais; marque-se com a letra E o extremo da primeira destas partes menores.

3 — Tire-se AN tangente em A.

4 — Da quarta divisão E, a partir de F, tire-se EB e prolongue-se até encontrar a tangente.

5 — O segmento AM dessa tangente é o arco retificado.

6 — O ponto E fica distante de D de $\frac{4}{5}$ do raio do arco, porque de E até D vão 16 divisões do raio DF, dividido em 20 partes, o que dá para comprimento de DE, $\frac{16}{20}$ de R ou $\frac{4}{5}$ R.

7 — Tem-se assim um outro meio de determiuar o ponto E, sobretudo pelo duplo decímetro.

8 — Se se traçar EC tem-se, em AH, o quadrante AC retificado.

9 — O desenvolvimento de dois quadrantes em relação ao raio é igual a 3,111...; com efeito, os triângulos AHE e OCE dão as relações seguintes:

$$\frac{AH}{OC} = \frac{EA}{EO} \text{ ou } \frac{AH}{R} = \frac{2R + \frac{4}{5}R}{R + \frac{4}{5}R}$$

ou

$$\frac{AH}{R} = \frac{\frac{14}{5}R}{\frac{9}{5}R} \text{ ou } \frac{AH}{R} = \frac{14}{9} = 1,5555\ldots$$

A razão de um quadrante AH para o raio é 1,5555... pois, a de 2 quadrantes para o raio será = 2 × 1,555... 3,1110.

135 Retificar uma circunferência.

1.ª construção:

O, circunferência dada, fig. 284.

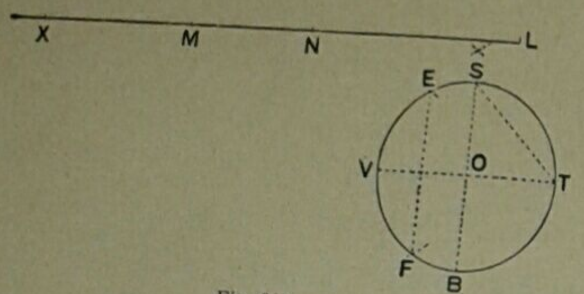


Fig. 284

1 — Tracem-se dois diâmetros perpendiculares SB e VT.
2 — Trace a corda ST.
3 — Marque-se o raio em VE e tire-se EF.

4 — Sôbre uma reta XL tome-se XM = EF e em seguida MN = ST.

5 — A reta XN é a semi-circunferência retificada; o dôbro de XN será portanto, o comprimento da circunferência dada.

6 — Esta construção dá pràticamente a exatidão suficiente ao traço gráfico; teòricamente, porém, ela dá o comprimento da circunferência com um êrro, por excesso de aproximadamente $\frac{1}{212}$.

As cordas ST e EF representam, como se verá adiante, problema 136, os lados do **quadrado** e do **triângulo equilátero** inscritos na circunferência dada.

Tem-se assim, se o raio SO é igual à unidade:

$$ST = \sqrt{2} = 1,4142$$

$$EF = \sqrt{3} = 1,7320$$

donde ST + EF = 3,1462 valor que excede o verdadeiro em 0,0047, que corresponde pròximamente a $\frac{1}{212}$ do raio.

2.ª construnão:

O, circunferência dada, fig. 285

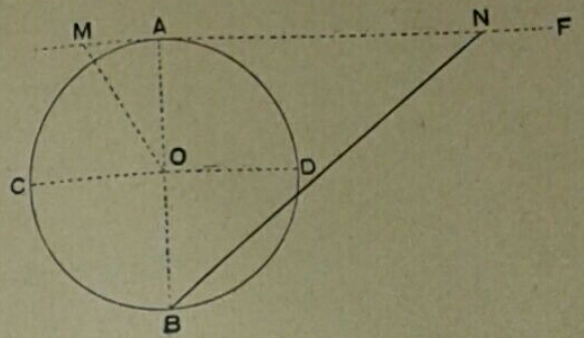


Fig. 285

1 — Tracem-se os diâmetros perpendiculares AB e CD.

2 — De C, como centro, e com um raio CO, marque-se um ponto da circunferência.

3 — Trace-se em A a tangente AF.

4 — Tire-se o raio que prolongado, marque o ponto M.

5 — Sôbre AF, a partir de M, marque-se, 3 vezes, a grandeza do raio GO e trace-se BN.

6 — BN é o comprimento da semi-circunferência; o dobro de BN é a circunferência O retificada.

7 — A razão do desenvolvimento obtido para o raio é na construção igual a 3,141535...; com efeito, supondo o raio igual à unidade, basta calcular o valor de BN para ter aquele valor.

O triângulo retângulo BAN dá:

$$BN = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AN}^2} \quad \text{ora}$$
$$AB = 2$$
$$AN = MN - AM = 3 - AM$$

Como AM é a tangente de 30°, vem:

$$BN = \sqrt{2^2 + 2{,}422052} = \sqrt{9{,}860242711004} = 3{,}141535$$

3.ª construção:

O, circunferência dada, fig. 286.

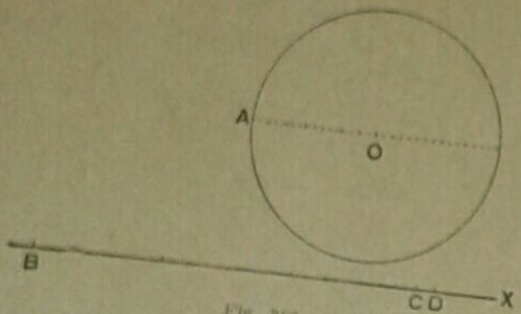


Fig. 286

1 — Da relação da circunferência para o diâmetro estabelecida por Arquimedes deduz-se um processo gráfico para retificar uma circunferência dada.

Esta relação é igual a $\frac{22}{7}$ e significa que uma circunferência

retificada é igual a 22 vezes um sétimo do diâmetro, donde uma semi-circunferência é igual a 22 vezes um sétimo do raio ou 3 raios e mais um sétimo do raio.

2 — Divida-se o raio OA em 7 partes iguais.

3 — Sôbre uma reta indefinida BX marque-se de B até C três vezes o raio, e depois de C, uma parte CD igual a um sétimo do raio OA.

4 — O segmento BD é a semi-circunferência retificada; o dôbro de BD é o comprimento da circunferência dada.

5 — O comprimento da semi-circunferência de raio igual a 1 é nesta construção igual a 3,1428....

4.ª construção:

O, circunferência dada, fig. 287.

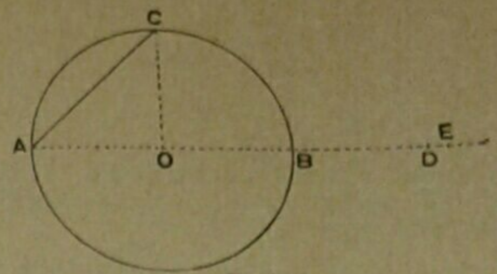


Fig. 287

1 — Trace-se o diâmetro AB e prolongue-se.

2 — Trace-se o raio OC perpendicular a AB e ligue-se A a C.

3 — Sôbre o prolongamento de AB tome-se BD igual ao raio e depois de D um comprimento DE igual a um décimo de AC.

4 — AE é a semi-circunferência retificada; o dôbro de AE é o comprimento da circunferência O.

5 — Esta construção é muito aproximada e dá para valor da semi-circunferência de raio igual à unidade o seguinte: 3,14142...

Com efeito, AD = 3 e AC = $\sqrt{2}$ = 1,4142...

Um décimo de AC = 0,14142... logo,

AE = AD + DE = 3 + 0,14142 = 3,14142.

5.ª construção:

O, circunferência dada, fig. 288.

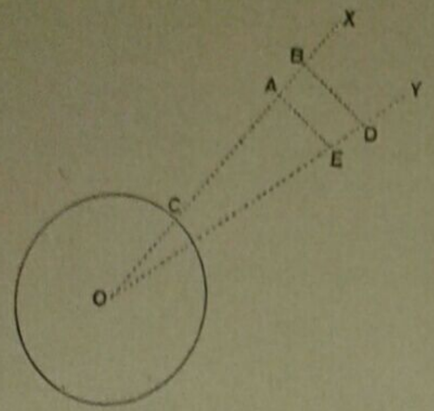


Fig. 288

1 — Representando por D o desenvolvimento da semi-circunferência, tem-se $D=\pi R$, que se pode escrever $D \times 1 = \pi \times R$.

2 — Daí, $\frac{1}{R} = \frac{\pi}{D}$; multiplicando ambos os termos da 1.ª fração por 3, resulta $\frac{3}{3R} = \frac{\pi}{D}$.

3 — Obtém-se, pois, D construindo uma 4.ª proporcional a 3,3R e π.

4 — 3 e π podem ser avaliadas em uma escala qualquer.

5 — Na escala 1:50 a divisão principal corresponde a 0,02; portanto 3 avaliado nesta escala corresponde a $3 \times 0{,}02 = 0{,}06$ ou 6 centésimos e π vale $\pi \times 0{,}02 = 3{,}1416 \times 0{,}02 = 0{,}062832$ ou 63 milésimos.

6 — Construa-se então o ângulo XOY e tome-se no lado OX uma grandeza OA igual a 6 centésimos, correspondentes a 6 centímetros, a partir de O; em seguida, também a partir de O, tome-se OB igual a 3 vezes o raio OC.

7 — No lado OY tome-se OE igual a 63 milésimos, que correspondem a 63 milímetros.

8 — Trace-se AE e depois BD paralela a AE; o comprimento OD resolve o problema.

6.ª construção:

O, circunferência dada, fig. 289.

1 — Divida-se a circunferência dada em um certo número de partes iguais, em 12, por exemplo.

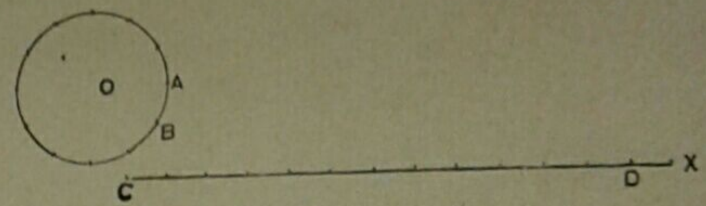


Fig. 289

2 — Sôbre uma reta CX marque-se, a partir de C, sucessivamente 12 vezes a corda AB de um dos arcos, o comprimento CD é a circunferência O retificada.

Observação — Este processo, cômodo e fácil, dá, entretanto, uma retificação pouco aproximada; quanto maior fôr o número de divisões da circunferência, menor será o êrro.

O comprimento da circunferência pode também ser obtido pela fórmula $C=2\pi R$, em que π é um número constante 3,14159... e R é o raio.

Para fazer uso desta fórmula, meça-se com o duplo decimetro o comprimento do raio OC, fig. 288, e substitua-se em R este valor numérico; nas aplicações basta tomar $\pi=3{,}1416$.

138 **Dividir uma circunferência em 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 16 partes iguais.**

Divisão em duas partes iguais.

O, circunferência dada, fig. 290.

1 — Trace-se um diâmetro qualquer AB.

2 — Os pontos A e B dividem a circunferência como se pede.

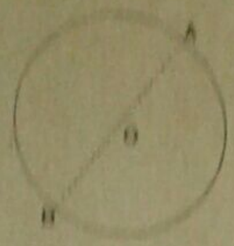


Fig. 290

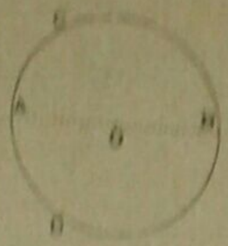


Fig. 291

Fig. 292

Divisão em três partes iguais.

O, circunferência dada, fig. 291.

1 — Trace-se um diâmetro qualquer AB.

2 — De A, como centro, e com uma abertura de compasso igual ao raio, marquem-se os pontos C e D.

3 — Os três pontos C, B e D dividem a circunferência em três arcos iguais.

Divisão em quatro partes iguais.

O, circunferência dada, fig. 292.

1 — Tracem-se dois diâmetros perpendiculares, AB e CD.

2 — Os quatro pontos A,C,B,D dividem a circunferência como se pede.

Divisão em cinco partes iguais.

O, circunferência dada, fig. 293.

1 — Tracem-se dois diâmetros perpendiculares, AB e CD.

2 — Tome-se o meio E de OB.

3 — De E, como centro, e com um raio igual à distância EC, trace-se o arco CF.

4 — A corda CF aplicada sucessivamente sôbre a circunferência divide-a em cinco partes iguais.

Divisão em seis partes iguais.

O, circunferência dada, fig. 294.

1 — A grandeza do raio aplicada sucessivamente sôbre a circunferência divide-a em seis partes iguais.

Divisão em sete partes iguais.

O, circunferência dada, fig. 295.

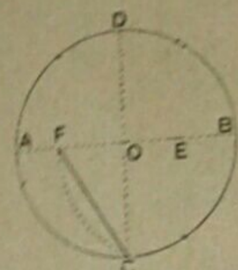


Fig. 293

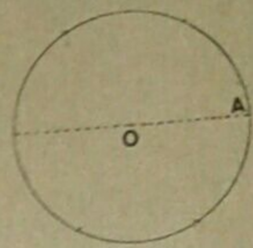


Fig. 294

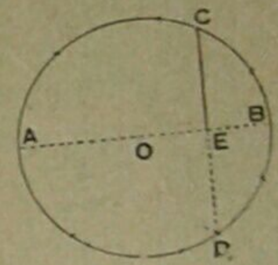


Fig. 295

1 — Trace-se um diâmetro qualquer AB.

2 — De B, como centro, e com uma abertura de compasso igual ao raio, marquem-se os pontos C e D.

3 — Trace-se CD.

4 — A grandeza CE aplicada sucessivamente sôbre a circunferência, dá a divisão como se pede.

Divisão em oito partes iguais.

O, circunferência dada, fig. 296.

1 — Divida-se a circunferência dada em quatro arcos iguais e em seguida divida-se cada arco obtido em duas partes iguais.

2 — Os pontos A, E, C, F, B, G, D, H, dividem a circunferência como se pede.

Divisão em nove partes iguais.

1.ª construção:

O, circunferência dada, fig. 297.

1 — Tracem-se dois diâmetros perpendiculares AB e CD.

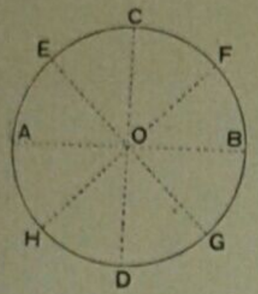


Fig. 296

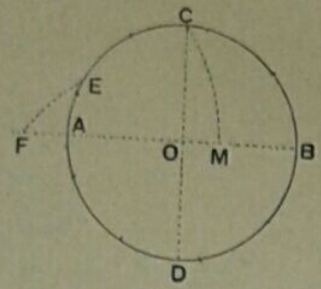


Fig. 297

2 — De C, como centro, e com uma abertura de compasso igual ao raio, marque-se o ponto E.

3 — Prolongue-se o diâmetro AB e de D, como centro, e com um raio igual a DE, trace-se o arco EF, que corte aquele prolongamento em F.

4 — De F, como centro, e com o raio FC trace-se o arco CM.

5 — A grandeza BM aplicada sôbre a circunferência, a partir de um ponto tomado sôbre ela, divide-a em nove partes iguais.

2.ª construção:

O, circunferência dada, fig. 298.

1 — Tracem-se dois diâmetros perpendiculares AB e CD.

2 — Divida-se o raio OB em seis partes iguais.

3 — De B, como centro, e com o raio BG, igual a cinco dessas partes, marque-se o ponto F.

4 — A corda CF aplicada sucessivamente sôbre a circunferência, divide-a em nove partes iguais.

Divisão em 10 partes iguais.

1.ª construção:

1 — A mesma construção da fig. 293.

2 — O comprimento OF aplicado sucessivamente sôbre a circunferência, dá a divisão pedida.

2.ª construção:

O, circunferência dada, fig. 299.

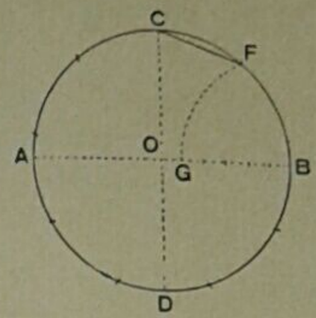


Fig. 298

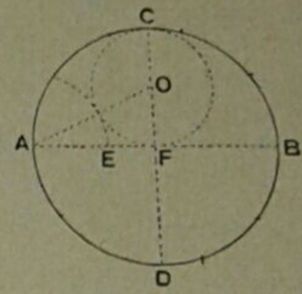


Fig. 299

1 — Divida-se o raio AF em média e extrema razão, problema 99.

2 — O segmento áureo AE aplicado sucessivamente sôbre a circunferência, determina a divisão pedida.

3.ª construção:

O, circunferência dada, fig. 300.

1 — Tracem-se dois diâmetros AB e CD perpendiculares.

2 — De D e A, como centros, e com uma abertura de compasso igual ao raio marquem-se os pontos E e F.

3 — De E, como centro, e raio EF trace-se o arco FG.

4 — O comprimento GO divide a circunferência dada em 10 partes iguais se aplicado sôbre ela sucessivamente.

Divisão em 11 partes iguais.

1.ª construção:

O, circunferência dada, fig. 301.

1 — A mesma construção da fig. 300.

2 — A corda FG, fig. 301, aplicada sucessivamente sôbre a circunferência, dá a divisão em 11 partes iguais.

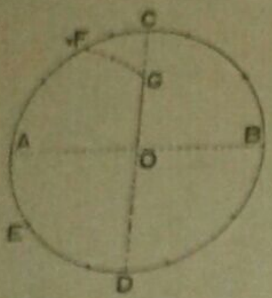


Fig. 300

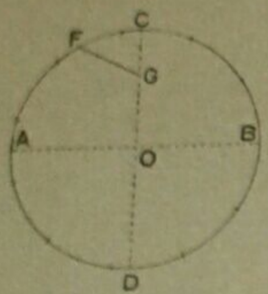


Fig. 301

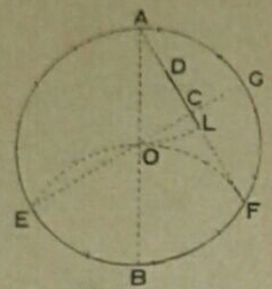


Fig. 302

2.ª construção:

O, circunferência dada, fig. 302.

1 — Trace-se um diâmetro AB.

2 — De B, como centro, e com o raio OB, descreva-se o arco EF.

3 — Trace-se AF e depois EOG, que encontre AF, em C.

4 — Marque-se o meio D de AC.

5 — De A, como centro, e raio OA descreva-se o arco OL.

6 — O comprimento DL fornece a divisão, como se pode, aplicado sucessivamente sôbre a circunferência.

Divisão em 12 partes iguais.

O, circunferência dada, fig. 303.

1 — Tracem-se os diâmetros perpendiculares AB e CD.

2 — De A, como centro, e com uma grandeza igual ao raio da circunferência, marque-se o ponto E.

3 — A corda EC aplicada sucessivamente divide a circunferência em 12 partes iguais.

Observação — A construção dada no problema 92 para dividir o ângulo reto em três ângulos iguais, aplicada a cada quadrante, resolve mais pràticamente o problema.

Divisão em 15 partes iguais.

O, circunferência dada, fig. 304.

1 — Marque-se a partir de um mesmo ponto A os arcos

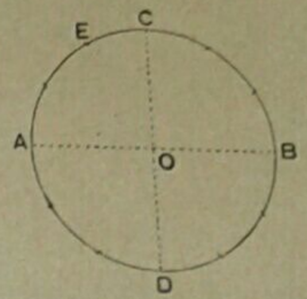


Fig. 303

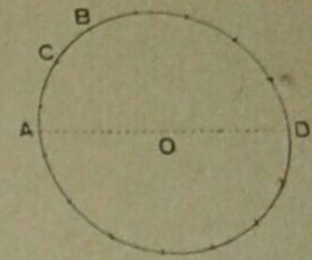


Fig. 304

$$AB = \frac{1}{6} \text{ e } AC = \frac{1}{10} \text{ da circunferência.}$$

2 — A diferença $BC = \frac{1}{15}$ da circunferência.

3 — A repetição sucessiva do arco BC divide a circunferência em 15 partes iguais.

Observação — Feita a divisão da circunferência em um número dado **n** de partes iguais, pelos processos expostos, pode efetuar-se a divisão em um número de partes representado ou por n^n, ou por $n \times 2^m$.

Para o primeiro caso, basta dividir sucessivamente o arco obtido em cada divisão, em um número de partes igual a **n**.

Para o segundo caso, basta dividir ao meio, sucessivamente o arco obtido em cada divisão.

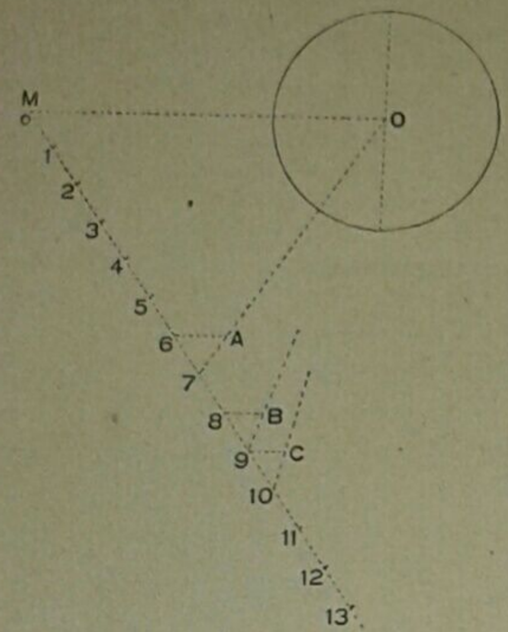


Fig. 305

137 Dividir uma circunferência em um número qualquer de partes iguais.

O, circunferência dada, fig. 305.

1 — Retifique-se a semi-circunferência e seja OM o seu comprimento.

2 — Divida-se OM em sete partes iguais, por exemplo.

3 — A sétima parte de OM aplicada sucessivamente sôbre a circunferência divide-a em 14 partes iguais.

1.ª Observação — Para determinar a fração **conveniente** de OM proceda-se do seguinte modo:

1 — Tire-se por M uma reta qualquer.

2 — A partir de M marquem-se **n divisões** iguais, de grandeza arbitrária.

3 — Ligue-se uma divisão qualquer 7, por exemplo, ao extremo O.

4 — Tire-se por 6 a reta 6A paralela a OM.

5 — O comprimento 6A é igual a $\frac{1}{7}$ de OM; este comprimento aplicado sucessivamente sôbre a circunferência, divide-a em 14 partes iguais.

6 — Conclui-se, então, da figura que 8B é o comprimento que divide a circunferência em 18 partes iguais, que 9C dá a divisão em 20 partes e assim sucessivamente.

2.ª Observação — Esta construção dá aproximadamente a divisão da circunferência, e é tanto mais exata quanto maior é o raio, e menor o número de partes pedido.

Querendo operar-se sôbre uma circunferência de grande raio, traça-se uma circunferência concêntrica de raio menor e divide-se esta em partes iguais.

Os raios tirados pelos pontos de divisão, sendo prolongados, dividem a circunferência maior como se pede.

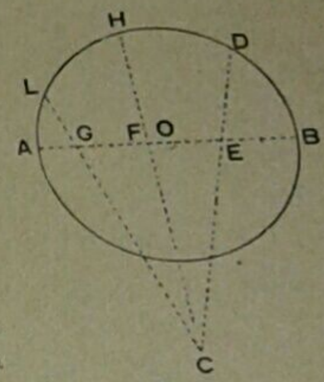


Fig. 306

2.ª construção (de Rinaldini):

O, circunferência dada, fig. 306.

1 — Divida-se o diâmetro AB em **n** partes iguais.

2 — De A e B, como centros, e com um raio igual a AB, descrevam-se dois arcos, que se cortem em C.

3 — Pelo ponto C e pela segunda divisão E tire-se CE, prolongando até D; o arco BD é a **enegésima** parte da circunferência.

Observação — Na figura o diâmetro está dividido em 7 **partes**, daí vê-se que ao comprimento BE = $\frac{2}{7}$ do diâmetro corresponde um arco BD = $\frac{1}{7}$ da circunferência.

Está claro, portanto, que ao comprimento EF=BE corresponde também um arco BD=DB e ao comprimento AG = $\frac{1}{2}$ de BE corresponderá um arco AL = $\frac{1}{2}$ de BD.

Por conseguinte, se se unir o ponto C às divisões alternadas do diâmetro, estas retas prolongadas dividirão a semi-circunferência em um número de partes, igual à metade daquele em que se quer dividir a circunferência.

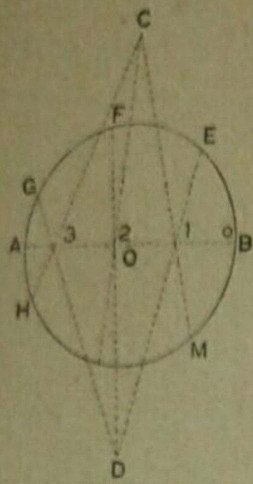


Fig 307

Na figura, a semi-circunferência ficou dividida em 3½ partes, pois que se pretendeu dividir a circunferência em 7 partes iguais.

Segue-se daqui que a construção de Rinaldini (fig. 307) pode ser estabelecida do seguinte modo.

1 — Trace-se um diâmetro AB.

2 — Divida-se este diâmetro em um número de partes igual à metade daquele em que se quer dividir a circunferência; se a divisão é em sete partes iguais, é preciso dividir AB em 3½ partes.

3 — Para isso divida-se AB em sete partes iguais e numere-se alternadamente até 3, começando por zero.

4 — De A e B, como centros, e raio AB descrevam-se para um e outro lado de AB dois arcos que se cortem, em C e D.

5 — Tracem-se as retas que liguem os pontos D e C aos pontos de divisão 1, 2, 3.

6 — Estas retas prolongadas, determinam na circunferência os pontos E, F, G, H, L e M que, com o ponto B dividem a circunferência em 7 partes iguais. A construção de Rinaldini, assim exposta, apresenta a vantagem de dividir os êrros que se acumula-

riam pela aplicação sucessiva da corda BD (fig. 306) sôbre a circunferência.

3.ª construção:

O, circunferência dada, fig. 308.
1 — Retifique-se o quadrante ED, problema 134.
2 — Divida-se o segmento resultante em **n** partes iguais.
3 — Por I e pela quarta divisão a partir de E, tire-se uma reta.
4 — Esta reta limita em M o arco EM, que é igual à **enegésima** parte da circunferência; na figura, EM é igual a $\frac{1}{10}$ da circunferência; com efeito, o segmento que vai de E até o quarto ponto sendo $\frac{4}{10}$ do quadrante retificado, tem-se:

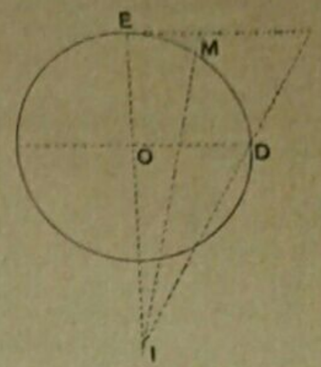


Fig. 308

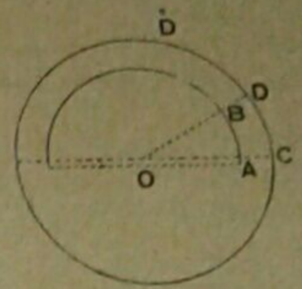


Fig. 309

$$EM = \frac{4}{10} \text{ de } ED = \frac{4}{10} \text{ de } 90° = \frac{360°}{10} = 36°$$

138 Dividir uma circunferência em um número qualquer de partes iguais com o transferidor.

O, circunferência dada, fig. 309.

1 — Divide-se 360° pelo número de partes em que se quer dividir a circunferência.

2 — Coloque-se o centro do transferidor sôbre o centro O, e marque-se um arco AB igual ao quociente achado.

3 — Tirem-se os raios OA e OB.

4 — Estes raios, prolongados ou não, determinam um arco CD, que aplicado sucessivamente sôbre a circunferência divide-a no número de partes pedido.

5 — Assim, se se quiser dividir a circunferência O em 45 partes iguais, o arco AB deve conter 8º, que é o quociente de 360 por 45.

Observação — Quando o quociente não é um número inteiro de graus, convém organizar a tabela das divisões como ensina o problema 78, 4.ª construção, para marcar com o auxílio do transferidor os números indicados na tabela. Traça-se um diâmetro qualquer com o qual se faz coincidir a **linha de fé,** e a partir desse diâmetro marca-se sucessivamente, no mesmo sentido, cada um dos números da tabela.

139 Dividir uma circunferência em um número qualquer de partes iguais pela tabela de cordas.

O, circunferência dada, fig. 310.

1 — Divida-se 360º pelo número de partes em que se quer dividir a circunferência.

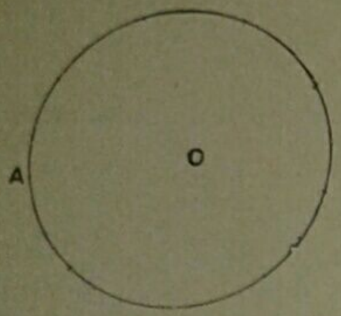


Fig. 310

2 — Na tabela procure-se a corda correspondente ao quociente achado.

3 — Multiplique-se a corda achada pelo raio da circunferência, ou construa-se a 4.ª proporcional $\frac{1}{c} = \frac{R}{x}$, em que **c** é a corda achada na tabela, e **R** o raio do círculo.

4 — Aplique-se o resultado obtido sucessivamente sôbre a circunferência que fica dividida no número de partes pedido.

5 — Assim, suponha-se que se quer dividir a circunferência dada, cujo raio tem 0m,02, em nove partes iguais; segundo o n. 1, o quociente de 360º por 9 é 40º.

6 — A corda correspondente a 40º achada na tabela é 0,68404.

7 — Segundo o n. 3, tem-se: 0,68404 × 0,02 = 0,0136808.

8 — Tomando, pois, uma abertura de compasso igual a 13 milímetros e 6 décimos e aplicando sucessivamente a partir de A, obter-se-á a divisão pedida.

Observação — Esta construção é tão rigorosa quanto se pode desejar no traçado gráfico. Se o número de partes em que se quer dividir a circunferência é um número **par,** é suficiente dividir a semi-circunferência em número de partes igual à metade do número dado, e marcar na outra semi-circunferência as extremidades dos diâmetros correspondentes a cada ponto de divisão da primeira.

140 Dividir uma circunferência em um número qualquer de partes iguais. Processo das tentativas.

O processo das tentativas aplicado a uma circunferência é exatamente o mesmo que foi exposto para o caso da divisão de um segmento de reta, problema 78, 2.º caso, 5.ª construção.

POLÍGONOS

141 Construir um triângulo, sendo dados os elementos seguintes:

1.º Um lado e os ângulos adjacentes.

M, S e R lado e ângulos dados, fig. 311.

1 — Trace-se AB = M.

2 — Faça-se no extremo A o ângulo CAB = R e no extremo B o ângulo DBA = S.

3 — Prolonguem-se os lados AC e BD até se encontrarem.

4 — O triângulo AEB resolve o problema.

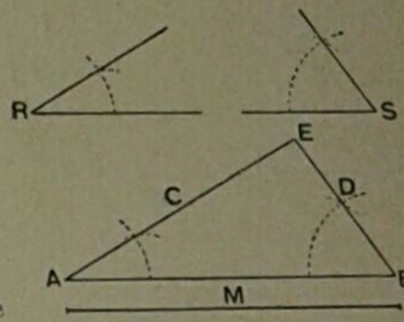


Fig. 311

Observação — O problema é impossível quando a soma dos ângulos S e R é igual a 2 ângulos retos, ou maior.

2.º Um ângulo e dois lados que o compreendem:

M, N e S, lados e ângulo dados, fig. 312.

1 — Faça-se um ângulo XAY = S.

2 — Marquem-se em AX e AY os comprimentos AB = N e AC = M.

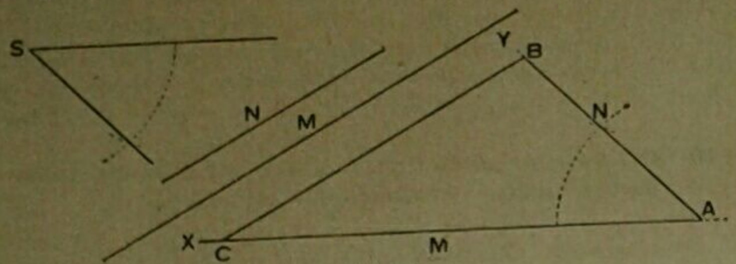


Fig. 312

3 — Trace-se BC; o triângulo ABC resolve o problema, que é sempre possível.

3.º Os três lados:

M, N e P, lados dados, fig. 313.

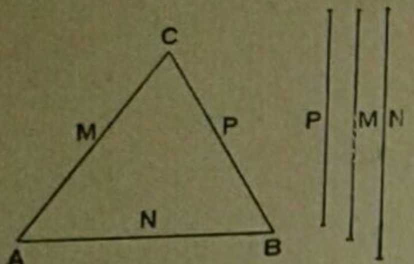


Fig. 313

1 — Trace-se AB igual a um lado qualquer, N por exemplo.

2 — De A e B, como centros, e com raios respectivamente iguais aos lados M e P, descrevam-se dois acros, que se cortem, em C.

3 — Trace-se AC e BC; o triângulo ABC resolve o problema.

Observação — O problema é impossível quando não se chega a obter a interseção C dos arcos descritos dos pontos A e B, como centros; esta condição é sempre realizável, quando qualquer dos lados é menor que a soma dos outros dois.

Se M = N = P o triângulo obtido é **equilátero,** neste caso, para resolver o problema, basta conhecer o comprimento de um lado.

Se dois lados forem iguais, obtém-se um triângulo **isósceles,** neste caso basta conhecer o lado desigual e um qualquer dos outros dois.

4.º Dois lados e o ângulo oposto a um dêles:

1.ª construção:

M, N e S, lados e ângulos dados; suponha-se S oposto a N fig. 314.

1 — Trace-se AB = N.

2 — Descreva-se sôbre N um segmento capaz do ângulo S, problema 94.

3 — De um qualquer dos extremos B, como centro, e com um raio igual a M, descreva-se um arco que determine os pontos D e E.

4 — Liguem-se êsses pontos a A e B; os triângulos ADB e AEB resolvem o problema.

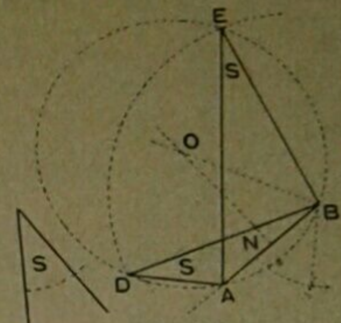


Fig. 314

Observação — Qualquer que seja a grandeza relativa dos lados M e N, e qualquer que seja o ângulo dado S quando o arco fôr tangente, ou cortar o segmento maior AB, o problema tem uma ou duas soluções.

Pode acontecer que o arco corte o segmento inferior AB; nesta hipótese o triângulo formado, como acima se indica, não resolve o problema.

O segmento capaz do ângulo S fica descrito de um lado de AB. O outro segmento é o do ângulo suplementar.

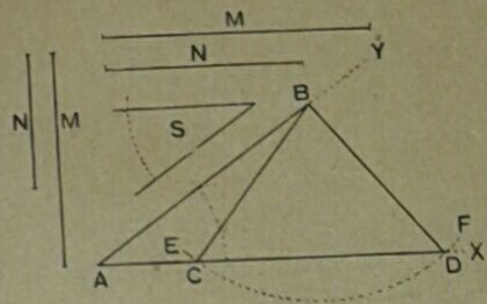


Fig. 315

2.ª construção:

M, N e S, lados e ângulo dados, S oposto a N fig. 315.

1 — Sôbre uma reta indefinida AX, faça-se um ângulo XAY igual a S.

2 — Sôbre o lado AY tome-se AB = M.

3 — De B como centro, e com um raio igual a N descreva-se um arco EF que corte AX em dois pontos C e D.

4 — Tracem-se BC e BD; os triângulos ACB e ABD resolvem o problema.

Observação — Qualquer que seja a grandeza relativa dos lados M e N e qualquer que seja a natureza do ângulo dado S quando o arco EF fôr tangente ou cortar a reta AX, o problema tem uma solução ou duas, conforme forem um ou dois os pontos comuns ao arco EF e à reta AX.

Pode acontecer que o arco EF corte a reta AX em um ponto situado à esquerda de A; tal ponto ligado a B dá um triângulo que não resolve o problema; este caso se apresenta quando o ângulo dado fôr oposto ao maior dos lados dados.

O raio do arco EF é sempre igual ao lado que fica oposto ao ângulo dado.

5.º Dois ângulos e o lado oposto a um dêles.

1.ª construção:

S, R e M, ângulos e lado dados; suponha-se M oposto a R fig. 316.

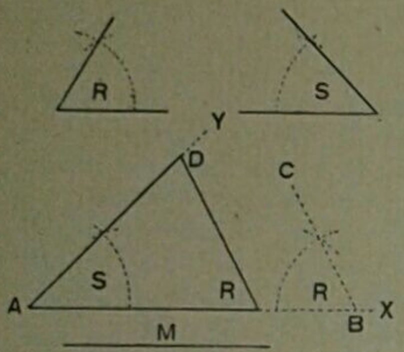


Fig. 316

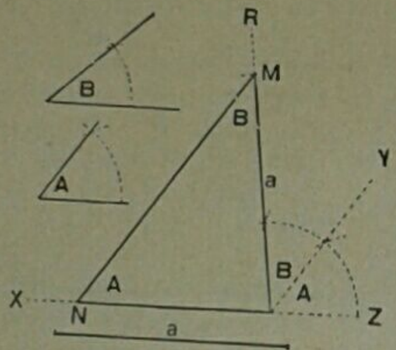


Fig. 317

1 — Faça-se um ângulo XAY igual a S.

2 — Em um ponto qualquer B de um dos lados AX, faça-se um ângulo CBA = R.

3 — Sôbre o lado AY, oposto ao ângulo CBA, tome-se AD = M.

4 — Por D tire-se uma paralela a BC, esta paralela completa o triângulo pedido.

Observação — Este problema é impossível quando a soma dos ângulos S e R é igual a dois ângulos retos ou maior.

2.ª construção:

A B e **a** ângulos e lado dados; **a** oposto a A, fig. 317.

1 — Trace-se uma reta XZ.

2 — Faça-se num ponto dessa reta um ângulo = A.

3 — Em seguida um ângulo = B adjacente ao ângulo A.

4 — Sôbre este último lado reproduza-se, a partir do vértice. a medida **a**.

5 — Por M tire-se MN paralela a Y.

6 — O triângulo obtido resolve o problema.

Observação — O problema é impossível, se os ângulos A e B valem em soma 2 ângulos retos ou mais.

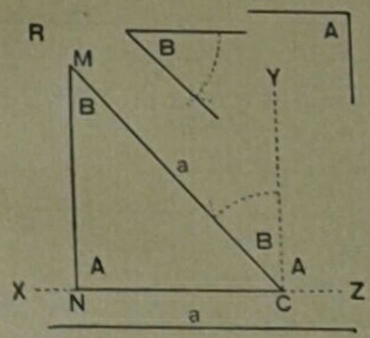


Fig. 318

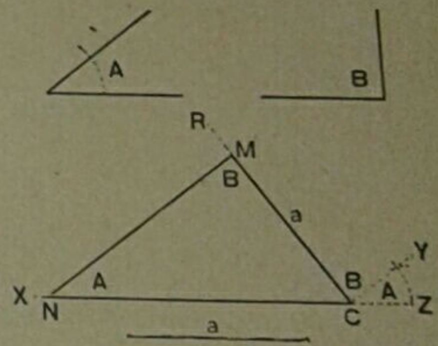


Fig. 319

Se um dos ângulos é reto, a construção é a mesma.

Na figura 318 o ângulo A é reto, e na figura 319 é o ângulo B que é reto.

6.º Um lado, ɔ ângulo oposto e a altura relativa ao lado dado.

M, H e S, lado altura relativa a M e ângulo oposto a M, fig. 320.

1 — Trace-se AB = H.

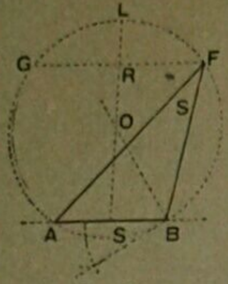


Fig. 320

2 — Construa-se sôbre AB um segmento capaz do ângulo dado S, problema 94.

3 — Ao meio de AB levante-se a perpendicular SL.

4 — Trace-se FG paralela a AB e a uma distância SR igual à altura dada H.

5 — Tracem-se AF e BF; o triângulo ABF resolve o problema.

Observação — O ponto G, que está nas mesmas condições de F, ligado a A e a B, dá um segundo triângulo igual ao primeiro.

Este problema é impossível quando a altura H é maior do que o segmento SL.

7.º Dois laαos, e a altura relativa a um dêles.

b, c e H, lados e altura dadas, fig. 321.

1 — Trace-se uma reta indefinida MX.

2 — Em um ponto qualquer D levante-se uma perpendicular DB = H.

3 — De B, como centro, e com o raio **c** descreva-se um arco, que corte MX, em A.

4 — Trace-se AB.

5 — Tome-se, a partir de A, sôbre AX, AC = **b**.

6 — O triângulo ABC resolve o problema.

