

estaria abaixo do seu nível. Se, partindo de nossa casa, quizermos tomar nota da extensão do percurso que faríamos n'um determinado sentido, e se caminhar-mos em sentido contrario, sabemos perfeitamente que não podemos empregar o mesmo numero para representar duas cousas oppostas. Um homem sem fortuna alguma, mas que nada deve, não é rico; se, porém, falto de fortuna, tem dividas, podemos dizer d'elle que tem menos do que nada: a sua fortuna é negativa. Uma rolha de cortiça tem um certo peso; se a abandonarmos no ar, cae. Ponhamos essa rolha debaixo d'agua e abandonemol-a; vel-a-hemos subir: o seu peso tornou-se negativo, pelo menos na apparencia. N'uma palavra, os numeros negativos, longe de terem um character mysterioso, adaptam-se da maneira mais natural a todas as quantidades, e muitas d'estas é sabido que, pela sua propria essencia, admittem duas modalidades oppostas: quente e frio, alto e baixo, credito e debito, futuro e passado, etc. Por meio de exemplos concretos, podemos fazer penetrar no cerebro das creancinhas estas noções simples, porquanto são verdadeiramente infantis. Vel-as-hemos tomar verdadeiro interesse pelas nossas explicações, se tivermos o cuidado de as amenisar com manipulações com palitos e hastes, e isto é muito mais proveitoso para a formação do seu espirito, do que a recitação monotona de regras incomprehendidas ou de definições incomprehensíveis.

Ainda não praticaram, á laia de brincadeira, senão as primeiras operações da arithmetica: a addição e a subtracção; ainda não ha muito tempo que sabem escrever algarismos ou traçar algumas lettras, e eil-as já lançadas — e nós tambem — a toda a velocidade, na *Algebra*. Se pronunciar-mos deante d'ellas esta palavra tremenda, não deixemos de lhes dizer que essa sciencia, tão util e tão bella, é relativamente moderna e que pertence a Francisco Viète<sup>1</sup> a gloria de ter sido o seu inventor.

<sup>1</sup> VIÈTE; mathematico francez, natural de Fontenay-le-Comte (1540-1603).

## 15 — Contar, medir e comparar

Desde o começo, que o nosso proposito constante tem sido, como se tem visto, contar e medir. Se temos deante de nós um monte de bagos de trigo e se, contando-os, verificamos que são 157, este numero, como já fizemos notar, podemos servir igualmente para representar uma collecção de tentos, de phosphoros, d'arvores, de carneiros ou de qualquer outra cousa. Se, para determinar um comprimento, collocamos topo a topo uma porção de palitos, todos eguaes entre si, e se empregamos 157 para medir esse comprimento, dizemos que ella é de 157 palitos. Em todos estes diferentes casos, nada podiamos avaliar, se não possuíssemos a noção do que seja um bago de trigo, um tento, uma arvore, um carneiro, um palito.

Um numero só tem razão de ser pela comparação que d'elle fazemos com o objecto unico — (bago de trigo, tento, etc.) — sem o qual não o podemos formar; este objecto unico chama-se *unidade*. Tal comparação é o que se denomina uma *relação*, e esta ideia de relação leva-nos a dizer que um numero é simplesmente a relação entre a collecção e a unidade.

E' absolutamente necessario reter bem esta noção, porquanto a unidade não é sempre a mesma. Assim, depois de termos formado *mólhos* de palitos, tomemos uma porção d'elles e contemol-os; vemos que são sete. Sete é, pois, a relação entre a nossa collecção de mólhos e um mólho, que é a unidade.

Espalhemos agora os nossos palitos, desmanchando previamente os mólhos, e contemol-os; o palito é que passa a ser a unidade. Contámos setenta; este numero é a relação entre a mesma collecção e um palito.

D'egual modo, podemos tomar trez feixes de palitos; se fizermos a contagem por mólhos, acharemos trinta mólhos; se por palitos, trezentos.



Trez é a relação do lote total de palitos para um feixe; trinta a relação do mesmo lote para um mólho, e trezentos a relação para um palito.

Exemplos analogos podemos apresentar tantos quantos quizermos, variando-os até ao infinito, por fórma que o alumno se familiarise intimamente com esta noção de relação, que é a base de todas as contas e de todas as medições, e que, apesar d'isso, é atirada no ensino classico para o fim da Arithmetica, não sabemos porque aberração. Não é possível contar dois feijões, sem ter a noção da relação de dois para um; de medir um comprimento de trez metros, sem comparar esse comprimento com a de um unico metro, e assim por deante.

E' este o momento de *mostrar* ao alumno — sem nenhuma explicação theorica, sem nenhuma definição, sem recorrer de nenhum modo á sua memoria — o material mais geralmente usado do systema metrico, que tivermos á mão: metros, litros, moedas, pesos, etc. Exercital-o-hemos a empregal-o, a servir-se d'elle para medir e contar, e assim a ideia de relação incrustar-se-ha no seu espirito, ficará indissoluvelmente associada á de numero, o que é essencial para uma boa comprehensão, no dia em que, de futuro, elle passar do que tem sido apenas um entretenimento, para o estudo serio. E este estudo, póde então tornar-se realmente interessante e recreativo, em vez de ter o carater d'uma penosa maçada, para não dizer d'uma tortura.

### 16 — A taboa de multiplicação

Vamos agóra aprender a formar um quadrosinho, que nos ha de ser muito util para tudo o que segue, e cuja construcção, por si só, constitue um bom exercicio. Este quadro, sob a fórma porque o apresentamos, é geralmente denominado taboa de Pythagoras<sup>1</sup>, quer tenha sido inven-

<sup>1</sup> PYTHAGORAS, philosopho grego natural de Samos, (VI seculo A. C.)

tado, ou não, por esse grande homem, o que é ponto litigioso; em todo o caso, isto prova que não é cousa nova.

Para formar a taboa de multiplicação, começamos por escrever, sobre uma folha de papel quadriculado, os 9 primeiros numeros em 9 casas seguidas:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Depois, tomando o primeiro algarismo 1, adicionamol-o a si proprio, o que faz 2, que escrevemos por baixo d'elle em seguida, adicionamos 1 a 2, o que faz 3, e assim por deante, até concluirmos a primeira columna da fig. 11.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Fig. 11

Procedemos do mesmo modo para obter as outras columnas; mas, o que é importante é conseguirmos escrever só os resultados e nada mais. Por exemplo: para a columna que começa por 7, dizemos: 7 e 7, 14; e 7, 21; e 7, 28; e 7, 35; e 7, 42; e 7, 49; e 7, 56; e 7, 63. E escrevemos successivamente 14, 21, 28, ... 63, na columna que começa por 7.

Como se vê, basta saber bem a taboa d'addição para construir rapidamente este quadro. Depois de completamente construido, notamos que as linhas e as columnas são perfeitamente eguaes. Assim, a linha, que começa por 3, comprehende, como a columna que começa pelo mesmo algarismo, os numeros 3, 6, 9, ... 27.



E' absolutamente indispensavel ter de memoria este quadro, e a melhor maneira de o conseguir é não querer apprendel-o de cór. Apprendemol-o construindo-o, verificando-o examinando-o com cuidado e fazendo uso d'elle, como mais adiante veremos. Se não o temos presente ao nosso espirito, devemos reconstruil-o, o que, de resto, não é tarefa muito demorada; d'este modo, acabamos por vêl-o com o olhos fechados.

Podemos, é claro, continuar a taboa além de 9; mas, se a continuassemos até 20 ou 25, a sua construcção levaria naturalmente muito mais tempo, e não é indispensavel conservar de memoria uma taboa tão extensa, embora isso não deixasse de ser util.

Tem aqui cabida algumas observações sobre certas particularidades da taboa. Assim, na columna (ou linha) que

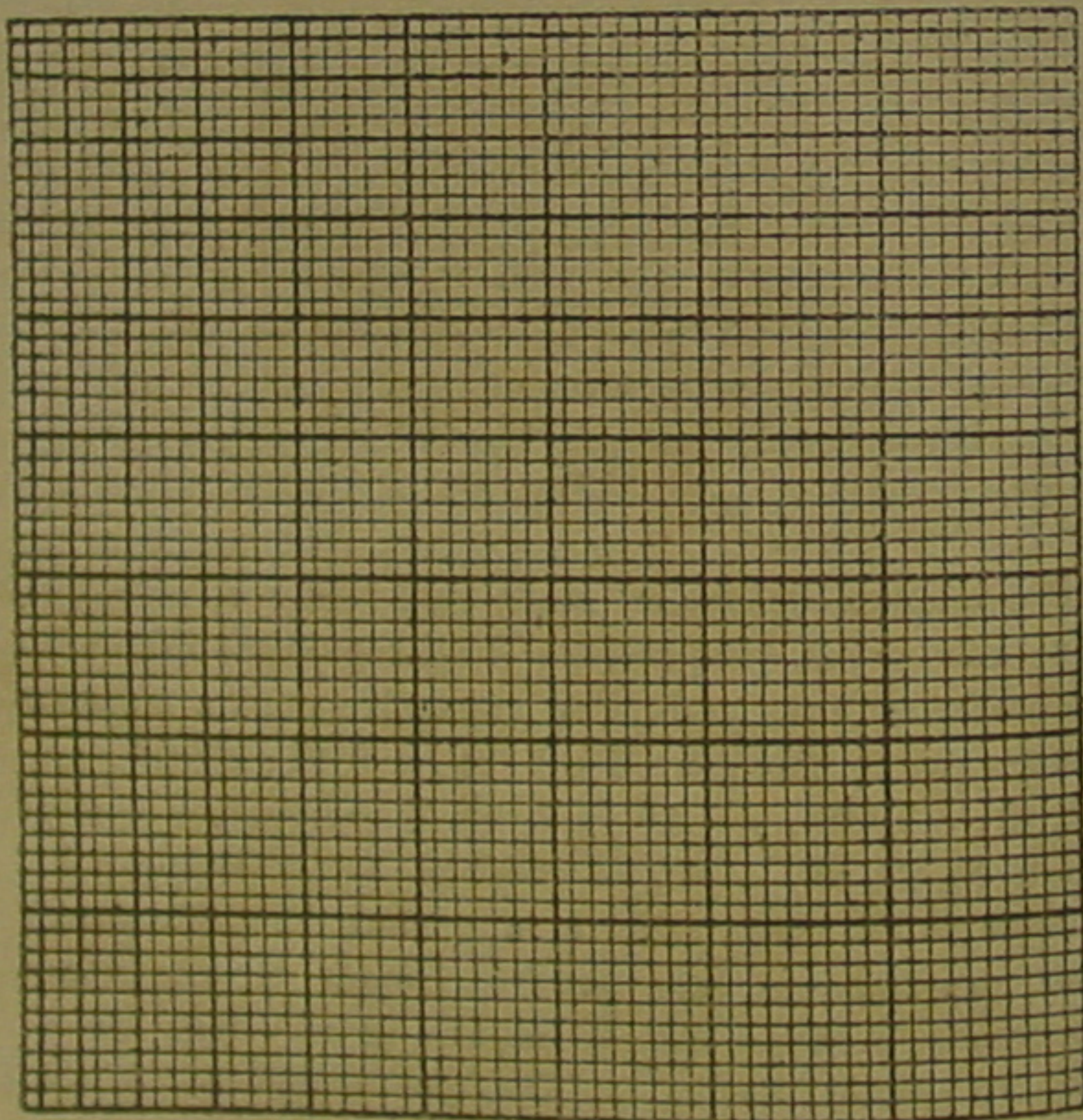


Fig. 12

começa por 5, os algarismos das unidades são alternadamente 5 e 0; na columna (ou linha) que começa por 9, os algarismos das unidades 8, 7, 6... vão diminuindo sempre de uma unidade, e os das dezenas 1, 2, 3... augmentam de 1. As explicações são faceis de achar.

Cousa muito para notar, é que podemos construir uma taboa de multiplicação sem escrever um unico algarismo. Para isso, basta termos uma folha de papel quadriculado com casas pequenas. A taboa que damos aqui vae até 10. A sua construcção consiste em contar successivamente sobre uma linha horisontal 1, 2, 3... 10 lados d'uma casa e em marcar os pontos de divisão. Em seguida, sobre uma linha vertical e tomando o mesmo ponto de partida, fazemos a mesma cousa. Cobrindo com um traço grosso as linha onde estão marcados os pontos de divisão, obtemos casas grandes, cada uma das quaes contém um numero de casas pequenas, que é precisamente o mesmo que vimos, ha pouco, na nossa taboa em algarismos. A razão d'esta identidade é simples, porquanto a taboa da fig. 12 não é mais do que a execução graphica das operações, que, na fig. 11, resultam do calculo.

### 17 — Os productos

Se tomarmos um lote de 7 palitos e se formarmos mais 2 lotes eguaes áquelle, podemos ter o proposito de querer saber qual é o numero total dos palitos, que os constituem. Chama-se a isto fazer a *multiplicação* de 7 por 3. O resultado, que se procura, denomina-se *producto* de 7 por 3; ao 7 chama-se *multiplicando* e ao 3, *multiplicador*. Se, em vez de misturar todos os palitos, conservassemos separados os 3 lotes, veriamos que, tomando um lote por uidade, o numero que representaria o producto seria 3, ou que a relação entre o producto e um lote seria 3; ora a relação de 3 para 1 é tambem 3.

Podemos, pois, dizer indifferentemente :

Multiplicar 7 por 3 é repetir 7, 3 vezes; é achar um numero, cuja relação para 7 seja a mesma que a de 3 para 1; Multiplicar um numero (multiplicando) por um outro



(multiplicador), é achar um terceiro (producto), que se forma repetindo o multiplicando tantas vezes quantas são as unidades do multiplicador; este producto, emfim, está para o multiplicando na mesma relação que o multiplicador para a unidade.

Isto não são formulas, que a creança deva ser obrigada a aprender; são ideias, de que precisamos compenetrar-a. Ao passo que as formulas teem uma apparencia barbara, as ideias são d'uma simplicidade primitiva, principalmente se nos dermos ao trabalho de as traduzir em bagos de trigo, palitos ou casas de papel quadriculado.

Não ha duvida que a creança depressa percebe que, para achar o producto, apenas tem que fazer uma addição; que o producto de 7 por 3 é  $7 + 7 + 7$ , do mesmo modo que 3 é  $1 + 1 + 1$ . E, como a taboa do numero precedente foi feita precisamente d'esta maneira, por isso nos dá o producto desejado 21, tomando a columna, que começa por 7 e a linha, que começa por 3, e buscando a casa de encontro, onde se lê 21.

Não nos esqueçamos de ensinar que o signal da multiplicação é  $\times$ , e que assim a phrase: «o producto de 7 por 3 é 21», se traduz por  $7 \times 3 = 21$ .

Em vez de  $7 \times 3$ , escreve-se a miude 7.3; em vez de 7 e 3, podemos ter dois numeros quaesquer, representados por  $a$  e  $b$ . O seu producto exprime-se por  $a \times b$ , ou por  $a.b$ , ou simplesmente por  $ab$ ; escrever, por exemplo,  $ab = p$ , é uma maneira d'exprimir que o producto de  $a$  por  $b$  é  $p$ .

E' tambem bom saber-se, que podemos considerar productos taes como, por exemplo,  $a \times b \times c \times d$ , ou  $abcd$ . Quer isto dizer que se multiplica  $a$  por  $b$ , depois o producto obtido por  $c$  e, em seguida, o novo producto por  $d$ ;  $a, b, c, d$ , chamam-se os *factores* do producto  $abcd$ ; podemos, assim, obter productos d'um numero qualquer de factores.

Quanto á pratica da multiplicação, devemos notar, antes de tudo, que a taboa preenche o seu fim, quando o multiplicando e o multiplicador são ambos numeros inferiores a dez. Facilmente se mostrará, depois, como se multiplica um numero por 10, 100, 1000....

Essa pratica, applicada a numerosos exemplos, conforme as regras habituaes dadas por todos os livros d'arithmetica, póde ser util, comtanto que seja desacompanhada de toda e qualquer theoria. Antes, porém, não nos cançaremos de recommendar que se dê a preferencia ao *methodo musulmano*, que é quasi tão expedito como aquelle e muito mais facil de comprehender e de praticar; mas, que permaneça quasi completamente desconhecido no nosso ensino, embora citado por diferentes auctores.

Vamos expol-o (fig. 13), applicando-o a este exemplo

	9	3	4	7	
8	7 2	2 4	3 2	5 6	6
5	4 5	1 5	2 0	3 5	2
2	1 8	6	8	1 4	5
	2	4	1	1	

Fig. 13

muito simples:  $9347 \times 258$ . O multiplicando tem 4 algarismos e o multiplicador, 3. Sobre uma folha de papel quadriculado, tomamos 3 linhas de 4 casas cada uma; por cima d'esta figura, escrevemos os algarismos do multiplicando 9, 3, 4, 7, da esquerda para a direita; á esquerda e de baixo para cima, os do multiplicador 2, 5, 8. Depois de traçarmos as linhas pontoadas da figura, escrevemos em cada casa o producto dos dois numeros correspondentes, como se construíssemos uma taboa de multiplicação, tendo o cuidado de escrever o algarismo das dezenas do producto *por baixo* e o das unidades *por cima* da linha pontoada; por ultimo, fazemos a addição, tomando para direcção das columnas a das linhas pontoadas. Acha-se, assim, o producto 2411526. A grande vantagem d'este methodo consiste em não obrigar a fazer transportes nas multiplicações parciaes, nem a observar qualquer ordem especial. Desde que se preencham todas as casas, podemos estar certos de que nada foi esquecido.



Para o mesmo exemplo e com o mesmo methodo, indicamos (fig. 14) uma disposição levemente differente, que não obriga a fazer a addição obliquamente e é, por isso, talvez mais commoda. Desnecessaria se torna qualquer explicação, depois do que deixámos dito.

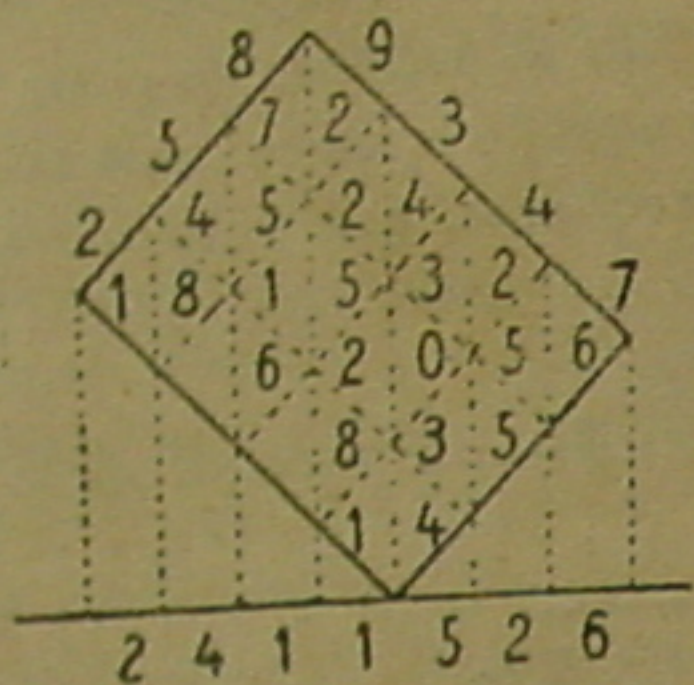


Fig. 14

Quanto á justificação d'este methodo musulmano, é ella evidente para quem conheça a theoria da multiplicação, e inutil para a creança, por agóra. Se esta fôr dotada de um espirito investigador, poderá encontral-a por si só. O que importa é que ella possa calcular correctamente e que isso a interesse. Logo que a fadiga e o enfado se manifestem, devemos, sem tardança, passar a outra cousa.

Não deixaremos o que diz respeito á multiplicação, sem recordar que um producto

$$a \times a \times a \times \dots \times a$$

cujos factores são todos eguaes, se chama uma potencia de  $a$ ; que este producto se escreve  $a^n$ , sendo  $n$  o numero dos factores, e se denomina  $n.$  potencia de  $a$ ; que a  $2.$  potencia se chama quadrado e a  $3.$  cubo (em breve veremos porquê). O numero  $n$  chama-se expoente.

Por exemplo: a  $4.$  potencia de 2 é:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16; \text{ o expoente é } 4.$$

O cubo de 5 é:

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125; \text{ o expoente é } 3.$$

O quadrado de 7 é:

$$7 \times 7 = 7^2 = 49; \text{ o expoente é } 2.$$

18 — Operações curiosas

Ha um certo numero de resultados d'operações, que impressionam o espirito por determinadas particularidades, que chamam a nossa attenção. Teem, por isso, o grande merito de, aguçando a curiosidade, despertar o gosto pelo calculo.

Vamos dar apenas alguns exemplos, os bastantes para o fim que temos em vista.

I. — Dizei a uma creança, depois de lhe terdes entregue um sobrescripto fechado, que escreva, a seu bel prazer, um numero de 3 algarismos: seja 713; que o inverta, o que dá 317; que ache a differença, 396<sup>1</sup>; que inverta este resultado, 693; finalmente, que faça a somma d'estes dois ultimos numeros, 1089. Feito isto, pedi-lhe que abra o sobrescripto; encontrará dentro d'elle um papel, sobre o qual d'antemão escrevestes o numero 1089. E podestes escrevel-o com toda a segurança, porque com qualquer outro numero, que não 713, chega-se ao mesmo resultado, contanto que os dois algarismos extremos sejam differentes.

II. — Se fizermos as operações  $12 \times 9 + 3$ ;  $123 \times 9 + 4$ , e assim por diante até  $123456789 \times 9 + 10$ , obtemos os seus resultados escrevendo apenas algarismos 1.

Por outro lado,  $9 \times 9 + 7$ ,  $98 \times 9 + 6$ , ...,  $9876543 \times 9 + 1$ , dão numeros, que se escrevem sómente com algarismos 8.

III. — O producto  $123456789 \times 9$  escreve-se unicamente com algarismos 1. Tomando o mesmo multiplicando 123456789 e os multiplicadores 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, obtemos ainda productos curiosos, que se escrevem todos com o mesmo algarismo repetido.

<sup>1</sup> Esta differença deve ter sempre tres algarismos. Se tiver apenas dois, é necessario escrever um zero na casa das centenas. Por exemplo: 716 e 617 teem por differença 099; sommando 099 e 990, achamos 1089.

Handwritten calculations on the right margin of page 49:

$$\begin{array}{r} 529 \\ 925 \\ \hline 396 \\ 1321 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r} 693 \\ 925 \\ \hline 1618 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r} 432 \\ 234 \\ \hline 199 \\ 891 \\ \hline 1089 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r} 529 \\ 925 \\ \hline 529 \\ 396 \\ \hline 693 \\ 925 \\ \hline 1089 \end{array}$$



IV. — Consideremos o numero 142857; se o multiplicarmos successivamente por 2, 3, 4, 5, 6, teremos :

285714, 428571, 571428, 714285, 857142,

numeros estes, que se escrevem com os mesmos algarismos que o numero dado.

Se o multiplicarmos por 7, teremos 999999.

Se o separarmos em dois, pelo meio, teremos 142 e 857; e a somma d'estes dois numeros é 999. Obtem-se o mesmo resultado tomando qualquer dos cinco productos acima escritos e separando-os em dois.

V. — Completemos este capitulo com uma indicação sobre as multiplicações por 9, por 99, por 999, etc., que se devem fazer sempre por 10, 100, 1000, etc., subtrahindo depois o multiplicando. Se este não é um numero demasiado grande, chega-se mesmo rapidamente a poder fazer mentalmente estas multiplicações.

### 19 — Os numeros primos

Lançando os olhos sobre uma taboa de multiplicação, vê-se que comprehende certos numeros até ao limite, que ella abrange; mas, não todos esses numeros. N'outros termos: ha numeros, que são productos, e outros, que o não são; estes chamam-se numeros *primos*; aquelles denominam-se numeros *compostos*.

Por exemplo: 2, 3, 5, 7, 29, 71, são numeros primos; 4, 6, 9, 87, 91, são numeros compostos, porquanto  $4 = 2 \times 2$ ,  $6 = 2 \times 3$ ,  $9 = 3 \times 3$ ,  $87 = 3 \times 29$ ,  $91 = 7 \times 13$ .

Por mais longe que avancemos na serie dos numeros, encontramos sempre numeros primos e numeros compostos. Esta distincção é capital; e, comtudo, apezar dos trabalhos dos maiores sabios, muito pouco sabemos a respeito dos numeros primos. O nosso pouco saber chega ao ponto de sermos incapazes de dizer, quando um numero

é algo grande, se é primo ou não, a menos que nos entreguemos a estimativas, que podem exigir calculos extremamente longos e difficeis. Isto nos mostra quanto a sciencia se encontra pouco adeantada no que respeita a estas questões, que parecem simples, e quanto convem sermos modestos, quando comparamos a pouca amplitude dos nossos conhecimentos com a immensidade das cousas, que ignoramos.