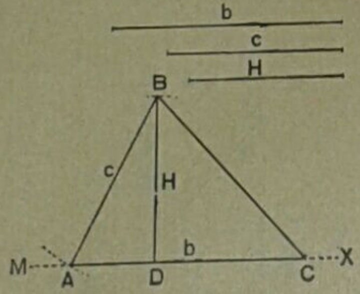


Fig. 321

8.º Um lado, um dos ângulos adjacentes e a altura relativa ao lado dado.

a, H e B lado, altura e ângulo dados, fig. 322.

1 — Trace-se uma reta indefinida XY.

2 — Em um ponto qualquer M faça-se um ângulo igual a B.

3 — Em um ponto qualquer de XY levante-se uma perpendicular = H.

4 — Por A tire-se AB paralela a MS.

5 — A partir de B tome-se BC = **a** e trace-se AC.

6 — O triângulo ABC resolve o problema.

9.º Construir o triângulo isósceles dada a base e o ângulo do vértice.

M e S base e ângulo do vértice, fig. 323.

1 — Trace-se AB = M.

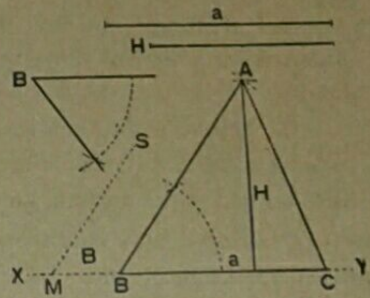


Fig. 322

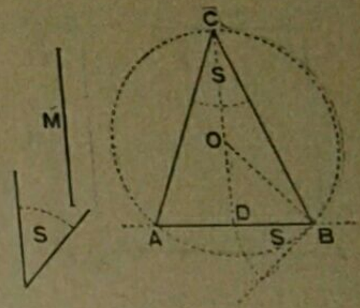


Fig. 323

2 — Sôbre M construa-se um segmento capaz do ângulo dado S, problema 94.

3 — Levante-se DO perpendicular ao meio de AB e prolongue-se até C.

4 — Tracem-se AC e BC; o triângulo ABC resolve o problema.

142 Construir um triângulo retângulo, sendo dada a hipotenusa e um catêto.

M e N hipotenusa e catêto dados, fig. 324.

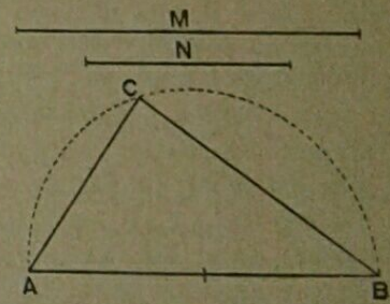


Fig. 324

1 — Trace-se AB = M.

2 — Sôbre AB como diâmetro descreva-se uma semi-circunferência.

3 — De A, como centro, e com um raio igual a N, marque-se o ponto C.

4 — Tracem-se AC e BC; o triângulo ABC resolve o problema.

143 Construir um quadrado sendo dado o lado.

1.ª construção:

M lado dado, fig. 325.

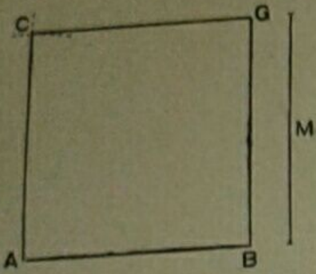


Fig. 325

1 — Trace-se AB = M.

2 — Em B, levante-se uma perpendicular a AB e sôbre ela marque-se BG = M.

3 — De A e G, como centros, e com o raio M descrevam-se dois arcos de circunferência, que se cortem, em C.

4 — Tracem-se AC e GC; tem-se em ABGC o quadrado pedido.

2.ª construção:

M lado dado, fig. 326.

1 — Trace-se AB = M.

2 — De A e B, como centros, e com o raio M descrevam-se dois arcos AX e BY, que se cortem, em O.

3 — De O, como centro, e raio M descreva-se um arco AZ que corte o arco BY, em E.

4 — Trace-se a reta BE, que determina no arco AX o ponto F.

5 — De O, como centro, e raio OF determinem-se, nos arcos AX e BY, os pontos C e D.

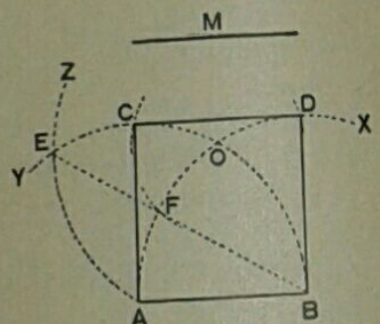


Fig. 326

6 — Tracem-se AC, CD e BD; o quadrado pedido é ABDC.

Observação — Esta construção apresenta sôbre a precedente a vantagem de dispensar o traçado de perpendiculares.

3.ª construção:

M lado dado, fig. 327.

1 — Trace-se AB = M.

2 — De A e B, como centros, e com o raio M descrevam-se os arcos E e F, que se cortem em O e deste ponto abaixe-se uma perpendicular a AB.

3 — A perpendicular determina o ponto C.

4 — De O, como centro, e com um raio igual a CB, metade de AB, descrevam-se os arcos X e Y.

5 — Tracem-se BD e AL tangentes aos arcos Y e X e DL tangentes aos arcos E e F; ABDL é o quadrado pedido.

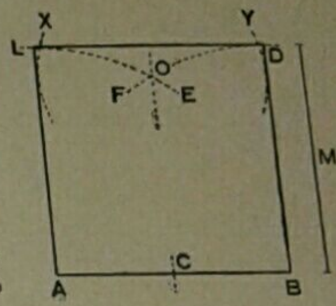


Fig. 327

Observação — Esta construção também dispensa o traçado de perpendiculares.

144 Construir um retângulo conhecendo a base e a altura.

M e N base e altura dadas, fig. 328.

1 — Trace-se AB = M.

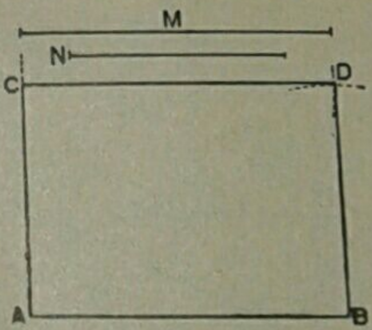


Fig. 328

2 — Em A levante-se uma perpendicular a AB e sôbre ela marque-se AC = N.

3 — De C e B, como centros, e com raios respectivamente iguais a M e a N, descrevam-se dois arcos de circunferência, que se cortem, em D.

4 — Tracem-se CD e DB; o retângulo pedido é ABDC.

145 Construir um retângulo conhecendo a diagonal e o lado.

D e N diagonal e lado dados, fig. 329.

1 — A diagonal é a hipotenusa de um triângulo retângulo de que um dos catetos é N.

2 — Construa-se sôbre AB = D o triângulo retângulo ACB, problema 142.

3 — De A e B tirem-se paralelas a BC e AC; ACBE é o retângulo pedido.

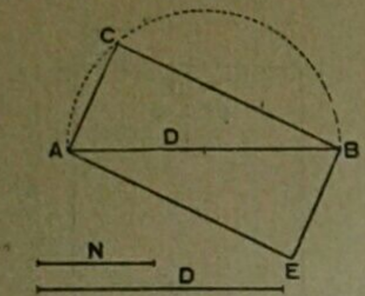


Fig. 329

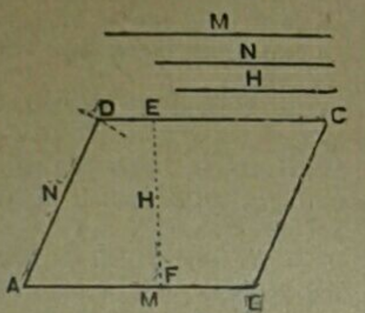


Fig. 330

146 Construir um paralelogramo, sendo dados os dois lados e a altura.

H, M e N, altura e lados dados, fig. 330.

1 — Trace-se AB = M.

2 — Tire-se uma paralela a AB, a uma distância dada pela altura H, problema 76.

3 — De A e B, como centros, e com um raio igual a N, marquem-se nessa paralela os pontos D e C.

4 — Tracem-se AD e BC; ABCD é o paralelogramo pedido.

Observação — O problema é impossível quando H é maior que N; quando H fôr igual a N, obtém-se o retângulo.

147 Construir um paralelogramo, sendo dados os dois lados e uma diagonal.

D, M e N diagonal e lados dados, fig. 331.

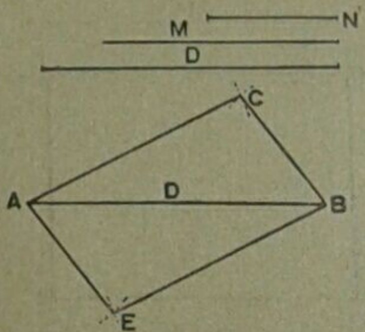


Fig. 331

1 — A diagonal é o lado de um triângulo de que os outros dois lados são M e N.

2 — Construam-se sôbre AB = D os triângulos iguais ABC e ABE, que têm para lados D, M e N, problema 141, 3.º caso.

3 — A figura AEBC é o paralelogramo pedido.

Observação — O problema é impossível quando a diagonal fôr maior ou igual à soma dos lados.

148 Construir um paralelogramo, sendo dados os dois lados e um ângulo.

M, N e S, lados e ângulo dados, fig. 332.

1 — Trace-se AB = M.

2 — Faça-se em B um ângulo = S e marque-se BC = N.

3 — De A e C, como centros, e com raios respectivamente iguais a N e M, descrevam-se dois arcos, que se cortem, em D.

4 — Tracem-se AD e CD; ABCD é o paralelogramo pedido.

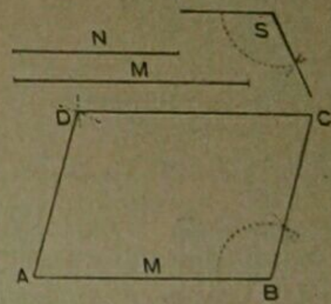


Fig. 332

149 Construir um paralelogramo, sendo dadas as diagonais e o ângulo por elas formado.

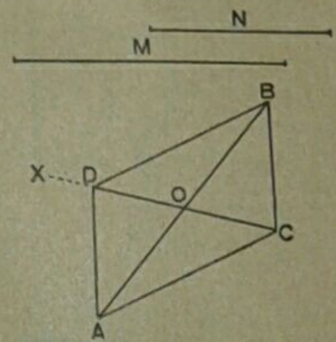


Fig. 333

M e N diagonais dadas; o ângulo por elas formado é de 60º, fig. 333.

1 — Trace-se AB = M.

2 — Tire-se por O, meio de AB, a reta OX, que faça com AB um ângulo AOX de 60º.

3 — Sôbre OX, a partir de O, para um e outro lado, marquem-se OC = OD iguais à metade de N.

4 — ADBC é o paralelogramo pedido.

150 Construir um losango, sendo dados o lado e a uma diagonal.

M e N, diagonal e lado dados, fig. 334.

1 — A diagonal é a base de um triângulo isósceles, cujos lados são iguais a N.

2 — Sôbre AC = M construam-se os triângulos isósceles ACB e ACD; ABCD é o losango pedido.

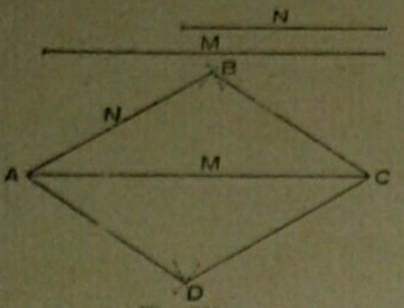


Fig. 334

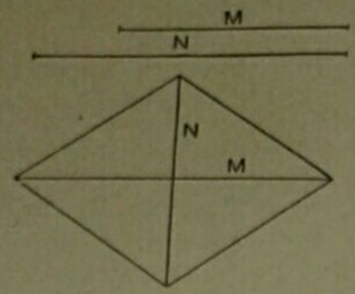


Fig. 335

Observação — O problema é impossível quando $N \leq \frac{M}{2}$.

151 Construir um losango, sendo dadas as duas diagonais.

M e N diagonais dadas, fig. 335.

1 — No losango as diagonais cortam-se em ângulo reto.

2 — Aplique-se a construação do problema 149, sendo o ângulo das diagonais de 90º.

152 Construir um losango, sendo dados o lado e um ângulo.

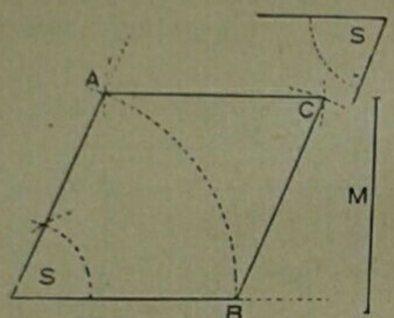


Fig. 336

M e S lado e ângulo dados, fig. 336.

1 — Faça-se um ângulo = S.

2 — Do vértice como centro, e com o raio igual a M, descreva-se um arco, que corte em B e A os lados do ângulo.

3 — De B e A como centros, e com um raio igual a M, descrevam-se dois arcos, que se cortem em C.

4 — Tracem-se AC e BC e obtêm-se o losango pedido.

153 Construir um trapézio, sendo dada uma base, e altura e os lados não paralelos.

B, H, M e N base, altura e lados dados, fig. 337.

1 — Trace-se AC = B.

2 — Construa-se XY paralela a AB, a uma distância dada pela altura.

3 — De A e B, como centros, e com raios respectivamente iguais a M e N descrevam-se arcos, que cortem a paralela XY, em D e E.

4 — Tracem-se AD e CE; ACED é o trapézio pedido.

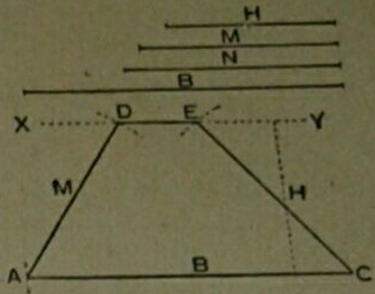


Fig. 337

Observação — Para que o problema seja possível é preciso que a altura seja menor que o menor dos lados dados.

154 Construir um trapézio, sendo dados os lados não paralelos e as bases.

B **b** R **r** bases e lados dados, fig. 338.

1 — Trace-se AD = B.

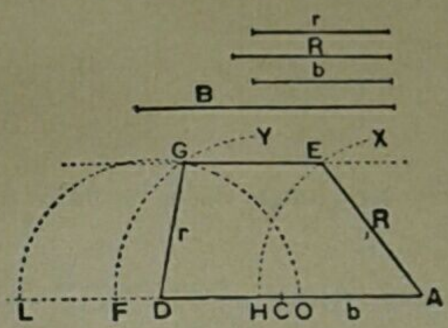


Fig. 338

2 — Tome-se AC = **b**.

3 — De A e C, como centros, e raio R descrevam-se os arcos HX e FY.

4 — De D, como centro, e com o raio **r** descreva-se um arco, que corte o arco FY, em G.

5 — Por G tire-se GE paralela a AD.

6 — Tracem-se DG e AE; será DAEG, o trapézio pedido.

Observação — Este problema só é possível quando se verificarem ao mesmo tempo as duas condições seguintes: AC + CF

$<AD + DL$ e $AC + CF > AD - DH$ ou $\mathbf{b} + R < B + \mathbf{r}$ e $\mathbf{b} + R >$ $> B - \mathbf{r}$; com efeito, se estas condições não se derem, o arco descrito de B como centro e com o raio **r** não cortará o arco FY e portanto não existirá o trapézio.

155 Construir um trapézio, sendo dadas as bases, a altura e o ângulo de uma diagonal com uma base.

B, **b**, H e 30º bases, altura e ângulo da diagonal com a base B, *fig.* 339.

1 — Trace-se AF = B.

2 — Faça-se em A um ângulo = 30º.

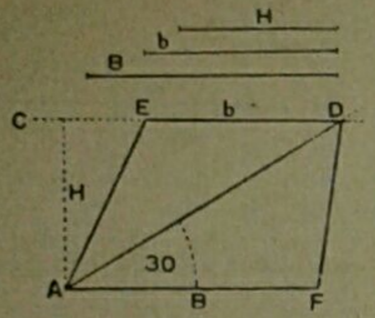


Fig. 339

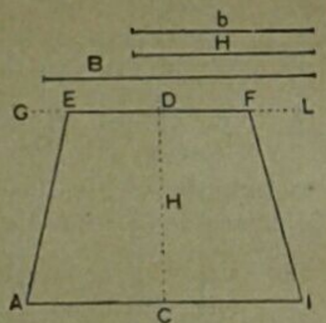


Fig. 340

3 — Tire-se por C uma paralela a AB a uma distância dada pela altura H.

4 — Esta paralela determina o ponto D; a partir de D marque-se DE = **b**.

5 — Tracem-se AE e FD; será AFDE o trapézio pedido.

156 Construir um trapézio isósceles, sendo dadas as bases e a altura.

B, **b** e H bases e altura dadas, fig. 340.

1 — Trace-se AI = B.

2 — Levante-se a perpendicular ao meio de AI, e trace-se GL paralela a AB a uma distância dada pela altura H.

3 — A partir de D, de um e de outro lado da perpendicular, marque-se DE = DF igual à metade de **b**.

4 — Tracem-se AE e IF; AIFE é o trapézio pedido.

157 Construir um quadrilátero, sendo dados os quatro lados e uma diagonal.

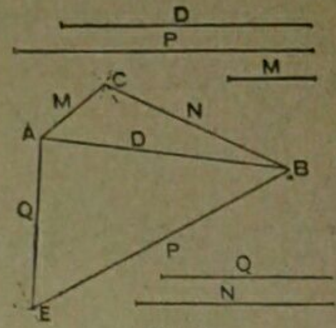


Fig. 341

D, M, N, P e Q diagonal e lados dados, fig. 341.

1 — Trace-se AB = D.

2 — De A e B, como centros, e com os raios M e N descrevam-se os arcos que se cortem, em C.

3 — De A e B, como centros, e os raios Q e P descrevam-se arcos que se cortem em E.

4 — Tracem-se AC e BC, AE e BE; a figura ACBE é o quadrilátero pedido.

Observação — O problema é impossível quando fôr impossível a construção dos triângulos ABC e ABE.

158 Construir um polígono regular de 7 lados.

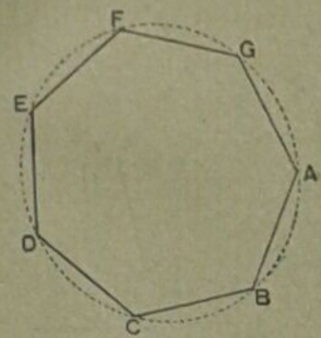


Fig. 342

1 — Trace-se uma circunferência O de raio arbitrário, figura 342.

2 — Divida-se esta circunferência em sete partes iguais, que é o número de lados que deve ter o polígono.

3 — Liguem-se sucessivamente os pontos consecutivos.

4 — A figura ABCDEFG é o polígono pedido.

Observação — Esta construção permite traçar um polígono regular de um número qualquer de lados; tendo em vista o problema 136, podem-se ter os seguintes polígonos regulares: triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octógono, eneágono, decágono, undecágono, dodecágono, pentadecágono, icoságono.

159 Construir um polígono regular de um número de lados dado, sendo conhecida a grandeza do lado.

1.ª construção:

M lado dado, 7 é o número de lados, fig. 343.

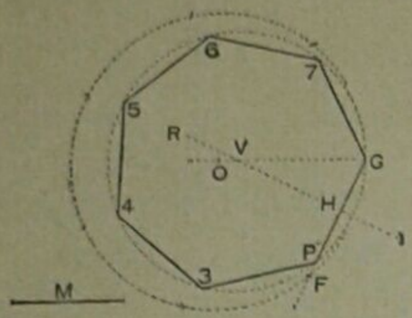


Fig. 343

1 — Com um raio arbitrário, maior que o lado dado M, descreva-se uma circunferência O.

2 — Divida-se esta circunferência em 7 partes, número de lados que deve ter o polígono.

3 — Tracem-se FG e sôbre êle, a partir de G, tome-se GP = M.

4 — Trace-se RH, perpendicular ao meio de GP.

5 — Tire-se o raio OG, que encontra RH em V e de V, como centro, e raio VG descreva-se uma segunda circunferência, que passará pelo ponto P.

6 — A corda GP aplicada sôbre a circunferência V divide-a em sete partes iguais; ligando-se esses pontos de divisão consecutivamente, obtém-se o polígono GP34567, que resolve o problema.

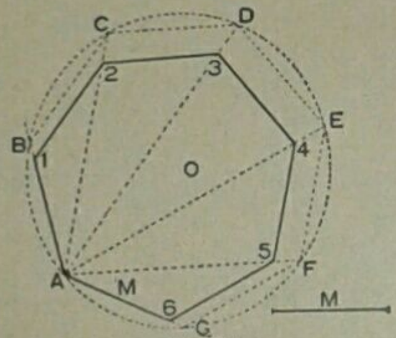


Fig. 344

2.ª construção:

M lado dado, 7 é o número de lados, fig. 344.

1 — Com um raio arbitrário, maior que o lado dado M, descreva-se uma circunferência O.

2 — Divida-se esta circunferência em sete partes iguais e trace-se o heptágono ABCDEFG.

3 — Sôbre um lado AB tome-se A1 = M.

4 — Tracem-se as diagonais AC, AD, AE, AF e pelo ponto 1 tire-se (1-2) paralela a BC, em seguida pelo ponto 2 tire-se (2-3) paralela a CD e assim sucessivamente.

5 — O polígono A123456 resolve o problema.

3.ª construção:

M lado dado, 5 é o número de lados, fig. 345.

1 — Sôbre uma reta indefinida AX tome-se AB = M e com raio igual a esta grandeza, fazendo centro em B, descreva-se uma semi-circunferência.

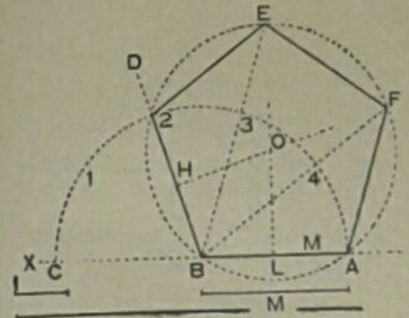


Fig. 345

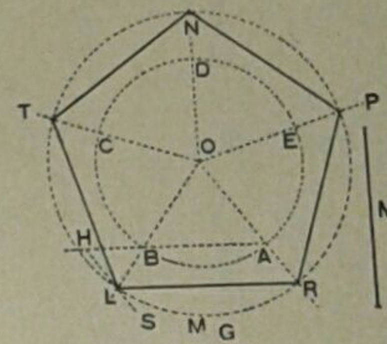


Fig. 346

2 — Divida-se esta semi-circunferência em 5 partes iguais, número de lados que o polígono deve ter.

3 — Pela divisão 2 e pelo ponto B tire-se B2.

4 — Por 2, B e A faça-se passar uma circunferência, problema 108.

5 — Pelos outros pontos de divisão 3 e 4 tirem-se as retas B3 e B4; estas determinam na circunferência O os pontos E e F.

6 — Traçando-se os segmentos B2, 2E, EF, FA, obtém-se o polígono B2EFA, que resolve o problema.

4.ª construção:

M lado dado, 5 número de lados, fig. 346.

1 — Trace-se uma circunferência O, com um raio arbitrário.

2 — Divida-se esta circunferência em cinco partes iguais e tracem-se todos os raios.

3 — Trace-se AB, que liga dois pontos de divisão da circunferência O, e sôbre ela tome-se AH = M.

4 — Por H tire-se HS paralela a OA; esta paralela encontra a reta OB em um ponto L.

5 — De O, como centro, e raio OL, descreva-se uma circunferência, que corte as retas OA, OE, OD, OC, e nos pontos R, P, N, T.

6 — Êstes pontos ligados, determinam o polígono LRPNT, que resolve o problema.

5.ª construção:

M lado dado, fig. 347.

1 — Trace-se AB = M.

2 — Por O, meio de AB, levante-se CO perpendicular a AB.

3 — Sôbre AB construa-se o triângulo equilátero ABC.

4 — Divida-se o lado AC em seis partes iguais e marquem-se estas divisões em CO, acima de C, até o limite que se quiser, e abaixo sòmente até à divisão 3.

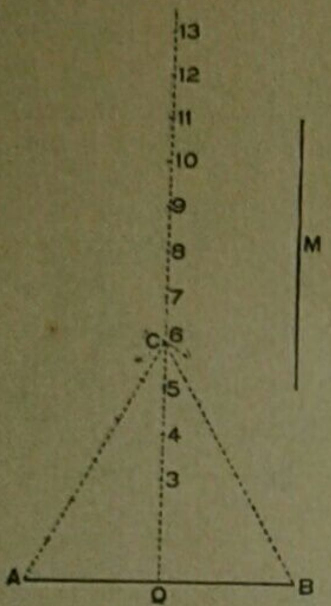


Fig. 347

Esta construção, que Delaistre (*) denomina **escala poligonal** dá os raios das circunferências circunscritas aos polígonos regulares, de um número qualquer de lados, tendo todos para grandeza do lado o segmento M.

5 — Se se quiser que M seja o lado do pentágono, descreva-se uma circunferência O, que tenha raio igual à distância que vai da divisão 5 a qualquer dos extremos A ou B.

(*) **L. Delaistre** — professor francês, autor de um belíssimo **"Cours Complet de Dessin Linéaire"**, por êle próprio traçado, e gravado por Dulos, em Paris.

O segmento M, aplicado sôbre a circunferência descrita, divide-a em cinco partes iguais.

6 — Se se quiser que M seja o lado do heptágono, eneágono ou de outro polígono qualquer, os raios das circunferências circunscritas serão 7B, 9B, . . .

160 Construções especiais para o pentágono.

1.ª construção:

M lado dado, fig. 348.

1 — Trace-se AB = M e pelo meio C de AB levante-se uma perpendicular.

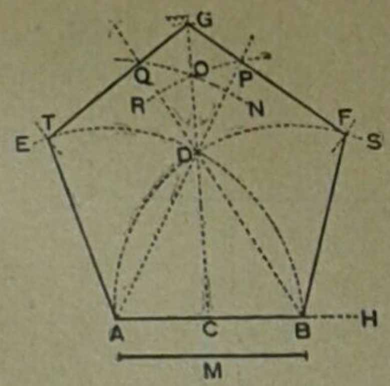


Fig. 348

2 — De B e A, como centros, e com um raio igual ao lado dado, descrevam-se os arcos AS e BE, que se interceptam em D.

3 — Tracem-se as retas AD e BD.

4 — De C, como centro, e raio CD marque-se o ponto H, sôbre o prolongamento de AB.

5 — De A e B, como centros, e raio AH descrevam-se dois arcos, que se cortem em O e intercepiem os prolongamentos de AD e BD, em P e Q.

6 — De O, como centro, e raio OQ = OP marque-se no prolongamento de CO o ponto G e deste último ponto, como centro, e com um raio igual ao lado dado M, determinem-se os pontos T e F.

7 — A ligação dos pontos A, T, G, F e B, por meio de segmentos de reta, dá o pentágono pedido.

2.ª construção:

L lado dado, fig. 349.

1 — Trace-se AB igual a L e de A e B, como centros, e com um raio igual ao lado dado, descrevam-se duas circunferências.

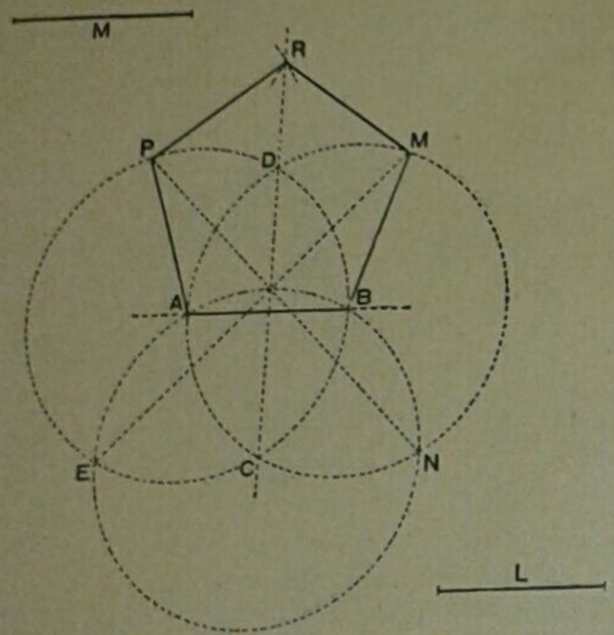


Fig. 349

2 — Do ponto de interseção C, dessas duas circunferências trace-se, com o mesmo raio delas, uma terceira circunferência.

3 — Trace-se CD e depois EM e NP.

4 — De P e M, como centros e raio L, descrevam-se arcos, que determinem o ponto R.

5 — Ligando os pontos B, M, R, P e A, obtém-se o pentágono pedido.

3.ª construção:

L lado dado, fig. 350.

1 — Tome-se AB = L.

2 — De B, como centro, e raio L, descreva-se o arco AX.

3 — Em B levante-se a perpendicular até alcançar o arco AX em C.

4 — De D, meio de AB, e com raio DC marque-se o ponto E, sôbre o prolongamento de AB.

5 — De A, como centro, e raio igual a AE, marque-se em AX o ponto F; será AF a grandeza da diagonal do pentágono.

6 — De A e B, como centros e com raio AF, descrevam-se os arcos, que fornecem o ponto H.

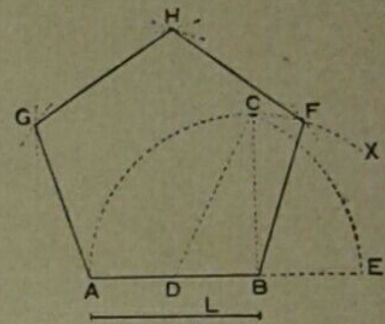


Fig. 350

7 — De B e F, como centros, e com o mesmo raio, determine-se o ponto G.

8 — ABFHG é o pentágono pedido.

161 Construção especial para o heptágono.

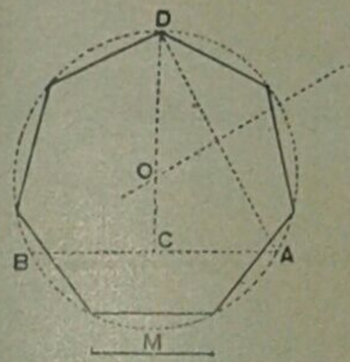


Fig. 351

M lado dado, fig. 351.

1 — Trace-se AB igual ao dôbro de M.

2 — Determine-se o vértice D do triângulo equilátero de que AB é o lado.

3 — Por A, B e D faça-se passar uma circunferência.

4 — O heptágono inscrito nessa circunferência e de que AC ou M é o lado, resolve o problema.

162 Determinar o centro de um polígono dado.

1.º caso — O número de lados é par.

ABCDEF polígono dado, fig. 352.

1 — Tracem-se duas diagonais que liguem vértices diametralmente opostos, como AD e BE.

2 — O ponto de interseção O é o centro procurado.

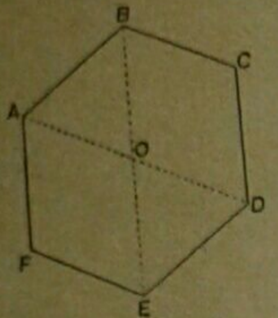


Fig. 352

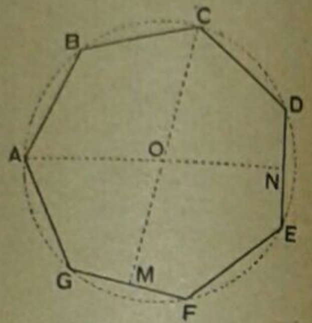


Fig. 353

2.º caso — O número de lados é ímpar.

ABCDEFG polígono dado, fig. 353.

1 — Tirem-se GM e AN perpendiculares ao meio de dois lados quaisquer.

2 — O ponto de interseção O resolve o problema.

163 Construir um polígono igual ou semelhante a outro polígono dado.

ABCDE polígono dado, fig. 354.

a) Construir um polígono igual a outro.

1 — As construções do problema 102 resolvem o problema.

2 — Neste caso convém tomar o ponto O no interior do polígono, fig. 354.

3 — Tracem-se as retas OA, OB, OC, OD, OE, e complete-se a construção como indica aquele problema, 1.ª construção.

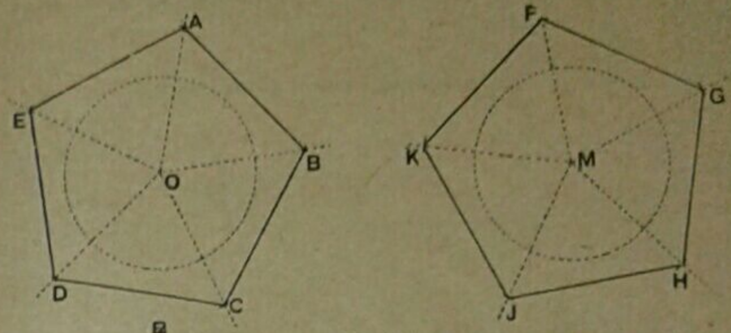


Fig. 354

4 — Aplicando a 2.ª construção do problema 102 pode-se traçar a reta MN cortando o polígono, fig. 355.

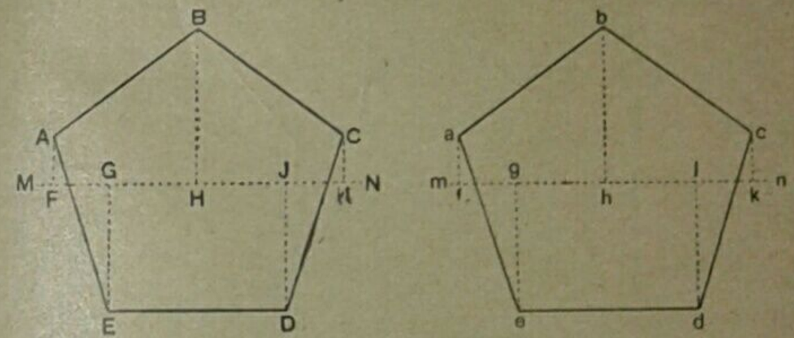


Fig. 355

5 — Abaixem-se dos vértices A,B, ... as perpendiculares AF, BH, CK, ... sôbre a reta MN.

6 — Trace-se, à parte, uma reta **mn** e a partir de um ponto f tomem-se as grandezas **fg, fh, fj, fk,** respectivamente, iguais a FG, FH, FJ, FK.

7 — Pelos pontos **f, g, h, j, k,** levantem-se perpendiculares a **mn** e sôbre elas tome-se **fa** = FA, **hb** = HB, **kc** = KC, **jd** = JD, **ge** = GE.

8 — Ligando consecutivamente os pontos **a, b, c, d, e, a,** obtém-se o polígono pedido.

b) Construir um polígono semelhante a outro.

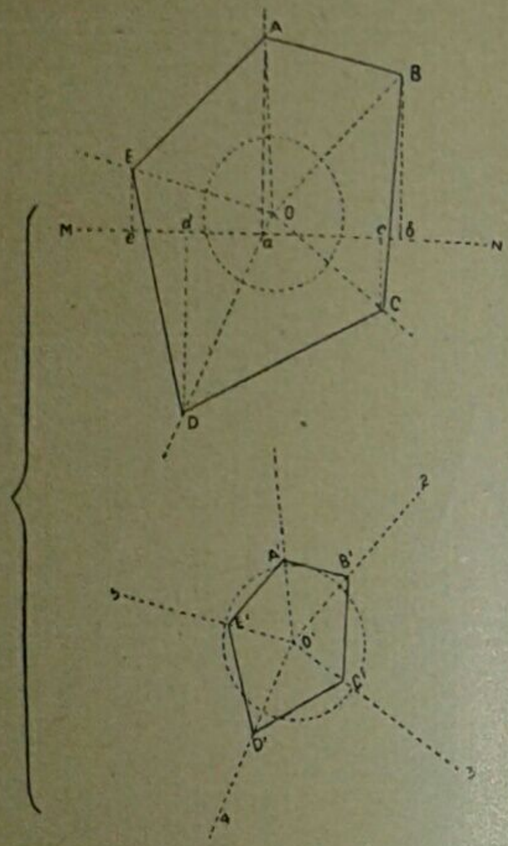


Fig. 356

ABCDE polígono dado, fig. 356, $\frac{4}{9}$ razão de semelhança.

1 — Aplicando-se a 1.ª construção do problema 104, convém tomar o ponto O no interior do polígono, fig. 356.

2 — Tracem-se os raios OA, OB, OC, OD, OE.

3 — Pelo ponto O′ tomado à parte, tracem-se as retas O′A′, O′B′, O′C′, O′D′, O′E′, fazendo os ângulos 1O′2 = AOB; 2O′3 = = BOC, 3O′4 = COD; 4O′5 = DOE e 5O′1 = EOA.

4 — Reduzam-se, ou pelo ângulo de redução, ou pelo compasso de redução, fig. 357, os comprimentos OA, OB, OC, . . ., na

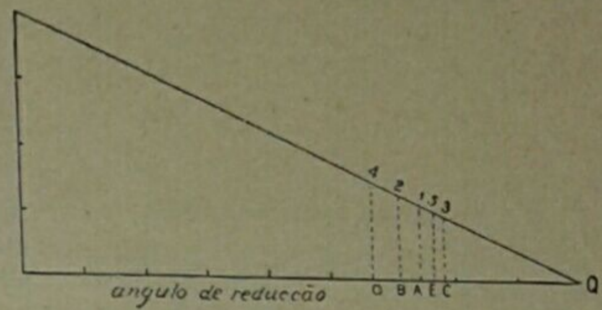


Fig. 357

razão dada, e marquem-se êsses comprimentos, assim reduzidos, respectivamente em O′A′, O′B′, O′C′,. . .

5 — Ligando os pontos A′, B′, C′,. . ., obtém-se o polígono pedido.

6 — Empregando o método das ordenadas, convém traçar a reta MN cortando o polígono, fig. 356.

7 — Reduzem-se, na razão dada, fig. 358 não sòmente os

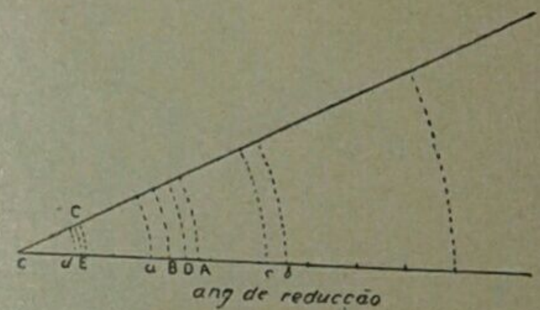


Fig. 358

comprimentos **ed, ea, ec, eb,** das abcissas, como os das ordenadas **Ee, Dd, Aa,**. . ., da fig. 356.

8 — Marquem-se êsses comprimentos assim reduzidos em eE' dD', aA'... fig. 359; ligando os pontos A'B'C',... obtém-se o polígono pedido.

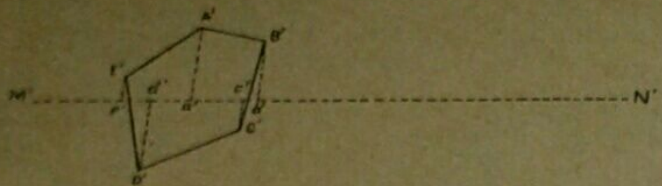


Fig. 359

NOÇÕES PRELIMINARES

Secante *é a reta que corta uma curva em dois ou mais pontos, fig. 360.*

Quando uma secante gira em tôrno de um de seus pontos de secância M, por exemplo, fig. 360, um segundo ponto N se aproxima sucessivamente do primeiro.

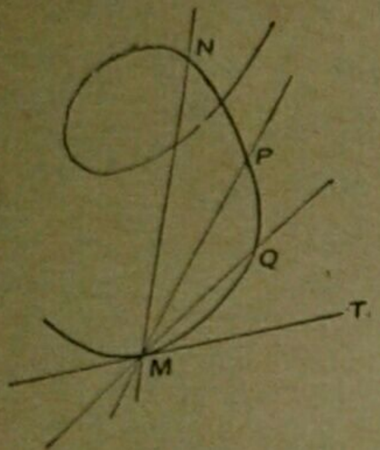


Fig. 360

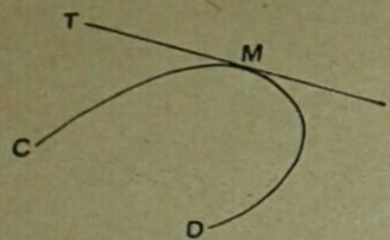


Fig. 361

A secante toma neste caso diversas posições MP, MQ....; quando N se confunde com M diz-se que a secante chega ao **limite** de tôdas as suas posições. Esta posição limite da secante denomina-se **tangente** à curva, e M é o ponto de **contacto** da tangente.

O contacto de uma tangente recebe as denominações seguintes:

Contacto ordinário quando as duas porções MC e MD da curva, fig. 361, separadas pelo ponto de contacto M, voltam suas convexidades para êsse ponto.

Em tôdas as curvas convexas, tais como a circunferência, a elipse, a hipérbole,...., o contacto é desta espécie.

Ponto de inflexão, quando as duas porções MC e MD, fig. 362, da curva, separadas pelo ponto de contacto M voltam suas convexidades em sentidos opostos e ficam, uma de um lado e outra do outro lado da tangente.

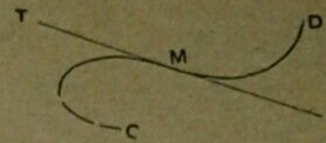


Fig. 362

Ponto de reversão, quando o ponto gerador da linha chega ao ponto A, fig. 363, em que seu deslocamento é nulo, e daí toma uma nova direção em sentido contrário.