Contudo, desde os antigos tempos, que se conhece um meio de formar os numeros primos, até um limite tão distanciado quanto se quizer. Consiste esse meio em escrever a lista completa dos numeros, riscando depois os que são multiplos de 2, de 3, de 5, etc. Vamos fazer a sua applicação aos 150 primeiros numeros. Escrevamos, suprimindo o 1, por nos ser inutil :

2	3	<del>4</del>	5	<del>6</del>	7	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>	11	<del>12</del>	13
<del>14</del>	<del>15</del>	<del>16</del>	17	<del>18</del>	19	<del>20</del>	<del>21</del>	<del>22</del>	23	<del>24</del>	<del>25</del>
<del>26</del>	<del>27</del>	<del>28</del>	29	<del>30</del>	31	<del>32</del>	<del>33</del>	<del>34</del>	<del>35</del>	<del>36</del>	37
<del>38</del>	<del>39</del>	<del>40</del>	41	<del>42</del>	43	<del>44</del>	<del>45</del>	<del>46</del>	47	<del>48</del>	<del>49</del>
<del>50</del>	<del>51</del>	<del>52</del>	53	<del>54</del>	<del>55</del>	<del>56</del>	<del>57</del>	<del>58</del>	59	<del>60</del>	61
<del>62</del>	<del>63</del>	<del>64</del>	<del>65</del>	<del>66</del>	67	<del>68</del>	<del>69</del>	<del>70</del>	71	<del>72</del>	73
<del>74</del>	<del>75</del>	<del>76</del>	<del>77</del>	<del>78</del>	79	<del>80</del>	<del>81</del>	<del>82</del>	83	<del>84</del>	<del>85</del>
<del>86</del>	<del>87</del>	<del>88</del>	89	<del>90</del>	<del>91</del>	<del>92</del>	<del>93</del>	<del>94</del>	<del>95</del>	<del>96</del>	97
<del>98</del>	<del>99</del>	<del>100</del>	101	<del>102</del>	103	<del>104</del>	<del>105</del>	<del>106</del>	107	<del>108</del>	109
<del>110</del>	<del>111</del>	<del>112</del>	113	<del>114</del>	<del>115</del>	<del>116</del>	<del>117</del>	<del>118</del>	<del>119</del>	<del>120</del>	<del>121</del>
<del>122</del>	<del>123</del>	<del>124</del>	<del>125</del>	<del>126</del>	127	<del>128</del>	<del>129</del>	<del>130</del>	131	<del>132</del>	<del>133</del>
<del>134</del>	<del>135</del>	<del>136</del>	137	<del>138</del>	139	<del>140</del>	<del>141</del>	<del>142</del>	<del>143</del>	<del>144</del>	<del>145</del>
<del>146</del>	<del>147</del>	<del>148</del>	149	<del>150</del>							

Partindo do 2, se percorreremos a lista caminhando de 2 em 2, encontramos os multiplos de 2, que são 4, 6, ..... isto é: os numeros pares; não são elles, pois, numeros primos, e por isso os vamos riscando com um traço, até ao 150.

Partamos do 3, caminhando de 3 em 3, e risquemos do mesmo modo os numeros, que encontrarmos e que sejam multiplos de 3, se não estiverem já riscados.



O primeiro numero não tracejado, depois do 3, é o 5; partindo do 5, procedemos da mesma maneira, caminhando de 5 em 5. Se fizermos o mesmo para o 7, para o 11, . . . veremos que, conservando apenas os numeros não tracejados, fica :

2	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149		

E' esta a lista dos numeros primos até 150.

Este processo, tão engenhoso, é conhecido pela designação de *crivo d'Eratosthenes*<sup>1</sup>, do nome do seu inventor.

## 20 — Os quocientes

Depois de termos reunido diversos lotes de 7 tentos cada um, n'um unico lote contendo 56 tentos, desejamos saber quantos d'aquelles pequenos lotes foram precisos para formar o grande.

A operação, que temos que fazer para o sabermos, chama-se uma *divisão*. Póde dizer-se que ella tem por fim, dado um producto de dois factores, 56, e um dos factores, 7, achar o outro.

O producto dado, 56, chama-se *dividendo*; o factor dado, 7, chama-se *divisor*, e o resultado, que se busca, denomina-se *quociente*.

Podiamos achar o quociente fazendo simples subtracções; isto é: deduzindo o divisor do dividendo, depois o divisor do resto obtido, e assim por deante, até não ficar resto algum. Assim, subtrahindo successivamente 7 de 56, restam 49, 42, 35, 28, 21, 14, 7, e vê-se que são 8 as operações de subtracção precisas para exgotar o dividendo 56. O quociente,

<sup>1</sup> ERATOSTHENES, sabio alexandrino, natural de Cyrene (276-193 A. C.).

que se procura, é pois 8, o que, de resto, nos póde ser dado immediatamente pela taboa de multiplicação.

Este processo das subtracções successivas torna-se, porém, impraticavel com numeros um tanto grandes, por ser muito longo. A regra classica adoptada para fazer uma divisão, não é mais do que um meio de contar com muito maior rapidez as subtracções, que se effectuam por atacado.

Para habituar facilmente as creanças a praticarem a divisão, devemos começar invariavelmente por mandal-as formar, n'um pequeno quadro, os productos do divisor, por 2, 3. . . 9; evitam-se assim, em toda a sequencia da operação, as hesitações que tanto atrapalham, por vezes, os principiantes.

Vamos indicar esta pratica de operação, com o exemplo da divisão de 643734 por 273. Os productos de 273 são :

1	× 273 = 273	6	× 273 = 1638
2	546	7	1911
3	819	8	2184
4	1092	9	2457
5	1365		

Dispomos, então, a operação da maneira seguinte :

643734		273
546		2358
<hr/>		
977		
<hr/>		
819		
<hr/>		
1583		
<hr/>		
1365		
<hr/>		
2184		
<hr/>		
2184		
<hr/>		
0		

No dividendo temos 643 mil; como o nosso quadrosinho nos mostra que 643 contem 2 vezes o divisor, deduzindo do



dividendo 546 mil, effectuamos d'uma só vez 2 mil subtrações. Restam 97734, que comprehende 977 centenas; 977 contem 3 vezes o divisor, e tirando 819 centenas, fazemos tambem d'uma assentada 300 subtrações. Restam 15834, contendo 1583 dezenas; 1583 comporta 15 vezes o divisor, e deduzindo 1365 dezenas, fazemos ainda 50 subtrações. Finalmente, restam 2184, que é precisamente 8 vezes o divisor. Effectuando, pois, mais 8 subtrações, temos reduzido o dividendo a zéro, e o quociente é 2358, numero total das subtrações.

A creança deve adquirir o habito de fazer as divisões d'esta maneira, sem ser necessario dar-lhe, com demasiada minucia, as explicações que precedem.

A divisão acima apresentada pode effectuar-se, porque o dividendo e o divisor foram propositadamente escolhidos; mas, se os dois numeros forem tomados ao acaso, é pouco provavel que a divisão seja possivel. Não podemos já tirar do dividendo um certo numero de vezes o divisor, por fórma que não sobeje nada. Simplesmente, se procedermos como ha pouco, deduziremos o divisor do dividendo *tantas vezes quantas fôr possivel*, e o que então fica do dividendo, é um numero menor do que o divisor. E' este numero que se denomina *resto* da divisão impossivel.

Como exemplo muito simples, supponhamos que queremos dividir 220 por 12. Reconhecemos que é impossivel, e quando tivermos subtrahido 18 vezes 12 de 220, restarão 4; segue-se que  $220 - 4$ , ou 216, é divisivel por 12 e que o quociente é 18. Vemos, pois, que as divisões impossiveis, as que dão um resto, podem dar logar a divisões possiveis, simplesmente pela substituição do dividendo por esse mesmo dividendo diminuido do resto.

Occupae-vos d'esta operação da divisão apenas sob o ponto de vista da pratica do calculo. As theorias são interessantes, mas só mais tarde virão utilmente a proposito; de nenhum modo tem cabida no periodo d'iniciação.

E' bom ficar sabendo que a divisão se indica pelos signaes : ou —. Assim  $56 : 7$  ou  $\frac{56}{7}$ , exprime o quociente de

56 por 7. Póde-se, pois, escrever  $56 : 7 = \frac{56}{7} = 8$ . D'um modo geral :  $\frac{a}{b} = q$  quer dizer que o quociente da divisão de  $a$  por  $b$  é o numero  $q$ .

## 21 — O bolo repartido; as fracções

Supponhamos que cinco pessoas se propõem repartir egualmente entre si um bolo redondo. Cortal-o-hão em cinco pedaços perfeitamente eguaes (fig. 15), por golpes partindo do centro, e cada um d'esses pedaços — como AOB — é a parte pertencente a cada pessoa. A esta parte chama se um quinto do bolo, e representa-se AOB por  $\frac{1}{5}$  de bolo.

Duas das cinco pessoas estão ausentes; mas, queremos reservar-lhes as suas partes. Pomos então de lado, por exemplo, os pedaços AOB, BOC, exactamente eguaes. Estes dois pedaços juntos dizem-se dois quintos do bolo e representam-se por  $\frac{2}{5}$ . Todos os numeros, taes como  $\frac{2}{5}$ , chamam-se *fracções*. Os numeros 2 e 5, são os dois termos; o 2, que se escreve por cima do traço, é o *numerador* e indica o numero de pedaços; o 5, por baixo do traço, é o *denominador* e indica em quantos pedaços foi repartido o bolo todo.

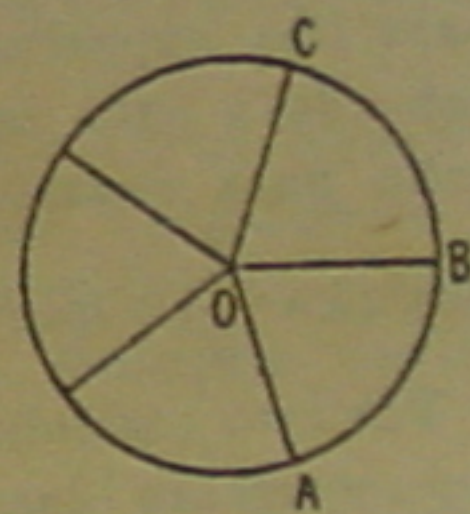


Fig. 15

Se tivéssemos tomado  $\frac{5}{5}$  do bolo, é claro que tomavamos todo o bolo, e se o tivéssemos dividido n'um numero qualquer de partes eguaes, para em seguida tomarmos esse mesmo numero de partes, reconstituíamos egualmente o bolo; de sorte que a fracção  $\frac{a}{a}$ , cujos numerador e denominador são eguaes, é sempre igual a 1.



No caso de serem dez — e não apenas cinco — as pessoas, que teem de repartir o bolo entre si, é necessario dividil-o em dez partes eguaes, em decimos, o que se póde fazer igualmente bem, dividindo os quintos, como AOB, em duas partes eguaes. Donde  $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ; e não é mais difficil veri-

ficar que, em geral, duas fracções são eguaes, quando se póde passar d'uma para a outra multiplicando os dois termos pelo mesmo numero. Este principio fundamental de toda a theoria das fracções verifica-se assim — servindonos de objectos concretos — com um caracter de evidencia intuitiva, e não devemos pensar em dar a demonstração.

Supponhamos agora que temos 17 bolos, todos eguaes, e que 5 pessoas querem repartil-os igualmente entre si. Ha dois meios de o conseguir. Um, consiste em dividir cada bolo em quintos e em dar a cada pessoa um quinto de cada bolo ou, ao todo,  $\frac{17}{5}$ . O segundo meio consiste em repartir

por todos, tanto quanto se possa, os 17 bolos inteiros; basta para isso experimentar a divisão, que é possível para 15, cabendo a cada pessoa 3 bolos. Ficam, portanto, apenas 2 bolos para repartir. Dividindo-os em quintos, cada pessoa fica com  $\frac{2}{5}$ , o que nos mostra que  $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$ .

Por este caminho, é facil iniciar a creança em todo o calculo corrente das fracções, sobre o qual nos parece inutil insistir aqui; mas, para o conseguir, é condição essencial servirmo-nos sempre de objectos concretos: bolos, maçãs, laranjas, extensões graduadas, etc. Comprehenderá, assim, admiravelmente que estas novas expressões arithmeticas são numeros e que traduzem relações.

Mas, o que muito particularmente devemos dizer, e que quasi nunca se diz, é que estes numeros só se podem applicar a quantidades de sua natureza divisiveis, como as que indicámos; se, por exemplo, tivermos que resolver um problema, que implica a consideração d'um certo numero de

pessoas, a applicação dos numeros fraccionarios, em tal caso, seria um absurdo e a sua impossibilidade manifestar-se-hia no resultado.

N'outros termos: o calculo applica-se ás cousas que a elle se prestam, e são ellas em grande numero; mas, não se applica a tudo. E, maxima não menos importante, que completa aquella: é preciso reflectir sempre e recorrer ao nosso bom senso, antes de calcular.

Por exemplo, este problema, particularmente apontado por Eduardo Lucas <sup>1</sup>, e que póde servir de exercicio util, n'esta ordem de ideias: Um alfayate tem uma peça de panno de 16 metros; cada dia corta-lhe dois metros; ao cabo de quantos dias tem cortado toda a peça? A irreflexão, junta ao automatismo do calculo, leva-nos a responder 8, em vez de 7, que é o resultado, que o bom senso indica.

As operações sobre fracções devem ser muito variadas, pouco complicadas como calculo e tiradas o mais possível de questões concretas effectivas. E' conveniente completal-as chamando a attenção para as *fracções decimaes*, sobre a maneira como se podem escrever e sobre a parte do calculo, que lhes diz respeito.

Muitos dos bons tratados d'arithmetica podem fornecer, sobre o assumpto, as indicações necessarias. Limitamo-nos a insistir sobre a utilidade de nos servirmos das medidas de comprimento e de exemplos tirados da contagem de dinheiro.

Por ultimo, é bom notar que, se o signal da divisão e a notação das fracções são os mesmos, não é isso cousa fortuita e que possa estabelecer confusão;  $\frac{15}{3}$ , por exemplo, exprime igualmente bem, tanto o quociente da divisão de

<sup>1</sup> ED. LUCAS, mathematico francez, natural d'Amiens (1842-1891) Foi, talvez, o homem do seu tempo, que melhor conheceu a sciencia dos numeros. Viveu quasi completamente ignorado; os desgostos e as decepções contribuíram, sem duvida, para o seu fim prematuro.



15 por 3, como a fracção  $\frac{15}{3}$ . Vê-se isso com os objectos concretos, como é facilimo verificar.

As propriedades e o calculo das fracções tambem podem ser expostos, d'uma maneira verdadeiramente feliz, empregando o papel quadriculado. Apreciar-se-ha o processo pelas observações, que seguem e que só se patentearam ao meu espirito depois da publicação da segunda edição. Esforçar-me-hei por as indicar no menor numero de palavras possivel, desenvolvendo, porém, o meu pensamento de modo a exprimir-o com sufficiente clareza. Dirijo-me aos educadores e, se me comprehenderem bem, não terão difficuldade alguma em pôr em pratica os meios propostos, sob a fórma que melhor lhes pareça, desde que acceitem em princípio a minha maneira de ver.

Representemos por um rectangulo (fig. 16 e 17) uma unidade concreta qualquer, contanto que, por sua natureza, seja divisivel.

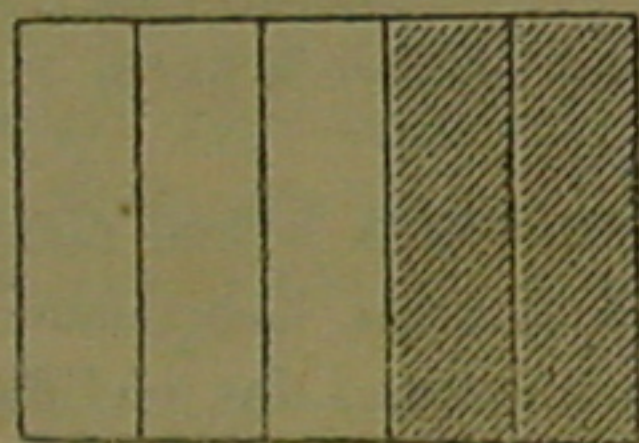


Fig. 16

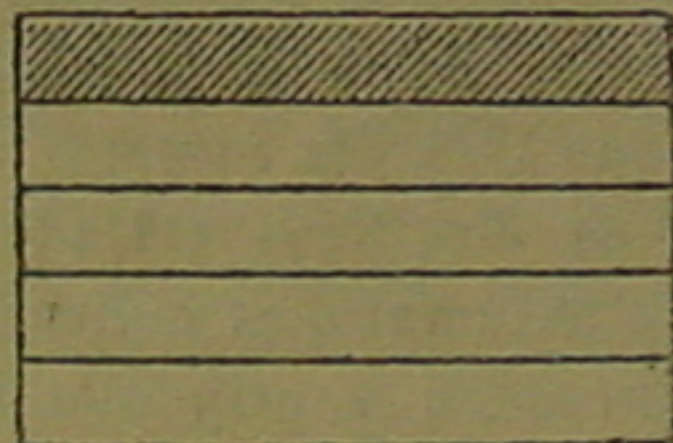


Fig. 17

Se dividirmos a base d'este rectangulo em 5 partes eguaes, podemos tambem repartil-o em 5 faixas verticaes da mesma grandeza; cada uma d'ellas é *um quinto* da unidade (fig. 16).

Se dividirmos a sua altura em 5 partes eguaes, podemos tambem repartil-o em 5 faixas horizontaes da mesma grandeza; cada uma d'ellas é igualmente *um quinto* da unidade (fig. 17).

Se dividirmos a sua base (fig. 18) em 3 partes eguaes e a sua altura em 4 partes, tambem eguaes, podemos — por

meio de traços passando pelos pontos de divisão — dividir a unidade em 12, ou  $3 \times 4$ , pequenos rectangulos, cada um dos quaes é *um duodecimo* da unidade.

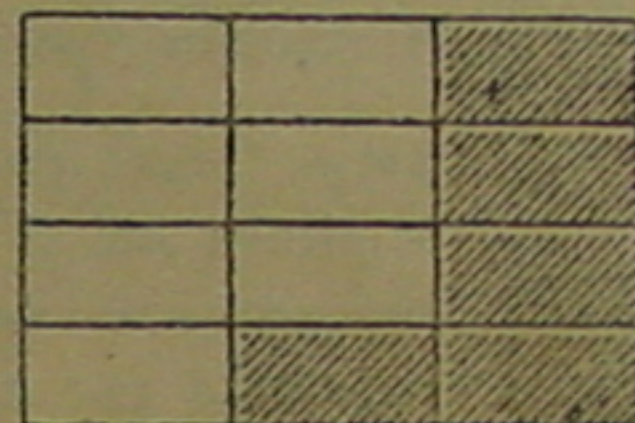


Fig. 18

Tomando um numero qualquer d'estas faixas, ou d'estes rectangulos, temos o que se chama *uma fracção*. Se o numero de faixas, ou de pequenos rectangulos, é menor do que o que constitue a unidade, temos *uma fracção propriamente dita*; se é maior, temos *uma expressão fraccionaria*. Vemos, pois, que uma fracção propriamente dita é menor do que 1, e que uma expressão fraccionaria é maior do que 1. Se tomarmos precisamente o mesmo numero de faixas, ou de rectangulos, que o dos comprehendidos na unidade, reconstituimos essa unidade; tal fracção é, por consequencia, igual a 1.

Quando empregarmos a palavra «fracção», queremos significar, d'uma maneira geral, uma fracção propriamente dita.

Se tracejarmos as faixas ou os rectangulos, que se eliminam, podemos representar uma fracção qualquer, por meio da parte da figura que permanece branca. Assim, a fig. 16 traduz a fracção *trez quintos*; a fig. 17, *quatro quintos*; a fig. 18, *sete duodecimos*.

O numero de rectangulos brancos (3, 4, 7, n'estes trez exemplos) chama-se *numerador*; o dos rectangulos, que constituem a unidade (5, 5, 12), diz-se *denominador*, e as trez fracções escrevem-se:  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{4}{5}$  e  $\frac{7}{12}$ .

*Principio fundamental* — O valor d'uma fracção não muda



quando multiplicamos pelo mesmo numero os seus numerador e denominador.

Seja a fracção  $\frac{3}{4}$  (fig. 19). Queremos demonstrar que ella é igual a  $\frac{15}{20}$  ou  $\frac{3 \times 5}{4 \times 5}$ . A fracção  $\frac{3}{4}$  está representada

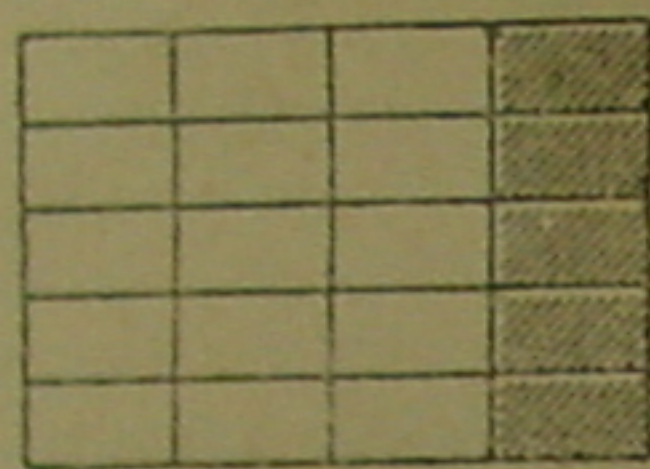


Fig. 19

pelas faixas verticaes. Dividimos a altura em 5 partes eguaes, e supponmos o rectangulo unidade repartido por traços horizontaes, passando pelos pontos de divisão. Fica, assim, dividido em pequenos rectangulos eguaes, em numero de  $4 \times 5$  ou 20. Vejamos agora a fracção  $\frac{3}{4}$ . Comprehende ella  $3 \times 5$

ou 15 pequenos rectangulos; não soffreu mudança alguma; o seu denominador e o seu numerador, fôram ambos multiplicados por 5, e, assim,  $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$ .

Podemos reduzir graphicamente duas fracções ao mesmo denominador, ou invocando o principio precedente, ou directamente sobre as figuras.

Tomemos, por exemplo,  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{2}{3}$ , fracções representadas: a primeira, por uma faixa vertical, e a segunda, por duas faixas horizontaes (fig. 20).

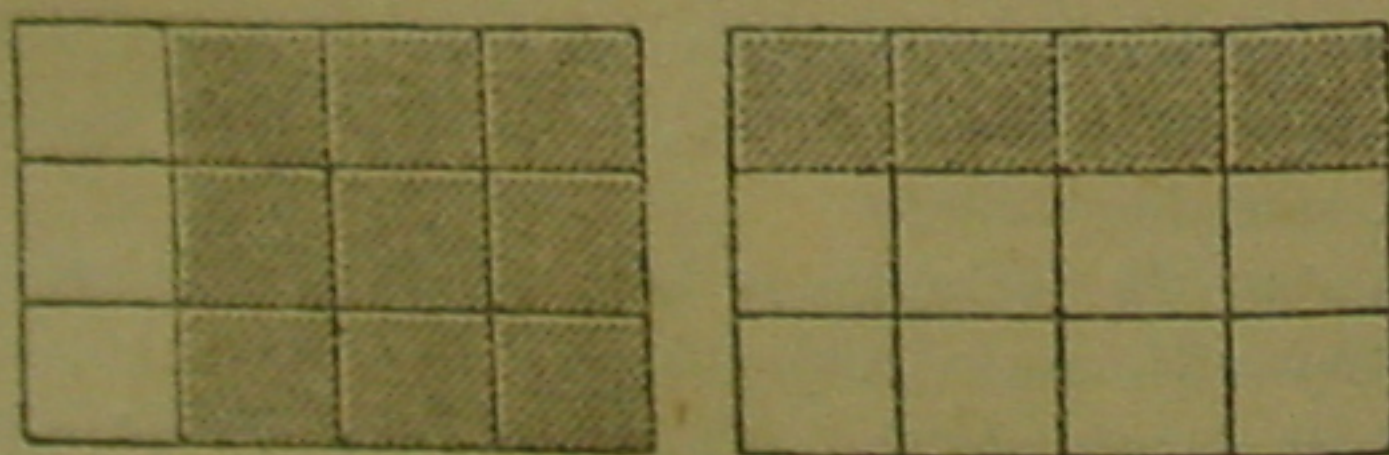


Fig. 20

Dividindo o primeiro rectangulo em trez faixas horizon-

taes eguaes e o segundo em quatro faixas verticaes, vemos que as duas fracções se lêem:  $\frac{3}{12}$  e  $\frac{8}{12}$ .