Quando os dois ramos da curva ficam do mesmo lado da tangente, a reversão se denomina de **segunda espécie,** fig. 363, e de 1.ª espécie no caso contrário, fig. 364.

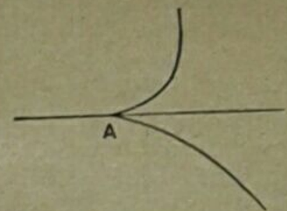


Fig. 363

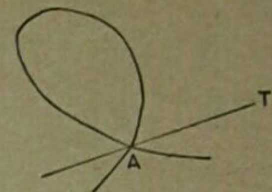


Fig. 364

Chama-se **nódo** ou **ponto duplo** o ponto A, fig. 365, pelo qual a mesma curva passa duas vezes.

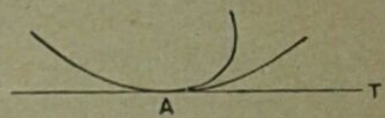


Fig. 365

Em geral, **pontos múltiplos** são os pontos por onde a curva passa duas ou mais vezes.

Nos pontos múltiplos a tangente sofre uma indeterminação, porque tôda **reta** traçada no plano da curva e passando pelo ponto A, fig. 365, pode ser considerada como uma tangente, visto que ela é uma secante que tem dois pontos de interseção com a curva, reunidos no ponto A.

Uma curva é geométrica quando é submetida em sua geração à uma lei determinada.

Uma curva é **gráfica** *quando é traçada segundo condições não susceptíveis de ser matemàticamente definidas, tais como a de ter uma forma* **graciosa**.

Diz-se, por extensão, que uma curva geométrica, depois de traçada adquire a propriedade de ser gráfica.

As curvas geométricas têm uma existência real, e as curvas gráficas, ao contrário, só existem depois de traçadas.

A única curva geométrica fácil de ser traçada por um traço contínuo é a **circunferência de círculo**.

Há para outras curvas geométricas **compassos** diversos, mas todos de difícil manipulação prática, e por isso pouco empregados.

Em geral, para traçar uma curva geométrica, determina-se, segundo a lei de sua geração, um número suficiente de pontos para que sua forma seja bem determinada, e depois se os reune por um traço contínuo, o qual se corrige até que apresente uma forma satisfatória.

É essencial educar a vista e a mão para um tal trabalho, quando nos quisermos ocupar com as artes gráficas.

Quando a forma de uma curva não fica nitidamente acusada, é preciso procurar novos pontos ou, melhor ainda, construir as tangentes.

Em geral, deve evitar-se a determinação de muitos pontos, porque a posição dêles é sujeita a êrros, provenientes sempre da imperfeição dos traçados.

Quando o ramo de uma curva se estende ao infinito, uma reta que dele se aproxima sem nunca poder tocá-lo denomina-se **assíntota**.

A assíntota é, pois, uma tangente à curva, cujo ponto de contacto está situado no infinito.

Raramente nas aplicações se tem necessidade de traçar, com grandes extensões, os ramos infinitos das curvas; entretanto, é muitas vezes util determinar as assíntotas, afim de bem compreender a disposição das diferentes partes da curva.

Curvas de êrro são certas curvas auxiliares de que um ou mais de seus pontos resolvem aproximadamente certos problemas.

164 Traçar uma tangente num ponto de uma curva gráfica.

X e M curva e ponto dados, fig. 366.

1 — Do ponto M, como centro e com um raio arbitrário, descreva-se um arco de circunferência.

2 — Por M tirem-se diversas secantes AMH, BMH, . . .

3 — Tomem-se sôbre essas secantes os comprimentos, **Ha, Hb,** . . . respectivamente iguais às cordas MA, MB, . . . ME, devendo êstes comprimentos ocupar em relação à circunferência, situações análogas às das cordas em relação ao ponto M.

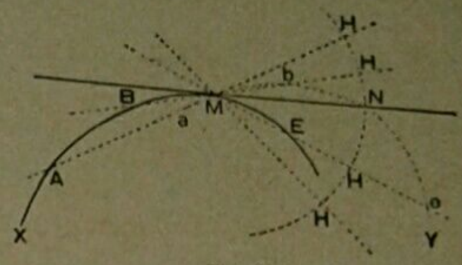


Fig. 366

4 — Ligando por um traço contínuo os pontos **a,** M, **b,** N, **o**. . . obtem-se a curva de êrro Y.

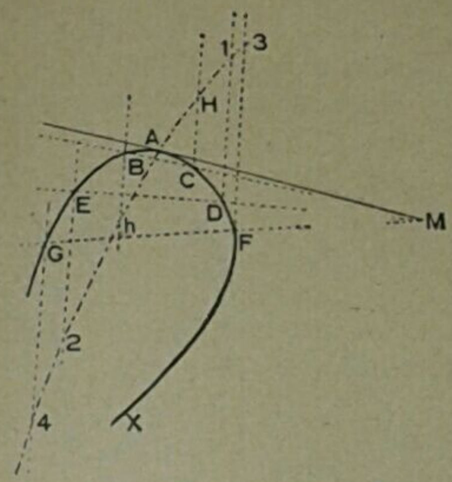


Fig. 367

5 — Ligue-se o ponto N, ao ponto M; a reta MN resolve o problema.

165 Por um ponto exterior traçar uma tangente a uma curva gráfica.

X e M curva e ponto dados, fig. 367.

1 — Tracem-se do ponto dado M as diversas secantes MCB, MDE, MFG. . . à curva dada.

2 — Pelos pontos B, C, E, D, G, F. . . tracem-se retas paralelas em uma direção qualquer.

3 — Sôbre estas paralelas, de um e de outro lado de cada secante, marquem-se CH = Bh = BC; D1 = E2 = DE, . . .

4 — Ligando por um traço contínuo os pontos 3, 1, H, **h**, 2, 4 . . . obtem-se a curva de êrro.

5 — Ligue-se o ponto de interseção A, desta curva com a curva dada X, ao ponto M; a reta AM é a tangente pedida.

166 Determinr o ponto de contacto de uma tangente a uma curva gráfica.

X e MT curva e tangente dadas, fig. 368.

1 — Tracem-se as secantes AB, DC, EF . . . paralelas à tangente dada.

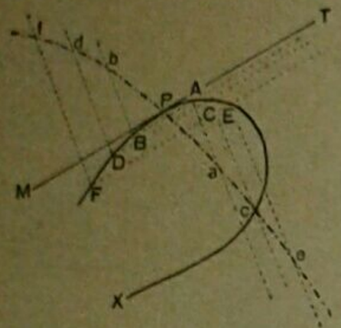


Fig. 368

2 — Pelos pontos A, B, C, D, E, F . . . tirem-se perpendiculares às secantes, para um e outro lado de cada uma.

3 — Em cada uma destas perpendiculares tome-se **Bb** = **Aa** = AB; **Dd** = **Cc** = DC; **Ef** = **Ee** = EF. . .

4 — Ligando por um traço contínuo os pontos **f, d, b, a, c, e,** obtém-se a curva de êrro, que intercepta a curva dada em um ponto P, ponto de contacto pedido.

167 Por um ponto dado fora de uma curva gráfica, traçar uma normal.

AB e P curva e ponto dados, fig. 369.

1 — Pelos pontos E, F, H de AB tracem-se tangentes.

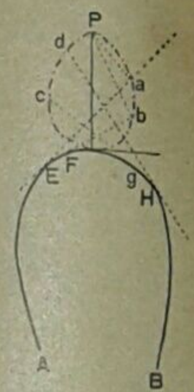


Fig. 369

2 — De P abaixem-se sôbre essas tangentes as perpendiculares **Pa, Pb,** . . .

3 — Os pés **a, b, c, d** destas perpendiculares, ligados por um traço contínuo, dão uma curva de êrro, que toca a curva dada AB em um ponto C, pé da normal PC, que resolve o problema.

Observação — Sendo obtido por contacto de duas curvas o ponto C ficará mal determinado; é pois, preferível achá-lo por uma intersecção.

Para isso assim se procede, fig. 370.

1 — Pelos pontos E, F, G, H tirem-se as normais à curva dada AB.

2 — Sôbre elas tomem-se os comprimentos EL, FN, GM,..., respectivamente iguais às perpendiculares **Pa, Pb, Pc** . . .

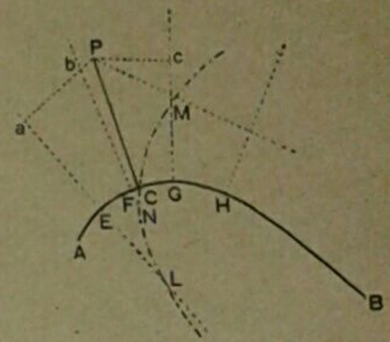


Fig. 370

3 — Os pontos L, N, M . . . ligados por um traço contínuo dão uma curva de êrro, que intercepta a curva dada no pé C da normal pedida.

ELIPSE

A **elipse** é uma curva plana, na qual é constante a soma das distâncias de cada um de seus pontos a dois pontos fixos, situados em seu plano.

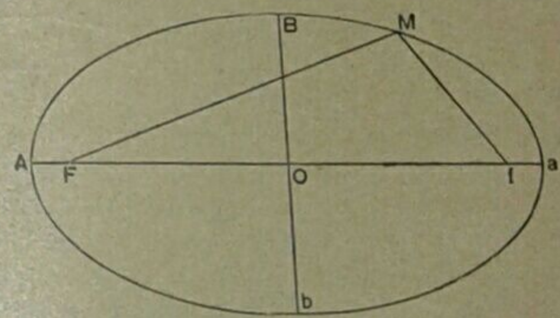


Fig. 371

Sendo **Aa** um comprimento constante, fig. 371, F e **f** dois pontos fixos, tem-se para cada ponto M da curva MF + **Mf** = **Aa**.

Representa-se a soma constante **Aa** por **2a**.

Os pontos fixos F e **f** são os **fócos,** a distância F**f** é a distância focal e denominam-se **raios vectores** os segmentos de reta que ligam um ponto qualquer da curva aos focos: MF e M**f** são raios vetores do ponto M.

Eixo de uma curva é tôda reta em relação à qual os diversos pontos da curva são simétricos dois a dois.

Vértice é o ponto onde o eixo intercepta a curva.

Centro é um ponto em relação ao qual os pontos da curva são simétricos dois a dois.

Os eixos da elipse são dados em direção pela reta que passa pelos fócos F e **f** e pela reta perpendicular ao meio da distância focal F**f.**

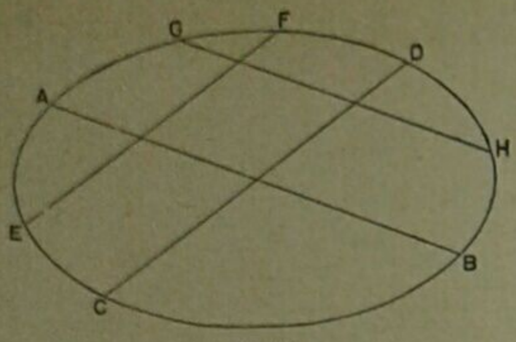


Fig. 372

Chamam-se **comprimentos dos eixos** da elipse os comprimentos A**a** e B**b,** fig. 371, interceptados sôbre os eixos pela curva; A**a** ou **2a** é o **eixo maior** e B**b** ou **2b** o **eixo menor.**

Os quatro pontos A, **a**, B, **b**, são os vértices e o ponto O, intersecção dos eixos, é o centro da elipse.

Círculos diretores da elipse são os círculos descritos de cada foco, como centro, e com raio igual a 2 **a**.

Círculos principais são os círculos descritos sôbre os eixos A**a** e B**b** como diâmetros.

Chama-se **diâmetro** de uma curva plana o lugar geométrico dos meios de tôdas as cordas paralelas a uma mesma direção.

As direções de um diâmetro retilíneo e a das cordas que êle divide em duas partes iguais, são denominadas **conjugadas**.

Dois diâmetros retilíneos são chamados conjugados quando cada um deles divide ao meio as cordas paralelas ao outro; DC e AB, fig. 372, são dois diâmetros conjugados da elipse.

Todos os diâmetros da elipse passam, pelo centro, podendo tomar tôdas as direções, e encontram sempre a curva em dois pontos.

168 Traçar uma elipse sendo dados os focos e um dos eixos.

1.ª construção:

I) **2a**, F e **f** eixo maior e focos dados, fig. 373.

1 — Liguem-se os focos por uma reta e tomem-se a partir de O, meio de F**f** para um e outro lado, as distâncias OC e OA iguais à metade de **2a**.

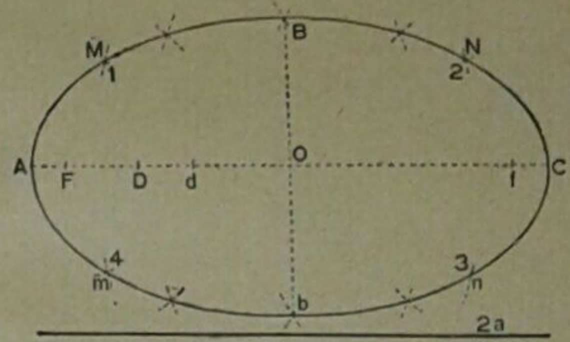


Fig. 373

2 — Por O levante-se uma perpendicular a AC e de um dos focos, F por exemplo, com o raio **a** marquem-se os pontos B e **b,** que limitam o eixo menor B**b**.

3 — Marque-se um ponto qualquer D sôbre AC e de F e **f,** como centros, e raio AD descrevam-se os arcos 1, 4, 2, 3.

4 — Novamente com F e **f** para centros, e com o raio CD, determinem-se as interseções M, **m,** N, **n**.

5 — Tomando um outro ponto **d,** têm-se dois outros raios A**d** e C**d,** que permitem determinar outros quatro pontos da curva e assim se determinarão tantos pontos quantos se quiser e que ligados por um traço contínuo dão a elipse procurada.

II) **2b**, F e **f** eixo menor e focos dados, fig. 374.

1 — Liguem-se os focos, F e **f** por uma reta e por O, meio de F**f**, levante-se uma perpendicular a F**f**.

2 — A partir de O tome-se OB = Ob = ½ do eixo menor.

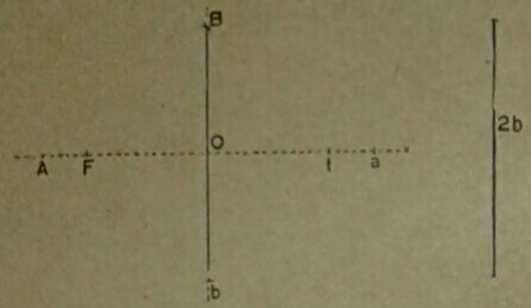


Fig. 374

3 — De O, como centro, e com o comprimento FB marquem-se os pontos A e **a**, o que determina a grandeza do eixo maior A**a**; daí em diante a construção é a do caso precedente.

2.ª construção:

2a, F e **f** eixo maior e focos dados, fig. 375.

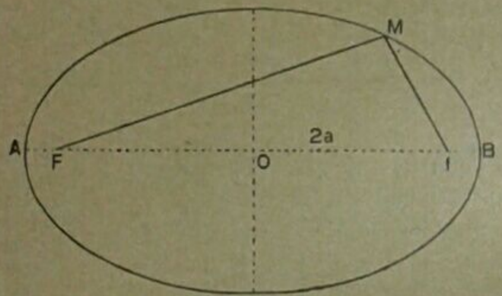


Fig. 375

1 — Liguem-se os focos por uma reta e marque-se OA = OB = **a**.

2 — Tome-se um fio ou cordel, que tenha um comprimento igual ao eixo maior **2a** e fixem-se por meio de estiletes as extremidades deste cordel em F e **f**.

3 — Estendendo o fio com auxílio da ponta do lapis, de modo a fazê-lo tomar a forma de um ângulo FM**f**, o ponto M pertence à curva.

4 — O movimento do lapis de M para B, conservando sempre o ângulo FM**f** os lados MF e M**f** retilíneos e depois de M para A nas mesmas condições descreve a parte superior da curva.

5 — Para descrever a parte inferior, coloque-se o lapis de modo que o ângulo FM**f** fique para baixo, e proceda-se como indica o n.º 4.

Observação — Este processo, que permite traçar a curva por um movimento contínuo, é geralmente empregado pelos jardineiros no traçado dos contornos elípticos.

169 Traçar uma elipse sendo dados os dois eixos.

1.ª construção:

AB e CD eixos dados, fig. 376.

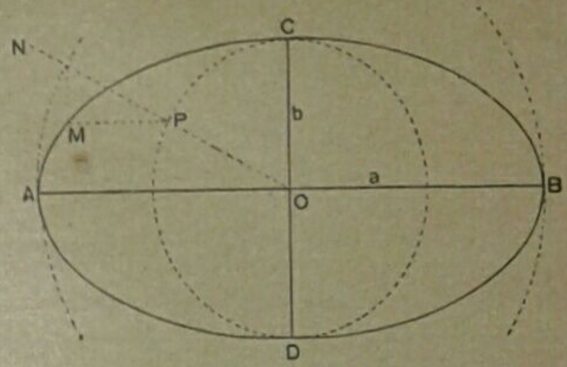


Fig. 376

1 — Dê-se ao eixo CD a posição perpendicular ao meio de AB.

2 — Descrevam-se os círculos principais.

3 — Tire-se um raio qualquer ON.

4 — Pelos pontos em que ON encontra os círculos, tracem-se perpendiculares ao diâmetro correspondente, ou paralelas ao outro.

5 — O ponto de interseção M pertence à curva.

6 — Outros pontos assim determinados, ligados por um traço contínuo, dão a elipse pedida.

2.ª construção:

Aa e **Bb** eixos dados, fig. 377.

1 — Disponham-se os eixos em **Aa** e **Bb**.

2 — Sôbre um dos eixos, o menor por exemplo, descreva-se a semi-circunferência principal; fica-se assim com um ponto M da circunferência correspondente ao ponto **a** da curva.

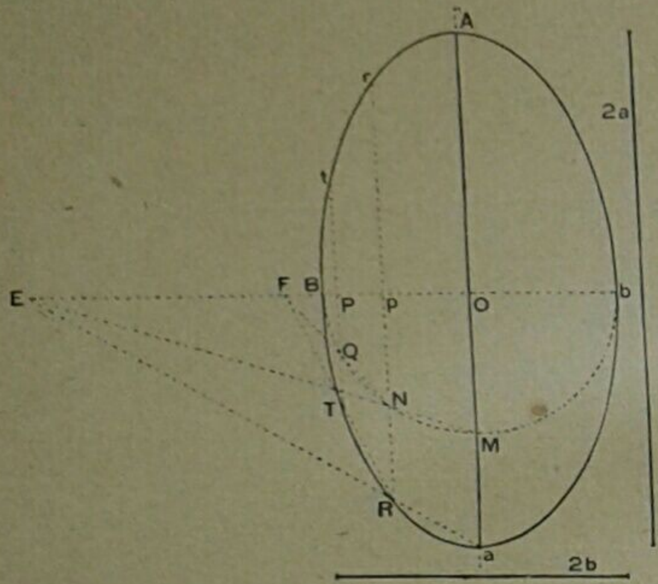


Fig. 377

3 — Acha-se um outro ponto da curva correspondente a um ponto qualquer N da semi-circunferência unindo N a um ponto da semi-circunferência que já tenha seu correspondente na curva; pode-se unir N a M.

4 — Prolongue-se a secante MN até encontrar o prolongamento de **Bb**, o que tem lugar em E.

5 — De N abaixe-se **Np** perpendicular a **Bb** e trace-se **Ea**; o ponto de interseção R pertence à elipse.

6 — Para achar o ponto da curva correspondente a Q, pode ligar-se este ponto a N ou a M, pois que qualquer dêstes, já tem o seu correspondente na curva. Escolha-se sempre o que fôr mais conveniente; ligue-se a N e prolongue-se a reta até F.

7 — De Q abaixe-se sôbre **Bb** a perpendicular QP, trace-se FR; será T o ponto da curva correspondente a Q.

8 — Para ter os pontos da curva que ficam acima de **Bb** aplica-se a mesma construção; ou mais fàcilmente toma-se PT = **Pt** **pR** = **pr**, . . . ; os pontos assim obtidos, ligados por uma linha contínua, dão a elipse.

Observação — A construção seria a mesma se utilizasse a semi-circunferência principal do eixo maior.

3.ª construção, método de Schooten:

AB e CD eixos dados, fig. 378.

1 — Disponham-se os eixos em AB e CD.

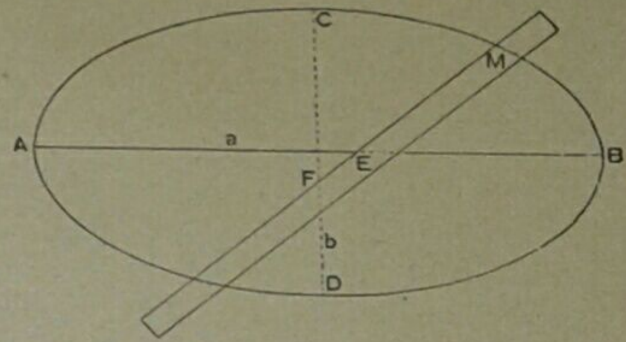


Fig. 378

2 — Marque-se sôbre uma tira de papel ou sôbre uma régua, a partir de um mesmo ponto M, os comprimentos MF = **a** e ME = **b**.

3 — Faça-se mover a tira de papel ou a régua, conservando sempre o ponto F sôbre o eixo menor e o ponto E sôbre o eixo maior.

4 — Em cada posição o ponto M pertence à curva.

5 — Tendo marcado tantas vezes o ponto M quantas se quiser a ligando todos êsses pontos por um traço contínuo, tem-se a elipse pedida.

6 — Ligando por um traço contínuo os pontos A, **v**, **r**, C, **q**, **t**, B ... tem-se a elipse pedida.

172 Construir uma elipse sendo dados dois diâmetros conjugados e o ângulo por êles formado.

AB e CD diâmetros dados; O ângulo por êles formado, fig. 381.

1 — Sôbre AB, como diâmetro, descreva-se uma circunferência.

2 — Tracem-se perpendiculares **Od**, **Mm**, **Nn**, ... ao diâmetro AB.

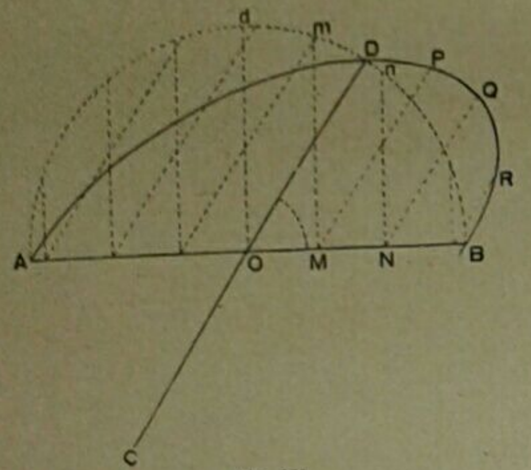


Fig. 381

3 — Inclinem-se essas perpendiculares de um ângulo igual ao dos diâmetros conjugados, e tome-se OD = **Od**, MP = **Mm**, NQ = **Nn**.

4 — Os pontos B, R, Q, P, D, ..., ligados por um traço contínuo, dão a curva procurada.

Observação — O número de soluções é infinito, pois também o é o das inclinações do número 3.

173 Traçar uma elipse sendo dados um dos eixos e um ponto da curva.

1.ª construção:

Bb e M eixo e ponto dados, fig. 382.

1 — Levante-se CD perpendicular ao meio de **Bb** e da interseção, como centro, e com um raio = ½ de **Bb** descreva-se uma circunferência.

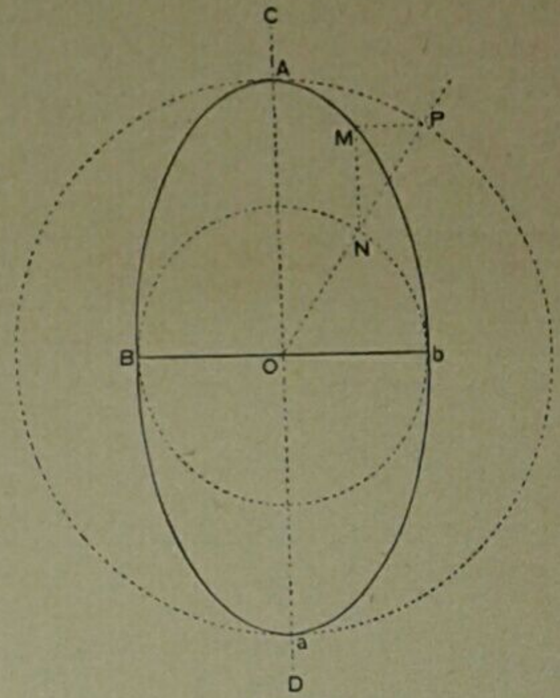


Fig. 382

2 — Do ponto M tire-se uma perpendicular a **Bb** e determine-se a interseção N com a circunferência; tire-se também de M uma paralela a **Bb**.

3 — Trace-se do centro a reta que passe por N e prolongada vai encontrar a paralela a **Bb** no ponto P.

4 — Com centro em O e raio OP, descreva-se uma circunferência que corte CD em A e **a**, pontos que limitam o outro eixo.

5 — Conhecidos os eixos, o problema 169 ensina a traçar a curva.

2.ª construção:

Bb e M eixo e ponto dados, fig. 383.

1 — Levante-se **Ee** perpendicular ao meio de **Bb**.

2 — Sôbre uma régua ou tira de papel marque-se a partir do ponto M, um comprimento MC = OB.

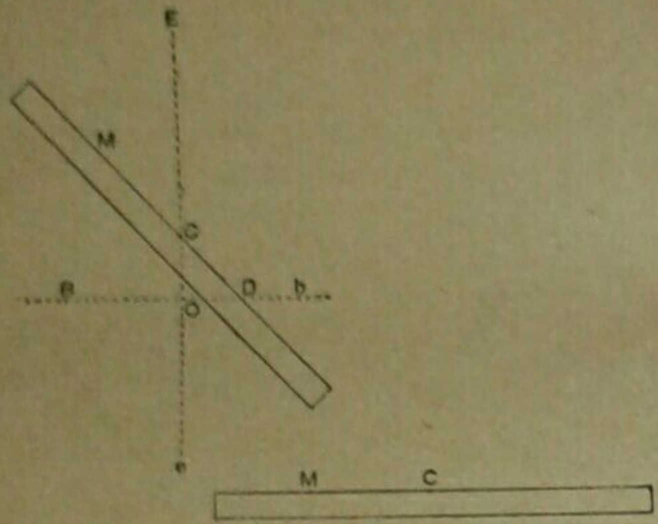


Fig. 383

3 — Coloque-se a régua de modo que o ponto M coincida com o ponto dado M e que o ponto C venha a cair sôbre **Ee**.

4 — Marque-se o ponto D onde o eixo **Bb** atravessa a régua.

5 — A distância MD é a metade do outro eixo da elipse; o método de Schooten permite agora traçar a curva, problema 169.

3.ª construção:

Aa e M eixo e ponto dados, fig. 384.

1 — Levanta-se **Ee** perpendicular ao meio de **Aa**.

2 — Sôbre **Aa** como diâmetro, descreva-se uma semi-circunferência.

3 — De M abaixe-se MDP, perpendicular, a **Aa**; tem-se assim um ponto P da circunferência correspondente ao ponto M da elipse.

4 — A segunda construção do problema 169 permite achar outros pontos da curva, tais como M..., que, reunidos, dão a curva pedida.

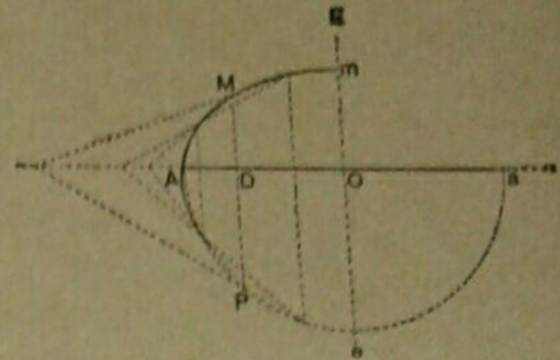


Fig. 384

174 Traçar uma elipse sendo dados um diâmetro, a direção de seu conjugado e um ponto da curva.

P, **Aa** e **Bb** ponto, diâmetro e direção dadas, fig. 385.

1 — Sôbre **Aa** como diâmetro, descreva-se uma semi-circunferência.

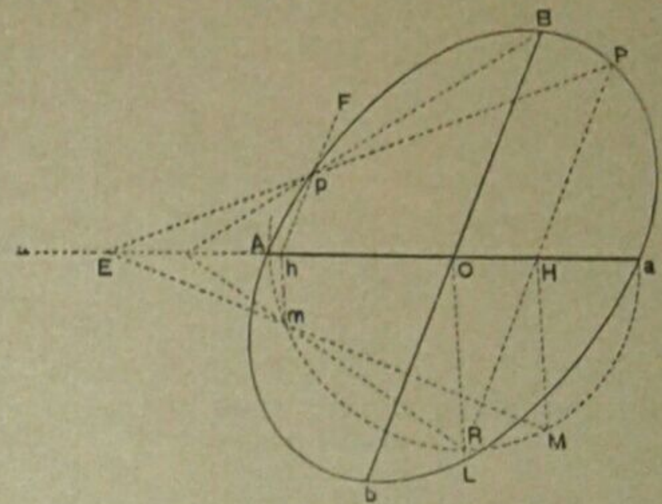


Fig. 385

2 — De P tire-se PH paralela a **Bb** e por H levante-se HM perpendicular a **Aa**; tem-se assim um ponto M da circunferência correspondente ao ponto P da curva.

3 — Para ter outro ponto qualquer da curva correspondente a um ponto M da circunferência, ligue-se este ponto a um outro ponto da circunferência que já tenha seu correspondente na curva; tome-se, portanto, a secante **MmE**.

4 — De **m** abaixe-se **mh** perpendicular a **Aa** e tire-se **hF** paralela a **Bb**.

5 — Trace-se EF; o ponto de intersecção **p** pertence à elipse.

6 — O ponto correspondente a L é B, extremo do diâmetro conjugado de **Aa**.

7 — Os pontos que ficam abaixo de **Aa** se obtêm pela mesma construção ou tomando HR = HP, Ob = OB, ... estes pontos, ligados por um traço contínuo dão a elipse procurada.

175 Traçar uma tangente qualquer à elipse.

Pp elipse dada, fig. 386.

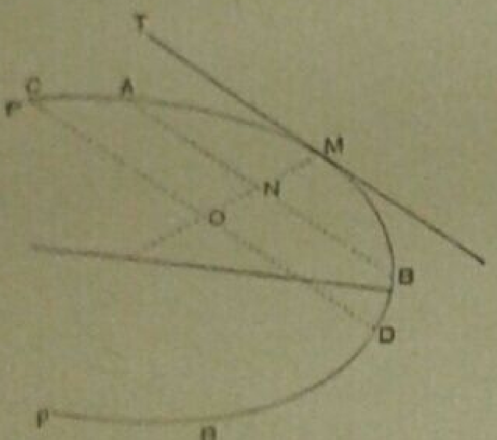


Fig. 386

1 — Tracem-se duas paralelas quaisquer, que cortem a elipse em quatro pontos A, B, C, D.

2 — Determinem-se os meios N e O de AB e CD, respectivamente.

3 — Trace-se a reta NO, que determina o ponto M.

4 — Traçando por M uma paralela a AB ou a CD, tem-se uma tangente à elipse dada, sendo M o ponto de contacto.

176 Traçar a tangente num ponto dado da elipse.

1.ª construção:

M ponto dado, fig. 387.

1 — Tracem-se os raios vetores MF e Mf.

2 — Prolongue-se MF e trace-se a bissetriz do ângulo fMC.

3 — A bissetriz MT é a tangente pedida.

4 — A bissetriz MN do ângulo FMf é a normal à elipse no ponto M.

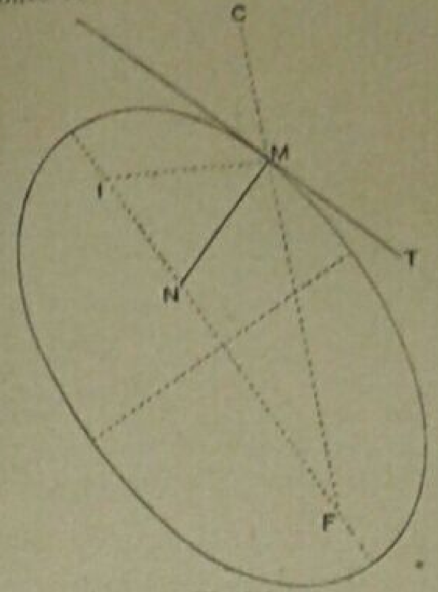


Fig. 387

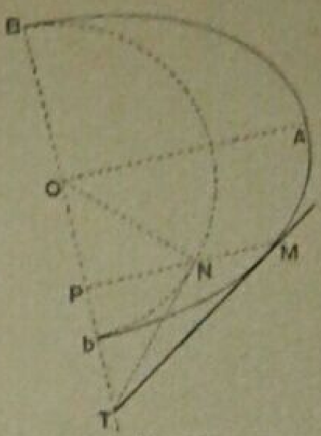


Fig. 388

2.ª construção:

M ponto dado, fig. 388.

1 — Sôbre um dos eixos **Bb**, como diâmetro, descreva-se uma semi-circunferência.

2 — Tire-se MP perpendicular a **Bb** e determine-se a interseção dela com a semi-circunferência, em N.

3 — Em N trace-se a tangente à circunferência que, prolongada, vai encontrar **Bb**, também prolongada, em T.

4 — Ligando o ponto T ao ponto dado M da elipse, tem-se em MT a tangente pedida.

3.ª construção:

M ponto dado, fig. 389.

1 — Tire-se o semi-diâmetro OM.

2 — A êsse diâmetro tire-se uma corda paralela qualquer CD.

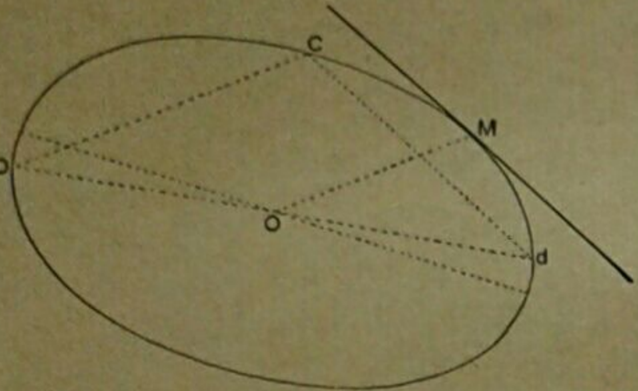


Fig. 389

3 — Trace-se o diâmetro **Dd** e depois a corda suplementar **Cd**.

4 — Por M trace-se uma paralela a **Cd**; ela será a tangente pedida.

177 Traçar uma tangente à elipse por um ponto exterior.

1.ª construção:

P ponto dado, fig. 390.

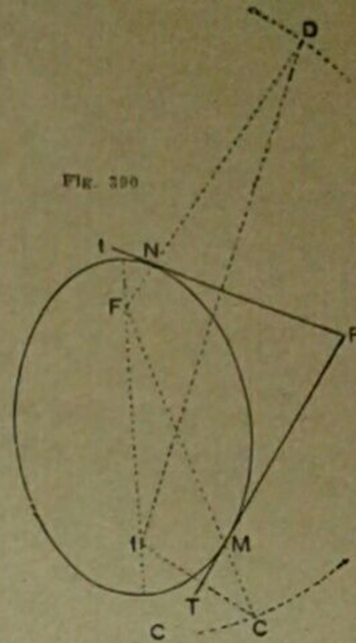
1 — Trace-se o círculo diretor, que tenha um dos focos F para centro.

2 — De P, como centro, e raio **Pf** descreva-se um arco de circunferência, que corte o círculo diretor, em D e C.

3 — Tirem-se **fC** e **fD**.

4 — De P abaixem-se perpendiculares **PT** e **Pt** a esses segmentos; estas pelpendiculares são as tangentes pedidas.

Fig. 390



5 — Os pontos de contacto M e N são determinados traçando FC e FD.

2.ª construção:

P ponto dado, figura 391.

1 — Descreva-se o círculo principal que tenha **Aa** para diâmetro.

2 — De P tire-se uma perpendicular PM sôbre o eixo considerado.

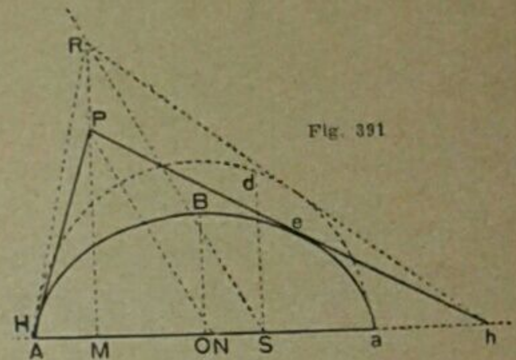


Fig. 391

3 — Marque-se MN igual ao semi-eixo OB e MS igual ao semi-eixo OA.

4 — Trace-se PN e por S tire-se-lhe uma paralela; determina-se assim o ponto R de interseção com o prolongamento da PM.

5 — De R tirem-se tangentes ao circulo principal; essas tangentes prolongadas, encontram o eixo **Aa**, também prolongado, em H e **h**.

6 — Ligando os pontos H e **h** a P tem-se em PH e P**h** as tangentes pedidas.

178 Traçar uma tangente à elipse paralela a uma reta dada.

1.ª construção:

Ll reta dada, fig. 392.

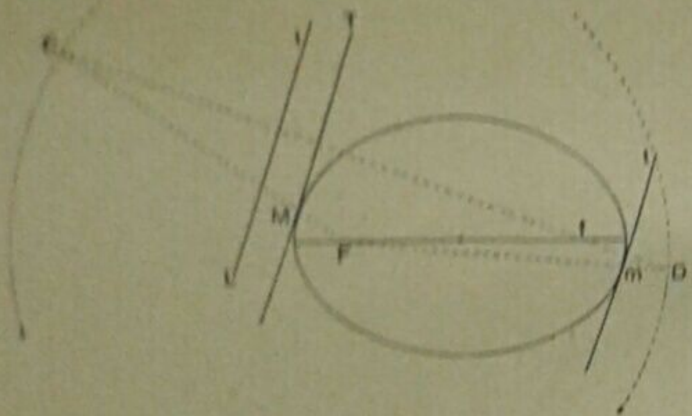


Fig. 392

1 — De um dos focos F descreva-se o circulo diretor.

2 — Do outro foco **f** trace-se CD perpendicular à reta dada Ll.

3 — As perpendiculares MT e **mt** ao meio dos segmentos **fC** e **fD** são as tangentes pedidas.

4 — Os pontos de contacto M e **m** ficam determinados traçando as retas FC e FD.

2.ª construção:

Ll reta dada, fig. 393.

1 — Trace-se uma corda qualquer Eh paralela a Ll.

2 — Trace-se a corda suplementar hE, para o que é preciso traçar o diâmetro EOF.

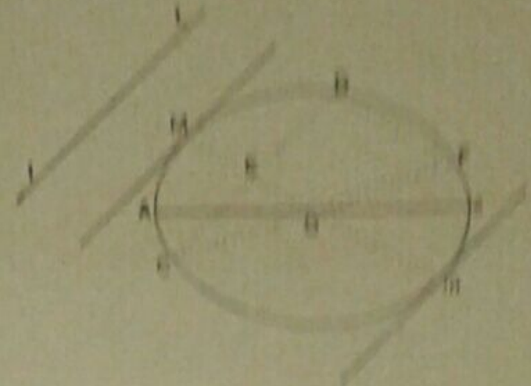


Fig. 393

3 — Trace-se a reta OE paralela a hF e prolongue-se até encontrar a elipse em M e **m**.

4 — Por M e **m** tracem-se paralelas a Ll, as quais serão as tangentes pedidas.

179 Determinar o centro, os eixos, e os focos de uma elipse dada.

A**Ba** elipse dada, fig. 394.

1 — Para achar o centro, tirem-se duas cordas quaisquer paralelas MN e IJ.

2 — Liguem-se os meios G e H dessas cordas e prolongue-se nos dois sentidos até encontrar a curva em D e **d**.

3 — O meio O de D**d** é o centro procurado.

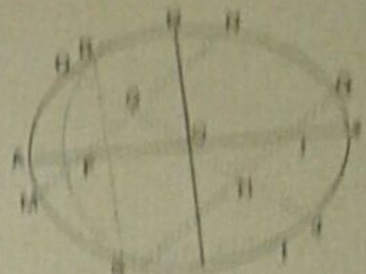


Fig. 394

4 — Para achar os eixos descreva-se de O, como centro, um arco de circunferência que corte a elipse em três pontos B, R e I.

5 — As perpendiculares **Aa** e B baixadas de O sôbre as cordas RS e SI são os eixos procurados.

6 — Para achar os focos, descreva-se de um dos extremos do eixo menor, B, por exemplo, um arco de circunferência de raio igual ao semi-eixo maior OA.

7 — Os pontos F e **f** onde este arco corta **Aa** são os focos.

180 Conhecendo a grandeza e posição de dois diâmetros conjugados da elipse, construir seus eixos.

OD e OE semi-diâmetros conjugados dados, fig. 395.