Inspirando-nos n'estas representações concretas, podemos, em seguida, fazer uma exposição rapida e clara da adicção e da subtracção.

Para a multiplicação, a propria definição nos diz que multiplicar  $\frac{2}{5}$  por  $\frac{3}{4}$ , é o mesmo que tomar os  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{2}{5}$ .

Consideremos (fig. 21) a fracção  $\frac{2}{5}$  representada em ABCD por duas faixas verticaes. Dividindo a altura AD em 4 partes eguaes e traçando as linhas horizontaes, temos assim dividido  $\frac{2}{5}$  em 4 partes eguaes; tomemos trez d'ellas e tracejemos horizontalmente as restantes. A parte

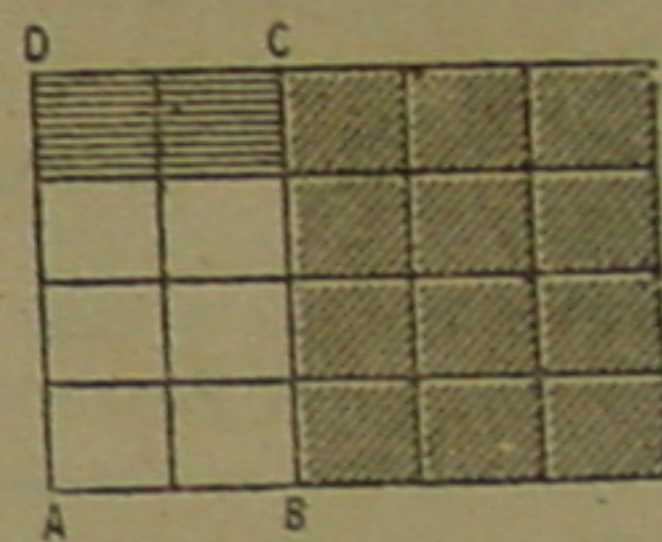


Fig. 21

branca é o producto ( $\frac{3}{4}$  de  $\frac{2}{5}$ ;

comprehende  $2 \times 3$  ou 6 pequenos rectangulos; a unidade comprehende  $5 \times 4$  ou 20 d'esses rectangulos. Donde :

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{6}{20}$$

E' facil, por processos semelhantes, tornar nitida no espirito da creança a ideia de *relação* (sendo a relação de  $a$  para  $b$  o numero, que mede  $a$ , quando se toma  $b$  por unidade); mostrar a identidade d'esta relação e da fracção  $\frac{a}{b}$ ;

estabelecer que  $\frac{a+m}{b+m}$  se aproxima indefinidamente de 1, quando damos a  $m$  valores inteiros cada vez maiores; mostrar que uma fracção é o quociente do numerador pelo denominador; pôr em evidencia as propriedades fundamentaes das proporções; etc.



Todas estas operações podem ser executadas materialmente com o papel quadriculado, ou com pequenos rectangulos (ou quadrados) de madeira, brancos d'um lado e pretos do outro. Teem ellas um caracter cumulativamente instructivo e recreativo; despertam a attenção da creança; fixam no seu espirito verdades importantes, sem necessidade de grande esforço de memoria; ella vê estas verdades; compõe-nas, por assim dizer, com as suas mãos; deixam de ser para ella phrases obscuras, repetidas sem lhes ligar um sentido preciso, para se tornarem realidades tangiveis.

A experiencia demonstra que estes methodos são d'uma pratica pedagogica efficaz, sendo para desejar que, cada dia, mais se generalisem.

## 22 — Tornamo-nos geometras

Já vimos o que é uma linha recta. E' a mais simples de todas as figuras geometricas. Podemos agora tratar de ampliar um pouco os nossos conhecimentos n'este campo. Comecemos, por exemplo, por adquirir a noção do que seja um plano, contemplando a superficie d'uma massa d'agua muito tranquilla, d'um espelho perfeitamente desempenado, d'um tecto, d'um pavimento, d'uma porta. Uma ardosia, uma folha de papel estendida n'uma prancheta bem aplainada, tambem nos dão a ideia d'um plano, e deixam-nos a impressão de que este — como a linha recta — póde ser prolongado mentalmente tanto quanto quizermos, indefinidamente. Sobre um plano, podemos applicar, em todos os sentidos, uma regua bem direita. Sobre uma folha de papel, podemos traçar tantas linhas rectas, quantas nos aprouvé.

Se traçamos só duas, podem estas (fig. 22) ser *parallelas*,

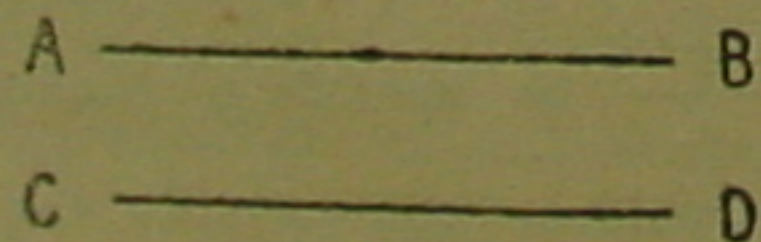


Fig. 22

como AB, CD. As linhas d'uma folha de papel pautado são

todas parallelas, e mostram-nos que duas linhas parallelas nunca se encontram.

Se, pelo contrario (fig. 23), duas rectas AB, CD se encon-

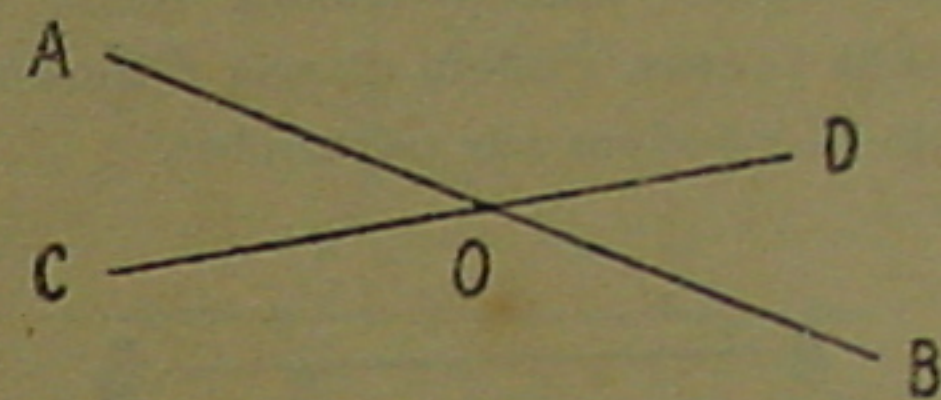


Fig. 23

tram n'um ponto O, as figuras AOC, COB, BOD, DOA, denominam-se *angulos*. Dois angulos são eguaes quando se podem sobrepôr, applicar um sobre o outro. Os angulos AOC, BOD, por exemplo, são eguaes; o mesmo acontece com COB, DOA.

Quando duas rectas (fig. 24) se cortam por fórma que os angulos DOA, AOC são eguaes, os quatro angulos em torno de O são tambem eguaes; chamam-se *angulos rectos*, e a figura formada pelas duas linhas é a d'uma cruz. No papel quadriculado, vemos angulos rectos em todos os pontos d'encontro de duas linhas. Quando duas rectas formam assim angulos rectos, dizem-se *perpendiculares*, uma em relação á outra.

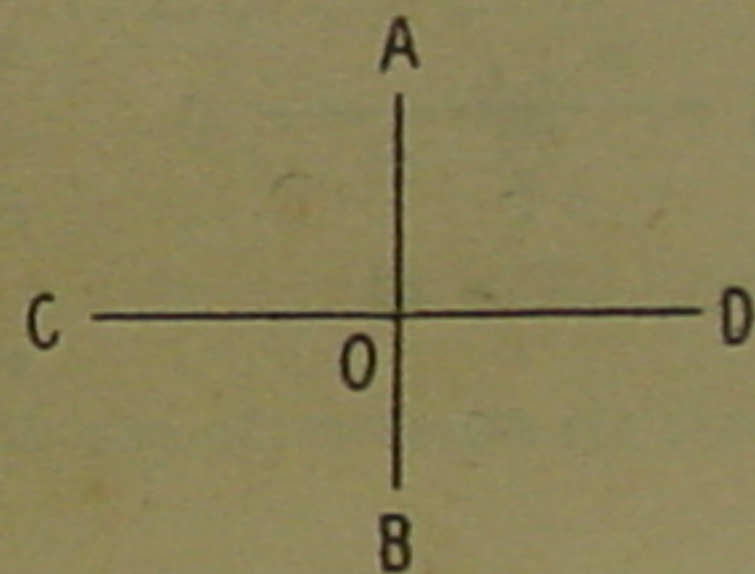


Fig. 24

Um angulo menor do que um angulo recto, como AOC (fig. 23), chama-se um angulo *agudo*; se, pelo contrario, é maior, como COB, denomina-se um angulo *obtuso*.

Um fio de prumo representa uma recta, que se chama *vertical*. Uma recta perpendicular á vertical, chama-se *horizontal*. Todas as rectas, que se applicassem sobre a superficie d'uma massa d'agua tranquilla, seriam rectas horizontaes; essa superficie é ella propria um plano, tambem denominado *horizontal*. As linhas d'uma folha de papel quadriculado dirigidas da esquerda para a direita, dizem-se ho-



rizontaes e as outras, verticaes, porque suppõe-se que a folha está collocada ao alto e applicada contra uma parede, por exemplo.

Supponhamos, agora, que traçamos sobre uma folha de papel trez linhas rectas. Podem dar-se diferentes casos. As trez rectas (fig. 25) podem ser parallelas.

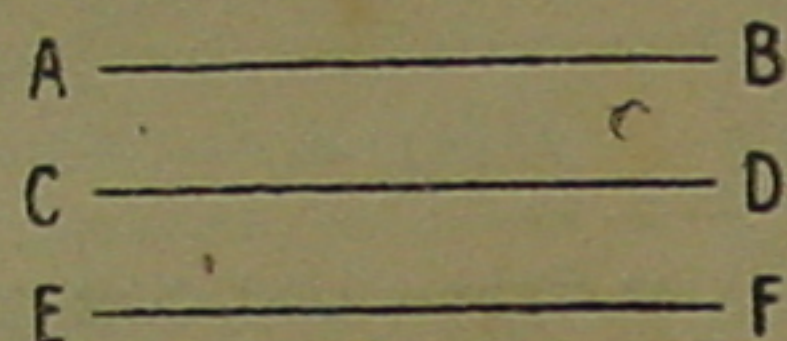


Fig. 25

Duas d'ellas, AB e CD, podem ser parallelas (fig. 26), e a terceira, EF, cortar-as em E e F. Esta terceira recta tem o nome de *secante*. N'esta figura,

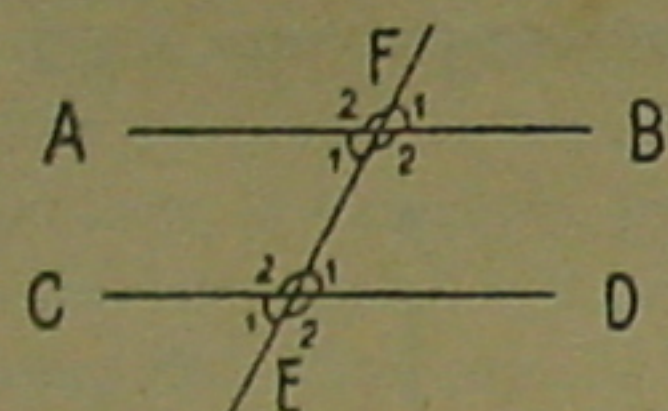


Fig. 26

todos os angulos marcados (1) são eguaes entre si; os marcados (2) tambem o são, e a somma d'um angulo (1) e d'um angulo (2) é egual a dois angulos rectos.

Póde succeder (fig. 27) que as trez rectas passem por um ponto O; diz-se então que ellas são *concorrentes*.