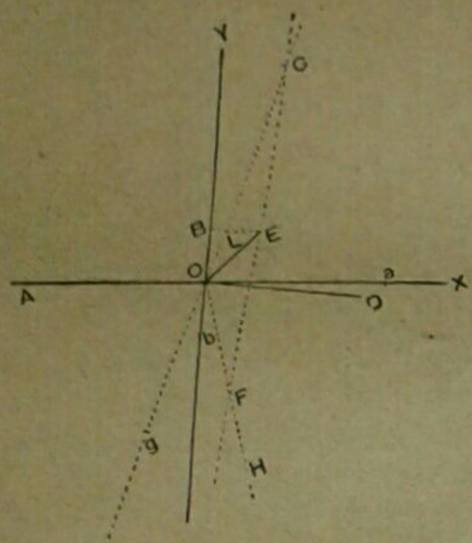


Fig. 395

1 — De E abaixe-se EF perpendicular à OD.

2 — Nesta perpendicular marque-se EF = EG = OD.

3 — Tracem-se OF e OG.

4 — As bissetrizes OX e OY dos ângulos GOF e **g**OH dão a direção dos eixos procurados.

5 — Para ter a grandeza dos eixos, trace-se EL paralela à OX; a reta GO fica dividida em dois segmentos, um GL é o semi-eixo maior, o outro OL é o semi-eixo menor.

6 — Tome-se então sôbre a direção dos eixos OA = O**a** = GL e OB = O**b** = OL.

181 Construir o diâmetro conjugado de um diâmetro dado da elipse.

A**da**D e **Dd** elipse e diâmetro dados, fig. 396.

1 — Trace-se uma corda qualquer **Ee** paralela à **Dd**.

2 — Trace-se o diâmetro e**F** e a corda suplementar EF.

3 — O diâmetro C paralelo à EF é o conjugado de **Dd**.

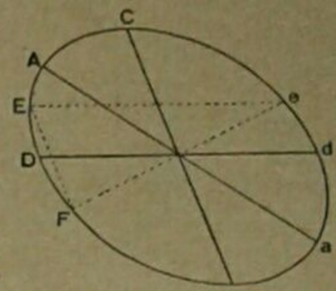


Fig. 396

182 Sendo dado um arco de elipse, continuar a curva.

MNS arco dado, fig. 397.

1 — Tracem-se duas cordas paralelas **Dd** e **Ee**.

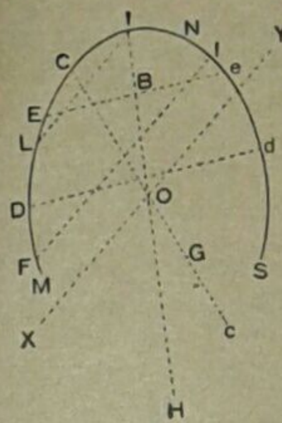


Fig. 397

2 — Trace-se BH que une os meios dessas cordas.

3 — Tracem-se duas outras cordas paralelas **Ff** e LI, e tire-se CG que liga os seus meios.

4 — O ponto de interseção O das retas CG e BI é o centro da elipse; tome-se O**c** = CO, será C**c** um diâmetro.

5 — Por O trace-se XY paralela a **Ff**; será XY a direção do diâmetro conjugado de **Cc.**

6 — Conhecida a direção XY, o diâmetro C**c** e um ponto C da curva, o problema 174 ensina a traçar a elipse.

HIPÉRBOLE

A **hipérbole** é uma curva plana na qual é constante a diferença das distâncias de cada um de seus pontos a dois pontos fixos, situados em seu plano.

A hipérbole é uma curva de **ramos infinitos**.

Sendo **Aa**, fig. 398, um comprimento constante, F e **f** dois pontos fixos, tem-se para cada ponto da curva MF — M**f** = **Aa**.

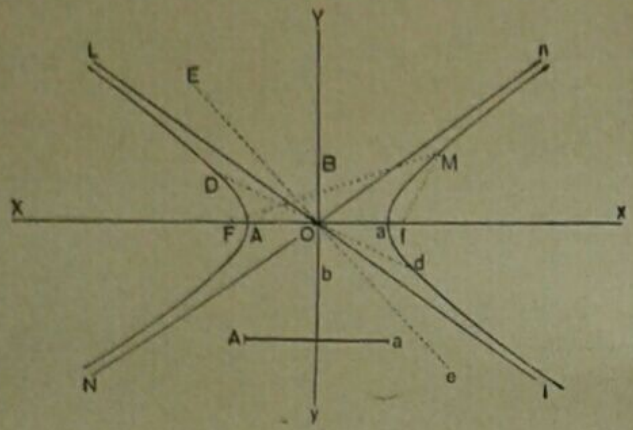


Fig. 398

A diferença **Aa** se representa por 2**a**. Os pontos fixos F e **f** são os focos, a distância F**f** é a **distância focal** e denominam-se **raios vetores** os segmentos de reta que ligam um ponto qualquer da curva aos focos; MF e M**f** são os raios vetores do ponto M.

Os **eixos** da hipérbole são dados em direção pela reta X**x**, que passa pelos focos, e pela reta Y**y** perpendicular ao meio da distância focal.

Dos dois eixos X**x** e Y**y**, só o primeiro encontra a curva; êsse denomina-se **eixo transverso,** e o outro, **eixo não transverso** ou **imaginário**.

O comprimento do eixo transverso é a parte **Aa** interceptada pelos ramos da curva; este eixo é representado, como já vimos, por 2**a** e por analogia ao que se dá na elipse, o eixo não transverso

também tem um comprimento B**b** = 2**b**, fig. 398. O problema 187, 2.ª construção, ensina a determinar o comprimento do eixo B**b**.

As extremidades A e **a** do eixo transverso são os **vértices** da hipérbole.

A hipérbole se diz **equilátera,** quando os dois eixos são iguais.

Círculos diretores são círculos descritos de cada foco como centro e com o comprimento o raio 2**a**.

Círculo principal é o círculo descrito sôbre o eixo transverso por diâmetro.

A hipérbole tem, como a elipse, **diâmetros conjugados;** D**d** e E**e**, fig. 398, são dois diâmetros desta natureza.

Todos os diâmetros passam pelo centro e podem tomar tôdas as direções, excetuando as das assíntotas.

Todos os diâmetros da hipérbole não encontram a curva; os que a encontram como D**d** fig. 398, denominam-se **diâmetros transversos;** os que não encontram, como E**e,** mesma figura, são diâmetros **não transversos** ou **imaginários**.

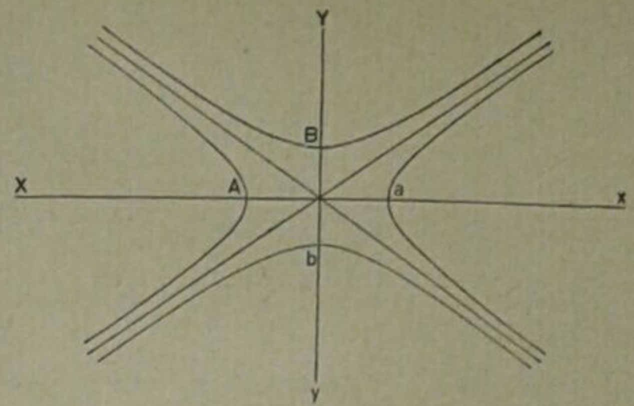


Fig. 399

As assíntotas passam pelo centro O, mesma fig. 398, e são tangentes à curva cujos pontos de contacto estão infinitamente afastados dos vértices (o problema 193 ensina a traçar as assíntotas).

Hipérboles conjugadas, fig. 399, são duas hipérboles que têm os mesmos eixos, o mesmo centro, as mesmas assíntotas. O eixo transverso de uma é o eixo não transverso da outra, e vice versa.

183 Traçar uma hipérbole sendo dados um dos eixos e os focos.

1.ª construção:

Aa, **Ff** eixo transverso e focos dados, fig. 400.

1 — Tome-se uma régua que tenha um comprimento maior que a distância focal **Ff** e um fio ou cordel igual ao comprimento **Aa** do eixo.

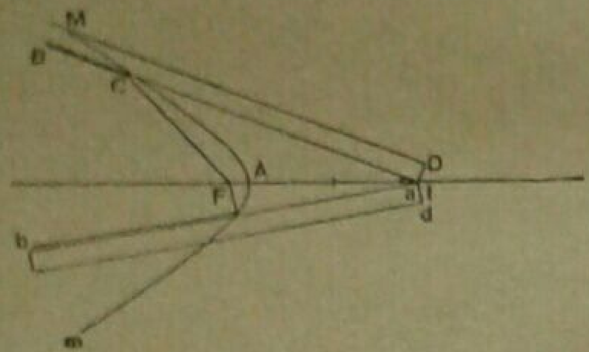


Fig. 400

2 — Prenda-se uma extremidade D da régua em **f**, devendo ela ter movimento em tôrno dêsse ponto.

3 — Fixe-se um dos extremos do fio em F e o outro no extremo B da régua.

4 — Estendendo o fio com o auxílio da ponta do lapis, formando um ângulo BCF de modo que o lado BC se ajuste ao longo da régua, o ponto C pertence à hipérbole.

5 — O movimento do lapis de B até que a régua se coloque em **Aa** descreve uma parte MA; a outra parte **m**A se obtém, voltando a régua na posição **db**.

6 — O outro ramo se traça do mesmo modo, prendendo o extremo da régua ao foco F.

2.ª construção:

Aa, **Ff**, eixo transverso e focos dados, fig. 401.

1 — Marque-se, um ponto qualquer D sôbre o prolongamento de **Aa**.

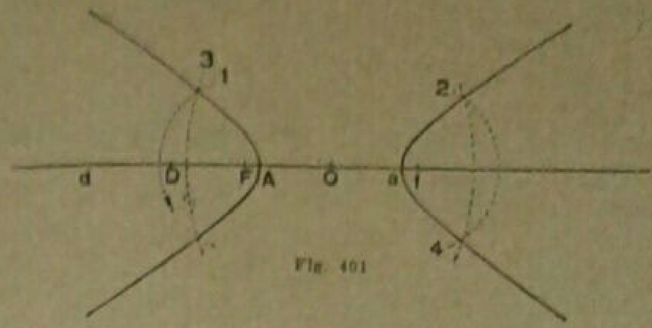


Fig. 401

2 — De F e **f**, como centros, e com raio AD, descrevam-se arcos 1, 2.

3 — Novamente de F e **f** como centros, e raio **a**D descrevam-se os arcos 3-4; estes arcos cortam os primeiros em pontos que pertencem à curva.

4 — Tomando um outro ponto qualquer **d**, têm-se dois outros raios A**d** e a**d**, que determinam mais quatro pontos da curva; donde se vê que se podem obter tantos pontos quantos se quiser, e que ligados por um traço contínuo dão a hipérbole pedida.

184 Traçar uma hipérbole sendo dados os eixos.

Aa e **Bb** eixos dados, fig. 402.

1 — Disponham-se os eixos em **Aa** e **Bb**, perpendiculares, bipartindo-se.

2 — Descreva-se a semi-circunferência principal.

3 — Tire-se-lhe a tangente CD num ponto qualquer C.

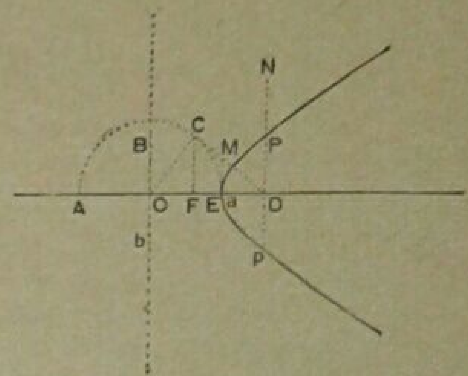


Fig. 402

4 — Marque-se DE igual ao semi-eixo OB e DF igual ao semi-eixo OA; trace-se CF e tire-se EM paralela a CF.

5 — Por D levante-se DN perpendicular a **Aa** e tome-se DP = DM; o ponto P pertence à curva.

6 — Tomando D**p** = DP tem-se em **p** um outro ponto da curva.

7 — Os pontos assim obtidos dão a hipérbole pedida.

185 Traçar uma hipérbole sendo dadas as assíntotas e um ponto da curva.

Tt, S**s** e P assíntotas e ponto dados, fig. 403.

1 — Por P tire-se uma secante qualquer CPD.

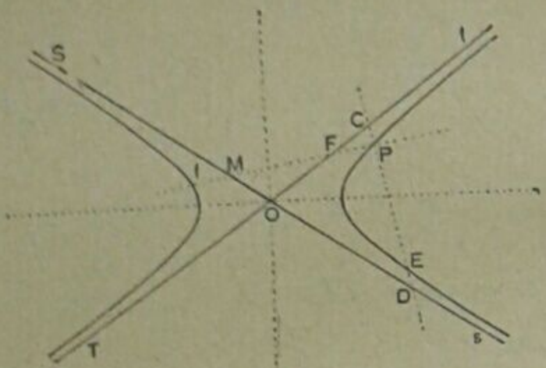


Fig. 403

2 — Esta secante corta as assíntotas em C e D; tomando DE = CP, o ponto E pertence à curva.

3 — Em uma outra secante PFM, tomando M**f** = PF, o ponto **f** será outro ponto da hipérbole.

4 — Operando sôbre novas secantes tiradas, quer pelo ponto P, quer por um outro ponto que já tenha sido determinado, se poderão obter tantos pontos da curva, quantos se quiser, os quais ligados por um traço contínuo dão a curva perdida.

186 Traçar uma hipérbole sendo dados dois diâmetros conjugados.

D**d** e E**e** diâmetros dados, fig. 404.

1 — Seja D**d** o diâmetro transverso; os pontos D e **d** pertencem, portanto, à hipérbole.

2 — Construa-se o paralelogramo ABCL.

3 — As diagonais LB e AC prolongadas são as assíntotas.

4 — Conhecidas as assíntotas e os pontos D e **d** da curva, pode-se traçar a hipérbole pedida (problema 185).

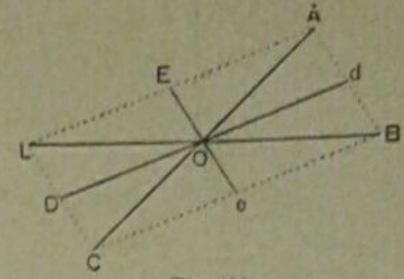


Fig. 404

187 Traçar uma hipérbole sendo dados o eixo transverso e um ponto da curva.

1.ª construção:

Aa e P eixo e ponto dados, fig. 405.

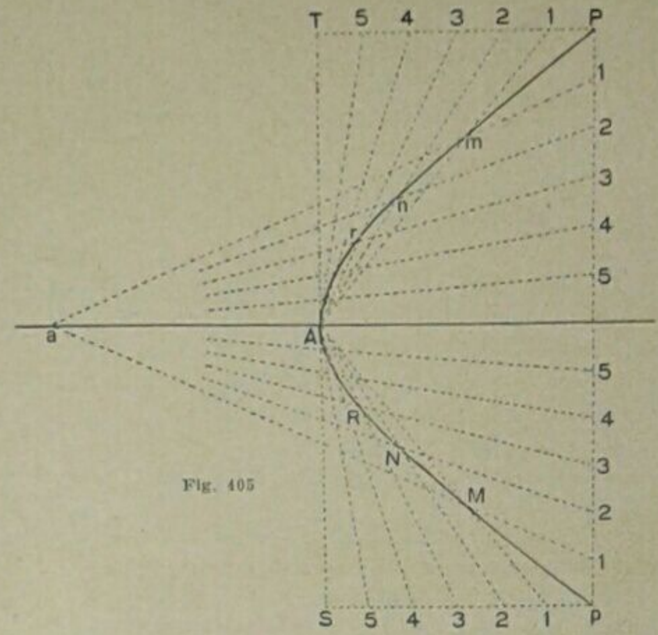


Fig. 405

1 — De **P** abaixe-se a perpendicular à **Aa** e tome-se em **p** o simétrico de P em relação a **Aa**: o ponto **p** pertence à curva.

2 — Construa-se o retângulo PTS**p**.

3 — Dividam-se os segmentos PT e S**p**, e cada metade de P**p** no mesmo número de partes iguais.

4 — Ligue-se o vértice **a** aos pontos 1, 2, 3, 4, 5 de **Pp**.

5 — Ligue-se também o vértice A aos pontos de divisão 1, 2, 3, 4, 5, de PT e S**p**.

6 — Fazendo passar um traço contínuo pelos pontos P, **m**, **n**, **r**, A, R, N, M, **p** obtém-se um ramo da hipérbole pedida.

7 — O segundo ramo se obtêm pela mesma construção, procurando um ponto correspondente a P à direita de **a**.

2.ª construção:

Aa e P eixo e ponto dados, fig. 406.

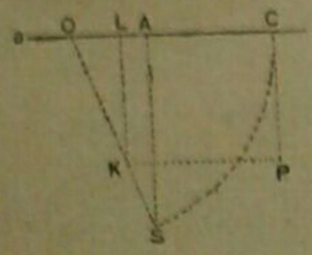


Fig. 406

1 — Determine-se o meio O de **Aa**.

2 — De P abaixe-se uma perpendicular PC, sôbre **Aa**.

3 — De O, como centro e com raio OC, descreva-se um arco de circunferência.

4 — Levante-se a perpendicular pelo vértice A e determine-se a interseção S com o arco de circunferência.

5 — Trace-se OS.

6 — Por P trace-se uma paralela ao eixo **Aa**, que determina em OS o ponto K.

7 — Traçando a perpendicular KL ao eixo **Aa**, o segmento OL dá o comprimento do semi-eixo não transverso.

8 — Conhecidos os dois eixos, pelo problema 184 chega-se ao traçado da hipérbole pedida.

188 Traçar as assíntotas de uma hipérbole.

1.ª construção:

X e **x** hipérbole dada, fig. 407.

1 — Em **a** levante-se **a**L perpendicular a **Aa**.

2 — De O, como centro, e raio OF descreva-se um arco de circunferência, que corte **a**L em M.

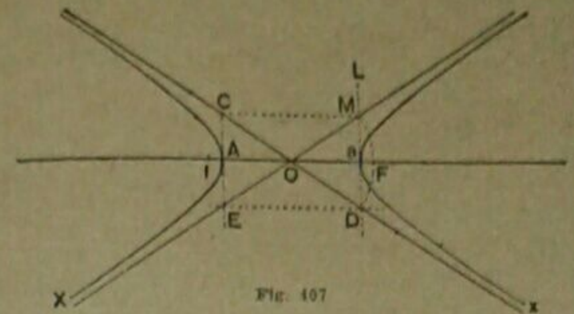


Fig. 407

3 — Construa-se o retângulo MCED; as diagonais dêste retângulo prolongadas são as assíntotas pedidas.

2.ª construção:

MN, PQ hipérbole dada, fig. 408.

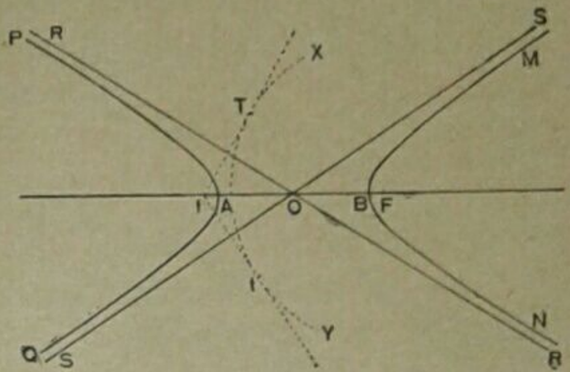


Fig. 408

1 — De um dos focos F, com raio igual ao eixo transverso AB descreva-se um arco de circunferência XY.

2 — Do outro foco **f** tracem-se a este arco duas tangentes **fT** e **ft**; para achar os pontos T' e **t**, basta de O, como centro, e raio OF' cortar o arco de circunferência XY.

3 — As perpendiculares OS e OR tiradas de O para as tangentes **ft** e **fT**, são as assintotas pedidas.

189 Traçar uma hipérbole equilátera.

Aa eixo transverso, figura 409.

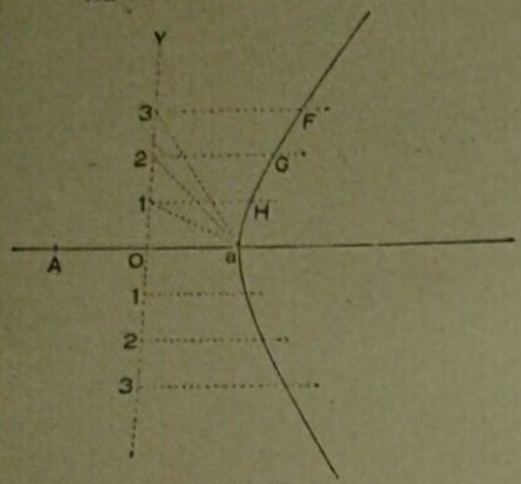


Fig. 409

1 — Tome-se em OY, perpendicular ao meio de **Aa**, um certo número de pontos.

2 — Pelos pontos marcados 1, 2, 3, 4..., tirem-se paralelas a OA.

3 — Sôbre cada paralela tome-se 3F = 3**a** 2G = 2**a** 1H = 1**a**...

4 — Os pontos H, G, F..., assim determinados, pertencem à hipérbole pedida, que se obtem ligando-se por um traço contínuo.

Observação. — As assintotas da hipérbole equilátera cortam-se em ângulo reto.

190 Traçar a tangente num ponto dado da hipérbole.

1.ª construção:

M ponto dado, fig. 410.

1 — Tracem-se os raios vetores MF e M**f**.

2 — A bissetriz **Bb** do ângulo FM**f** é a tangente pedida.

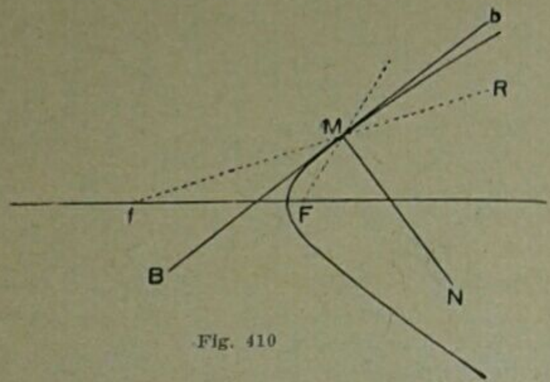


Fig. 410

3 — A bissetriz MN do ângulo suplementar FMR é a normal no ponto M.

2.ª construção:

M ponto dado, fig. 411.

1 — Determinem-se as assintotas.

2 — Por M tire-se MC paralela a uma das assintotas.

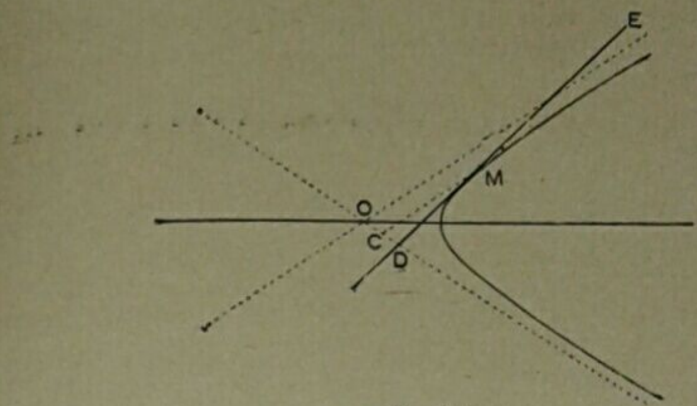


Fig. 411

3 — Marque-se CD = OC.

4 — Trace-se DME, que será a tangente pedida.

191 Traçar uma tangente à hipérbole por um ponto exterior.

P ponto dado, fig. 412.

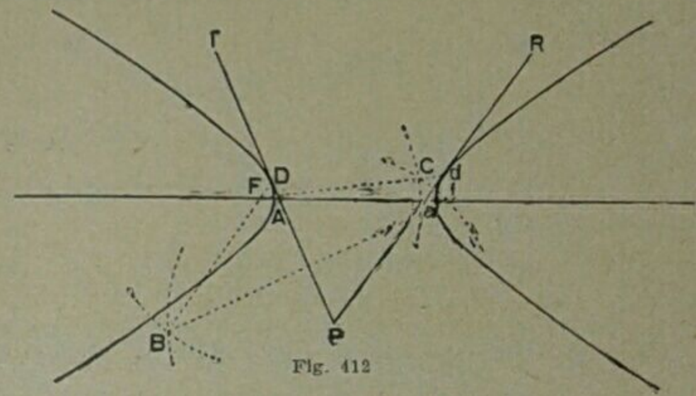


Fig. 412

1 — De um dos focos F, como centro, e com o raio **Aa** descreva-se uma circunferência.

2 — De P, como centro, e raio **Pf** descreva-se um arco que corte a circunferência já traçada, em C e B.

3 — As retas PT e PR perpendiculares ao meio de **Cf** e **Bf**, respectivamente, são as tangentes pedidas.

4 — Os pontos de contacto D e **d** obtêm-se traçando as retas BFD e FC**d**.

192 Traçar uma tangente à hipérbole, paralela a uma reta dada.

XY reta dada, fig. 413.

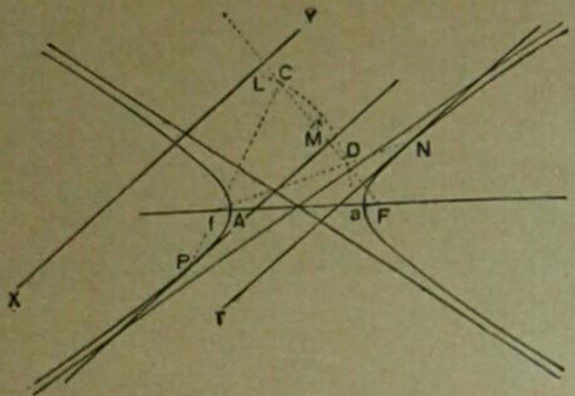


Fig. 413

1 — De um dos focos F abaixe-se FL perpendicular a XY.

2 — De **f**, como centro, e raio **Aa** descreva-se uma circunferência que corte FL, em C e D.

3 — As perpendiculares MP e NT ao meio de FC e FD, respectivamente, são as tangentes pedidas.

4 — Os pontos de contacto P e N obtêm-se traçando C**f**P e **f**DN.

193 Determinar o centro, os eixos, os focos e as assíntotas de uma hipérbole dada.

Determinação do centro, fig. 414.

1 — Tracem-se duas cordas paralelas quaisquer **Dd** e **Cc** e tire-se **ti**, que liga os meios dessas cordas.

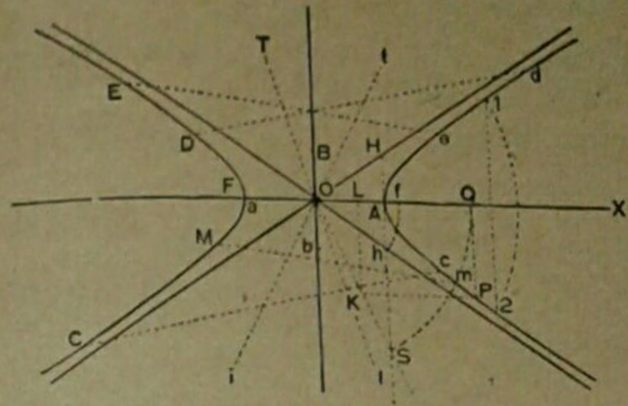


Fig. 414

2 — Tracem-se duas outras cordas paralelas **Ee** e **Mm** e tire-se também Tt que liga os seus meios.

3 — O ponto de interseção O de Tt e **ti** é o centro procurado.

Determinação dos eixos, fig. 414.

1 — De O, como centro, e com um raio suficiente, descreva-se um arco de circunferência que corte a hipérbole em dois pontos 1 e 2.

2 — Trace-se o segmento de reta (1-2) e sôbre êle abaixe-se a perpendicular OX; A e **a** serão os vértices e **Aa** o eixo transverso.

3 — Para ter o eixo não transverso, tome-se um ponto P qualquer da curva e dêle abaixe-se PQ perpendicular a OX; daí por diante aplique-se o problema 187, 2.ª construção o que dá em OL a grandeza do semi-eixo não transverso; tomando na perpendicular a OX, tirada por O, as distâncias OB = **Ob** = OL tem-se em **Bb** êsse eixo.

Determinação dos focos e assíntotas, fig. 414.

1 — Sôbre a perpendicular AS marque-se A**h**, igual ao semi-eixo não transverso OB.

2 — De O, como centro, e raio O**h** descreva-se um arco que corte OX em **f**; será **f**, um dos focos, o outro foco F se obtém tomando OF = O**f**.

3 — A reta O**h** prolongada, é uma das assíntotas, a outra se obtém tomando AH = A**h** e traçando OH.

194 Dada a direção de um diâmetro da hipérbole, construir o seu conjugado.

1.ª construção:

MN diâmetro dado, fig. 415.

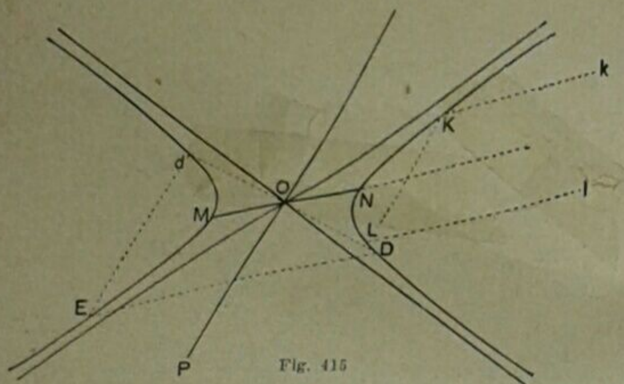


Fig. 415

1 — Tire-se uma corda qualquer DE paralela a MN.

2 — Trace-se o diâmetro D**d** e depois a corda suplementar **d**E.

3 — A reta OP paralela a **d**E é a direção do diâmetro conjugado de MN.

2.ª construção:

MN diâmetro dado, fig. 415.

1 — Tracem-se as paralelas L**l** e K**k** a igual distância de MN prolongada, assinalando as interseções K e L com a curva.

2 — Trace-se KL e por O tire-se-lhe a paralela OP, que resolve a questão.

195 Dadas as assíntotas de uma hipérbole, traçar um sistema de diâmetros conjugados, dos quais um passe por um ponto dado da curva.

T**t** S**s** e P assíntotas e ponto dado, fig. 416.

1 — Pelo problema 190, 2.ª construção, trace-se a tangente P**m**.

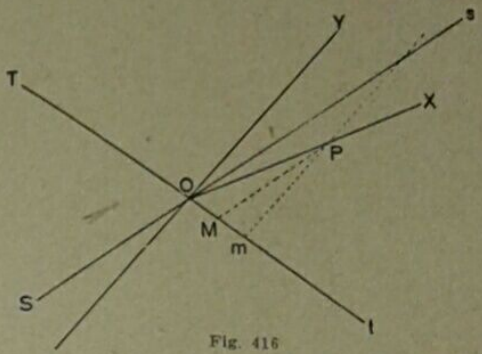


Fig. 416

2 — Ligue-se O a P e trace-se OY paralela à tangente P**m**; OX e OY são os dois diâmetros conjugados pedidos.

196 Dado um sistema de diâmetros conjugados da hipérbole, deduzir seus eixos.

D**d** e C**c** diâmetros conjugados dados, fig. 417.

1 — Por D trace-se uma paralela a C**c** e nela marque-se DR = D**r** = OC.

2 — Tracem-se OR e O**r**; serão estas retas as assíntotas.

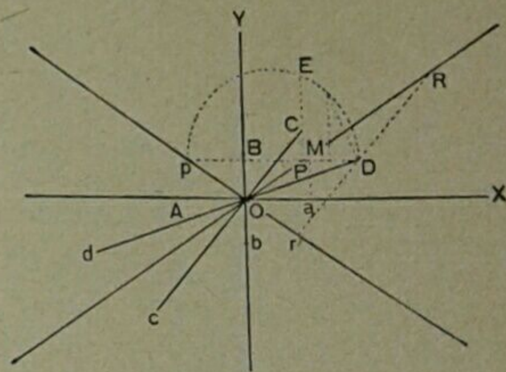


Fig. 417

3 — As retas OX e OY, bissetrizes dos ângulos das assíntotas, dão a direção dos eixos.

4 — Para ter os comprimentos dos semi-eixos, tire-se pelo ponto D a reta **Dp** paralela a OX; essa reta encontra as assíntotas nos pontos P e **p**.

5 — Procure a média geométrica entre DP e **Dp**, problema 98; essa média representa o comprimento do semi-eixo transverso; pode-se então marcar OA = **Oa** = média geométrica.

6 — A perpendicular **Ma** a OX, levantada por **a** e prolongada até encontrar a assíntota OR dá o comprimento do semi-eixo não transverso.

197 Dado um arco de hipérbole, continuar a curva.

tI arco dado, fig. 418.

1 — Determine-se o centro, problema 193.

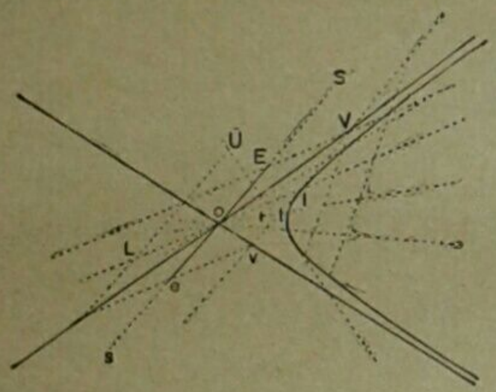


Fig. 418

2 — Determinem-se dois diâmetros conjugados LI e **Ss**, problema 194.

3 — Para se determinar o comprimento do diâmetro não transverso cuja direção é **Ss**, nos pontos L e I tirem-se duas tangentes **It** e LU.

4 — Trace-se uma terceira tangente qualquer a partir de U que, cortando as duas primeiras, determine dois segmentos **It** e **Lt**, entre os quais a média geométrica será o comprimento do semi-diâmetro não transverso.

5 — A figura 419 dá em UE a grandeza dessa média geométrica. Tomando para cada lado de O, sôbre **Ss**, dois comprimentos OE e **Oe**, iguais a UE, tem-se o diâmetro não transverso.

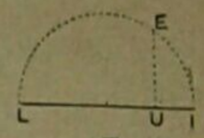


Fig. 419

6 — As assíntotas OV e **Ov** determinam-se pelas paralelas EV e **ev** ao eixo transverso.

7 — Com os elementos adquiridos, os problemas anteriores resolvem a questão.

PARÁBOLA

A **parábola** é uma curva plana tal que cada um de seus pontos é equidistante de um ponto fixo e de uma reta fixa, situados em seu plano.

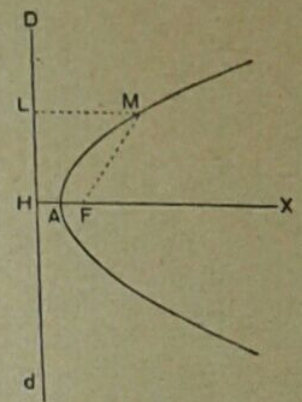


Fig. 420

Sendo F, fig. 420, o ponto fixo e **Dd** a reta fixa, tem-se para cada ponto M da parábola, abaixando ML perpendicular sôbre **Dd,** ML = MF.

O ponto F é o **foco**, a reta **Dd** é a **diretriz,** e o segmento MF é o **raio vetor** do ponto M.

A distância FH do foco à diretriz é o **semi-parâmetro**.

A parábola tem para **eixo** a perpendicular tirada do foco sôbre a diretriz; a perpendicular HX é o eixo.

O ponto A comum à curva e ao eixo é o **vértice**.

Os **diâmetros** da parábola são retas paralelas ao eixo.

198 Traçar uma parábola, sendo dados:

1.º caso. O foco e a diretriz.

1.ª construção:

Dd e F, diretriz e foco dados, fig. 421.

1 — De F abaixe-se FO perpendicular à diretriz **Dd**; será OX o eixo.

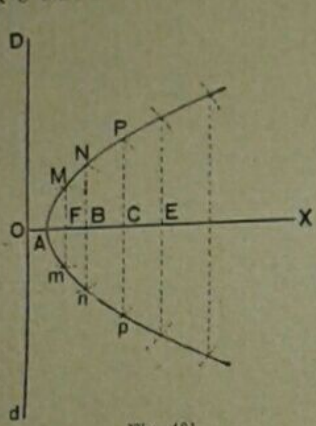


Fig. 421

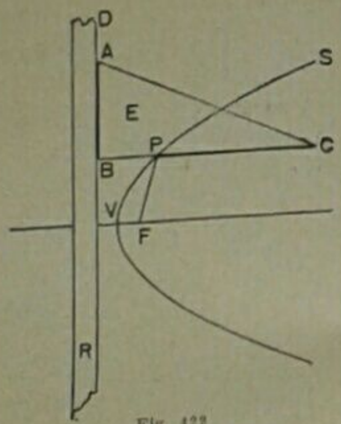


Fig. 422

2 — Tome-se o meio A de FO; será A o vértice.

3 — Por F e por outros pontos quaisquer de AX, tracem-se perpendiculares a AX.

4 — De F, como centro, e com raio igual a FO marquem-se os pontos M e **m**; do mesmo ponto F, como centro, e com o raio BO marquem-se os pontos N e **n**, e assim por diante.

5 — Passando por P, N, M, A, **m, n, p** ... um traço contínuo obtem-se a parábola pedida.

2.ª construção:

D e F diretriz e foco dados, fig. 422.

1 — Firme-se uma régua R contra a diretriz D.

2 — Coloque-se um esquadro E aplicado contra a régua R por seu catêto AB.

3 — Fixe-se um fio igual ao outro catêto BC do esquadro, uma extremidade em C no esquadro, e a outra no foco F.

4 — Estendendo o fio com o auxílio do lapis de modo a fazê-lo tomar a forma de um ângulo CPF, tendo um lado PC aplicado ao catêto BC do esquadro, o ponto P pertence à curva.

5 — Movendo o esquadro ao longo da régua, faça-se o lapis acompanhar êsse movimento, de modo que o ângulo CPF conserve sempre os lados retilíneos e um deles CP aplicado à aresta BC do esquadro.

6 — Este jogo do esquadro, de V para cima, permite traçar uma parte VS da parábola.

7 — A outra parte traça-se de modo idêntico colocando, porém, o esquadro com a aresta BC para cima.

2.º caso. O vértice, o eixo e um ponto da curva.

1.ª construção:

A, AX e B, vértice, eixo e ponto dados, fig. 423.

1 — De B tire-se a perpendicular ao eixo e marque-se **b** simétrico de B.

2 — Divida-se B**b** em um número par qualquer de partes iguais, em seis, por exemplo.

3 — Pelos pontos de divisão de B**b** tirem-se paralelas ao eixo.

4 — Divida-se o segmento que vai de A até a perpendicular B**b** em três (metade de seis) partes iguais.

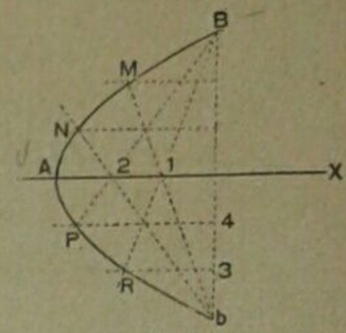


Fig. 423

5 — Ligando B e **b** aos pontos de divisão 1, 2, e prolongando essas retas até às paralelas respectivas, obtém-se os pontos M, N, P, R que pertencem à curva.

2.ª construção:

A, AC e B vértice, eixo e ponto dados, fig. 424.

1 — De B abaixe-se BC perpendicular ao eixo e prolongue-se, além de C, uma medida igual a BC.

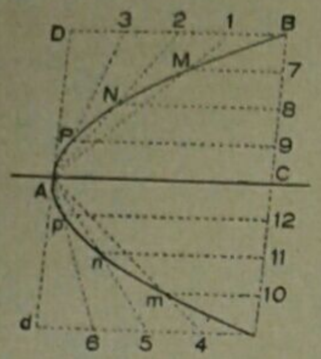


Fig. 424

2 — Construa-se o retângulo DB por Dd.

3 — Divida-se o lado DB dêsse retângulo em um certo número de partes iguais; depois divida-se Dd num número duplo.

4 — Pelos pontos 7, 8, 9, 10, 11, 12, tirem-se paralelas ao eixo.

5 — Ligue-se o vértice A aos pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6; estas retas encontram as correspondentes nos pontos M, N, P, **p, n, m,** que pertencem à curva.

3.º caso. O eixo, o foco e um ponto da curva.

XY, F e M, eixo, foco e ponto dados, fig. 425.

1 — De M tire-se MN paralela a XY.

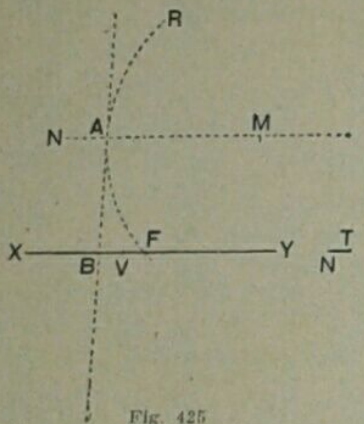


Fig. 425

2 — De M, como centro, e raio MF descreva-se um arco FR que cortará MN em um ponto A.

3 — De A abaixe-se AB perpendicular a XY; será AB a diretriz.

4 — O meio V de BF é o vértice.

5 — Com os elementos obtidos, as construções precedentes resolvem a questão.

199 Traçar a tangente em um ponto da parábola.

1.ª construção:

M ponto dado, fig. 426.

1 — Tire-se MA paralela ao eixo.

2 — Una-se M a F.

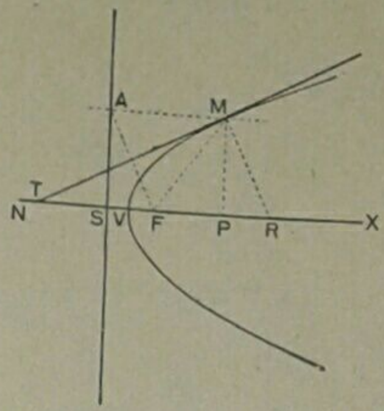


Fig. 426

3 — Tire-se a bissetriz MT do ângulo AMF; ou levante-se a perpendicular MT ao meio de AF.

4 — A reta MT é a tangente pedida.

2.ª construção:

M ponto dado, fig. 426.

1 — Marque-se FN = FM; tire-se MN, que será a tangente pedida.

3.ª construção, quando não se conhece o foco:

M ponto dado, fig. 426.

1 — Abaixe-se MP perpendicular a VX.

2 — Marque-se VN = VP e trace-se NM, tem-se nesta reta a tangente.

4.ª construção:

M ponto dado, fig. 426.

1 — Marque-se PR = FS.

2 — Trace-se MR, que será a **normal**.

3 — Por M trace-se MT perpendicular a MR; será MT a tangente.

200 Traçar uma tangente por um ponto exterior.

P ponto dado, fig. 427.

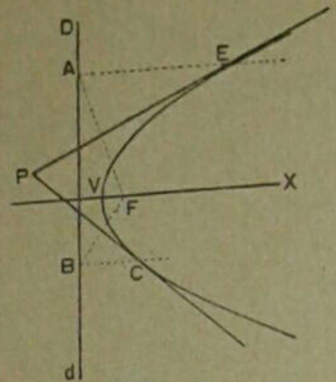


Fig. 427

1 — De P, como centro, e raio PF descreva-se um arco de circunferência que corte a diretriz, em A e B.

2 — Por A e B tirem-se AE e BC, paralelas a VX.

3 — Em E e C tem-se os pontos de contacto; PE e PC são as tangentes pedidas.

4 — Elas são perpendiculares ao meio de AF e BF, o que fornece outra construção.

201 Tirar uma tangente paralela a uma reta dada.

MN reta dada, fig. 428.

1 — De F abaixe-se FP perpendicular a MN.

2 — Prolongue-se FP até encontrar a diretriz em R.

3 — A perpendicular **Tt** ao meio de FR é a tangente pedida.

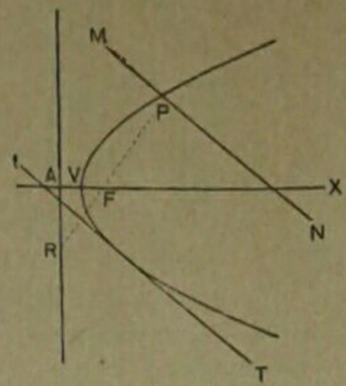


Fig. 428

202 Dada uma parábola, achar o vértice, o foco, o eixo e a diretriz.

XY parábola dada, fig. 429.

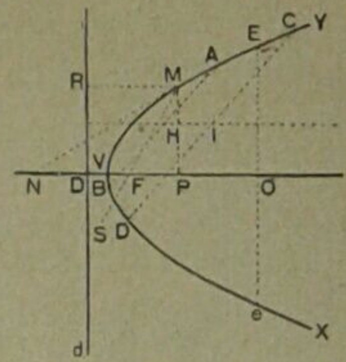


Fig. 429

1 — Tracem-se duas cordas quaisquer AB e CD, paralelas.

2 — Tire-se a reta HI que liga os meios.

3 — De um ponto qualquer E abaixe-se **Ee** perpendicular a HI.

4 — Pelo meio O de Ee levante-se VO perpendicular e **Ee**, será VO o eixo e V o vértice.

5 — Para achar o foco, tire-se por um ponto M da curva uma tangente, problema 199, 3.ª construção; para isso trace-se MP perpendicular a VO e marque-se VN =VP; a reta MN será a tangente.

6 — Trace-se MR paralela a VO e faça-se ângulo NMS igual a RMN; a interseção F de MS com VO será o foco.

7 — Tome-se VD = VF e trace-se **Dd** perpendicular a VO; essa perpendicular será a diretriz.

203 Dado um arco de parábola, continuar a curva.

P parábola dada, fig. 430.

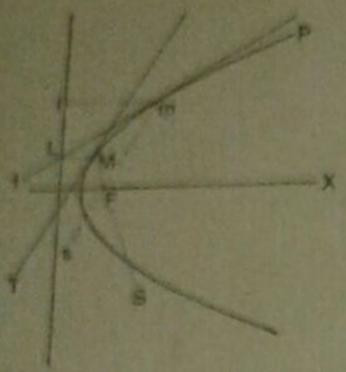


Fig. 430

1 — Tracem-se duas tangentes MT e **mt,** problema 199, 3.ª construção.

2 — Com **ml** e ML formam as tangentes os ângulos **tml** e TML; faça-se TMS = TML e **tms** = **tml,** o ponto de interseção F será o foco.

3 — Por F tire-se FX paralela a **ml** ou a ML; será FX o eixo.

4 — Com êstes elementos, as construções precedentes resolvem o problema (problema 198, **2.º caso**).

204 Traçar uma normal por um ponto dado numa cônica qualquer.

1 — Pelo ponto dado tire-se uma paralela a um dos eixos até encontrar um diâmetro.

2 — Do ponto de encontro baixe-se uma perpendicular sôbre o diâmetro conjugado desse ou sôbre uma direção paralela a êsse conjugado.

3 — Determine-se a interseção da perpendicular com o segundo eixo.

4 — Ligando o ponto de interseção ao ponto dado, tem-se a normal pedida.

Caso da elipse.

M ponto dado, fig. 431.

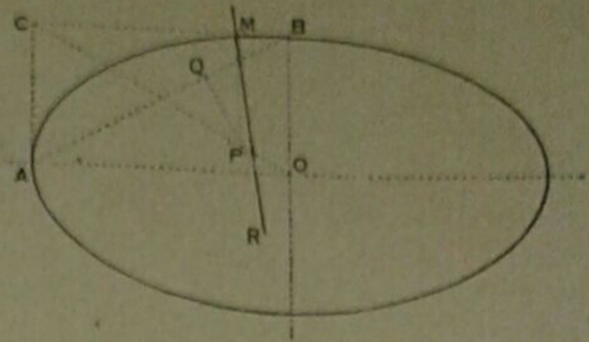


Fig. 431

1 — CO é um diâmetro.
2 — A direção do seu conjugado é AB.
3 — AO e BO são os semi-eixos e a reta MR é a normal pedida.

Caso da hipérbole.

M ponto dado, fig. 432.

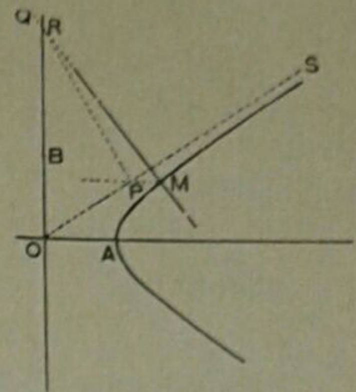


Fig. 432

1 — OA e OB são os semi-eixos.

2 — A assíntota OS é considerada como um diâmetro; ela mesma é o seu diâmetro conjugado.

3 — MR é a normal pedida.

Caso da parábola.

M ponto dado, fig. 433.

1 — AB é uma corda qualquer.

2 — LO paralela a VX e passando pelo meio O de AB é um diâmetro.

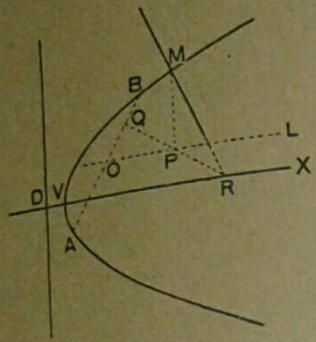


Fig. 433

3 — A direção do conjugado com êsse diâmetro é AB.

4 — Sendo VX o eixo, toma-se a diretriz como uma direção paralela ao outro eixo.

5 — MR é a normal pedida.

QUADRATRIZ

Suponhamos uma semi-reta AX, perpendicular ao diâmetro de uma semi-circunferência na sua extremidade, fig. 434 e a mover-se paralelamente a si mesma, percorrendo os pontos do diâmetro AB enquanto o raio AO gira ao redor do centro, de modo que AX se confunda com êste raio no momento em que acaba de descrever o quadrante AB.

A curva A, 11, 12, 13, 14, 15... que passa pelas interseções sucessivas dessas duas retas é denominada **quadratriz**.

205 Construir uma quadratriz.

1 — Descreva-se a semi-circunferência AB... que se divide em partes iguais, fig. 434.

2 — Divida-se o diâmetro no mesmo número de partes iguais.

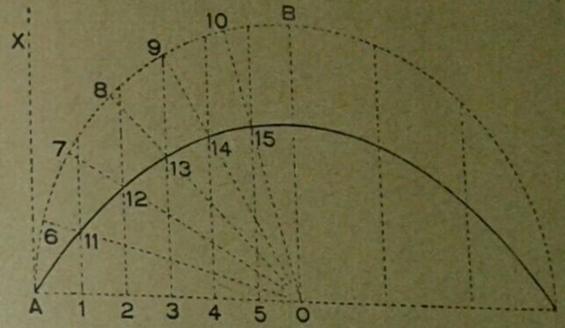


Fig. 434

3 — Pelos pontos 1, 2, 3... levantem-se perpendiculares e pelos pontos 6, 7, 8, 9... tracem-se os raios correspondentes; estas retas se interceptam respectivamente duas a duas em 11, 12, 13, 14, 15.... pontos que pertencem à curva.

4 — Liguem-se êsses pontos por um traço contínuo.

Observação — Esta curva, inventada pelo geômetra Dinostrato (*), resolve o célebre problema da poliseção do ângulo.

(*) **Dinostrato** — geômetra grego do comêço do IV século, antes de nossa era; foi discípulo ed Platão.

206 Dividir um ângulo em partes iguais.

XOY, ângulo dado; quer-se dividi-lo em cinco partes iguais, fig. 435.

1 — Do vértice O, com um raio arbitrário, descreve-se um arco AC.

2 — Complete-se a semi-circunferência e construa-se a quadratriz AD...

3 — Do ponto D, onde DY encontra a quadratriz, abaixe-se DE perpendicular a AB.

4 — Divida-se AE em cinco partes iguais e por 1, 2, 3, 4 levantem-se perpendiculares a AB até encontrarem a quadratriz.

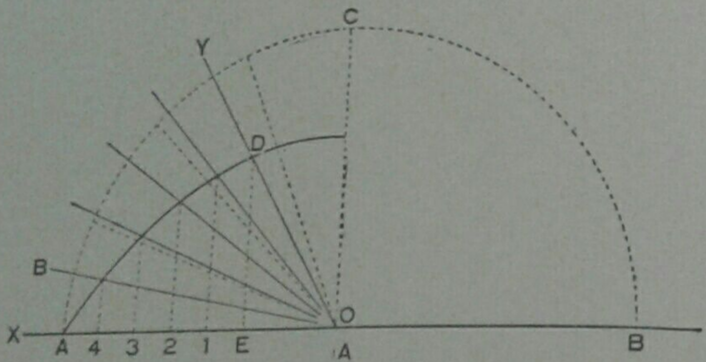


Fig. 435

5 — Pelos pontos de interseção tirem-se os raios que dividem XOY em cinco ângulos iguais.

CISSÓIDE

Se pelo extremo A do diâmetro de um círculo dado se tiram diversas secantes A1, A2, A3, A4, A5... fig. 436 terminadas na tangente **Tt** tirada pelo outro extremo do mesmo diâmetro e se, sôbre essas secantes, se tomam a partir dos pontos 1, 2, 3, 4, 5.... os comprimentos 1**c** = a corda AC; 2**d** = a corda AD,... os pontos **c, d, e**... = pertencem à curva denominada **cissóide**.

207 Construir uma cissóide.

1 — Trace-se uma circunferência O, e por um de seus pontos A trace-se um diâmetro fig. 436.

2 — Tire-se **Tt** tangente à circunferência no ponto diametralmente oposto a A e por A as secantes tais como A1, A2...

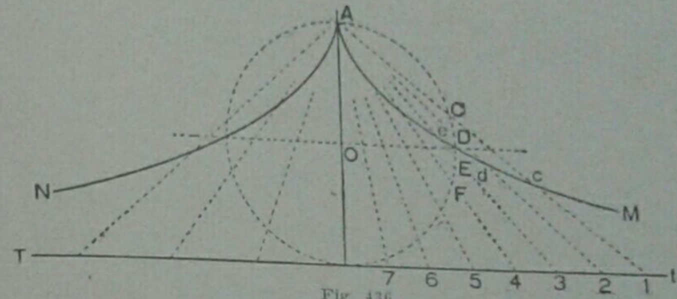


Fig. 436

3 — Sôbre estas secantes marquem-se a partir de 1, 2, 3, 4... os comprimentos 1**c** = AC 2**d** = AD 3**e** = AE...

4 — Os pontos **c, d, e**... ligados por um traço contínuo dão a curva pedida.

Observação — Esta curva, inventada pelo geômetra Diocles (*), compõe-se de dois ramos AM e AN, dos quais **Tt** é uma assíntota comum.

CONCHÓIDE

A **conchóide** é uma curva tal que, se de cada um de seus pontos se tiram retas para um ponto determinado e dado, chamado **polo,** as partes destas retas, interceptadas entre a curva e uma reta

(*) **Diocles** — geômetra grego do sexto século da nossa era.

também dada de posição, e chamada **diretriz**, têm um comprimento constante, fig. 437.

208 Construir uma conchóide.

A, XY e L pólo, diretriz e comprimento constante dados, fig. 437.

1 — De A tirem-se as diversas retas...

2 — A partir dos pontos C, D, E, F..., de interseção delas com a diretriz XY, marquem-se os comprimentos C1 = C2 = L; D3 = D4 = L,...

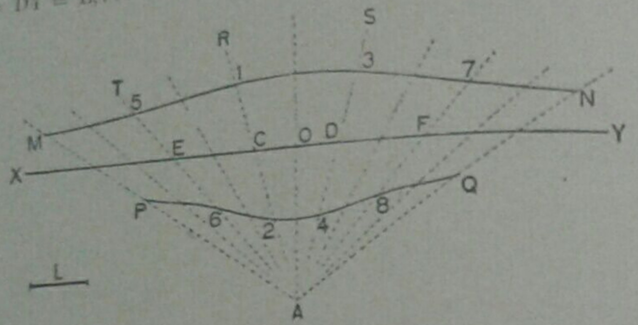


Fig. 437

3 — Ligando os pontos M, 5, 1, 3, 7, N... e do mesmo modo os pontos P, 6, 2, 4, 8, Q... obtém-se a curva.

Observação — Esta curva, inventada pelo geômetra Nicomedes (*), para resolver o problema da triseção do ângulo, compõe-se de dois ramos MN e PQ, dos quais a diretriz XY é assíntota comum.

O ramo MN denomina-se conchóide **ulterior** e o outro PQ conchóide **citerior**.

A conchóide citerior afeta diversas formas segundo se tem as hipóteses seguintes:

$$L < AO$$
$$L = AO$$
$$L > AO$$

(*) **Nicomedes** — geômetra grego, nascido cêrca de 180 anos antes de Cristo.

sendo o segmento AO porção da perpendicular abaixada do pólo sôbre a diretriz XY.

Na primeira hipótese a curva afeta a forma da fig. 437.

Na segunda, a curva apresenta a forma da figura 438, sendo o pólo A um ponto de reversão.

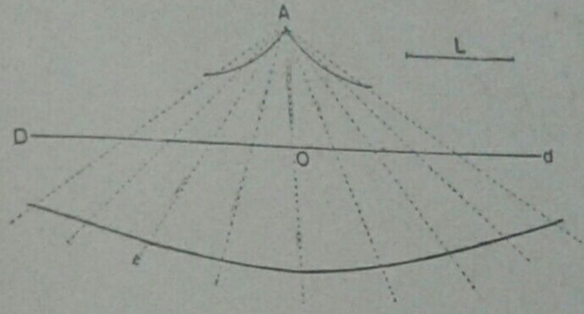


Fig. 438

Na terceira hipótese tem-se na figura 439 a forma da curva;

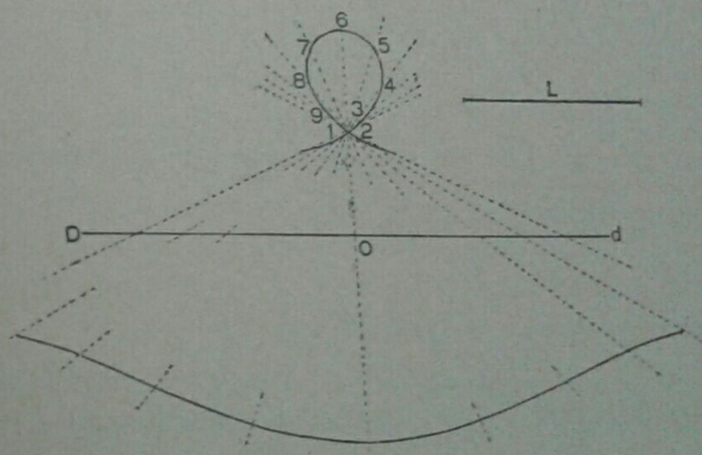


Fig. 439

a conchóide citerior apresenta-se com um anel, sendo o pólo A um **nódo** ou **ponto duplo**.

209 Divida um ângulo em 3 ângulos iguais.

1.ª construção:

A ângulo dado, fig. 440.

1 — Prolongue-se um lado qualquer, AC, por exemplo.....

2 — De A, como centro, e com um raio qualquer, descreva-se uma semi-circunferência.

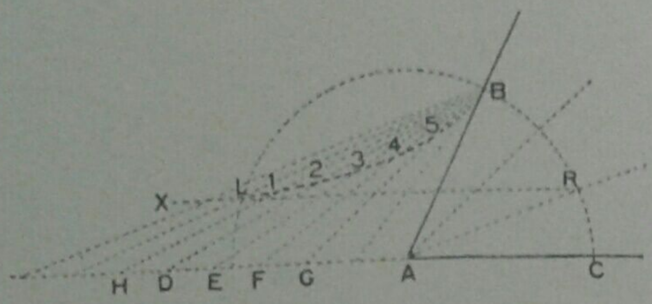


Fig. 440

3 — Do ponto de interseção B tracem-se diversas secantes BH, BD, BE, BF...

4 — Sôbre estas secantes, a partir de H, D, E, F..., marquem-se as distâncias H1, D2, E3, F4... iguais ao raio AC da semi-circunferência.

5 — Unam-se os pontos 1, 2, 3, 4, 5... por um traço contínuo, o que dá a curva X; esta curva é a **conchóide**.

6 — Pelo ponto de interseção L desta curva com a semi-circunferência tire-se LR paralela a AC.

7 — O ponto R limita o arco RC, que o qual mede o ângulo RAC é a terça parte do ângulo dado.

2.ª construção:

A ângulo dado, fig. 441.

1 — De um ponto qualquer B de um lado levante-se uma perpendicular até encontrar o outro lado.

2 — De C tire-se CK paralela a AB.

3 — De A tirem-se diversas retas AD, AE, AF..., e nestas retas marquem-se os pontos G, H... distantes de D, E, F... o dôbro de AC.

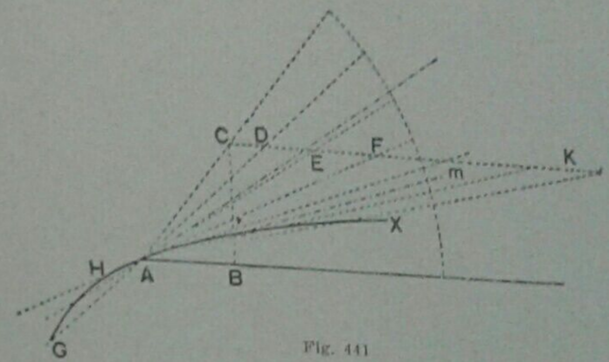


Fig. 441

4 — Liguem-se os pontos G, H... por um traço contínuo, o que dá a curva X. Esta curva é a **conchóide**.

5 — Pelo ponto de interseção desta curva com BC tire-se **Am**; o ângulo **m**AB é a terça parte do ângulo dado.

LIMAÇON DE PASCAL

A Limaçon de Pascal (*) é uma curva tal que, se de cada um de seus pontos se tiram retas para um ponto determinado e dado, as partes destas retas interceptadas entre a curva e uma cir-

Clermont-Ferrand em 1623 e faleceu em Paris em 1662.

(*) **Pascal** (Blaise) — Geômetra, físico, filósofo e escritor francês nasceu em cunferência de círculo, que passa pelo ponto dado, têm um comprimento constante, fig. 442.

210 Construir uma limaçon.

P, O e L ponto, círculo e comprimento dados, fig. 442.

1 — De P tirem-se as diversas secantes P1, P2, P3, . . .

2 — A partir dos pontos B, D, G, K . . . de interseção delas com a circunferência marquem-se os comprimentos BA = BC = L; DE = DF = L; GH = GI = L; KT = KN = L; MS = MR = L, . . .

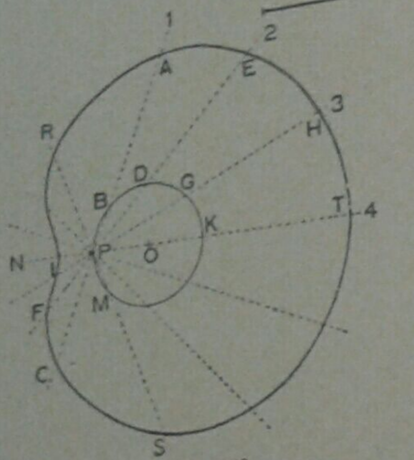


Fig. 442

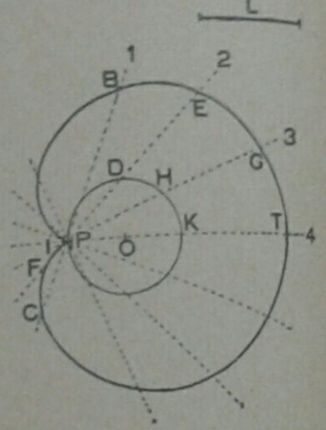


Fig. 443

3 — Ligando os pontos F, I, N, R, A, E, H . . . por um traço contínuo, obtém-se a curva.

Esta curva afeta diversas formas segundo se têm as hipóteses seguintes:

$$L > D$$
$$L = D$$
$$L < D$$

sendo D o diâmetro do círculo.

Na 1.ª hipótese a curva afeta a forma da fig. 442.

Na 2.ª hipótese a curva apresenta a forma da fig. 443, tendo em P um ponto de reversão.

Finalmente na 3.ª hipótese obtém-se a curva da figura 444, tendo interiormente ao círculo um anel, sendo neste caso, o ponto P um **nódo** ou **ponto duplo**.

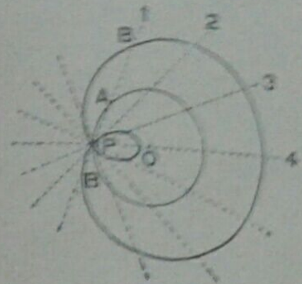


Fig. 444

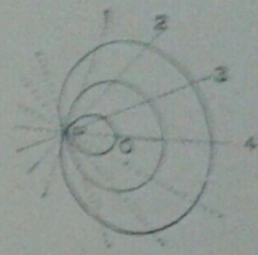


Fig. 445

Si L = R, tem-se a curva da fig. 445; o anel passa pelo centro O.

ESPIRAL

A **espiral** é uma curva que descreve uma infinidade de voltas em tôrno de um ponto fixo chamado **pólo**.

A espiral de Conon ou de Arquimedes (*), que traz o nome do geômetra que primeiro lhe descreveu as propriedades, é gerada pelo deslocamento de um ponto G, fig. 446, que parte do centro O de um círculo, e que descreve o raio OG no mesmo tempo em que o extremo G, desse mesmo raio, descreve a circunferência.

O ponto fixo O, donde parte a curva, denomina-se **polo;** o segmento de reta que liga o polo a um ponto qualquer da curva é **um raio vetor.**

A parte da curva correspondente a uma revolução do raio vetor igual a 4 ângulos retos denomina-se **espira;** OGHJKMNS é uma espira.

O comprimento OS, igual ao raio da circunferência, cnama-se **passo da espiral;** o passo é, pois, a grandeza constante existente entre duas espiras consecutivas e medida no raio vetor.

O raio da circunferência que, retificada, tem um comprimento igual ao passo OS, denomina-se **parâmetro.**

(*) **Arquimedes** — o maior geômetra da antiguidade, grande sábio, nasceu em Siracusa em 287 antes de Cristo, faleceu em 212.

Conon de Samos — astrônomo e geômetra grego do terceiro século antes de Cristo. Passa por ter sido inventor da curva denominada espiral de Arquimedes.

211 Traçar uma espiral de Arquimedes.

OS passo da espiral, fig. 446.

1 — Divide-se a região plana em tôrno de O bem como o passo OS no mesmo número de partes iguais.

2 — Do centro O tracem-se arcos concêntricos partindo dos pontos de divisão 1, 2, 3, 4, 5... e terminando respectivamente nas semi-retas OA, OB, OC, OD, OE, OM, ON...

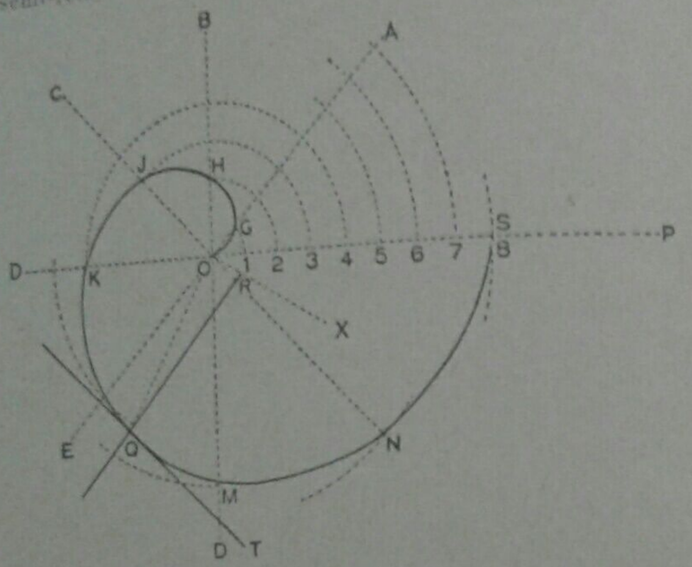


Fig. 446 e 447

3 — Os encontros destas retas com aqueles arcos determinam os pontos G, H, J, K,... que, ligados por um traço contínuo dão a curva.

212 Traçar uma tangente em um ponto da espiral de Arquimedes.

Q ponto dado, fig. 447.

1 — Trace-se OQ.

2 — Por O tire-se OX perpendicular a OQ.

3 — Sôbre OX, a partir de O, marque-se OR igual ao parâmetro.

4 — Trace-se RQ, que será a normal.

5 — A perpendicular QT, a RQ no ponto Q, é a tangente pedida.

Observação — O parâmetro OR, é o raio da circunferência cujo desenvolvimento é igual ao passo OS; obtem-se do seguinte modo:

1 — Meça-se com o duplo decímetro o comprimento do passo OC. Suponhamos que êste comprimento seja = 4 cm.

2 — Na fórmula $C = 2 \pi R$ substitua-se C por 0,04, o que dá $0{,}04 = 2\pi R$ ou $0{,}04 = 2 \times 3{,}14 \times R$.

3 — Donde $R = \frac{0{,}04}{2 \times 3{,}14} = \frac{0{,}04}{6{,}28} = 0{,}0064$

4 — O parâmetro OR = 0,0064.

213 Traçar uma espiral logarítmica.

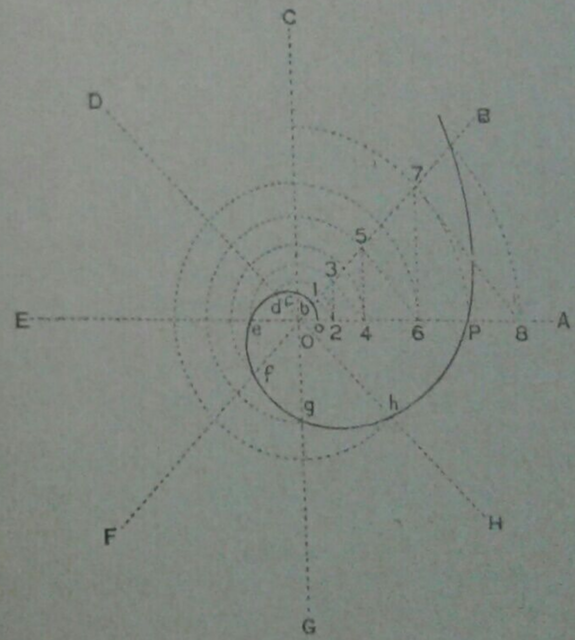


Fig. 448

O, ôlho da espiral logarítmica, fig. 448.

1 — A espiral logarítmica goza da propriedade de cortar todos os seus raios vetores debaixo de um ângulo constante.

A tangente em cada um de seus pontos faz sempre o mesmo ângulo com o raio que parte do polo.

2 — Divida-se a região plana em tôrno de O em partes iguais.

3 — Tracem-se numa dessas partes AOB as anti-paralelas quaisquer (0-1), (1-2), (2-3), de modo que a extremidade de uma seja o começo da seguinte.

4 — De O como centro, e com os raios Oo, O1, O2, O3, O4 . . . descrevem-se arcos que cortam OB, OC, OD, OE, OF . . . nos pontos **a, b, c, d** . . . que, ligados por um traço contínuo, dão a curva pedida.

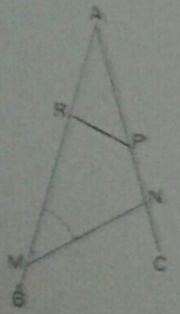


Fig. 449

Observação — Chamam-se **anti-paralelas** as retas que formam respectivamente com os lados de um ângulo dado, ângulos iguais. Se A é um ângulo dado, fig. 449, as duas retas MN e RP que cortam seus lados, formando os ângulos M e APR iguais, são anti-paralelas.

EPICICLOIDE

A **epicicloide** é uma curva gerada por um ponto de um círculo que rola, sem escorregar, sôbre um outro círculo dado.

O círculo movel pode rolar no **exterior** ou no **interior** do círculo fixo, daí a **epicicloide exterior** e a **epicicloide interior,** que também se denomina **hipocicloide**.

O ponto descrevente pode ficar situado na circunferência do círculo movel, dentro do círculo ou fora dele, mas sempre invariàvelmente ligado ao plano desse círculo.

A estas três situações do ponto gerador, na ordem estabelecida, correspondem a epicicloide **simples,** a epicicloide **encurtada** e epicicloide **alongada**.

A epicicloide é **plana** ou **esférica**.

É plana quando todos os seus pontos existem em um mesmo plano, ou quando o plano do círculo movel se desloca sempre no plano do círculo fixo.

Entre os raios R e r dos dois círculos podem estabelecer-se diversas relações de grandeza.

Sendo R o raio do círculo fixo e r o do círculo movel, pode ser:

$r < \frac{1}{2} R$
$r = \frac{1}{4} R$
$r = \frac{1}{2} R$
$r > \frac{1}{2} R$
$r > R$
$R = \infty$
$r = \infty$

A epicicloide compõe-se, em geral, de uma infinidade de ramos idênticos, ligados uns aos outros por pontos de reversão; sòmente no caso em que R tem com r uma medida comum é que ela admite um número finito de ramos.

Quando o círculo movel rola exteriormente ao círculo fixo, as primeiras 5 hipóteses estabelecidas nada apresentam de notável; por isso, considere-se só o caso em que êsse círculo rola interiormente.

1.º caso. $r < \frac{1}{2}$ R, fig. 450.

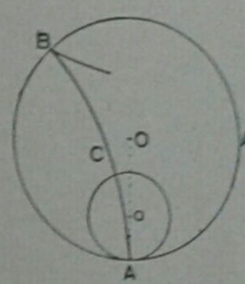


Fig. 450

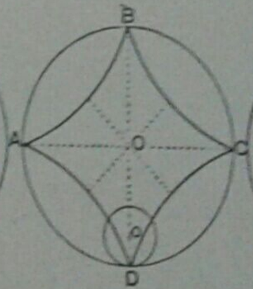


Fig. 451

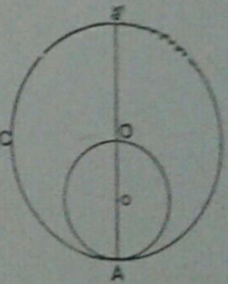


Fig. 452

A curva descrita pelo ponto gerador A, fig. 450, é uma **hipocicloide** ACB, cuja construção é indicada no problema 214.

2.º caso. $r = \frac{1}{4}$ R.

A hipocicloide neste caso é um **quadrilátero** de lados epicicloidais, fig. 451.

3.º caso. $r = \frac{1}{2}$ R.

A hipocicloide é **retilínea,** fig. 452 e se confunde com o diâmetro **Aa** do círculo fixo, que passa pela posição inicial A do ponto gerador.

4.º caso. $r > \frac{1}{2} R$.

Nesta caso a curva descrita pelo ponto gerador, A, fig. 453, é a mesma que a descreveria um terceiro circulo 3 cujo raio é: 3B = OA — 1A = 61 = R — **r** e que rola em sentido contrário ao circulo 1.

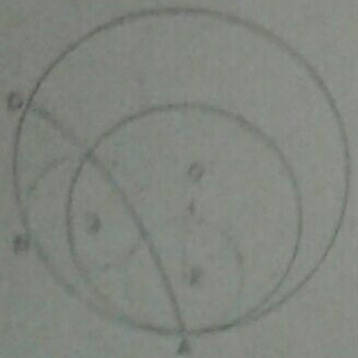


Fig. 453

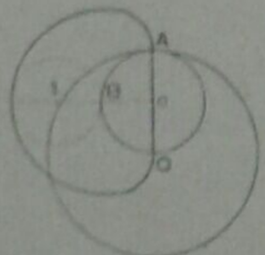


Fig. 454

5.º caso. $r > R$.

Para esta hipótese, o circulo movel **o** envolve o circulo fixo O; a epicicloide descrita pelo ponto gerador A é exterior e se confunde com a que descreveria (fig. 454), um outro circulo fixo 1, rolando no mesmo sentido e cujo raio é 1B = OA — **o**A = O**o** = r — R.

6.º caso. $R = \infty$.

O raio da circunferência fixa sendo infinito, ela se transforma em uma linha reta, sôbre a qual rola, sem escorregar, o circulo movel O.

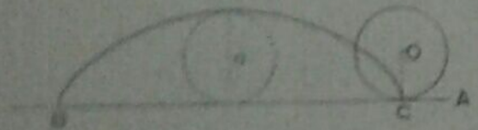


Fig. 455

A curva descrita por um ponto G da circunferência **o** é a **ci-cloide simples**, fig. 455.

Se o ponto gerador fica situado dentro do circulo ou fora dêle, mas invariàvelmente ligado ao seu plano, a cicloide será **encurtada** ou **alongada**. A construção destas três espécies de cicloides é indicada nos problemas 218, 220 e 221.

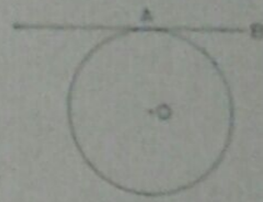


Fig. 456

7.º caso. $r = \infty$.

Nesta hipótese o circulo movel **o** se transforma em uma reta AB, fig. 456, que rola sôbre o circulo fixo O.

Qualquer ponto da reta AB descreve nesse rolamento uma curva, que se denomina a **devoluta** do circulo, problema 222.

214 Construir uma epicicloide exterior

1.ª construção:

O, **o** e C circulo fixo, circulo movel e ponto descrevente fig. 457 lado esquerdo.

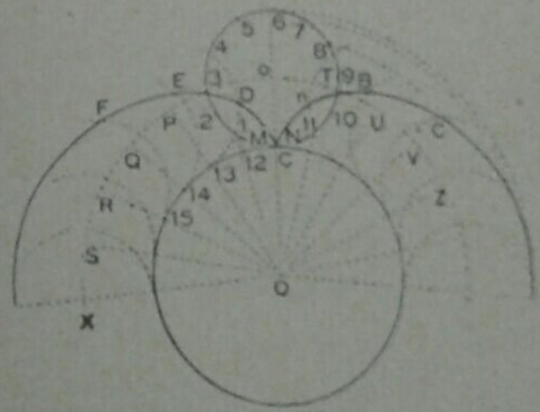


Fig. 457

1 — Divida-se o circulo **o** em um certo número de partes iguais; em 12, por exemplo.

2 — Transportem-se as distâncias (C-1), (1-2), (2-3), ..., para o circulo fixo em C-12, 12-13, 13-14 ...

3 — De O, como centro, e com um raio O**o**, descreva-se a circunferência X.

4 — Tracem-se os raios OC, O-12, O-13 ..., que determinam, por seu encontro com a circunferência X, os pontos P, Q, R, S ...; destes pontos descrevam-se arcos de circulo com raio igual ao do circulo gerador.

5 — De 12, como centro, com raio igual a C1, descreva-se um arco, que corte o arco de centro o no ponto M o qual pertence à curva; do mesmo modo de 13, como centro, e com raio igual a C2 marque-se o ponto D; de 14, como centro e com o raio = C3, marque-se o ponto E, e assim por diante.

6 — Os pontos M, D, E ... ligados por um traço contínuo dão um ramo da curva.

2.ª construção, fig. 457, lado direito.

1 — Determinem-se os pontos T, U, V, Z ..., como na construção precedente.

2 — Destes pontos, como centros, tracem-se arcos com raio igual ao do círculo gerador.

3 — Do centro O descrevam-se arcos concêntricos passando pelos pontos de divisão 11, 10, 9, 8, 7, 6 do círculo gerador.

4 — O círculo que passa pelo ponto 11 determina o ponto N, o que passa pelo ponto 10 determina o ponto **n**, ...

5 — Liguem-se os pontos N, **n**, B ... por um traço contínuo e tem-se um ramo da curva.

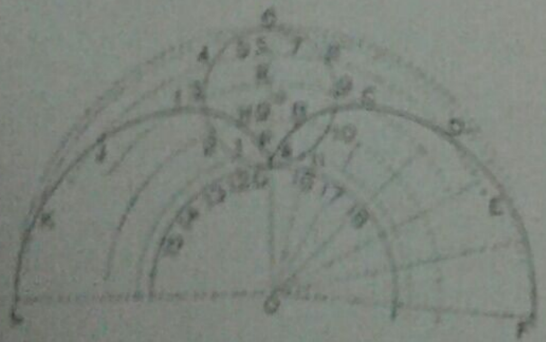


Fig. 458

3.ª construção:

O, **o** e C, círculo fixo, círculo móvel e ponto descrevente, lado esquerdo, fig. 458.

1 — Transportem-se as divisões do círculo gerador em G-12, 12-13, 13-14 ...

2 — De O, como centro, descrevam-se arcos concêntricos passando pelos pontos 1, 2, 3, 4 ...

3 — De 12, como centro, e raio G-1 corte-se o primeiro daqueles arcos,

4 — De 13, como centro e com o raio G-2 corte-se o segundo arco concêntrico em H; de 14, como centro, e raio G-3 corte-se o terceiro arco em I, e assim sucessivamente.

5 — Os pontos G, H, I, J, K ... ligados por um traço contínuo, dão um ramo da curva.

4.ª construção, fig. 458, lado direito.

1 — Transportem-se as divisões como acima.

2 — De O tracem-se arcos concêntricos passando por 11, 10, 9, 8, 7, 6.

3 — Tracem-se os raios O-16, O-17, O-18 ... que se prolonguem até encontrar os arcos concêntricos.

4 — De cada um dêsses pontos de interseção como centro e com raios iguais aos comprimentos dos arcos 11-P, 10-P, 9-R etc., marquem-se os pontos A, B, C, D, etc.

5 — Os pontos A, B, C, D ... ligados por um traço contínuo dão um ramo da curva.

215 Construir uma epiciclóide interior.

1.ª construção:

O e C, círculo fixo e móvel, fig. 459, lado direito.

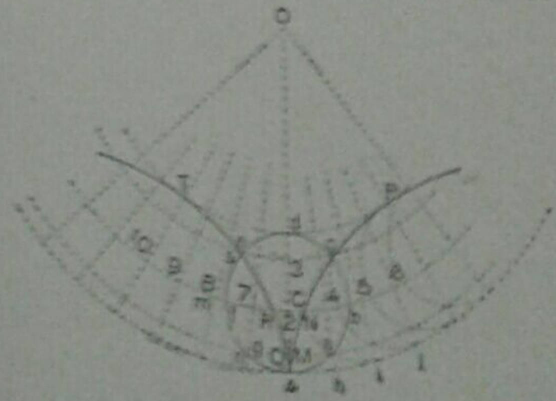


Fig. 459

1 — Divida-se a circunferência do círculo gerador em um certo número de partes iguais.

2 — Multiplique-se cada uma das divisões **Aa** e apliquem-se sôbre o círculo fixo O de A até **b**; [illegible] o comprimento **Ab**, [illegible] [illegible] ... e [illegible] [illegible] O nos pontos **1**, **2** ... e [illegible] [illegible] [illegible] O**A**, O**1**, O**2**.

3 — De O, como centro, descrevem-se arcos passando pelos pontos do círculo **a**, **b**, **c**, **d** ... e pelo centro C do círculo gerador.

4 — Dos pontos **1**, **2**, **3** ... como centros, traçam-se arcos de raio igual a CA; achando-se assim os pontos M, N, **a**, P ... que pertencem à epicicloide.

2.ª construção. (Mesma figura, lado esquerdo).

1 — Em lugar de descrever círculos de raio igual a CA, como na construção precedente, marque-se **1p** de **n** até Q, **2f** de **m** até R, e assim por diante.