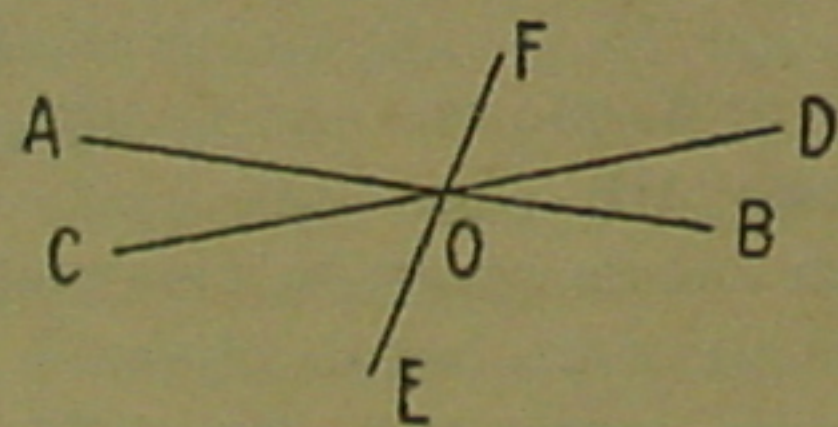


Fig. 27

Finalmente (fig. 28), se não se dá nenhuma das circumstancias precedentes, as trez rectas podem cortar-se, duas a duas, em trez pontos: A, B, C, e limitar uma porção do plano ABC, que podemos considerar á parte (fig. 29) e que se chama um *triangulo*. Os pontos A, B, C, denominam-se *ver-*

*tices* e os segmentos AB, BC, CA, *lados* do triangulo. Os angulos A, B, C, marcados na figura, dizem-se *angulos* do triangulo.

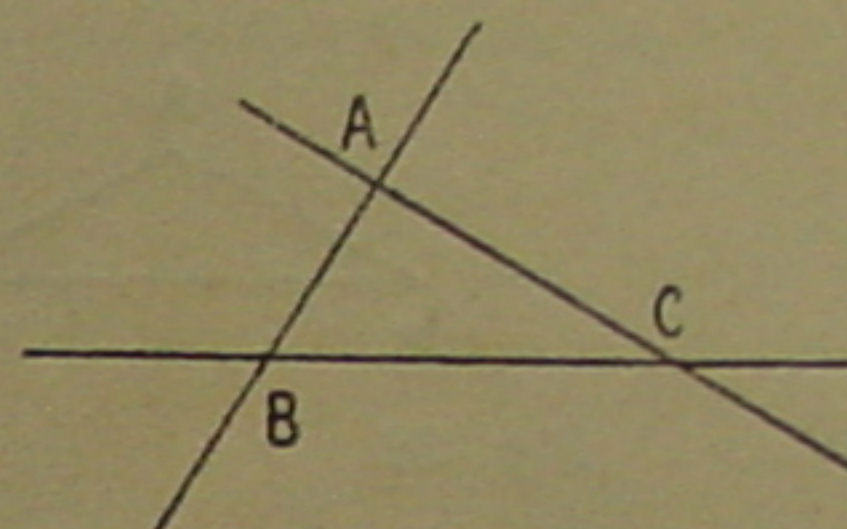


Fig. 28

Um dos angulos do triangulo, A (fig. 30), pode ser recto; diz-se então que o triangulo é *rectangulo*. Pode tambem suc-

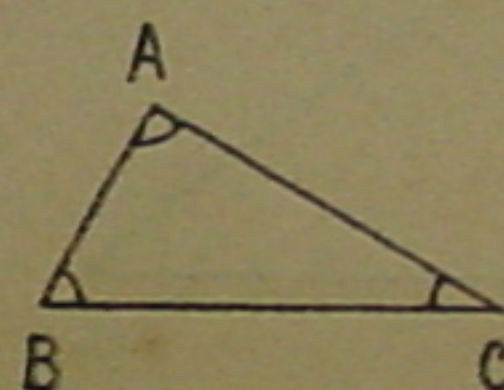


Fig. 29

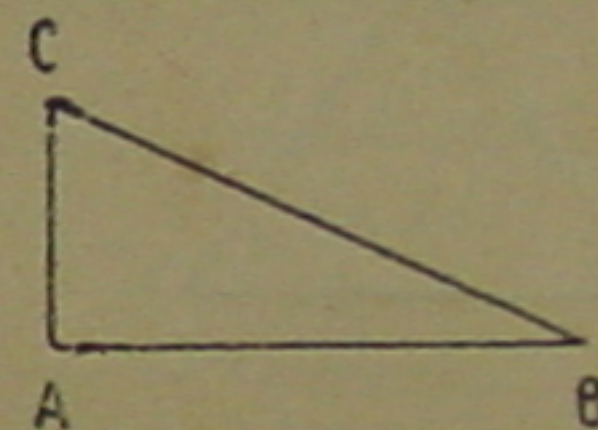


Fig. 30

ceder (fig. 31) que um dos angulos seja obtuso; n'este caso, o triangulo é *obtusangulo*.

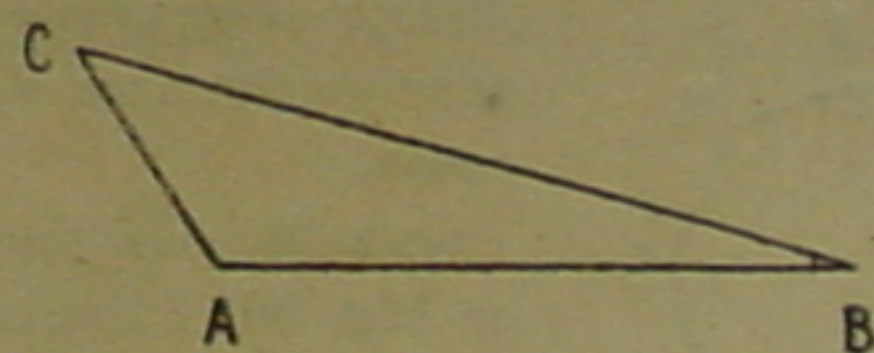


Fig. 31

Se um triangulo, como a da figura 32, tem dois lados eguaes, AB e AC, o triangulo chama-se *isosceles*. Os angulos B e C, são tambem eguaes.

Se um triangulo (fig. 33) tem os seus trez lados eguaes, diz-se *equilatero*; os seus trez angulos tambem são eguaes.



N'um triangulo ABC (fig. 34), podemos escolher um lado qualquer, BC, e chamar-lhe *base*. Se traçarmos pelo ponto

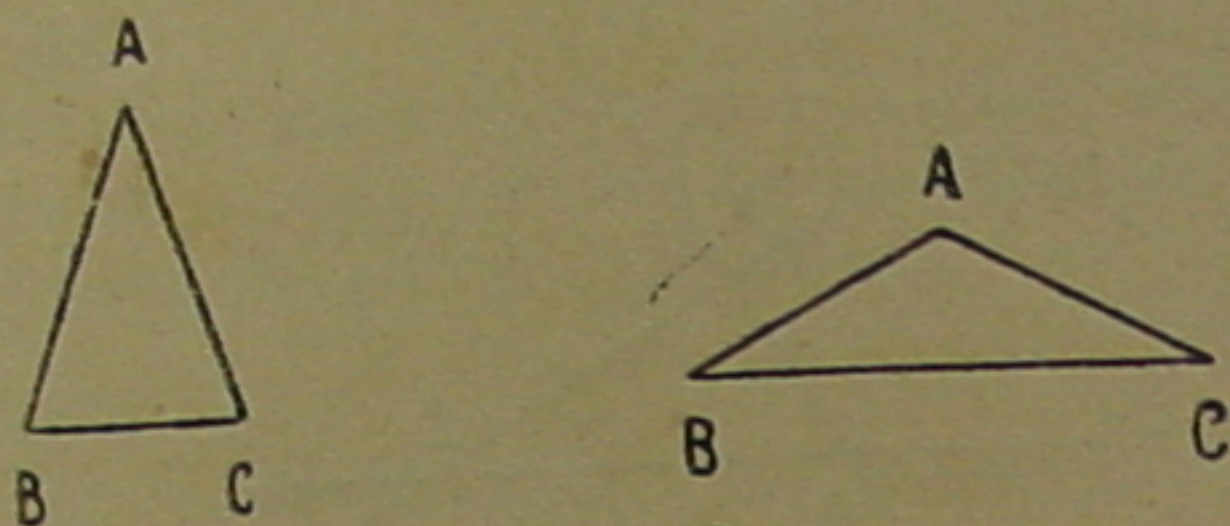


Fig. 32

A uma recta perpendicular a BC, que encontre BC em A', dizemos que AA' é a *altura* do triangulo.

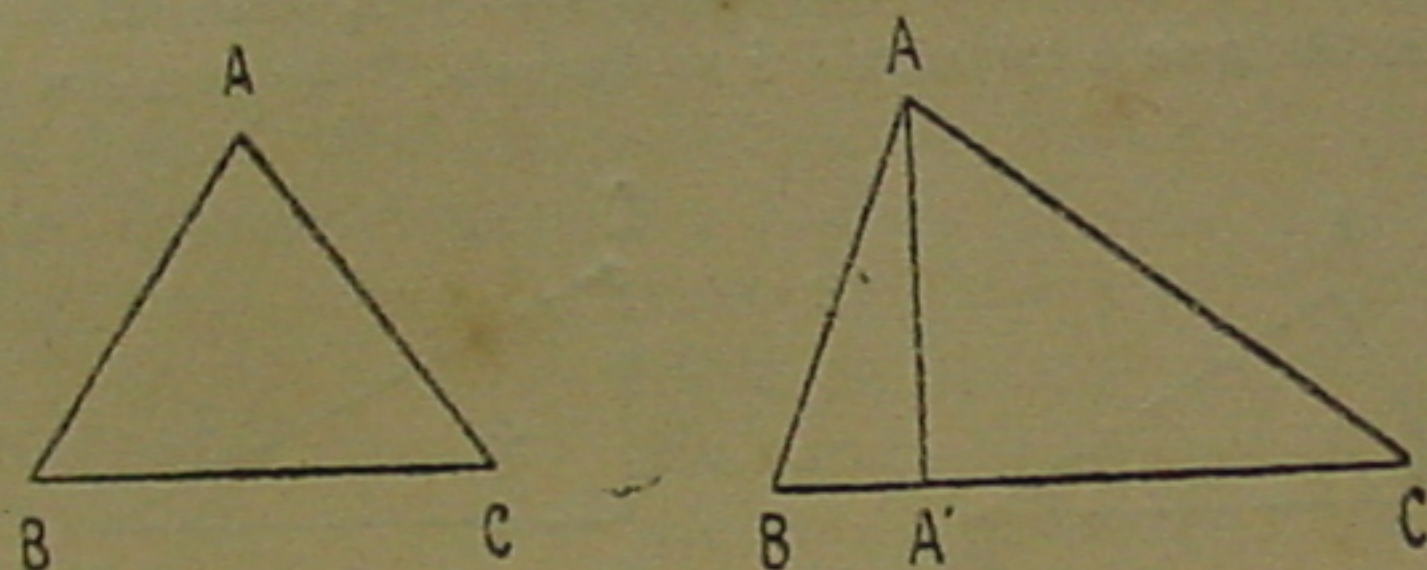


Fig. 33

Fig. 34

Esta simples figura, o triangulo, tem innumeradas propriedades. Algumas serão estudadas mais tarde; por agora — não tenhamos illusões — não estudamos absolutamente nada; aprendemos apenas a conhecer as figuras e a saber como ellas se chamam. E já é alguma coisa.

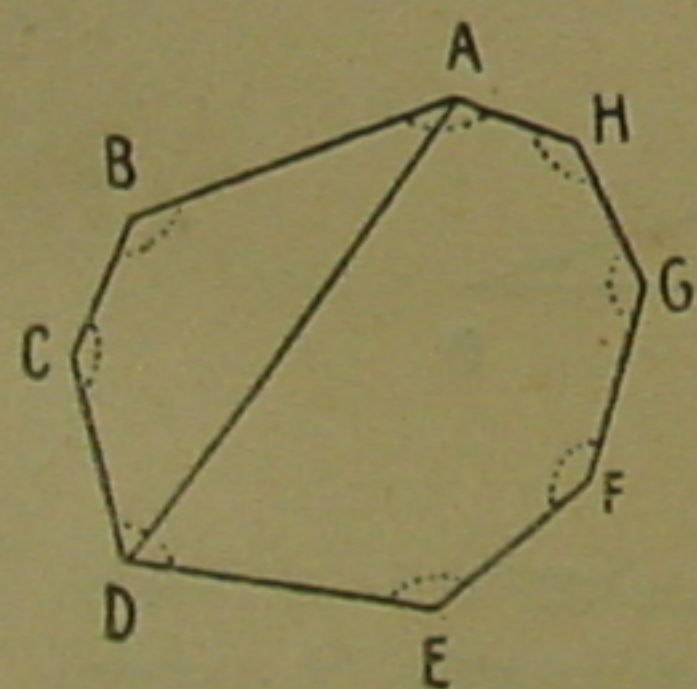


Fig. 35

Quando uma parte d'um plano (fig. 35) é limitada por diferentes rectas, ou antes por diferentes segmentos de rectas, a figura assim formada chama-se um *polygono*. Os segmentos AB, BC,..... HA, são os *lados*, os pontos A, B,... H, os *vertices*, e os angulos marcados A, B... H, os *angulos*, do polygono.