2 — Os pontos Q, R, **s** ... pertencem à curva.

216 Traçar uma epicicloide alongada e uma epicicloide encurtada.

O, **a**, **p**, **q**: círculo fixo, círculo móvel e pontos descreventes; Fig. 160.

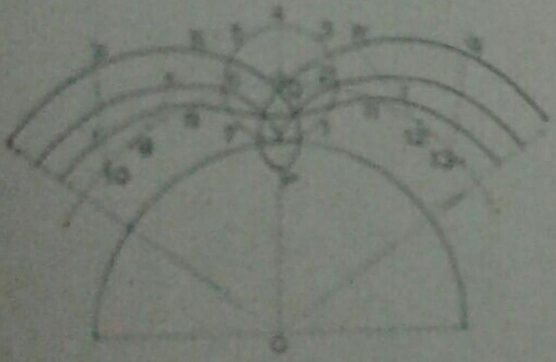


Fig. 160

1 — Trace-se a epicicloide simples exterior.

2 — Considere-se o ponto da epicicloide simples determinado pelo encontro da reta que parte de **p** e determine-se o centro O do círculo gerador.

3 — Trace-se o raio **p**-10, e sôbre êle marque-se 10 **p** = OP; os pontos **p** e **r** pertencem, o 1.º à epicicloide alongada e o 2.º à encurtada.

4 — Sôbre o raio 9 **a** procedendo do mesmo modo, obtêm-se outros dois pontos **a** e o que está entre o **a** e 9 e assim sucessivamente.

5 — Ligando êsses pontos por um traço contínuo têm-se as curvas pedidas.

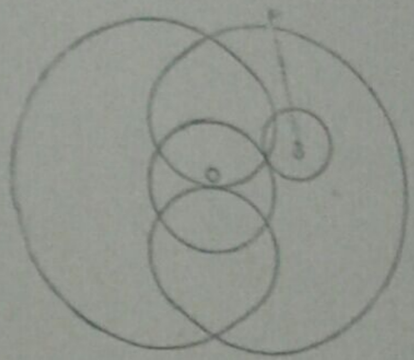


Fig. 161

Observação — As epicicloides alongadas prestam-se à obtenção de formas estéticas, quer sejam obtidas por meio da epicicloide exterior, quer por meio da interior.

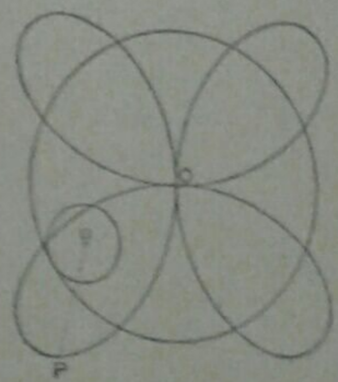


Fig. 162

Entre outras convém citar as que fazem passar o ponto descrevente pelo centro do círculo fixo, devendo os dois diâmetros, o do círculo fixo e o do móvel, ter uma medida comum.

As figs. 161 e 162 representam duas epicicloides destas, uma exterior e outra interior; a primeira mantém a relação de 1 para 2 entre os diâmetros e a segunda a relação de 1 para 4.

217 Tirar a normal e a tangente em um ponto da epicicloide simples.

M, ponto dado, fig. 463.

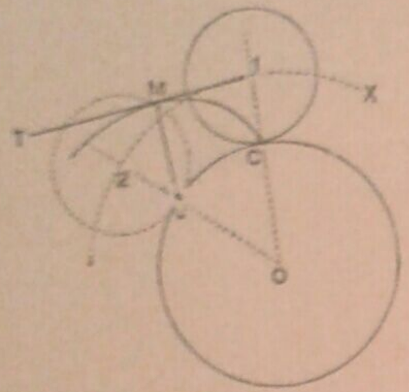


Fig. 463

1 — De M, como centro, e com um raio igual ao do círculo gerador, marque-se 2, na circunferência X.

2 — Tire-se o raio O-2, que determina o ponto **c**.

3 — Trace-se **Mc**, que é a normal pedida, e a perpendicular MT à extremidade M da normal é a tangente.

CICLOIDE

218 Traçar uma cicloide.

1.ª construção:

O e C, círculo gerador e ponto descrevente, fig. 464.

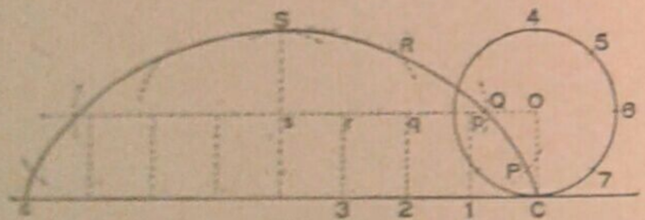


Fig. 464

1 — Retifique-se a circunferência geradora O e marque-se êsse comprimento em **Cc**.

2 — Divida-se tanto **Cc**, como a circunferência O, no mesmo número de partes.

3 — Pelo centro O tire-se uma paralela a **Cc**.

4 — De 1, 2, 3... levantem-se perpendiculares a **Cc**, que vão determinar os pontos **p, q, r, s**...

5 — Destes pontos, como centros, e com o raio da circunferência O, descrevam-se arcos de círculo.

6 — De 1, como centro, e com o raio C7 descreva-se um arco, o qual intercepta em P, o arco descrito de **p** como centro; de 2, como centro, e com o raio C6 determine-se o ponto Q e assim por diante.

7 — Ligando P, Q, R, S... por um traço contínuo tem-se a curva.

2.ª construção:

O e C círculo gerador e ponto descrevente, fig. 465.

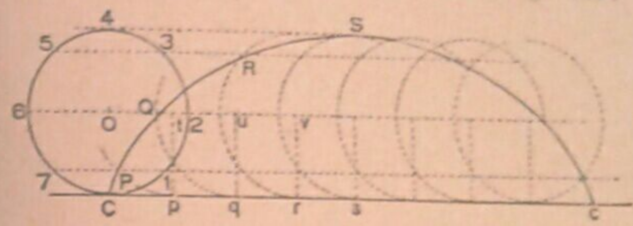


Fig. 465

1 — Retifique-se a circunferência O e marque-se êsse comprimento em **Cc**.

2 — Divida-se **Cc** e a circunferência O no mesmo número de partes iguais.

3 — Do centro O e dos pontos de divisão 1, 2, 3, 4... tracem-se paralelas a **Cc**.

4 — Dos pontos de divisão **p, q, r, s**... levantem-se perpendiculares até a paralela que passa por O as quais fornecem os pontos **t, u, v**...

5 — Destes pontos, como centro, e com um raio igual ao de O, descrevam-se arcos de círculo; as interseções P, Q, R, S... com as paralelas a C e traçadas pelas divisões 1, 2, 3, 4.... são pontos da curva.

6 — Ligando êsses pontos por um traço contínuo tem-se a curva pedida.

2.ª construção:

O e C círculo gerador e ponto descrevente, fig. 166.

1 — Proceda-se como indica o número 1 da construção precedente.

2 — Proceda-se como indica o número 2 da construção precedente e tracem-se as cordas C5, C4, C3...

3 — Proceda-se como indica o número 3 da construção precedente.

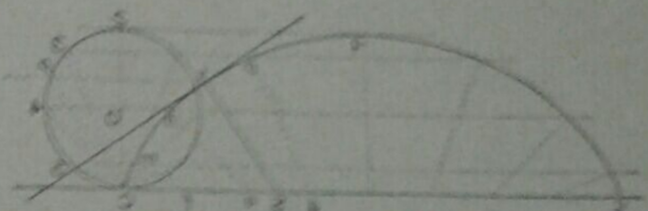


Fig. 166

4 — Pelos pontos d, e, f, ..., tirem-se: fm paralela a C3, en paralela a C4 e assim por diante.

5 — Os pontos m, n, p, q pertencem à curva.

6 — Ligam-se êsses pontos por um traço contínuo e obtém-se a ciclóide pedida.

3.ª construção:

O círculo gerador, fig. 167.

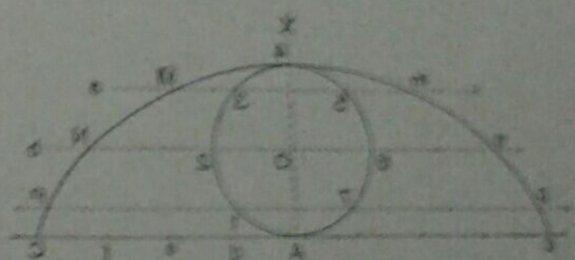


Fig. 167

1 — Proceda-se como indica o número 1 da 1.ª construção.

2 — Pelo meio A de eC levante-se AX perpendicular a eC.

3 — Trace-se em O a circunferência geradora e divida-se tanto esta como eC no mesmo número de partes iguais.

4 — Por 1, 2, 3, 4 . . . tracem-se paralelas a eC.

5 — Sôbre a paralela 3a marquem-se 3M = 5m = Ad; sôbre 2b marque-se 2N = 6n = Ae e assim por diante.

6 — Os pontos p, n, m, 4, M, N, P ligados por um traço contínuo dão a curva.

219 Traçar a normal e a tangente num ponto da ciclóide simples.

s ponto dado, fig. 166.

1 — Por s tire-se uma paralela a eC.

2 — Esta reta, prolongada, encontra o círculo gerador em um ponto P; trace-se a reta que une C a êsse ponto.

3 — Por s trace-se sS paralela à mesma reta; será sS a normal.

4 — A perpendicular ao extremo s da normal é a tangente.

220 Construir uma ciclóide encurtada.

Oe raio do círculo gerador da ciclóide simples, B ponto descrevente da ciclóide encurtada fig. 168.

1 — Com o raio dado descreva-se uma circunferência; descreva-se outra circunferência concêntrica de raio OB.

2 — Divida-se esta circunferência menor no mesmo número de partes que a outra circunferência e o desenvolvimento eC.

3 — Tracem-se as retas c-5, c-4, c-3 . . . e também as paralelas a eC passando por 1, 2, 3 . . .

4 — Pelos pontos de divisão a, h, i, j . . . de eC tirem-se as paralelas ar, hs, it, ju . . . às cordas c-5, c-4, c-3, c-2 . . . Os pontos r, s, t, u . . ., de intersecção destas retas com as paralelas a eC pertencem à curva.

221 Construir uma cicloide alongada.

b ponto descrevente, 468.

1 — Descreva-se uma circunferência tendo **bq** para diâmetro.

2 — Proceda-se como indica o número 2 da construção precedente.

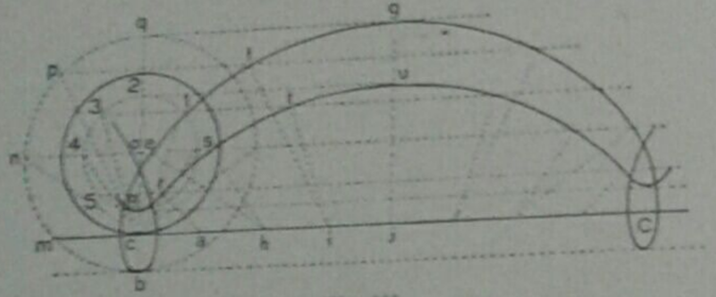


Fig. 468

3 — Tracem-se as cordas **cm, cn, cp, cq** . . . e pelos pontos **a, h, i, j** . . . tirem-se as retas **am, be, cf** . . . paralelas àquelas cordas.

4 — Os pontos de interseção destas paralelas com as paralelas a **c**C passando por **m, n, p** . . . pertencem à curva.

222 Construir uma devoluta de círculo.

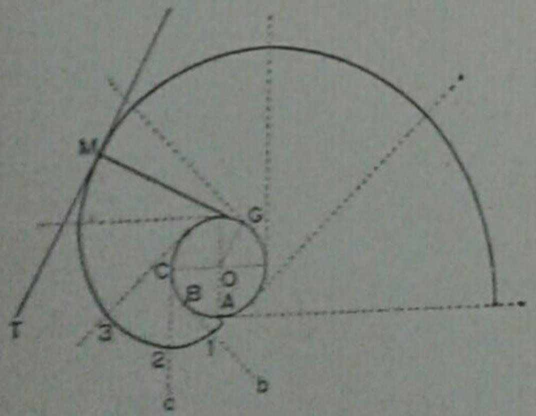


Fig. 469

A, ponto inicial, fig. 469.

1 — Divida-se a circunferência em um certo número de partes iguais.

2 — Pelos pontos de divisão A, B, C . . . tirem-se tangentes à circunferência.

3 — Retifique-se um arco AB da circunferência e marque-se êsse comprimento uma vez sôbre a primeira tangente **Bb**; duas vezes sôbre a segunda **Cc** e assim sucessivamente.

4 — Os pontos A, 1, 2, 3 . . . pertencem à curva; para traçá-la, faz-se centro em B e com raio igual à distância AB descreve-se o arco A1; faz-se em seguida centro em C e com o raio = distância C1 descreve-se o arco **1-2** e assim por diante.

223 Traçar a tangente num ponto da devoluta

M, ponto dado, fig. 469.

1 — Por M trace-se MG tangente à circunferência O; MG é a normal à curva no ponto M.

2 — Trace-se por M a perpendicular MT a MG; MT é a tangente pedida.

SENÓIDE

Se sôbre uma linha reta A**a**, tangente a uma circunferência, fig. 470, se tomam comprimentos A-**m**, **m-n**, **n-p**, **p-q** . . . iguais aos arcos A-1, 1-2, 2-3 . . . retificados e se pelos pontos A, **m, n, p, q** se tiram retas perpendiculares a A**a** até encontrarem as paralelas a A**a** traçadas pelos pontos 1, 2, 3 . . . de divisão da circunferência, obtém-se uma série de pontos A, M, N, P, Q que ligados por um traço contínuo produzem a curva denominada senóide. (*)

224 Traçar uma senóide.

1 — Trace-se uma circunferência O de raio qualquer, fig. 470.

2 — Sôbre a tangente, a partir do ponto de tangência, marque-se um comprimento A**a** igual à circunferência O retificada.

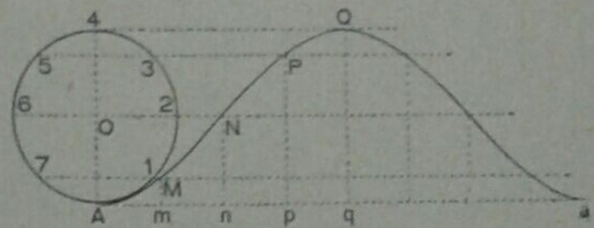


Fig. 470

(*) A senóide, também chamada **sinusóide**, foi estudada por NEWTON, matemático inglês, nascido em Woolsthorpe (condado de Lincoln) em 1642 e falecido em Londres em 1727; e LEIBNIZ, filósofo alemão, nascido em Leipzig em 1646, e falecido em Hanovre, em 1716.

3 — Divida-se a circunferência e o comprimento **Aa** no mesmo número de partes iguais.

4 — Pelos pontos de divisão A, **m, n, p, q** ... tirem-se perpendiculares a **Aa**.

5 — Pelos pontos de divisão 1, 2, 3, ... da circunferência tirem-se paralelas a **Aa**.

6 — Estas paralelas encontram as perpendiculares a **Aa** nos pontos M, N, P, Q, ... que pertencem à curva.

7 — Liguem-se êsses pontos por um traço contínuo.

CURVAS ANÁLOGAS

225 Traçar uma curva análoga a uma outra curva

As curvas análogas são derivadas de outras por meio de reduções ou ampliações segundo uma razão constante em ordenadas ou outras linhas que definam a posição geométrica dos pontos, ficando as linhas complementares dessas, que se reduzem ou ampliam, iguais às primitivas.

Só consideramos as curvas **análogas** seguintes:

Curva análoga à senóide.

1 — É outra senóide que se obtém conservando o comprimento **Aa** figura 471, que é igual à circunferência O retificada, e

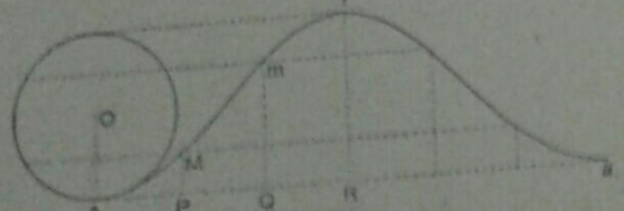


Fig. 471

reduzindo ou ampliando os segmentos perpendiculares MP, **mQ**, **rR**... que definem as posições dos pontos da curva, numa razão dada.

2 — Na fig. 472 os segmentos perpendiculares estão reduzidos na razão de $\frac{2}{3}$, problema 109.

3 — Ligando os pontos A, M, **m, r** ... por um traço contínuo tem-se a curva análoga procurada.

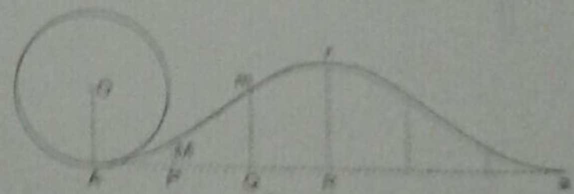


Fig. 472

Curva análoga à ciclóide.

1 — É obtida de um modo análogo ao precedente, reduzindo ou ampliando as distâncias MP, **m**Q, **n**R, **p**S ... dos diversos pontos da curva à reta **Aa**, fig. 473.

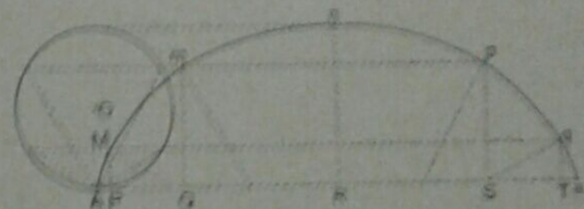


Fig. 473

2 — Seja então AM**m** ... **a**, fig. 473, uma ciclóide dada; para ter a **ciclóide análoga**, conserve-se o mesmo comprimento A**a**, que é π da circunferência O, da fig. 473, retificada e ampliem-se ou reduzam-se as ordenadas MP, **m**Q, **n**R, **p**S.

3 — Ampliem-se na razão de $\frac{5}{3}$, por exemplo, para o que

tem-se na fig. 475, o ângulo de ampliação, problema 100, 3.ª cons-
trução; sôbre Aa a partir de A, fig. 474, tomem-se as distâncias AP, AQ, AR, AS, AT respectivamente iguais a AP, AQ, AR, AS, AT da fig. 473; levantem-se perpendiculares e sôbre elas, marquem-

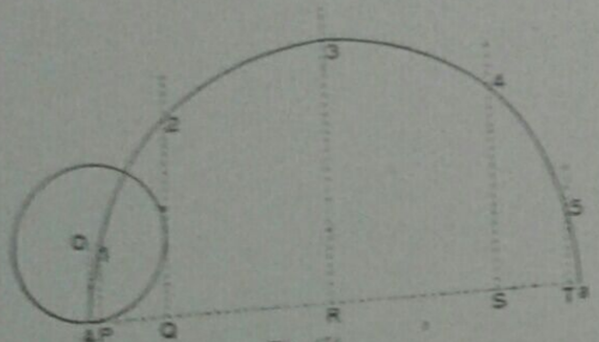


Fig. 474

se os comprimentos ampliados 1P = 5T = **mp** (fig. 475), 2Q = = 4S = **nq**, 3R = **tr** (fig. 475).

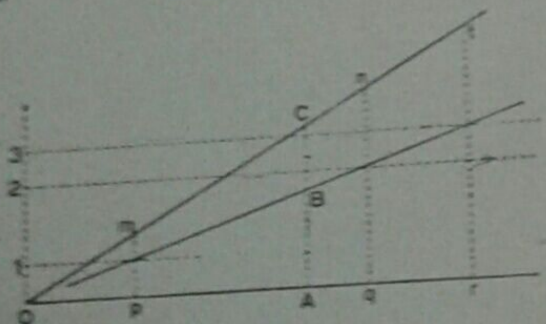


Fig. 475

4 — Ligando por um traço contínuo os pontos A, 1, 2, 3, 4, 5 e **a** tem-se a curva procurada

Curva análoga à epiciclóide.

1 — É obtida conservando os comprimentos AP e fazendo variar numa razão constante BP, fig. 476.

2 — Quando a razão de ampliação é tal, na epiciclóide simples interna, que o ponto correspondente a B, vértice da curva, venha a ficar em O, a curva análoga procurada afeta a forma da figura 477, tangenciando os ramos da epiciclóide dada em A, B, C, D e tendo seus ramos tangenciando-se no centro O.

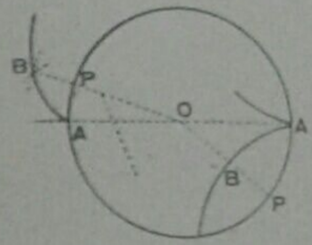


Fig. 476

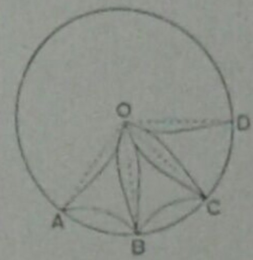


Fig. 477

Curva análoga à espiral.

1 — Tracem-se duas retas perpendiculares no plano da espiral, fig. 478.

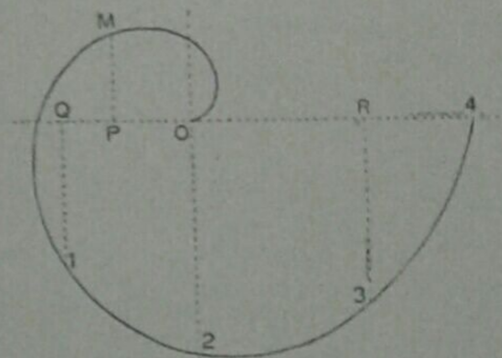


Fig. 478

2 — Reduzam-se ou ampliem-se as distâncias dos pontos da curva M, 1, 2, 3, 4 . . . a uma das retas, conservando as outras distâncias à segunda reta.

3 — Os novos pontos obtidos ligados por um traço contínuo dão a curva pedida, que terá a forma da fig. 479, em que as distâncias [illegible] estão reduzidas na razão $\frac{1}{?}$

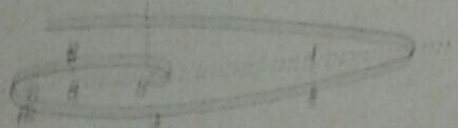


Fig. 479

CONCORDÂNCIA

Concordar duas linhas da mesma espécie ou de espécies diferentes é fazê-las de modo que se possa passar de uma para outra sem ângulo ou inversão.

Quando um arco de círculo e uma reta se concordam o centro do arco deve achar-se sôbre uma perpendicular à reta no ponto de contacto.

Quando dois arcos de círculo se concordam, os dois centros e o ponto de contacto devem ficar situados sôbre uma mesma linha reta.

226 Concordar um ou muitos arcos de circunferência com uma reta dada.

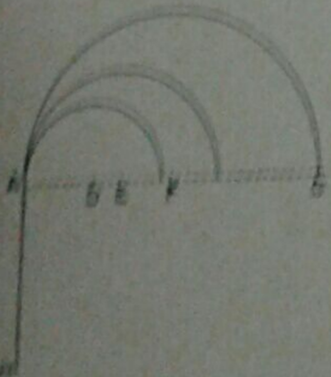


Fig. 480

AB, reta dada, fig. 480.

1 — Por A trace-se a reta AC perpendicular a AB.

2 — Dos pontos quaisquer D, E, F ... como centros, descrevam-se arcos de círculo passando pelo ponto A; esses arcos se concordam com a reta AB.

Observação — Este problema admite muitas soluções. Cada ponto tomado sôbre a perpendicular AC é o centro de um arco de concordância.

227 Com uma reta dada concordar um arco de círculo passando por um ponto dado.

AB e C, reta e ponto dados, fig. 481.

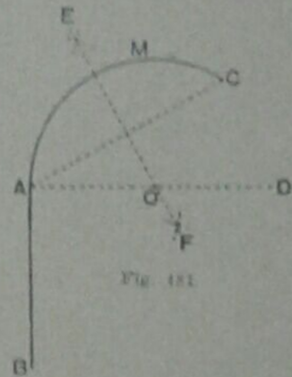


Fig. 481

1 — Pelo ponto A trace-se AD perpendicular a AB.

2 — Ligue-se A ao ponto C.

3 — Trace-se EF perpendicular ao meio de AC.

4 — Fazendo centro em O, ponto de interseção de EF com AD, e com raio OA, descreva-se o arco AMC, que resolve o problema.

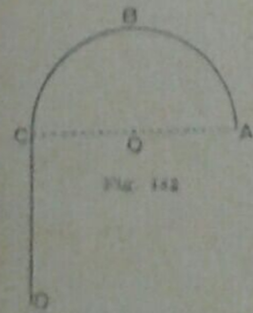


Fig. 482

228 Com um arco dado concordar uma reta.

ABC arco dado, fig. 482.

1 — Trace-se o raio CO.

2 — Pelo extremo C desse raio trace-se-lhe a perpendicular CD, que resolve o problema.

229 Com um arco dado concordar um ou muitos arcos de círculo.

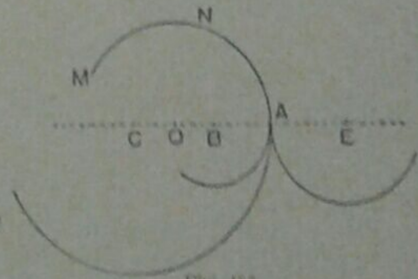


Fig. 483

ANM, arco dado, fig. 483.

1 — Trace-se o raio OA e prolongue-se.

2 — Dos pontos quaisquer, C, B, E, tomados sôbre OA, como centros, descrevam-se arcos de círculo passando por A; esses arcos se concordam com o arco dado.

Observação — [illegible]

230 — Com um arco dado, concordar um outro arco do mesmo sentido e passando por um ponto dado.

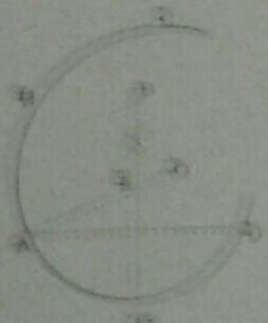


Fig. [illegible]

[illegible] o arco e ponto dados, fig. [illegible].

1 — Liga-se o centro O a um extremo [illegible] do arco dado.

2 — Liga-se também o ponto dado [illegible] ao mesmo extremo [illegible].

3 — [illegible] traça-se a perpendicular [illegible].

4 — O ponto de intersecção [illegible] da perpendicular [illegible] com o raio [illegible] é o centro do arco [illegible] que resolve o problema.

231 — Com um arco dado, concordar outro arco de sentido contrário e passando por um ponto dado.

[illegible] arco e ponto dados, fig. [illegible].

1 — Traça-se o raio [illegible] que passa pelo extremo [illegible] do arco dado, e prolonga-se.

2 — Traça-se [illegible].

3 — [illegible] a perpendicular [illegible]; o ponto de intersecção [illegible] é o centro e [illegible] o raio do arco que resolve o problema.

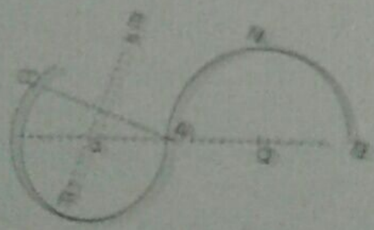


Fig. [illegible]

232 — Concordar duas retas paralelas, cujos extremos são dados:

I — **Os extremos das paralelas ficam em uma perpendicular comum.**

II — **Os extremos das paralelas ficam colocados em perpendiculares diferentes.**

1.º caso:

AB e CD, retas dadas, fig. [illegible]

1 — [illegible] perpendicular comum AC.

2 — De O, como centro, descreve-se, com raio OC a semi-circunferência AEC, que resolve o problema.

Fig. [illegible]

2.º caso:

1.ª construção:

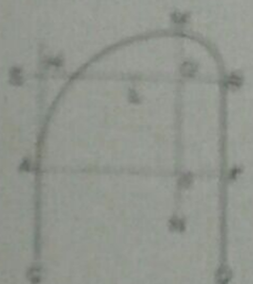


Fig. [illegible]

AC e BD, retas dadas, fig. [illegible].

1 — Pelos pontos [illegible] e [illegible] traçam-se as perpendiculares [illegible].

2 — Prolonga-se [illegible] até encontrar [illegible] e toma-se [illegible].

3 — Traça-se [illegible] perpendicular ao meio de [illegible].

4 — Os pontos [illegible] são os centros dos arcos de concordância, os quais são raios [illegible].

2.ª construção:

AC e BD, retas dadas, fig. [illegible].

1 — Pelos pontos A e B, traçam-se as perpendiculares AF e BE.

2 — Toma-se sobre BE um ponto qualquer O, bastante aproximado de B, mas tal, que a distância BO não seja igual à metade da distância entre as duas paralelas dadas; o ponto O é o centro do primeiro arco de concordância, cujo raio é OB.

3 — Toma-se AH = BO e traça-se OH.

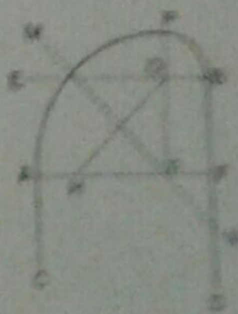


Fig. [illegible]

4 — Trace-se MN perpendicular ao meio de OH, o ponto O de interseção de MN com AF, é o centro do segundo arco, cujo raio é oA.

5 — Para descrever os arcos, trace-se primeiro a reta Oo, que determina o ponto de tangência P.

3.ª construção:

AC e BD, retas dadas, fig. 489.

1 — Pelos pontos A e B, tracem-se as perpendiculares AE e BF.

2 — Divida-se a distância entre as retas dadas em 3 partes iguais e pelo ponto G trace-se a paralela GH.

3 — Do ponto I, como centro, descreva-se o quadrante AH.

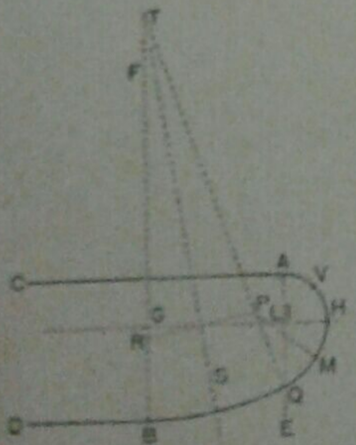


Fig. 489

4 — Tome-se IL igual à terça parte do raio IH, e do ponto L, como centro, descreva-se o arco HM, tendo como raio LM = LH e tal que tenha para corda a corda da metade do quadrante AH.

5 — Trace-se a reta ML e sôbre ela marque-se LP = IL.

6 — Sôbre a perpendicular BF marque-se o comprimento BR igual a MP e trace-se PR.

7 — Sôbre o meio de PR trace-se a perpendicular ST, que determine em BF o ponto de interseção T.

8 — Ligue-se o ponto T a P por uma reta indefinida.

9 — Do ponto P, como centro, e raio PM descreva-se o arco MQ e de T, como centro, e raio TQ descreva-se o arco QB, que completa o arco de concordância, e que neste caso é um arco de quatro centros.

4.ª construção:

AD e BC, retas dadas fig. 490.

1 — Pelos pontos A e B tracem-se as perpendiculares AF e BE.

2 — Trace-se AB e pelo meio H da distância BM das retas dadas trace-se HL paralela às mesmas.

3 — Tome-se NL = NA.

4 — Do ponto L abaixe-se uma perpendicular sôbre AB; o ponto O de interseção com AF é o centro do arco AL e o ponto de interseção **o** com BE é o centro do arco LB.

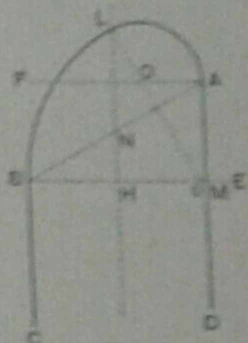


Fig. 490

233 Concordar duas paralelas por dois arcos tangentes a uma reta dada em um ponto dado.

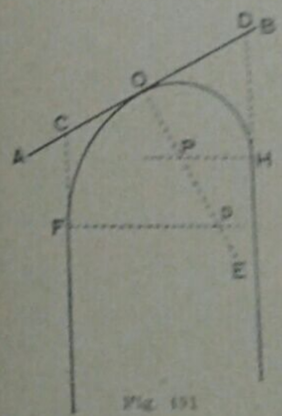


Fig. 491

AB e O, reta e ponto dados, fig. 491.

1 — Prolonguem-se as paralelas dadas até encontrar AB.

2 — Pelo ponto O levante-se OE perpendicular a AB.

3 — Tome-se CF = CO e DH = DO.

4 — Pelos pontos F e H tracem-se perpendiculares HP e F**p** às paralelas; seus pontos P e **p** de interseção, com a perpendicular OE, são os centros dos arcos, cujos raios são PH e **p**F.

234 Concordar duas retas convergentes.

AD e BE, retas dadas, fig. 492.

1 — Prolonguem-se as retas dadas até se encontrarem.

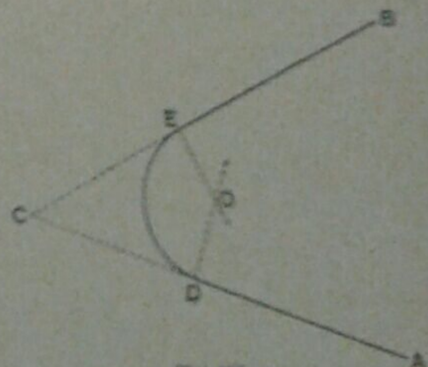


Fig. 492

2 — Do ponto de encontro C, com um raio arbitrário, descreva-se um arco de círculo, que corte as retas dadas, em D e E, por exemplo.

3 — Pelos pontos D e E levantem-se perpendiculares às retas dadas; o ponto de interseção O é o centro do arco de concordância, cujo raio é OE.

235 Concordar um arco e uma reta, sendo dado sôbre o arco o ponto de concordância.

CD, AB, e A reta, arco e ponto dados, fig. 493.

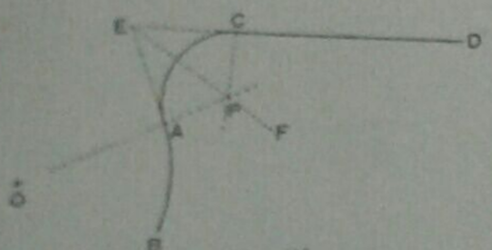


Fig. 493

1 — Tire-se o raio OA e prolongue-se.

2 — Trace-se a perpendicular a AO no ponto A e prolongue-se a reta dada até encontrar a referida perpendicular no ponto E.

3 — Trace-se a bissetriz EF do ângulo AEC; o ponto de interseção P, de EF com OA, é o centro do arco de concordância, cujo raio é PA.

4 — Para ter na reta o ponto de concordância, tire-se de P a perpendicular PC sôbre CD.

236 Concordar dois arcos de círculo por um arco de raio dado.

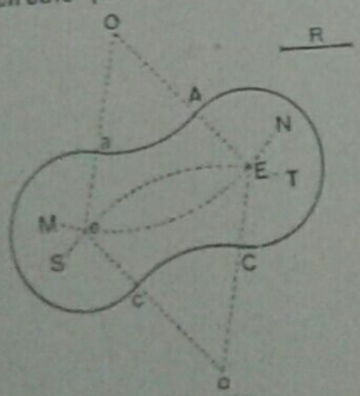


Fig. 494

O, **o** R, centros dos arcos e raio dados, fig. 494.

1 — Do centro O descreva-se o arco MN com um raio igual ao raio do arco A**a** + R.

2 — Do centro **o** descreva-se também o arco ST com um raio igual ao raio do arco C**c** + R.

3 — Os pontos de interseção E e **e** são os centros dos arcos que se concordam com os arcos dados.

4 — Os pontos de concordância A e C, assim como, **a** e **c**, se obtêm, traçando as retas OE, **o**E, O**e**, **oe**.

237 Concordar uma circunferência e uma reta, sendo dado o raio de concordância.

AB, O e R reta, circunferência e raio de concordância dados, fig. 495.

1 — Tire-se uma paralela a AB a uma distância igual a R.

2 — Do centro O corte-se esta paralela por um arco de círculo, cujo raio OD é igual a OC + R.

3 — O ponto de interseção D é o centro do arco de concordância; para ter os pontos de tangência C e A, ligue-se D ao centro O e abaixe-se de D a perpendicular DA sôbre AB.

4 — Para concordar EF com a circunferência dada, faça-se a mesma construção, cortando, porém, a paralela a EF pelo arco MN, cujo raio ON é igual a OC — R.

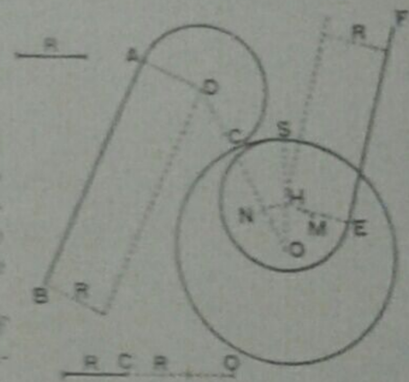


Fig. 495

238 Concordar duas circunferências por um arco de círculo, sendo dado o ponto de contacto sôbre uma delas.

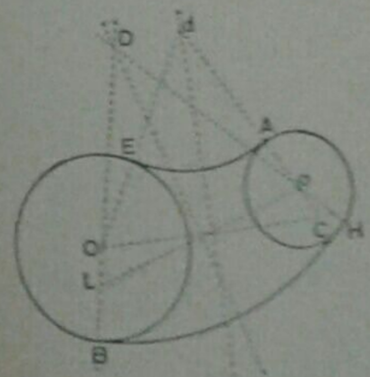


Fig. 496

O, **o**, circunferências dadas; A ou B ponto de contacto dado, fig. 496.

1 — Marque-se o raio OB sôbre o diâmetro do menor círculo de A até C.

2 — Trace-se OC.

3 — Ao meio de OC levante-se uma perpendicular, que encontre AC, prolongada, em **d**.

4 — O ponto **d** é o centro do arco de concordância; para ter o outro ponto de contacto E, basta traçar a reta O**d**.

5 — Para o ponto de contacto B, tome-se BL = A**o** e trace-se L**o**.

6 — Ao meio de L**o** levante-se a perpendicular que vai determinar em BL, prolongada, o centro D do arco de concordância.

7 — O segundo ponto de contacto H se obtém traçando D**o** e prolongando-se.

239 Concordar duas retas dadas, em dois pontos dados, por dois arcos de círculos, sendo dado um dos raios do arco de concordância.

AC e BD, retas dadas; A, B e R pontos e raio dados, fig. 497.

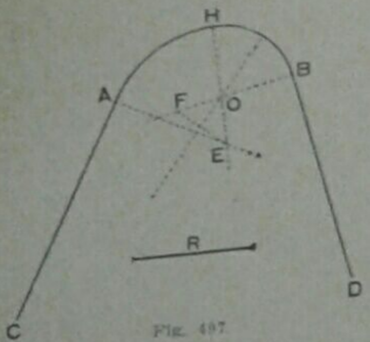


Fig. 497

1 — Tire-se AE perpendicular a AC e igual ao raio dado R; o ponto E é o centro do primeiro arco de concordância de raio AE.

2 — Tire-se BF perpendicular a BD e também igual ao raio dado, R.

3 — Trace-se FE e em seu meio levante-se uma perpendicular.

4 — O ponto de interseção O com BF é o centro do segundo arco de concordância, sendo OB o raio.

5 — O ponto de contacto H se obtém, traçando a reta EO, e prolongando-a.

240 Concordar duas retas paralelas, cujos extremos não ficam na mesma perpendicular, por um arco de elipse.

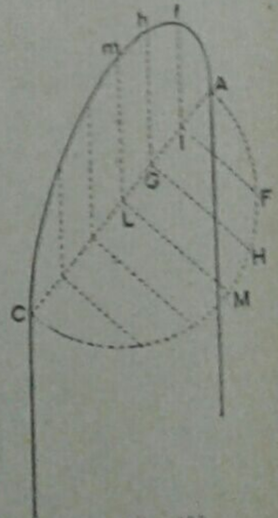


Fig. 498

A e C retas dadas, fig. 498.

1 — Sôbre AC descreva-se uma semi-circunferência.

2 — De diversos pontos de AC levantem-se as perpendiculares IF, GH, LM, . . .

3 — Por I, G, L. . ., tracem-se paralelas às retas dadas e sôbre elas tomem-se I**f** = IF, G**h** = GH, L**m** = LM . . .

4 — Ligando os pontos A, **f**, **h**, **m**, . . . C por um traço contínuo, obtém-se a curva de concordância.

241 Concordar duas retas convergentes em dois pontos igualmente distantes do ponto de concurso.

1.º — por um arco de elipse.
2.º — por um arco de parábola.
3.º — por um arco de hipérbole.

1.º caso:

AC e BD, retas dadas, fig. 499.

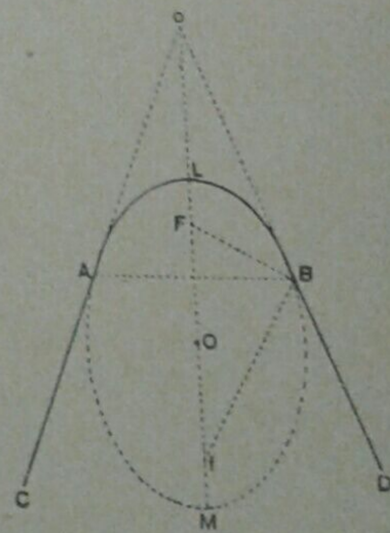


Fig. 499

1 — Sôbre o meio de AB trace-se a perpendicular F**f**.

2 — Por um dos pontos A ou B, B por exemplo, tracem-se as retas BF e B**f** fazendo com BD ângulos quaisquer **f**BD e FB**o** iguais.

3 — Tem-se em F e **f** os focos da elipse, que passa por A e B.

4 — Basta agora traçar a elipse de que se conhecem os focos e o eixo maior. Com efeito, 2**a** = BF + B**f**. O problema 168 ensina a construir a curva.

2.º caso:

AL e CM, retas dadas, fig. 500.

1 — Sôbre o meio de AC trace-se a perpendicular DN, que será o eixo da parábola.

2 — Por um dos pontos A ou C, C por exemplo, tire-se CH paralela a DN e faça-se o ângulo OCF = HCM; será F o foco da parábola.

3 — Tendo-se o foco F e um ponto C da parábola, traça-se a curva pelo problema 198, 3.º caso; para ter, como indica êste problema, a diretriz, faça-se centro em C e com raio CF descreva-se um arco até cortar a paralela CH em **d** e deste ponto abaixe-se D**d** perpendicular a ON; será D**d** a diretriz e o ponto B, meio de DF, será o vértice.

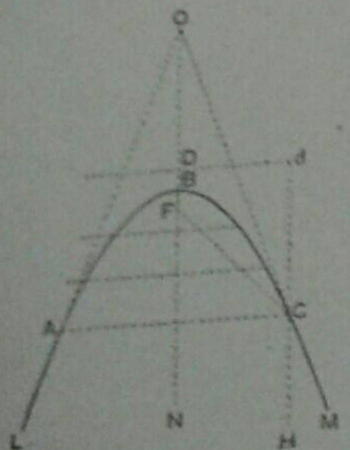


Fig. 500

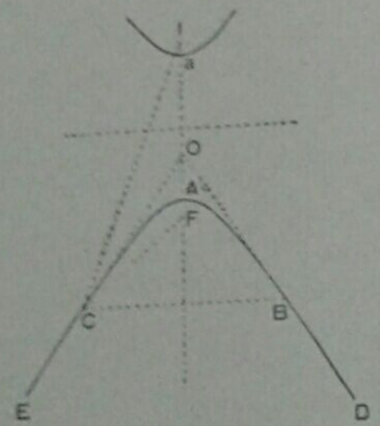


Fig. 501

3.º caso:

BD e CE, retas dadas, fig. 501.

1 — Trace-se a perpendicular ao meio de BC; tem-se nela a direção do eixo transverso.

2 — Por um dos pontos C ou B, tracem-se as retas CF e C**f** fazendo com o prolongamento de CE ângulos quaisquer FCO e **f**CO iguais entre si.

3 — Tem-se em F e **f** os focos da hipérbole, que passa por C e B. Basta construir a hipérbole de que se conhecem o eixo transverso (2**a** = C**f** — CF) e os focos. O problema 183, 2.ª construção, ensina a traçar a curva.

242 Concordar duas semi-retas paralelas de sentidos opostos:

I — **os extremos ficam colocados na mesma perpendicular.**

II — **os extremos não ficam na mesma perpendicular.**

1.º caso:

AG e BF, semi-retas dadas, fig. 502.

1 — Trace-se a perpendicular comum AB.

2 — Tome-se sôbre AB um ponto qualquer O e com OA para raio descreva-se a semi-circunferência ADC.

3 — Sôbre BC, como diâmetro, descreva-se a segunda semi-circunferência CEB, que resolve o problema.

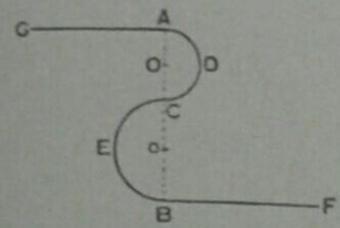


Fig. 502

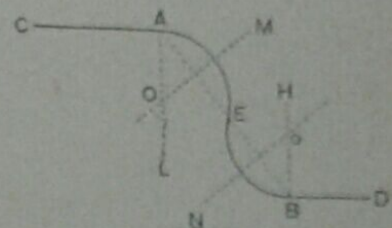


Fig. 503

2.º caso:

AC e BD semi-retas dadas, fig. 503.

1 — Tracem-se as perpendiculares AL e BH.

2 — Trace-se o segmento AB e sôbre êle tome-se um ponto qualquer E.

3 — Ao meio de AE e de BE tracem-se as perpendiculares MO e N**o**.

4 — As interseções destas perpendiculares com AL e BH determinam os centros O e **o** dos arcos de concordância, cujos raios são OA e **o**B.

243 Concordar duas retas convergentes, em dois pontos desigualmente afastados do ponto de concurso, por um arco de parábola.

1.ª construção:

AC e BD, retas dadas, fig. 504:

1 — Trace-se AB.

2 — Ligue-se o ponto O ao meio de AB; marque-se o meio H do segmento que faz essa ligação; H é um ponto da curva.

3 — Tracem-se HA, HB e LM, que liga os meios de OA e OB.

4 — Por L e M tracem-se LN e MR paralelas a OH; os meios S e T dêstes segmentos são dois pontos da curva.

5 — Ligando por um traço contínuo os pontos A, S, H, T, B obtém-se a curva de concordância.

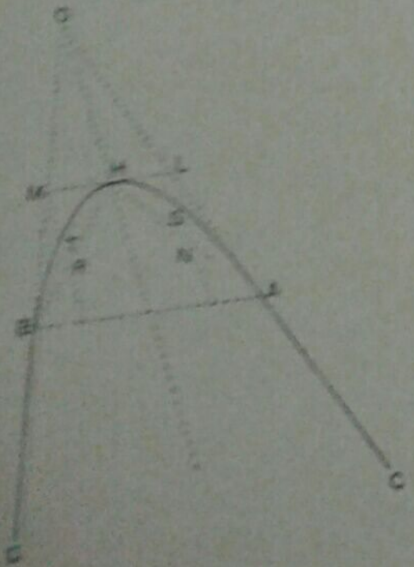


Fig. 504

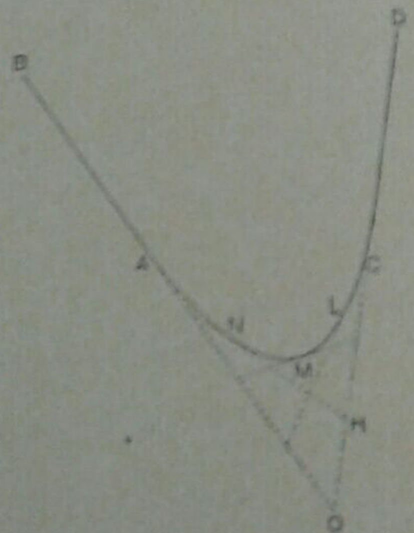


Fig. 505

2.ª construção:

AB e CD, retas dadas, fig. 505.

1 — Divida-se em um mesmo número de partes iguais os segmentos OA e OC.

2 — Numerem-se estas partes em sentido inverso e [illegible] se dois a dois os pontos que têm o mesmo número.

3 — Trace-se a curva ANMLC tangenciando as retas [illegible] radas; ela resolve o problema.

244 Concordar duas retas paralelas por um arco denominado asa de cesto, sendo dada a altura do arco.

1.ª construção:

AC e BD, retas dadas; M altura do arco, fig. 506:

1 — Trace-se a perpendicular comum AB.

2 — Ao meio de AB levante-se uma perpendicular; e nesta tome-se a partir de F, EF igual à altura dada M.

3 — Tracem-se as retas AE e BE.

4 — Transporte-se EF para [illegible] e com o raio [illegible] E marquem-se sôbre EA e EB os pontos [illegible] respectivamente.

5 — Tracem-se as perpendiculares ao meio de [illegible]; elas cortarão AB em 1 e 2 e, prolongadas, [illegible] O situado no prolongamento de EF.

6 — De 1 e 2, como centros, descrevam-se os arcos [illegible] e de O, como centro, o arco KEH, que completa o [illegible].

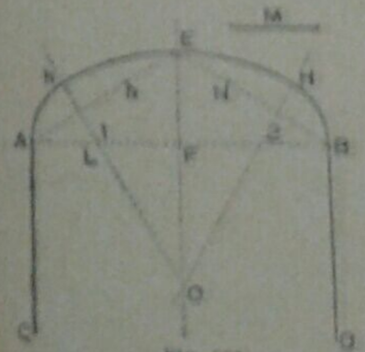


Fig. 506

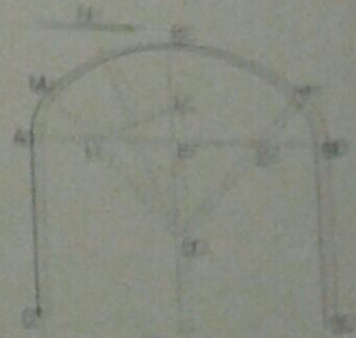


Fig. 507

2.ª construção:

AC e BD, retas dadas, e Y altura dada, fig. 507.

1 — Trace-se a perpendicular comum AB.

2 — Ao meio de AB levante-se uma perpendicular; e nesta tome-se, a partir de F, EF igual à altura dada Y.

3 — Marque-se, à vontade, A1 = B2, menor do que EF, e leve-se êsse comprimento de E para λ.

4 — Trace-se 1L, e em seu meio levante-se uma perpendicular, que se prolongue até encontrar EF.

5 — Trace-se O2 e O1 e de O, como centro e com o raio OE descreva-se o arco ME**m**; de 1 e 2, como centros, e com os raios 1M e 2**m** descrevam-se os arcos, que completam o arco pedido.

3.ª construção:

AC e BD, retas dadas; M altura dada, fig. 508.

1 — Trace-se a perpendicular comum AB.

2 — Ao meio de AB levante-se uma perpendicular, e sôbre ela tome-se, a partir de F, EF igual à altura dada M.

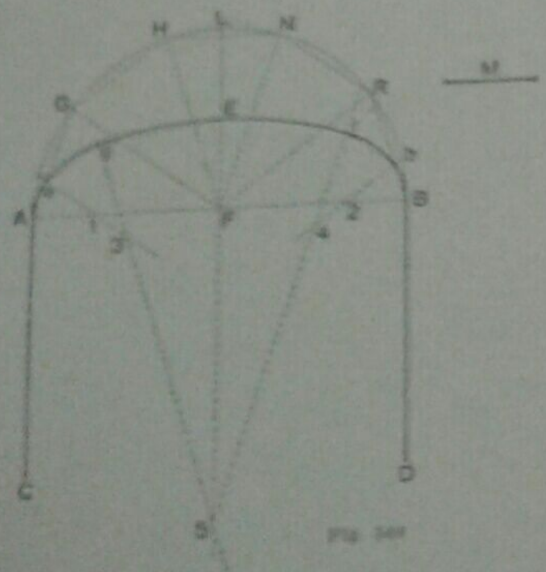


Fig. 508

3 — Sôbre AB, como diâmetro, descreva-se uma semi-circunferência, que se divide em cinco partes iguais.

4 — Tracem-se as cordas AG, GH, HN, e também os raios HF e GF.

5 — A partir de A marque-se, à vontade, A1 menor que EF e por 1 tire-se 1**a** paralela ao raio FG; determina-se assim o ponto **a** sôbre a corda AG.

6 — Por **a** e por E tracem-se **ag** e E**g** respectivamente, paralelas às cordas GH e HN; determina-se assim o ponto **g**.

7 — Por **g** trace-se uma paralela ao raio FH; esta paralela prolongada determina em **a1** o ponto 3 e em EF o ponto 5.

8 — De 1, 3, 5 como centros e com os raios 1A, 3**a**, 5**g**, respectivamente, descrevam-se os arcos A**a**, **ag**, **g**E.

9 — Como a figura é simétrica em relação a EF, os centros 2 e 4 se obtêm do mesmo modo; deve-se assim traçar o arco **g**E**r**

de uma só vez.

245 Traçar uma falsa espiral de dois centros.

O e **o**, centros dados, fig. 509.

1 — Do centro O e com o raio O**o** descreva-se a semi-circunferência **o**DA.

2 — De **o**, como centro, e com o raio **o**A descreva-se a semi-circunferência AFB.

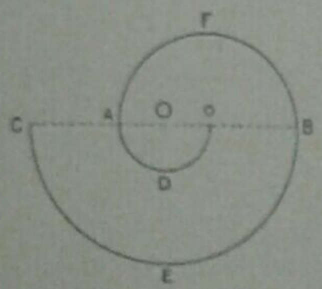


Fig. 509

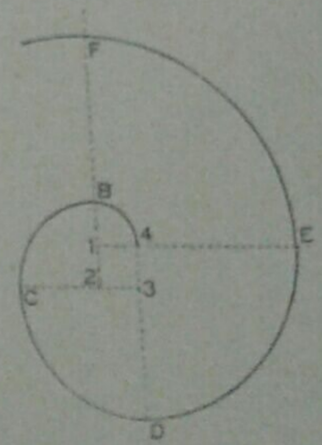


Fig. 510

3 — De O como centro, e raio OB descreva-se a semi-circunferência BEC e assim sucessivamente.

246 Traçar uma falsa espiral de quatro centros.

1 — Construa-se o quadrado 1, 2, 3, 4 e prolonguem-se os lados no mesmo sentido, fig. 510.

2 — Tomam-se sucessivamente os pontos 1, 2, 3, 4 como centros e com raios 1-A, 2B, 3C, 4D ... descrevam-se os quadrantes AB, BC, CD...

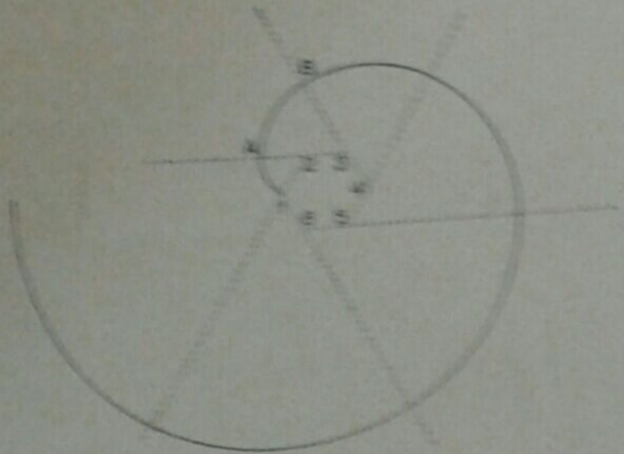


Fig. 510

Observação — Pode-se construir do mesmo modo sôbre um polígono regular uma falsa espiral de **muitos** centros.

A fig. 511 mostra uma espiral de 4 centros.

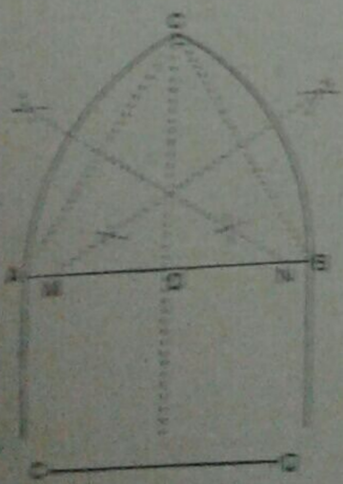


Fig. 512

247 Traçar uma ogiva, sendo dadas a largura e a altura.

AB e CD, largura e altura dadas, fig. 512.

1 — Trace-se o segmento AB igual à largura dada.

2 — Levante-se uma perpendicular ao meio de AB.

3 — Marque-se a altura dada CD, que deve sempre ser maior que a metade de AB.

4 — Tracem-se AC e BC e ao meio dêsses segmentos levantem-se perpendiculares; os pontos de intersec-

ção M e N, destas perpendiculares com AB, são os centros dos arcos BC e AC que formam a ogiva; os raios dêsses arcos são iguais a NA e MB.

Observação — Os centros M e N podem se achar entre A e B, ou exatamente em A e B, ou sôbre o prolongamento de AB. A ogiva é denominada, para êstes três casos, respectivamente, **ogiva obtusa, equilátera e de lanceta**.

248 Construir uma oval irregular, sendo dado o eixo menor.

Aa eixo menor dado, fig. 513.

1 — Ao meio de **Aa** levante-se a perpendicular **Bb.**

2 — Sôbre **Aa** como diâmetro, descreva-se uma semi-circunferência.

3 — Com o raio OA dessa circunferência marque-se o ponto C.

4 — Tracem-se as retas AC e **a**C.

5 — De A e **a**, como centros, e com o raio **Aa** descrevam-se os arcos AD e **ad.**

6 — De C como centro, e raio CD descreva-se o arco **db**D, que completa a oval; B**b** é o eixo maior.

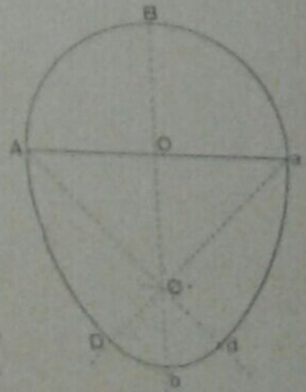


Fig. 513

249 Construir uma oval irregular mais alongada que a precedente, sendo dado o eixo menor.

B**b** eixo menor dado, fig. 514.

1 — Divida-se B**b** em 4 partes iguais e pelo meio O trace-se uma perpendicular A**a.**

2 — Tome-se BC = **b**D = $\frac{3}{4}$ do eixo menor B**b.**

3 — Sôbre B**b** como diâmetro, descreva-se uma circunferência BA**b**E.

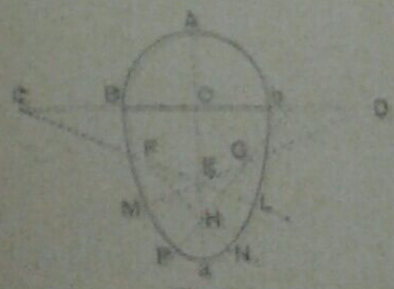


Fig. 514

4 — Tracem-se CE e DE, que determinam na circunferência os pontos F e G.

5 — Tome-se EH igual à $\frac{4}{4}$ de **Bb**, e tracem-se GH e FH.

6 — De C e D, como centros, e com os raios, C**b** e DB descrevam-se os arcos **b**L e BM.

7 — De F e G, como centros, e raios GM e FL tracem-se os arcos MP e LN.

8 — De H, como centro, e com o raio HN = HP descreva-se o arco P**a**N, que completa a curva.

250 Construir uma oval irregular, sendo dado o eixo maior.

1.ª construção:

A**a** eixo maior dado, fig. 515.

Divida-se o eixo maior em quatro partes iguais.

1 — Divida-se o eixo maior em quatro partes iguais.

2 — Pelo meio O da parte AD, igual a 3 divisões, trace-se a perpendicular B**b**.

3 — De O, como centro, e com o raio OA descreva-se a semi-circunferência BA**b**, será B**b** o eixo menor da oval.

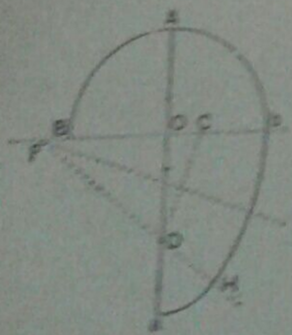


Fig. 515

4 — Sôbre B**b**, a partir de **b**, tome-se **b**C igual à quarta parte **a**D do eixo dado, e ligue-se C a D.

5 — Trace-se ao meio de CD uma perpendicular, que se prolongue até encontrar B**b**, o que tem lugar em F.

6 — De F, como centro, e com o raio F**b** descreva-se o arco **b**H; depois de D como centro, e com o raio DH trace-se o arco H**a**.

7 — A figura sendo simétrica em relação ao eixo A**a**, a mesma construção se aplica do outro lado para completar a oval.

2.ª construção:

A**a** eixo dado, fig. 516.

1 — Construa-se à parte uma oval irregular, tendo para eixo menor uma grandeza arbitrária RQ, fig. 517.

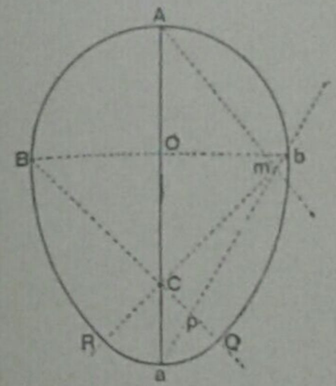


Fig. 516

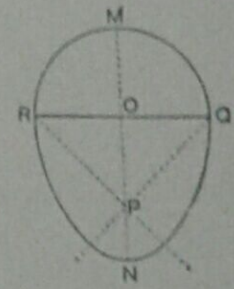


Fig. 517

2 — Pelo ponto **a** tire-se uma reta qualquer e sôbre ela marque-se, a partir de **a**, **ap** = NP e **pm** = PM.

3 — Ligue-se **m** a A e tire-se por **p** uma paralela a m**A**; determina-se assim o ponto C.

4 — Pelo meio O de AC trace-se uma perpendicular e com o raio AO e O para centro, descreva-se a semi-circunferência BA**b** será assim Bb o eixo menor.

5 — Tracem-se as retas BC e **b**C.

6 — De B e **b**, como centros, e com o raio B**b** descrevam-se os arcos **b**Q e BR.

7 — Complete-se a curva, descrevendo de C como centro, e com o raio CQ = C**a** = CR o arco Q**a**R.

3.ª construção:

AB eixo maior, fig. 518.

1 — Divida-se AB em 3 partes iguais AO, OH, HB.

2 — Por O tire-se EF perpendicular a AB.

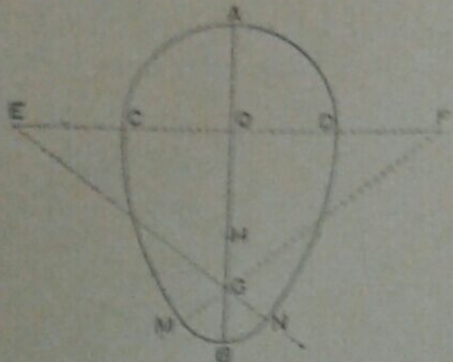


Fig. 518

3 — De O, como centro e com o raio OA descreva-se a semi-circunferência CAD; será CD o eixo menor.

4 — Tome-se CE = DF = = OA, terça parte de AB e liguem-se E e F ao meio G de BH.

5 — De E e F, como centros, e com raios respectivamente iguais a ED e FC, descrevam-se os arcos DN e CM.

6 — De G, como centro e com o raio GM = GB = GN, descreva-se o arco MBN que completa a oval.

4.ª construção:

AD eixo dado, fig. 519.

1 — Divida-se o eixo dado AD em 9 partes iguais.

2 — Pelo meio O de AG, igual a 7 dessas partes, levante-se a perpendicular BF.

3 — De O, como centro, e raio OA descreva-se a semi-circunferência BAF; será BF o eixo menor.

4 — Tracem-se as retas BG e FG e de B e F, como centros, e com raio BF descrevam-se os arcos BC e FE.

5 — Complete-se a oval, descrevendo de G como centro, e com o raio GC o arco CDE.

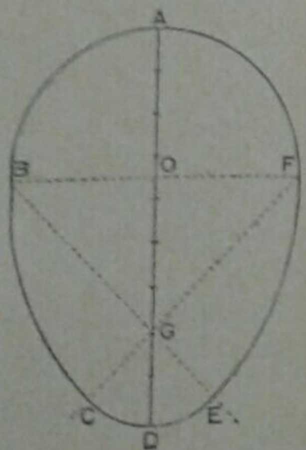


Fig. 519

NOTA — O Dr. Benio Amarante, atualmente distinto engenheiro da Repartição Geral dos Telégrafos, quando em 1893, meu discípulo, de matemática e desenho geométrico e elementar, matérias em que se preparava para entrar no 1.º ano do curso geral da Escola Politécnica, onde fêz brilhante curso, descobriu a construção citada, para o caso em que se dá o eixo maior da oval irregular.

A sua atenção dirigiu-se para êsse problema, porquanto, ao tratar dele, fêz-lhe a observação de ser o problema pouco estudado pelos autores, não se encontrando mesmo nos livros didáticos comuns nenhuma solução a respeito.

Mais tarde, ainda aluno da Escola Politécnica, o Dr. Benio Amarante publicou no n. 7, de 1 de outubro de 1897, da **Revista da Escola Politécnica,** a solução do seu problema com o seguinte título: "Construção de uma oval irregular, conhecendo-se unicamente o eixo maior".

251 Construir uma oval regular, sendo dado o eixo maior.

1.ª construção:

AB eixo dado, fig. 520.

1 — Trace-se uma perpendicular ao meio de AB.

2 — A partir de A e B marquem-se, sôbre o eixo dado, duas distâncias BD e AC, arbitrárias e iguais entre si.

3 — Sôbre a parte CD construam-se os triângulos equiláteros CMD e CND e prolonguem-se os lados dêsses triângulos, como mostra a figura.

4 — De C e D como centros, e com o raio AC = DB descrevam-se os arcos, QAP e SBR.

5 — De N e M, como centros, e com os raios NP = MQ descrevam-se os dois arcos que completam a curva.

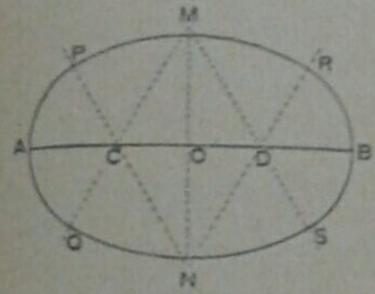


Fig. 520

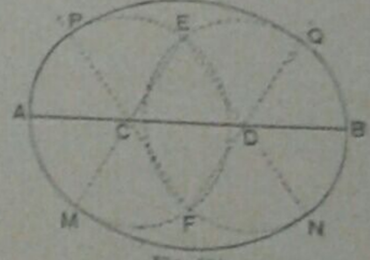


Fig. 521

2.ª construção:

AB, eixo dado, fig. 521.

1 — Tomem-se os comprimentos AC e BD tais que as circunferências descritas de C e D como centros, e tendo esses raios, sejam secantes.

2 — Tracem-se os diâmetros FP, FQ, EM e EN.

3 — De E e F, como centros, e com o raio = um diâmetro EM descrevam-se os arcos MN e PQ.

4 — A curva ficará completada com os arcos PM e QN das circunferências já traçadas.

Observação — A oval será tanto mais arredondada, quanto mais aproximado do centro O, figs. 520 e 521, estiverem os pontos D e C, ou quanto maior fôr o comprimento AC; ao contrário, será tanto mais alongada quanto menor fôr AC.

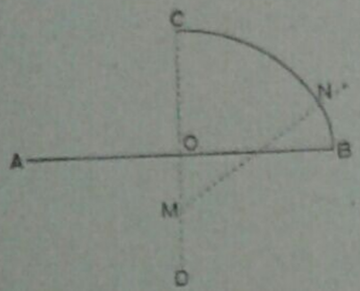


Fig. 522

3.ª construção:

AB eixo dado, fig. 522.

1 — Trace-se uma perpendicular CD ao meio de AB.

2 — Escolham-se os pontos M em CD e outro em AB.

3 — Trace-se e prolongue-se MN.

4 — Da interseção da reta MN com o eixo AB, como centro e raio até B, descreva-se o arco BN.

5 — De M, como centro, e raio MN descreva-se o arco NC.

6 — A figura sendo simétrica em relação aos eixos, aplique-se a mesma construção para traçar os outros quadrantes.

Observação — Nesta construção, o achatamento da oval depende da posição relativa do ponto M.

Como prova do muito aprêço e estima que voto ao Dr. [illegible] Amarante, transcrevo para aqui, integralmente, a publicação da "Revista", juntando no fim uma observação e para a qual chamo a sua atenção:

"Na oval, o eixo maior, sempre perpendicular ao eixo menor, é uma função dêste eixo e vice-versa; quando a oval é regular, os eixos se cortam ao meio, não sendo assim na oval irregular.

Desde que conheçamos a relação dos dois eixos, podemos resolver a questão. Suponhamos, a questão resolvida.

Seja, fig. 519, R o raio do semi-círculo BAF e AD = 2 R + GD o eixo maior.

Calculemos GD:

$$GD = GC = FC - FG$$

mas

$$FC = 2R \text{ e } FG = R\sqrt{2}$$

donde

$$GD = 2R - R\sqrt{2}$$

logo

$$AD = 2R + 2R - R\sqrt{2} = (4 - \sqrt{2})\,R$$

252 Construir uma oval regular, sendo dado o eixo menor.

AB eixo menor, fig. 523.

1 — Tire-se CD perpendicular ao meio de AB.

2 — Sôbre CD, a partir de O para um e outro lado de AB, marquem-se duas distâncias OM e ON, arbitrárias e iguais entre si.

3 — Tracem-se as retas AM, AN, BM, BN, que se prolongam, como indica a figura.

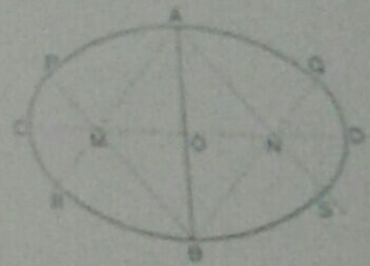


Fig. 523

Êste valor de AD que acabamos de obter é incomensurável, o que importa dizer que o eixo maior e eixo menor não admitem uma medida comum exata.

Ora, AD = (4 — √2) R = 2,586 R aproximadamente, logo

$$R = AD \times \frac{1}{2{,}586} = AD \times 0{,}386$$

Se se der a R o valor 3,5 temos:

$$AD = 2{,}586 \times 3{,}5 = 9{,}05[illegible]$$

e desprezando a fração 0,05

$$AD = 9$$

Êsses valores R = 3,5 e AD = 9 são aquêles que mais facilitam a construção gráfica e aproximada da figura.

Se nos dessem, pois, AD como sendo o eixo maior de uma oval irregular, para construí-la, dividiríamos AD em 9 partes iguais; sôbre 7 dessas partes como diâmetro e a contar de A, por exemplo, descreveríamos o semi-círculo BAF, que [illegible] a perpendicular ao meio dêsse diâmetro nos pontos [illegible]; traçaríamos pelo ponto G, [illegible] e FC; em seguida, com raio igual a BF e centro alternadamente em F e em B, descreveríamos os arcos de círculo BC e FE e finalmente com centro em G e raio igual a GC descreveríamos o arco CDE, que terminaria o contôrno da oval.

Observação — O valor 3,5 dado ao raio R, como o que mais facilita a construção gráfica da oval, particulariza a construção, quando devemos antes generalizá-la.

Para isso, devemos procurar a relação entre GD e AD. Já vimos que:

$$GD = (2 - \sqrt{2})\,R = 0{,}586\,R$$

e

$$AD = (4 - \sqrt{2})\,R = 2{,}586\,R$$

donde

$$\frac{GD}{AD} = \frac{0{,}586R}{2{,}586R} = \frac{0{,}586}{2{,}586} = \frac{0{,}293}{1{,}293} = \frac{293}{1293}$$

4 — De A e B, como centros, e com o raio AB descrevam-se os arcos RBS e PAQ.

5 — De M e N, como centros e com o raio MP = MR = NQ = = NS descrevam-se os dois outros arcos que completam a curva.

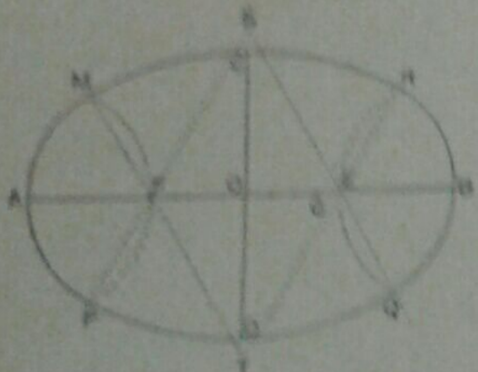


Fig. 524

Observação — O achatamento da oval depende do comprimento DN, que deve ser sempre menor que o eixo dado AB.

253 Construir uma oval regular, sendo dados os dois eixos.

1.ª construção:

AB e CD eixos dados, fig. 524.

1 — Dispostos os eixos em AB e CD, marque-se, a partir de B, por exemplo, o comprimento BG igual ao semi-eixo menor CO.

2 — Divida-se OG em 3 partes iguais e tome-se uma dessas divisões de G até E.

3 — De A e B, como centros, e com o raio BE, descrevam-se os arcos MFP e REQ.

---

convertendo em fração contínua:

$$\frac{CD}{AB} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{51}{121}}}$$

desprezando

$$\frac{51}{121}$$

tem-se:

$$\frac{CD}{AB} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Fica assim demonstrado que a razão de CD para AB é proximamente $\frac{2}{3}$ o que justifica a construção.

4 — De F e E, como centros, e com o mesmo raio BE, descrevam-se os arcos MAP e RBQ, que pertencem à curva; ficam assim determinados os quatro pontos M, P, R, Q.

5 — De M e R, como centros, e com o raio MR descrevam-se dois arcos que se interceptam em T; do mesmo modo de P e Q como centros, e raio PQ determine-se o ponto S.

6 — De T e S como centros, e raio TM descrevam-se os arcos MCR e PDQ que completam a curva.

2.ª construção:

AB e CD eixos dados, fig. 525.

1 — Disponham-se os eixos.

2 — Marquem-se os dois pontos P e Q equidistantes de O.

3 — Marque-se CR = BQ.

4 — Tire-se a perpendicular ao meio de RQ e determine-se N.

5 — Trace-se NQ e prolongue-se.

6 — De Q, como centro, e raio QB, descreva-se o arco BS.

7 — De N, como centro, e raio NS descreva-se o arco SC.

A figura sendo simétrica em relação aos eixos, aplica-se a mesma construção para traçar os outros quadrantes.

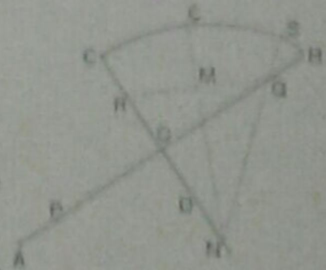


Fig. 525

INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE FIGURAS

254 Dado um triângulo, inscrever nele uma circunferência

ABC, triângulo dado, fig. 526.

1 — Tracem-se as bissetrizes de dois ângulos A e B.

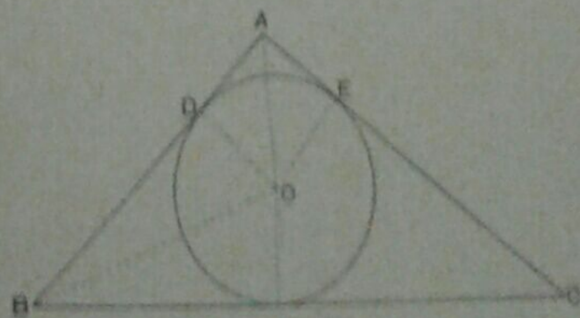


Fig. 526

2 — Do ponto de interseção O abaixe-se uma perpendicular OD a um lado AB.

3 — De O, como centro, e raio OD descreva-se a circunferência, que resolve o problema.

Observação — Convém traçar as perpendiculares de O sôbre os outros dois lados para determinação dos pontos de contacto.

255 Dado um triângulo, ex-inscrever nele uma circunferência.

ABC triângulo dado, fig. 527.

1 — Trace-se a bissetriz do ângulo B.

2 — Prolongue-se BC e tire-se a bissetriz do ângulo ACX.

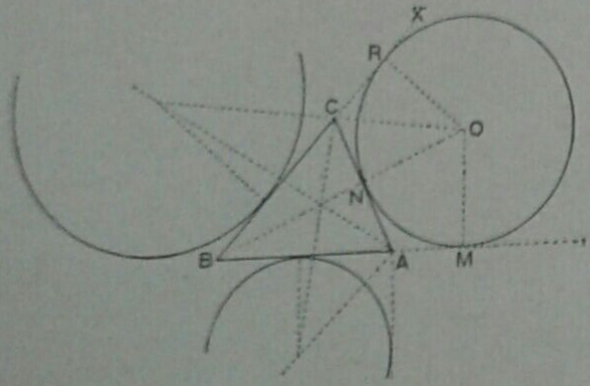


Fig. 527

3 — Do ponto de interseção O tirem-se as perpendiculares OM, ON e OR.

4 — De O, como centro, e com o raio OM = ON = OR descreva-se a circunferência, que resolve o problema.

5 — Para os dois outros círculos ex-inscritos a construção é a mesma.

256 Dado um triângulo, circunscrever-lhe uma circunferência.

ABC triângulo dado, fig. 528.

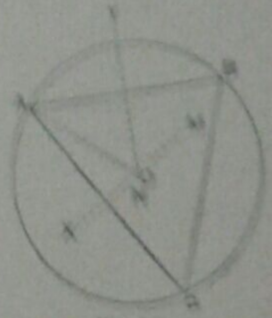


Fig. 528

1 — Tirem-se as perpendiculares MX e NY ao meio de AC e AB.

2 — De O, como centro, e raio OA = OB = OC descreva-se uma circunferência, que é a solução do problema.

257 Dado um círculo, inscrever nele um triângulo semelhante a um triângulo dado.

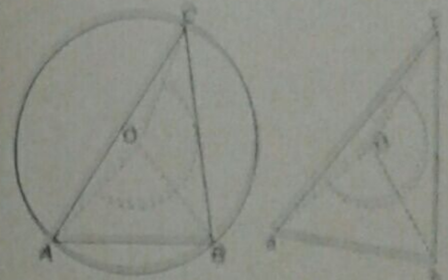


Fig. 529

O e **abc**, círculo e triângulo dados, fig. 529.

1 — Determine-se o centro do círculo circunscrito ao triângulo **abc**.

2 — No centro O do círculo dado façam-se os ângulos AOB = **aob**, BOC = **boc**, COA = **coa**.

3 — Tracem-se as retas AB, BC, CA. O triângulo pedido é ABC.

258 Dado um triângulo, inscrever nele um triângulo semelhante a um triângulo dado.

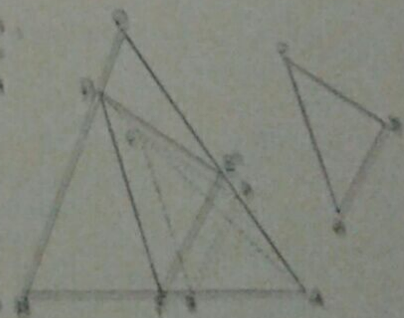


Fig. 530

ABC e **abc**, triângulos dados, fig. 530.

1 — Inscreva-se **ab** no ângulo A, em qualquer posição.

2 — Faça-se o triângulo **abc** igual a **abc** (triângulo dado).

3 — Trace-se Ac e prolongue-se até D.

4 — Por D, tracem-se DE e DF respectivamente paralelas a **cb** e **ca**.

5 — Trace-se EF; DEF é o triângulo pedido.

259 Dado um quadrado, inscrever e circunscrever uma circunferência.

ABCD, quadrado dado, fig. 531.

1 — Tirem-se as diagonais AC e BD.

2 — De O como centro, e com raio igual a OA, OB, OC ou OD, descreva-se o círculo, que circunscreve o quadrado.

3 — De O abaixe-se OE perpendicular a CD.

4 — De O, como centro, e raio OE descreva-se o círculo inscrito no quadrado.

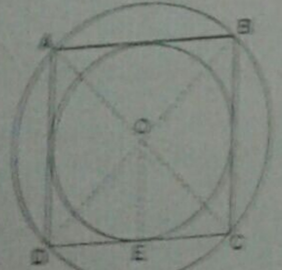


Fig. 531

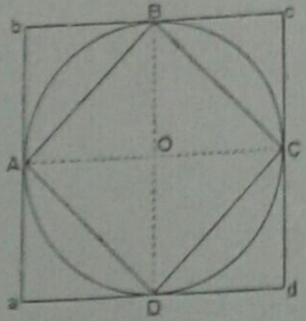


Fig. 532

260 Dado um círculo, inscrever e circunscrever nele um quadrado.

O, círculo dado, fig. 532.

1 — Tracem-se dois diâmetros perpendiculares AC e BD.

2 — Tracem-se os segmentos que ligam os extremos dêsses diâmetros; ABCD é o quadrado inscrito.

3 — Pelos pontos A, B, C e D, tracem-se tangentes à circunferência.

4 — Prolongando-se essas tangentes até se encontrarem, tem-se em **abcd** o quadrado circunscrito.

261 Inscrito em um círculo um polígono regular, circunscrever ao mesmo círculo um outro de igual número de lados e reciprocamente

ABCDE, polígono dado, fig. 533.

1 — Pelos vértices A, B, C, D e E tirem-se tangentes à circunferência.

2 — Prolongando-se essas tangentes até se encontrarem, tem-se em **abcde** o polígono pedido.

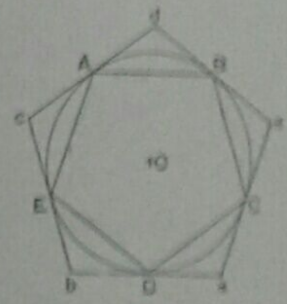


Fig. 533

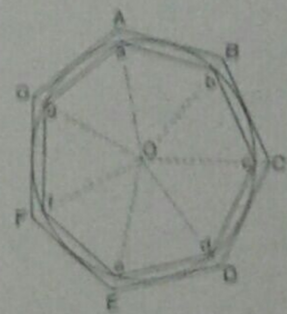


Fig. 534

Reciprocamente:

ABCDEFG, polígono dado, fig. 534.

1 — Tracem-se os raios OA, OB, OC... e determinem-se os pontos **a, b, c, d, e, f, g**.

2 — Tracem-se os segmentos **ab, bc, cd**...; será **abcdefg** o polígono pedido.

Observação — Quando no problema direto o número de lados é ímpar, basta traçar, fig. 533, por A, B, C... paralelas aos lados opostos DC, DE, EA...

262 Dado um círculo, inscrever e circunscrever nele um polígono regular.

Inscrever:

O, círculo dado, fig. 535.

1 — Divida-se a circunferência em tantas partes iguais quantos forem os lados do polígono.