Um polygono, como o da fig. 36, diz-se de *angulos reentrantes*. Quando não tem angulos reentrantes, como na figura 35, o polygono é *convexo*. Em geral, não trataremos senão de polygonos convexos.

A uma recta, como AD (fig. 35), que une dois vertices d'um polygono, e que não é lado d'elle, chama-se uma *diagonal*.

N'um polygono, o numero de vertices, o de lados e o d'angulos, são os mesmos. Deram-se nomes especiaes a alguns polygonos, segundo o numero dos seus lados. Em primeiro lugar, como já dissemos, um polygono de trez lados é um triangulo. Seguidamente

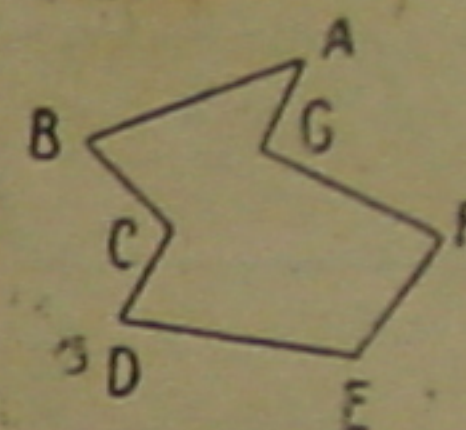


Fig. 36

Um polygono de	4	lados é um	<i>quadrilatero</i>
»	5	»	» <i>pentagono</i>
»	6	»	» <i>hexagono</i>
»	7	»	» <i>heptagono</i>
»	8	»	» <i>octogono</i>
»	10	»	» <i>decagono</i>
»	12	»	» <i>dodecagano</i>

Assim, a figura 35 representa um octogono convexo, e a figura 37 um heptagono de angulos reentrantes.

N'um quadrilatero, dois lados, AB e CD, podem ser paral-

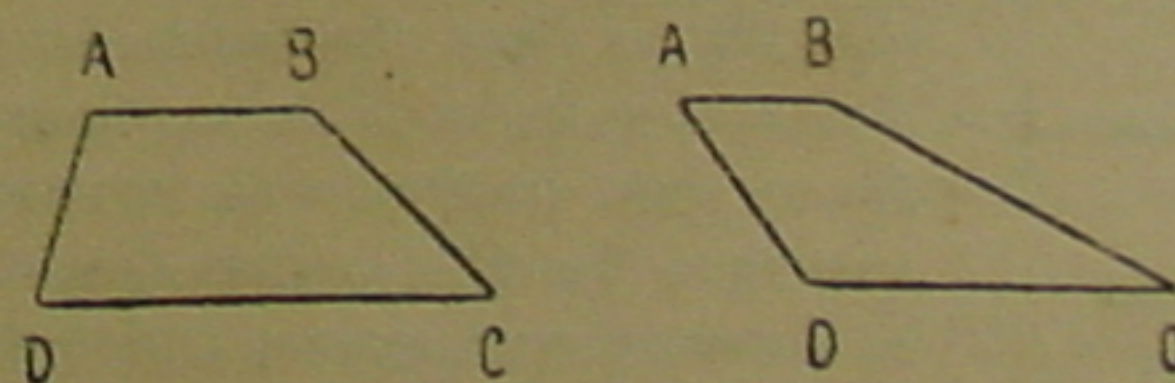


Fig. 37

lelos (fig. 37), não o sendo os outros dois; estes quadrilateros chamam-se *trapezios*. Os lados AB e CD, são as *bases* do trapezio.



Se (fig. 38) os lados  $AB$  e  $CD$  são paralellos, e, se os lados  $BC$  e  $DA$  também o são, o quadrilatero é um *parallelogrammo*.

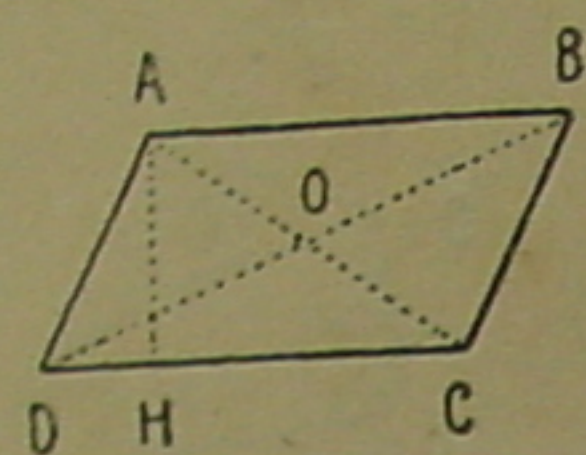


Fig. 38

Os lados  $AB$  e  $CD$ , são eguaes; outro tanto se dá com os lados  $BC$  e  $AD$ . Alem d'isso, os angulos  $A$  e  $C$ , também são eguaes, da mesma fôrma que  $B$  e  $D$ .

Se os quatro lados de um *parallelogrammo* são eguaes (fig. 39), este recebe o nome de *losango*.

Se (fig. 40) um dos angulos é recto, os outros tres também o são, e o *parallelogrammo* é um *rectangulo*.

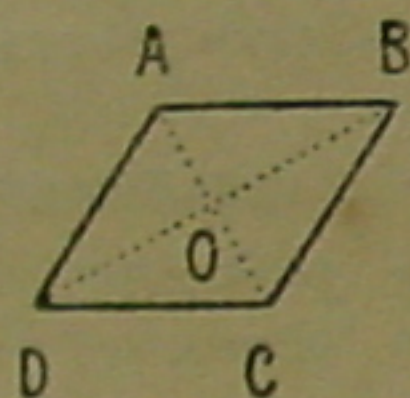


Fig. 39

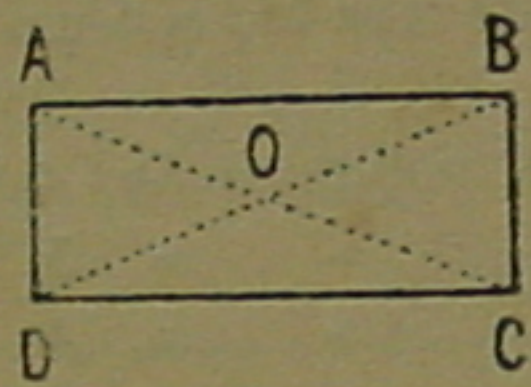


Fig. 40

Se, finalmente (fig. 41), um *rectangulo* tem todos os seus lados eguaes, chama-se um *quadrado*.

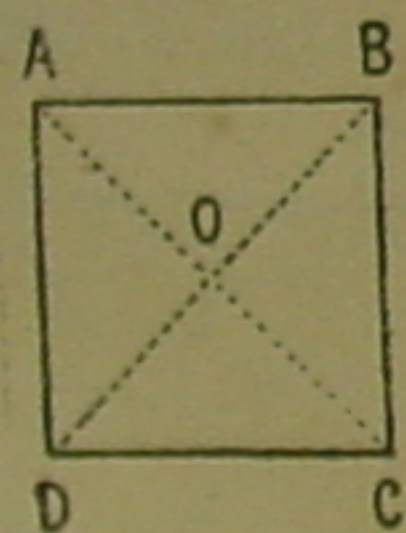


Fig. 41

Todo o quadrilatero tem duas diagonaes. Em todo o *parallelogrammo* (fig. 38, 39, 40 e 41), as duas diagonaes  $AC$  e  $BD$ , cortam-se n'um ponto  $O$ , que é o meio de cada uma d'ellas. N'um *losango* (fig. 39), as duas diagonaes são perpendiculares entre si. N'um *rectangulo* (fig. 40), as duas diagonaes são eguaes. N'um *quadrado* (fig. 41), as duas diagonaes são ao mesmo tempo, eguaes e perpendiculares.

Vemos, pois, que um *quadrado* é, ao mesmo tempo, um *losango* e um *rectangulo*.

Se, n'um *parallelogrammo* (fig. 38), tomarmos um lado,  $CD$ , que se chama *base*, e se traçarmos uma recta,  $AH$ , perpendicular a  $CD$ , esta será também perpendicular a  $AB$ ; esta

recta, ou melhor: este segmento,  $AH$ , chama-se *altura do parallelogrammo*.

N'uma folha de papel quadriculado, podemos formar tantos *rectangulos* e *quadrados*, quantos quizermos, utilizando as linhas da quadricula.

Devemo-nos exercitar também a construir, com todo o cuidado possível, as diferentes figuras de que temos fallado

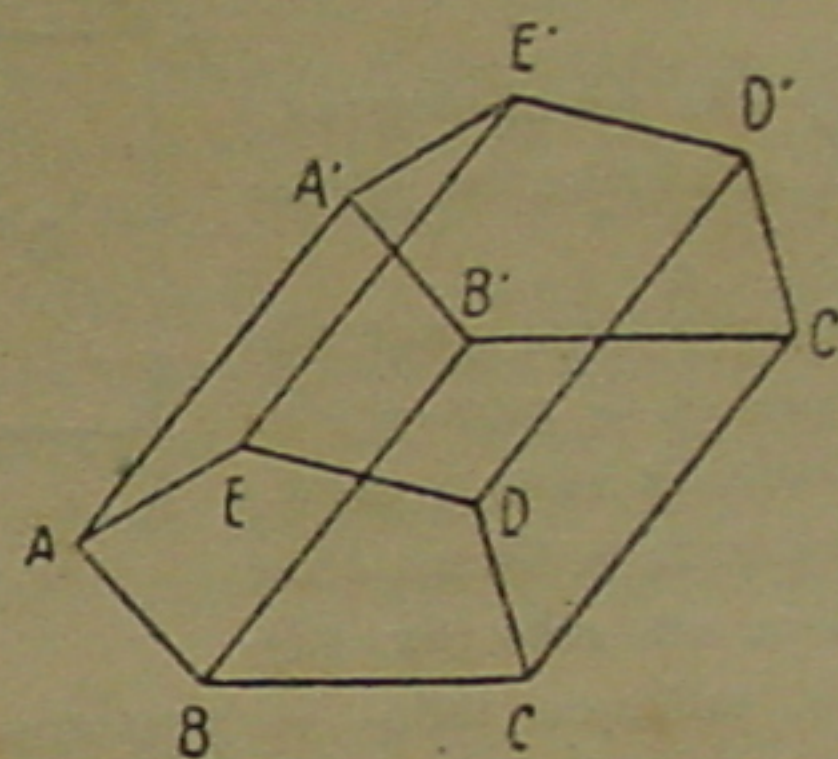


Fig. 42

e ainda outras, facéis de idear, servindo-nos do lapis, da regua, do esquadro e do duplo decimetro para medir as distancias. Depois, precisamos habituar-nos a desenhá-las convenientemente á mão, sem o auxilio de instrumentos.

Um bom exercicio consiste em desenhar a lapis — com todo o rigor e empregando os instrumentos — uma figura, e depois cobri-la á mão com tinta.

Por enquanto, nada dizemos sobre o emprego do compasso e do transferidor, reservando para mais tarde indicá-lo summariamente.

Não esqueçamos, porém, que o desenho nunca deve ter sido posto de banda, desde que começámos a traçar os nossos primeiros riscos.

Se (fig. 42), tendo um *polygono*  $ABCDE$ , n'um plano horizontal, conduzimos fóra do plano as rectas  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  e  $EE'$ , todas paralelas e eguaes entre si, as extremidades  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  e  $E'$ , são os vertices d'um outro *polygono* igual áquelle. Os quadrilateros  $AA'$ ,  $BB'$ , etc., são *parallelo-*



grammos; o corpo limitado por todos estes parallelogrammos e pelos dois polygonos, chama-se um *prisma*. Os dois polygonos são as *bases* do prisma; os parallelogrammos são as suas *faces*; a distancia entre os planos das duas bases, é a sua *altura*; as rectas  $AA'$ ,  $BB'$ ,... são as suas *arestas*.