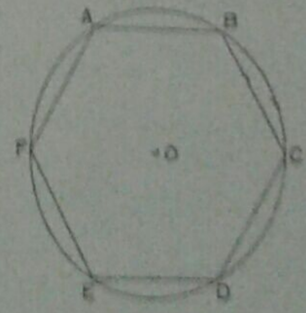


Fig. 535

2 — Tracem-se as cordas dos arcos AB, BC, CD...
3 — O polígono ABCDEF resolve o problema.

Circunscrever:

O, círculo dado, fig. 536.

1 — Divida-se a circunferência em um número de partes igual ao número de lados que deve ter o polígono.

2 — Pelos pontos de divisão tirem-se tangentes à circunferência; essas tangentes formam o polígono pedido.

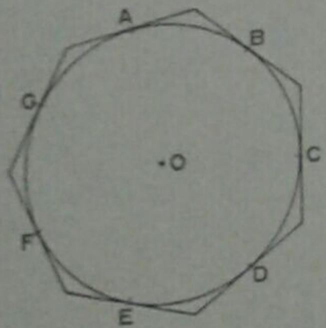


Fig. 536

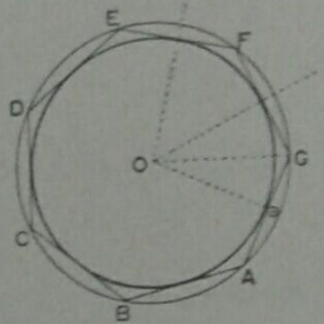


Fig. 537

263 Dado um polígono regular, circunscrever e inscrever nele um círculo.

Circunscrever:

ABCDEFG, polígono dado, fig. 537.

1 — Determine-se o centro do círculo que passa por três vértices A, B, C do polígono.

2 — Trace-se êsse círculo: ficará o problema resolvido.

Inscrever:

1 — O círculo inscrito tem para centro o mesmo centro O e como raio o apótema **Oa.**

264 Dado um retângulo, circunscrever-lhe um círculo.

ABCD, retângulo dado, fig. 538.
1 — Tracem-se as diagonais AC e BD.
2 — Será O o centro e OA o raio do círculo pedido.

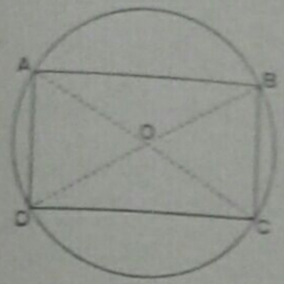


Fig. 538

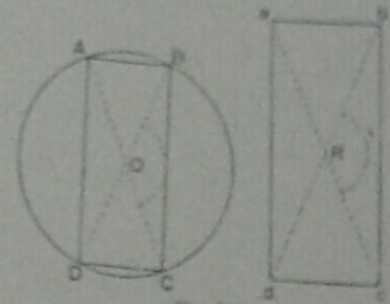


Fig. 539

265 Dado um círculo, inscrever nêle um retângulo semelhante a um retângulo dado.

O e R, círculo e retângulo dados, fig. 539.
1 — Tracem-se as diagonais do retângulo R.
2 — Em tôrno de O façam-se ângulos iguais aos que estão determinados em tôrno de R.
3 — Será ABCD o retângulo pedido.

266 Inscrever em um quadrado dado um triângulo equilátero, de modo que um de seus vértices fique em um dos vértices do quadrado.

ABCD, quadrado dado, fig. 540.

1 — De um dos vértices B do quadrado, como centro, e raio = lado BC descreva-se uma circunferência.
2 — Trace-se a diagonal BD.
3 — Inscreva-se na circunferência um triângulo equilátero ELM, de que um dos vértices seja o ponto E.
4 — Pelo vértice D do quadrado tire-se DO paralela a EL, DP paralela a EM e trace-se OP; DOP é o triângulo pedido.

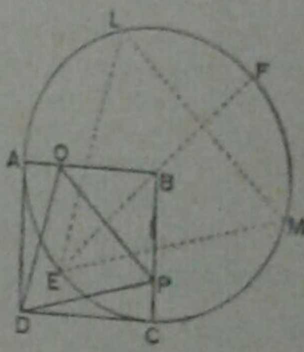


Fig. 540

267 Construir um polígono regular estrelado.

Noções preliminares

Ligar dois a dois os pontos de divisão de uma circunferência, fig. 541, é traçar o segmento de reta **ac**, que liga os pontos **a** e **c**, deixando um ponto **b** intermediário.

Ligar três a três é traçar o segmento **ad**, deixando dois pontos, **b** e **c**, intermediários.

Ligar quatro a quatro é traçar **ae**, deixando três pontos, **b**, **c** e **d**, intermediários e assim por diante.

Prolongar até a interseção dois a dois os lados de um polígono regular dado é continuar, até se interceptarem, dois lados A e C, fig. 541, deixando um lado B intermediário.

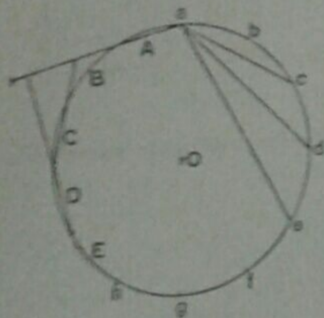


Fig. 541

Prolongar três a três é continuar os lados A e D, deixando dois lados, B e C, intermediários e assim sucessivamente.

Os polígonos regulares **estrelados** são constituídos por cordas iguais formando um traçado contínuo e voltando ao ponto de partida.

Os polígonos estrelados regulares têm lados e ângulos iguais.

Para construir um polígono regular estrelado assim se procede:

1 — Divida-se a circunferência, na qual o polígono deve ser inscrito, em um número de partes, igual ao número de lados que deve ter o polígono.

2 — Liguem-se os pontos de divisão 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4...

3 — A condição necessária para voltar ao ponto de partida é que os números 2, 3, 4... sejam primos com o número de lados do polígono.

— Uma circunferência sendo dividida em **n** partes iguais, para saber-se o número de polígonos estrelados que nela se pode traçar, tem-se o seguinte princípio:

A divisão da circunferência em N partes iguais, dá tantos polígonos estrelados quantos são os números primos com N, inferiores a $\frac{N}{2}$

Assim, dividindo uma circunferência em 5 partes iguais, só se pode traçar um polígono estrelado, pois que só há um número primo com 5 inferior a $\frac{5}{2}$.

E, como êste número é 2, obtém-se êsse polígono ligando os pontos de divisão 2 a 2, fig. 542.

Da divisão em 6 partes nenhum polígono se pode obter, porque não há nenhum número primo com 6 inferior a $\frac{6}{2}$.

Como são dois os números primos com 7 inferiores a $\frac{7}{2}$, dois também são os polígonos estrelados de 7 lados.

E, como êsses números são 3 e 2, devem ligar-se os pontos de divisão 3 a 3 e 2 a 2.

Com a divisão em 8 partes obtém-se apenas um polígono e os pontos de divisão devem ser ligados 3 a 3.

Fig. 542

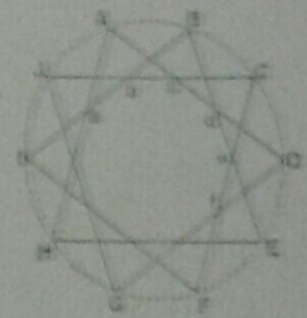


Fig. 543

A fig. 543 dá um decágono estrelado, em que a ligação é feita 3 a 3.

Com a divisão em 11 partes iguais obtêm-se 4 polígonos estrelados, e os pontos de divisão devem ser ligados 5 a 5, 4 a 4, 3 a 3, e 2 a 2.

Com a divisão em 23 partes têm-se 10 polígonos estrelados, pois que os números primos com 23 e inferiores a $\frac{23}{2}$ são 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 e 2.

Também se pode definir polígono estrelado a figura que se obtém prolongando até a interseção 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, ... dos lados de um polígono regular convexo, contanto que os números 2, 3, 4, ..., sejam primos com o número de lados do polígono.

Assim, se **abcdef** ... (fig. 543) é um decágono regular, prolongando os lados **ab** = **de**, **bc** = **ef**, ... eles se interceptam formando o decágono estrelado ABCDEFGHIJ.

268 Construir uma figura estrelada

1 — Não se deve confundir um polígono estrelado com uma **figura estrelada**; esta difere daquele em que as retas que formam os seus lados não apresentam um contorno contínuo. Uma figura estrelada se obtém ligando os pontos de divisão de uma circunferência 2 a 2, 3 a 3, ..., contanto que estes números 2, 3, ... não sejam primos com o número total de pontos de divisão.

2 — Em uma circunferência dividida em **n** partes podem-se obter tantas figuras estreladas, quantos forem os números inferiores a $\frac{n}{2}$, que não sejam primos com **n**.

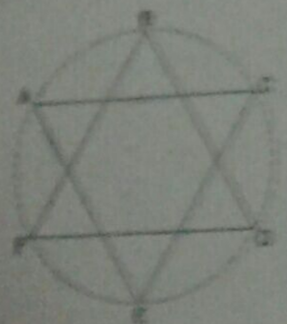


Fig. 544

3 — Assim, se se dividir a circunferência em 6 partes iguais, só se obtém uma figura estrelada, porque há apenas um número inferior a $\frac{6}{2}$ e não primo com 6; esse número é 2, o que quer dizer que se deve fazer a ligação 2 a 2. A fig. 544 dá esta figura estrelada.

Observação — Também se pode obter uma figura estrelada prolongando 2 a 2, 3 a 3, ..., os lados de um polígono regular, sendo estes números 2, 3, ..., não primos com o número de lados do polígono.

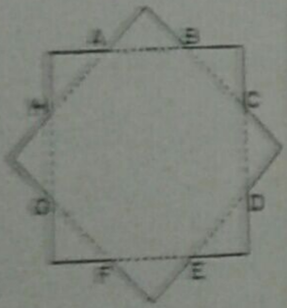


Fig. 545

Assim, se ABCDEFGH é um octógono regular, fig. 545, prolongando até a interseção os lados 2 a 2, obtém-se uma figura estrelada de 8 pontas.

Também se costuma denominar estrelada a figura dada pela construção seguinte:

1 — Tracem-se duas circunferências concêntricas, fig. 546.

2 — Divida-se a menor em 10 partes iguais, por exemplo.

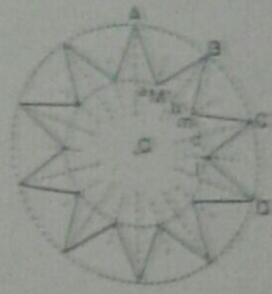


Fig. 546

3 — Unindo os pontos A, B, C, ..., ao centro O, a menor circunferência fica dividida em 10 partes iguais.

4 — Dividam-se ao meio os arcos **ab**, **bc**.

5 — Ligando esses meios M, **m**, l, ..., aos pontos A, B, C, D, ..., obtém-se a figura estrelada.

269 Inscrever e circunscrever um círculo a um polígono regular estrelado

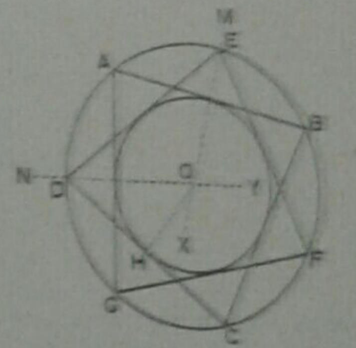


Fig. 547

ABCDEFGA, polígono dado, fig. 547.

1 — Ao meio de dois lados quaisquer AB e AG, tracem-se as perpendiculares MX e NY.

2 — O ponto de interseção O será o centro do círculo circunscrito, cujo raio é OD ou OE.

3 — O círculo inscrito tem para centro o mesmo ponto O e o raio é o apótema OH.

270 Dado um círculo, circunscrever-lhe um polígono regular estrelado.

O, círculo dado, fig. 548.

1 — Divida-se o círculo em um número de partes igual ao número de lados que deve ter o polígono.

2 — Pelos pontos de divisão tirem-se tangentes de 2 em 2, de 3 em 3... pontos até se encontrarem; obtêm-se assim o polígono ABCDEFG.

Observação — Traçando as cordas de 2 em 2, de 3 em 3, de 4 em 4... tem-se o polígono inscrito no círculo.

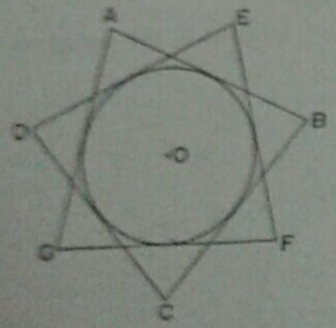


Fig. 548

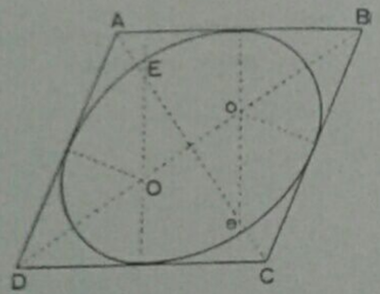


Fig. 549

271 Inscrever e circunscrever uma oval regular em um losango.

ABCD, losango dado, fig. 549.

1 — Tracem-se perpendiculares aos meios dos lados.

2 — Estas perpendiculares encontram as diagonais do losango nos pontos O, o, E, e, que são os centros dos arcos que formam a oval inscrita.

3 — As diagonais AC e BD são os eixos da oval circunscrita, que se traça pelo problema 253.

272 Inscrever e circunscrever uma oval regular em um paralelogramo.

Inscrever:

ABCD, paralelogramo dado, fig. 550.

1 — À mesma distância dos vértices A e C, por exemplo, tomem-se os pontos E, F, E', F' e tracem-se os círculos O e O' tangentes nesses pontos aos lados do paralelogramo.

2 — Trace-se o segmento OO' e pelo seu meio trace-se a perpendicular PQ.

3 — Os raios OE, OF, O'E', O'F', fazem ângulos desiguais com OO'; prolonguem-se os lados OE e O'F' dos menores dêsses ângulos; obtêm-se assim os pontos P e Q.

4 — Liguem-se êsses pontos, P e Q, a O e O' para determinar os pontos de concordância M e N.

5 — Dos pontos P e Q, como centros, e com raio QE = = PF' descrevam-se os arcos EN e F'M, que completam a oval.

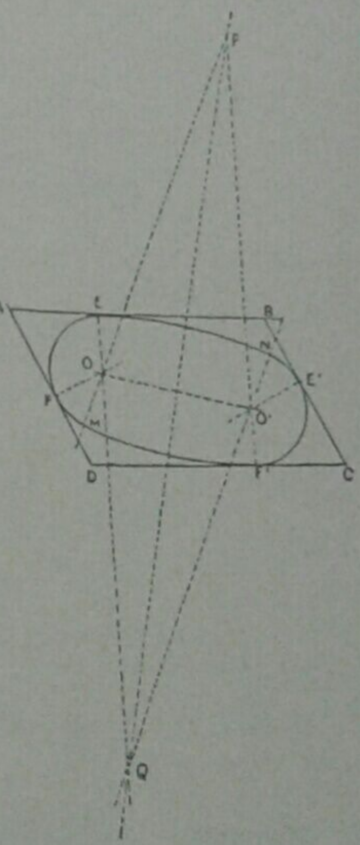


Fig. 550

Circunscrever:

ABCD, paralelogramo dado, fig. 551.

1 — Faça-se passar pelos vértices A e B e pelos vértices D e C arcos de círculo EABF e EDCF.

2 — De E e F, como centros, e com um raio qualquer, porém menor do que a distância EA, descrevam-se os arcos MN e PQ.

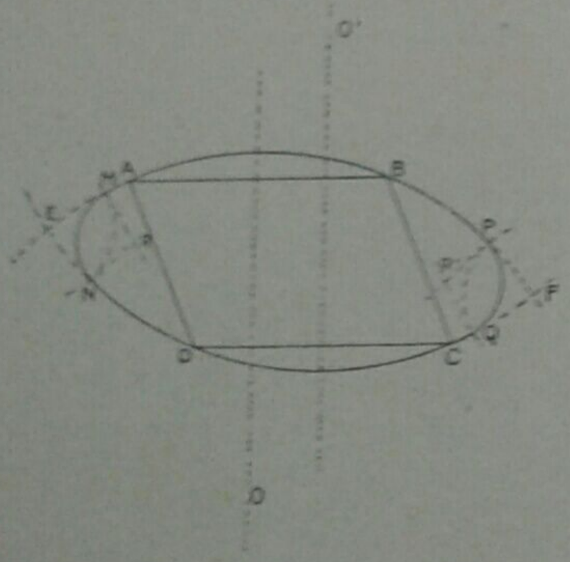


Fig. 551

3 — Tracem-se a estes últimos arcos as tangentes MR, NR e PR', QR'.

4 — Em R e R' estão os centros dos arcos que completam a oval.

Observação — A possibilidade da construção depende da posição dos pontos E e F; assim, se o ponto E ficar além do vértice A, a construção é impossível.

273 Inscrever e circunscrever uma elipse a um paralelogramo.

ABCD, paralelogramo dado, fig. 552.

1 — Tracem-se as diagonais AC e BD para determinar o centro O do paralelogramo que será também o centro da elipse.

2 — Por O tracem-se as retas EF e GH paralelas aos lados.

3 — Estas retas são dois diâmetros conjugados da elipse inscrita, que se traça pelo problema 171.

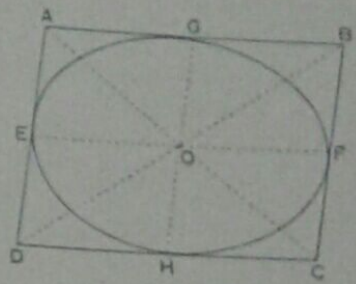


Fig. 552

4 — As diagonais AC e BD são dois diâmetros conjugados da elipse circunscrita, que se traça pelo problema 171.

FIGURAS EQUIVALENTES

274 Transformar um triângulo qualquer em um triângulo retângulo.

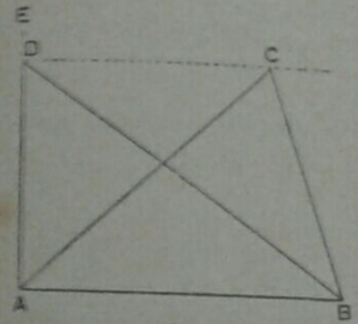


Fig. 553

ABC, triângulo dado, fig. 553.

1 — Tire-se pelo vértice C a reta CF paralela a AB.

2 — Por A levante-se AE perpendicular a AB.

3 — Trace-se DB; o triângulo DAB resolve o problema.

275 Transformar um paralelogramo em um triângulo equivalente.

ABCD, paralelogramo dado, fig. 554.

1 — Por um ponto qualquer E do lado AD levante-se uma perpen-

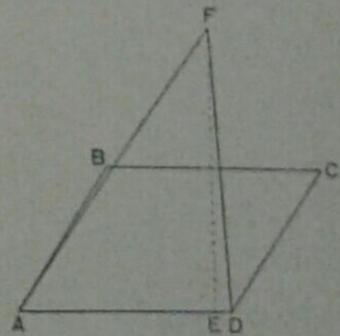


Fig. 554

dicular e marque-se um comprimento igual ao dôbro da altura do paralelogramo relativa ao lado AB.

2 — Tracem-se DF e AF; o triângulo ADF resolve o problema.

276 Transformar um polígono dado, em um triângulo equivalente.

ABCDE, polígono dado, fig. 555.

1 — Trace-se a diagonal AC, e por B tire-se a paralela **Bb** a AC.

2 — Ligue-se **b** a C.

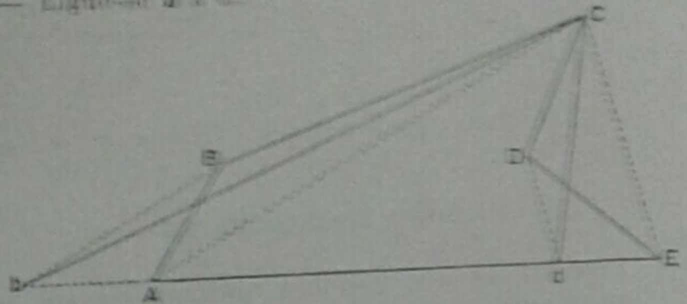


Fig. 555

3 — Trace-se a diagonal CE e por D a paralela **Dd**.

4 — Ligue-se **d** a C; o triângulo **bCd** resolve o problema.

277 Transformar um círculo dado em um triângulo equivalente.

O, círculo dado, fig. 556.

1 — Trace-se o raio OA, e por A tire-se a tangente AB igual à circunferência retificada, problema 135.

2 — Tire-se OB; o triângulo retângulo OAB resolve o problema.

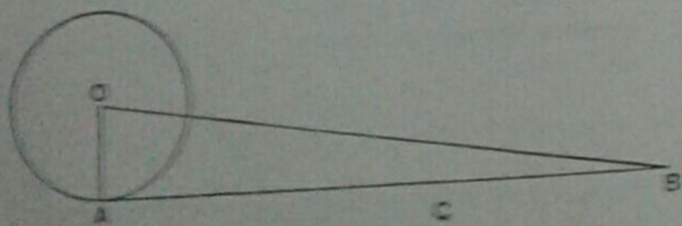


Fig. 556

278 Sôbre um segmento dado construir um retângulo equivalente a um retângulo dado.

ab e ABCD, segmento e retângulo dados, fig. 557.

1 — **ab** será a base do retângulo pedido.

2 — A altura **bc** se obtém procurando a quarta proporcional aos 3 segmentos **ab,** AB e BD, problema 96.

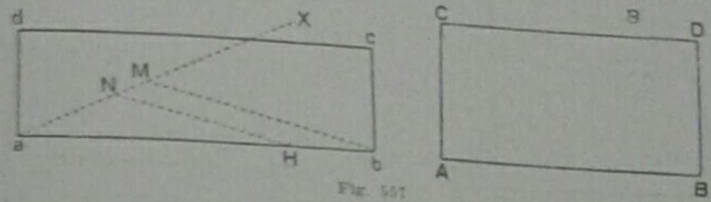


Fig. 557

Observação — Se fosse dado um **quadrado** e se se pedisse o **retângulo equivalente,** obter-se-ia a altura determinando a terceira proporcional entre **ab** e o lado do quadrado dado, problema 97.

279 Sôbre um segmento dado, construir um retângulo equivalente a um trapézio dado.

hL e ABCD, reta e trapézio dados, fig. 558.

1 — **hL** será a base do retângulo pedido.

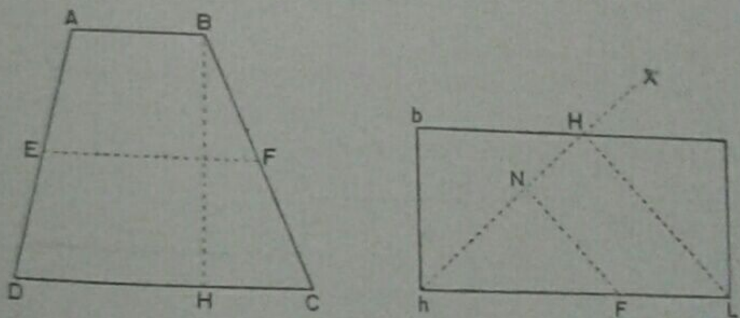


Fig. 558

2 — A altura **hb,** se obtém determinando a quarta proporcional **hN** entre **hL,** a base média EF do trapézio e sua altura BH.

280 Transformar um paralelogramo em um retângulo equivalente da mesma base e da mesma altura.

ABCD, paralelogramo dado, fig. 559.

1 — Pelos extremos D e C de um dos lados do paralelogramo levantam-se as perpendiculares DE e CF, será EDCF o retângulo pedido.

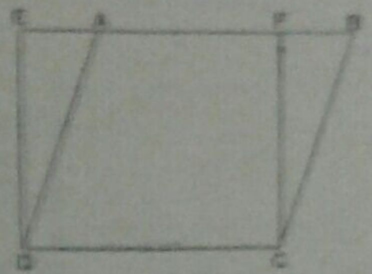


Fig. 559

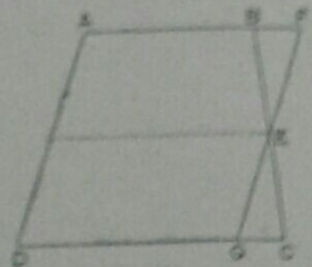


Fig. 560

281 Transformar um trapézio em um paralelogramo equivalente da mesma altura.

ABCD, trapézio dado, fig. 560.

1 — Pelo ponto E, meio do lado BC, trace-se FG paralela a AD.

2 — O paralelogramo AFGD, cuja base é a base média do trapézio, resolve o problema.

282 Construir um quadrado equivalente a uma figura dada:

RETÂNGULO

ABCD, retângulo dado, fig. 561.

1 — O lado do quadrado pedido obtém-se, em geral, procurando a média proporcional entre as duas dimensões do retângulo, cujo produto dá a área da figura dada.

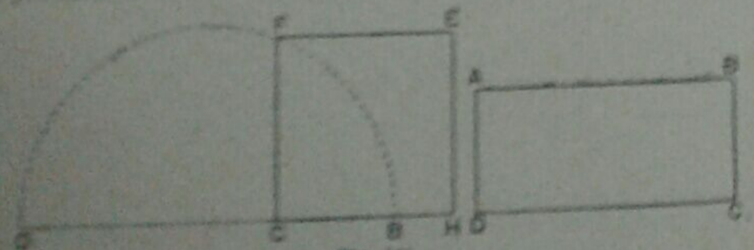


Fig. 561

2 — Neste caso, o lado do quadrado pedido é a média proporcional CF entre DC e BC, base e altura do retângulo dado. AFEH resolve o problema.

PARALELOGRAMO

ABCD paralelogramo dado, fig. 562.

1 — O lado do quadrado pedido é a média proporcional CL entre CD e AH, base e altura do paralelogramo.

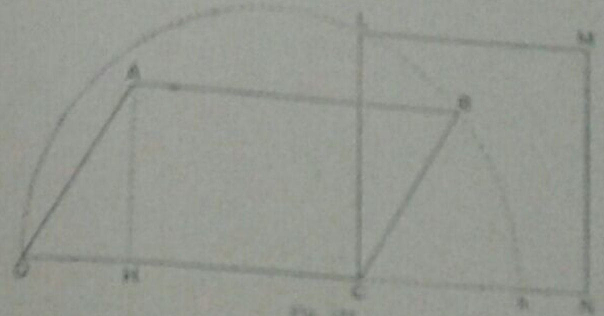


Fig. 562

TRIÂNGULO

ABC triângulo dado, fig. 563.

1 — O lado do quadrado pedido é a média proporcional CF entre um lado, AC por exemplo, e metade da altura relativa a êsse lado (neste exemplo, LH).

2 — Em vez de tomar metade da altura e o lado para ter a média proporcional, pode-se também tomar a altura e metade do lado.

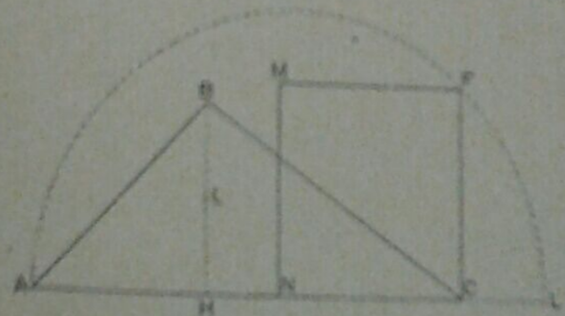


Fig. 563

TRAPÉZIO

ABCD, trapézio dado, fig. 564.

1 — O lado do quadrado pedido é a média proporcional LM entre a base média EF e a altura AH do trapézio.

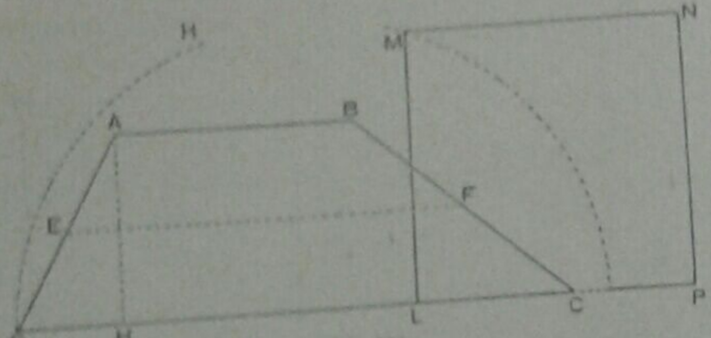


Fig. 564

POLÍGONO REGULAR

ABCDEF, polígono dado, fig. 565.

1 — O lado do quadrado pedido é a média proporcional MN entre AM, (semi-perímetro), e OH apótema do polígono dado.

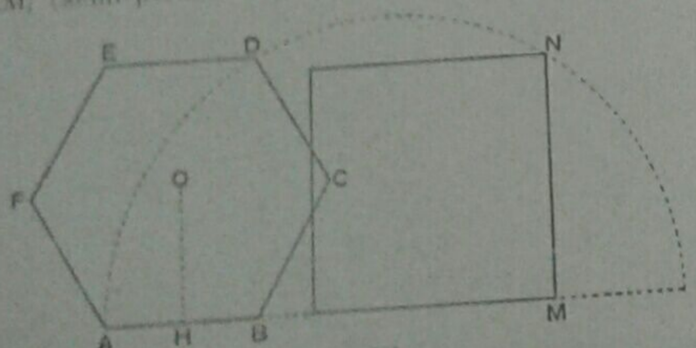


Fig. 565

POLÍGONO QUALQUER

1 — Transforma-se o polígono dado no triângulo equivalente.

2 — Transforma-se êsse triângulo no quadrado equivalente.

O, círculo dado, fig. 566.

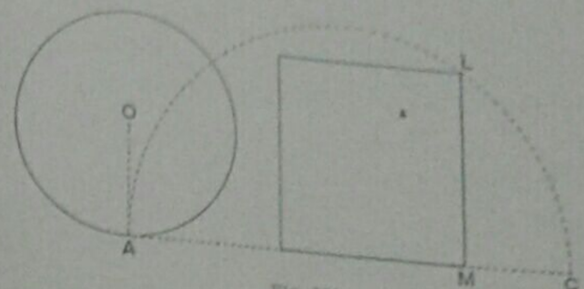


Fig. 566

1 — O lado do quadrado pedido é a média proporcional ML entre AM, semi-circunferência retificada, e OA raio do círculo dado.

283 Construir um quadrado igual à soma ou à diferença de dois quadrados dados.

ABCD e EFLG, quadrados dados, fig. 567.

1 — Trace-se um triângulo retângulo FLM tendo como catêtos os lados AB e EF dos quadrados dados.

2 — O quadrado construído sôbre a hipotenusa FM é o quadrado igual à soma dos quadrados dados.

3 — Para ter o quadrado igual à diferença dos quadrados construa-se um triângulo retângulo, tendo para hipotenusa o lado EF e AB para um dos catêtos.

4 — O quadrado construído sôbre o outro catêto resolve o problema.

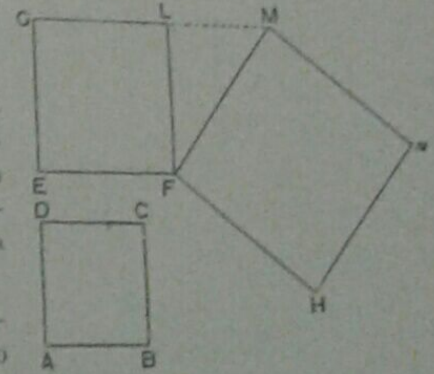


Fig. 567

284 Construir um quadrado múltiplo de um quadrado dado.

ABCD quadrado dado, fig. 568.

1 — A diagonal AC é o lado do quadrado duplo.

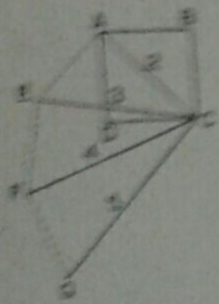


Fig. 568

2 — Sôbre AC construa-se um triângulo retângulo ACE, sendo o lado AE = AB.

3 — A hipotenusa EC é o lado do quadrado triplo.

4 — Sôbre EC construa-se o triângulo retângulo ECF, sendo o lado EF = AB.

5 — A hipotenusa FC é o lado do quadrado quádruplo, e assim sucessivamente.

6 — Para ter em uma mesma reta os lados dos diferentes quadrados, trace-se uma reta indefinida AX, figura 569, e sôbre ela marquem-se sucessivamente AB = BC = CD ... = ao lado do quadrado dado.

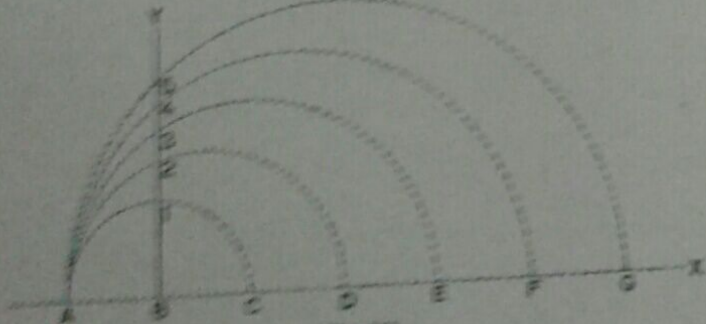


Fig. 569

7 — Sôbre AC, AD, AE ... como diâmetros, descrevam-se semi-circunferências.

8 — Por B levante-se uma perpendicular BY.

9 — Os comprimentos B2, B3, B4 ... serão os lados dos quadrados duplo, triplo, quádruplo, ...

285 Construir um retângulo, cuja área seja um múltiplo ou sub-múltiplo da área de um retângulo dado.

ABCD retângulo dado, fig. 570.

1 — Sôbre a mesma base CD construa-se um retângulo EFHG ou IJKL cuja altura FH ou JL seja um múltiplo ou um sub-múltiplo da altura AC do retângulo dado.

2 — Pode-se também conservar a mesma altura e ampliar ou reduzir a base.

3 — Por esta construção pode-se também achar um múltiplo ou sub-múltiplo da área de um triângulo, de um paralelogramo, de um trapézio.

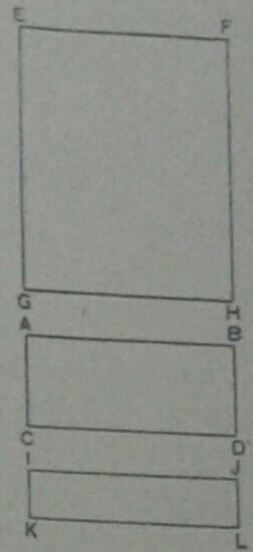


Fig. 570

286 Construir um círculo múltiplo ou sub-múltiplo de outro.

1 — Sendo R o raio do círculo dado, o raio do círculo de área dupla será $R\sqrt{2}$ ou $R \times 1{,}414$.

2 — Com efeito, avaliando as áreas, tem-se:

área do círculo dado $S = \pi R^2$

área do círculo duplo $S' = \pi (R\sqrt{2})^2 = \pi \times R^2 \times 2 = 2(\pi R^2)$, dôbro da área do círculo proposto.

3 — Sendo R o raio do círculo dado, o raio do círculo de área tríplice será $R\sqrt{3}$ ou $R \times 1.73$.

4 — Com efeito, avaliando as áreas, tem-se:

$$S = \pi R^2$$

$S'' = \pi (R\sqrt{3})^2 = \pi R^2 \times 3 = 3(\pi R^2)$, triplo da área do círculo dado.

5 — O círculo da área quádrupla terá raio $R\sqrt{4}$ ou 2R isto é, seu raio será o diâmetro do círculo dado.

6 — O raio do círculo de área quíntupla será $R\sqrt{5}$ e assim por diante, $R\sqrt{7}$, $R\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$ ou 3R ... para os círculos de área 7, 8, 9 ... vezes maior.

7 — Um exemplo numérico esclarece ainda mais a questão; sendo 10m o raio de um círculo, pede-se um outro círculo de área quíntupla.

8 — O seu raio será $10\sqrt{5}$ ou $10 \times 2,236$ ou 22m,36.

9 — A área do círculo dado: $S = 3,14 \times 10^2 = 3,14 \times 100 = 314m^2$.

10 — A área do círculo quíntuplo: $S = 3,14 \times 22,36^2 = 3,14 \times 499,9696$ ou $3,14 \times 500 = 1570m^2$.

11 — A área $1570m^2$ é cinco vezes a do círculo dado:

$$314m^2 \times 5 = 1570m^2$$

12 — Os círculos sub-múltiplos de um círculo dado terão de raio: o círculo metade $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, o círculo igual à terça parte, $\frac{R\sqrt{3}}{3}$ e assim por diante, $\frac{R\sqrt{4}}{4}$ ou $\frac{R}{2}$, $\frac{R\sqrt{5}}{5}$ ... para os círculos de área igual a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ... da área do círculo dado.

287 Construir um quadrado sub-múltiplo de um quadrado dado

ABCD, quadrado dado, quer-se um quadrado igual a $\frac{1}{3}$, fig. 571.

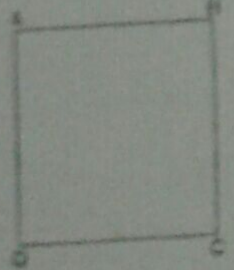


Fig. 571

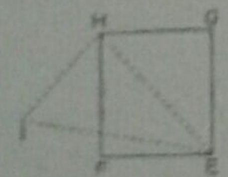
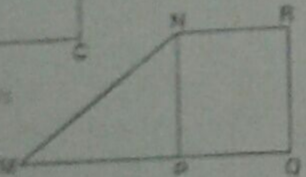


Fig. 572



1 — Constrói-se o lado EI de um quadrado que seja o triplo de um quadrado qualquer EFHG problema 284, fig. 572.

2 — Sôbre MN, figura 573, igual ao lado do quadrado dado, como hipotenusa, constrói-se o triângulo MPN semelhante a EIH.

3 — O quadrado PQRN construído sôbre PN é um têrço do quadrado construído sôbre MN ou do quadrado dado.

Observação — A figura 574 indica o meio de construir um quadrado sub-múltiplo de outro na razão $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$.

O quadrado ABCD é igual a $\frac{1}{2}$ de AEFC.

O quadrado DMCN sendo $\frac{1}{2}$ de ABCD será $\frac{1}{4}$ de AEFC e assim sucessivamente.

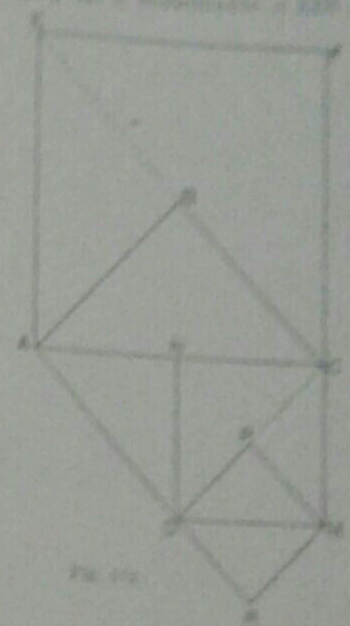


Fig. 574

288 Por um ponto dado sôbre o lado de um triângulo traçar uma reta que divida o triângulo em duas partes equivalentes.

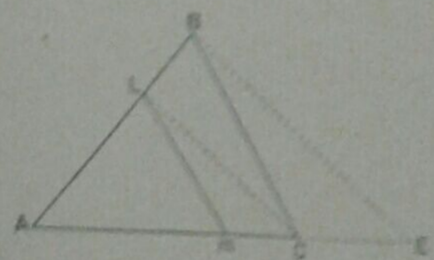


Fig. 575

ABC e L, triângulo e ponto dados, fig. 575.

1 — Trace-se LC.

2 — Por B trace-se BE paralela a LC.

3 — Tome-se o meio **m** de AE, e trace-se **Lm**, que resolve o problema.

Observação — Pode-se dividir o triângulo no número de partes equivalentes que se quiser, ou mesmo em partes que estejam numa razão dada; basta dividir AE em 3, 4 . . . partes iguais ou tendo entre si a razão dada e ligar os pontos de divisão ao ponto dado L.

Os pontos de divisão de AE devem ficar todos situados no lado AC do triângulo.

Se um desses pontos cair no prolongamento de AC, assim se procederá: fig. 575.

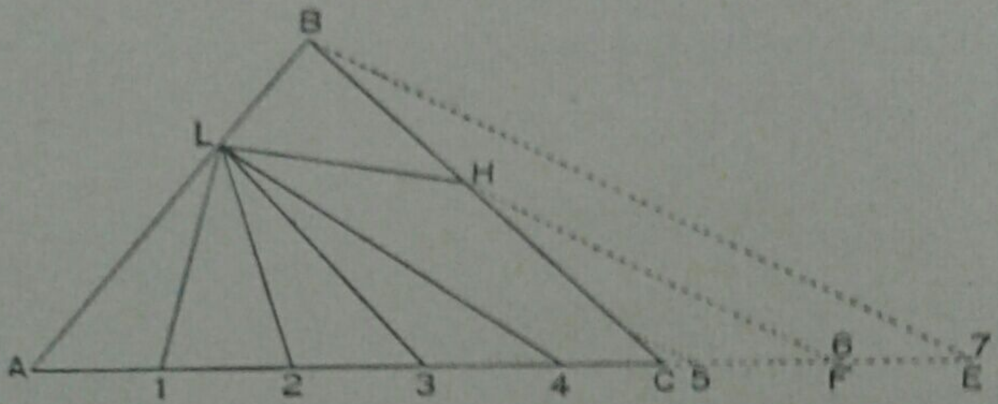


Fig. 575

1 — O sexto ponto F cai no prolongamento de AC.

2 — Por F tire-se FH paralela a BE e trace-se LH; fica assim o ponto F substituido pelo ponto H.