Se as *arestas* são *verticaes*, suppondo as bases horizontaes, o prisma é *recto*.

Se as bases são parallelogrammos, o prisma chama-se um *parallelepipedo*.

Se, enfim, a base é um quadrado e o parallelepipedo é *recto* e tem por altura o lado da base, o parallelepipedo apresenta a fôrma d'um dado e chama-se um *cubo* (fig. 43).

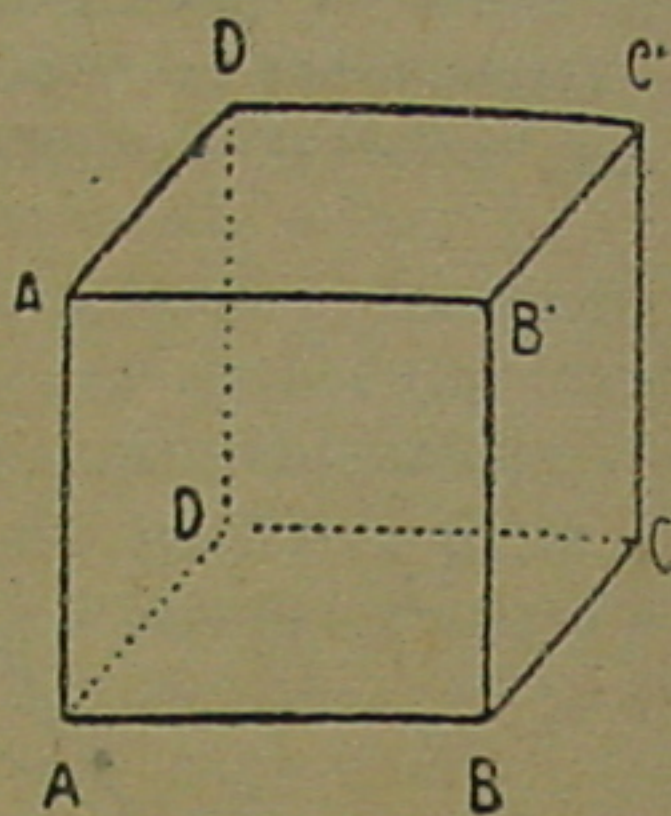


Fig. 43

Se (fig. 44), unirmos todos os vertices d'um polygono ABCDE, a um ponto S, situado fóra do plano, o corpo limitado pelo polygono e pelos triangulos SAB, SBC, ... SEA, chama-se uma *pyramide*. ABCDE é a *base* da pyramide SA, SB, ... são as suas *arestas*; S é o seu *vertice*; a distancia do vertice ao plano da base, que será vertical, se a base fôr horizontal, é a sua *altura*.

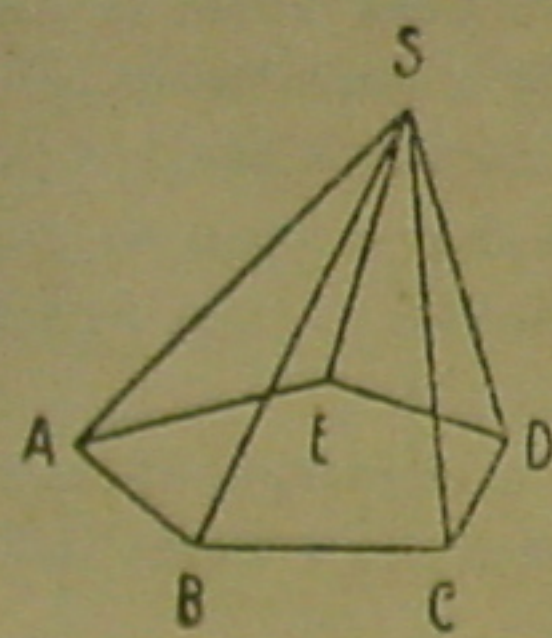


Fig. 44

Com umas hastesinhas de madeira e alguns pedaços de fio metallico, é facil construir pequenos modelos, que dêem uma ideia sufficientemente precisa das figuras, de que acabamos de fallar. Podemos tambem talhal-as á faca n'uma cenoura, ou n'uma batata.

Devemos notar que as figuras 42 e 44, em perspectiva, foram desenhadas suppondo visiveis todas as suas arestas, figura feita com hastes, ao passo que o cubo da figura 43 representa pontoada tres arestas, que não se vêem, AD, DC e DD', o que succede quando o cubo é massiço, constituído por uma substancia qualquer.

## 23 — As areas

A palavra «Geometria» significa, pela sua etymologia: medida da Terra. Este significado não corresponde de nenhum modo á sciencia geometrica, tal como hoje a conhecemos; mas, elucida-nos sobre a origem d'esta sciencia, que, como as demais, nasceu das necessidades da humanidade. Cedo se conheceu a necessidade d'avaluar a extensão das terras e se procuraram os meios de o conseguir. As terras apresentam, no seu conjuncto, uma superficie sensivelmente plana, e são, em regra, limitadas por linhas rectas; é, pois, a extensão dos differentes polygonos descriptos no numero precedente, que se trata de determinar, de medir, para conhecer aquella extensão.

Mas, para medir seja o que fôr, é preciso uma unidade. Sabemos medir extensões lineares ou comprimentos, tomando por unidade o metro, o palito ou o lado d'uma casa do papel quadriculado, pouco importa. Para medir um comprimento, é necessario uma unidade, que seja tambem um comprimento. Para medir uma extensão plana, que se chama *area*, é preciso uma unidade, que seja igualmente uma area.

Escolhida a unidade de comprimento, a unidade d'area será invariavelmente a area do quadrado, que tem por lado aquella unidade de comprimento.

Para medir um comprimento, basta applicar-lhe — topo a topo — a unidade de comprimento e contar o numero de vezes que a applicamos. Comprehende-se que um processo analogo é praticamente impossivel, quando se trata d'uma area; seria necessaria applicar o quadrado unidade de maneira que nenhum ponto da area deixasse de ser coberto por elle, o que não é exequivel.

Ao envez, para as figuras acima descriptas, existem processos muito simples para chegar a determinar as areas.

Occupemo-nos, em primeiro lugar, do quadrado. Tomemos uma folha de papel quadriculado e supponhamos que cada



uma das suas divisões é a unidade de comprimento. Cada casa é, por consequencia, a unidade d'area.

Sobre essa folha de papel desenhamos (fig. 45) um quadrado, cujo lado comprehende 7 divisões; o comprimento d'esse lado tem, pois, por medida 7. As casas contidas n'esse quadrado, constam de 7 fileiras de 7 casas, cada uma; o seu numero total é, portanto, 7 vezes 7, ou  $7 \times 7 = 7^2 = 49$ . E, como se pode dizer outro tanto d'um quadrado, cujo lado tenha um numero qualquer de divisões  $a$ , em vez de 7, a area do quadrado será da mesma fórma

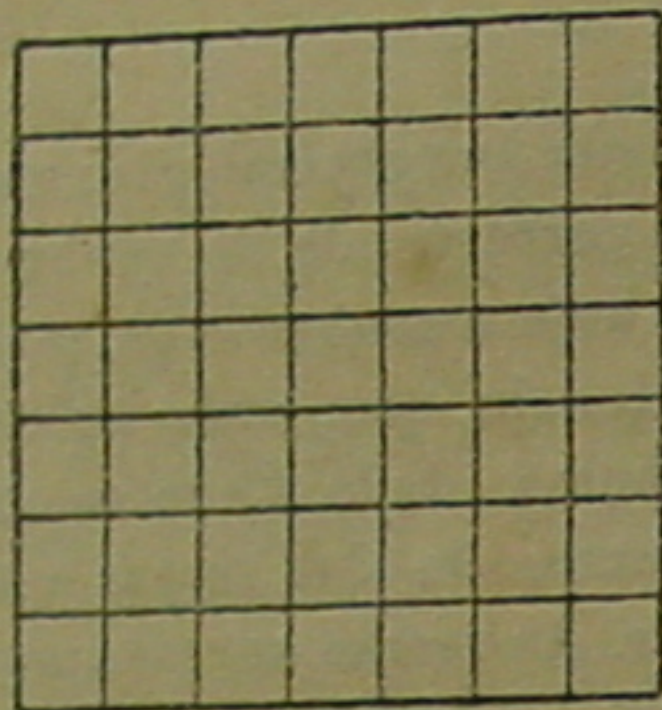


Fig. 45

$a \times a = a^2$ ; isto é: o numero, que mede a area do quadrado, é a 2.ª potencia do numero, que mede o lado. Eis porque se chama quadrado d'um numero á sua 2.ª potencia.

Consideremos agora (fig. 46) um rectangulo, cujos lados são 8 e 3; o numero de casas, isto é: o numero, que mede a sua area, é  $8 \times 3$ . Se, em vez de 8 e 3, tivermos  $a$  e  $b$ , a area do rectangulo é dada pelo producto  $ab$ .



Fig. 46

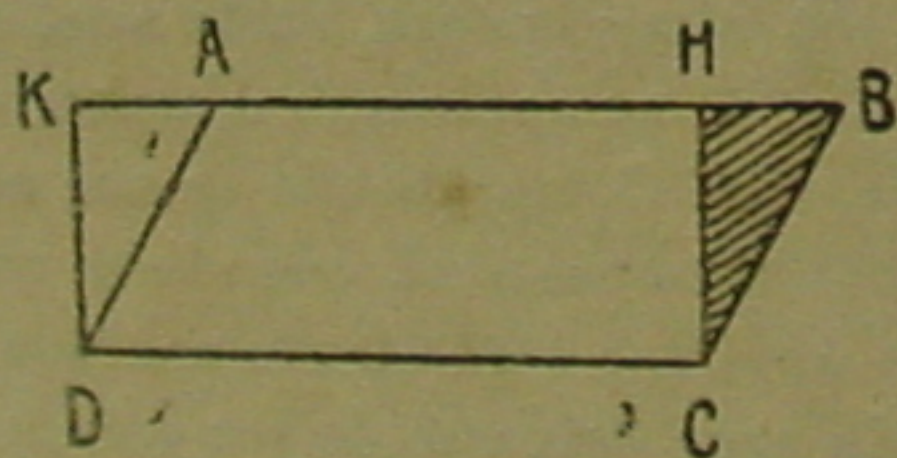


Fig. 47

Passemos a recortar um cartão com a fórma do parallelogrammo ABCD, representado na figura 47, e marquemos

a sua altura CH. Se, com um golpe dado segundo CH, separarmos o triangulo tracejado CHB, e o ajustarmos ao lado esquerdo da figura, applicando CB sobre DA, formamos o rectangulo CDKH, cuja area é a mesma do parallelogrammo, porquanto é constituido pelos mesmos pedaços de cartão. Este rectangulo tem por lados a base CD do parallelogrammo e a sua altura CH; d'onde: a area d'um parallelogrammo tem por medida o producto dos numeros que medem a sua base e a sua altura.

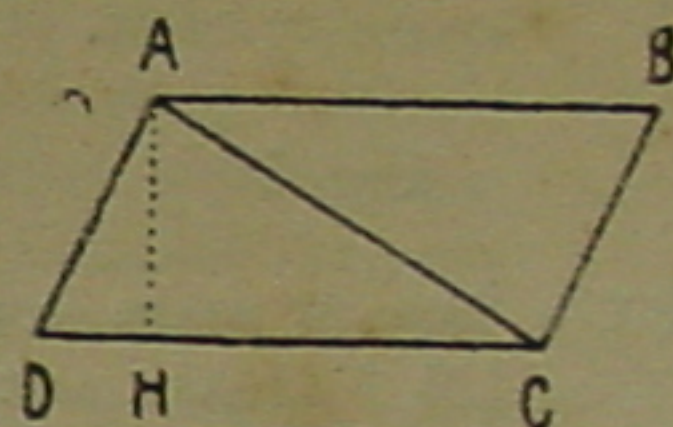


Fig. 48

Cortando um parallelogrammo (fig. 48) segundo a diagonal AC, os dois triangulos resultantes, CBA e ADC, applicam-se exactamente um sobre o outro. D'onde: o parallelogrammo tem uma area dupla do triangulo ADC, ou a area d'este é metade da do parallelogrammo. Multiplicando a base DC pela altura AH, e tomando a metade do producto, temos o numero que mede a area do triangulo.

Um trapezio decompõe-se, da mesma fórma, em dois trian-

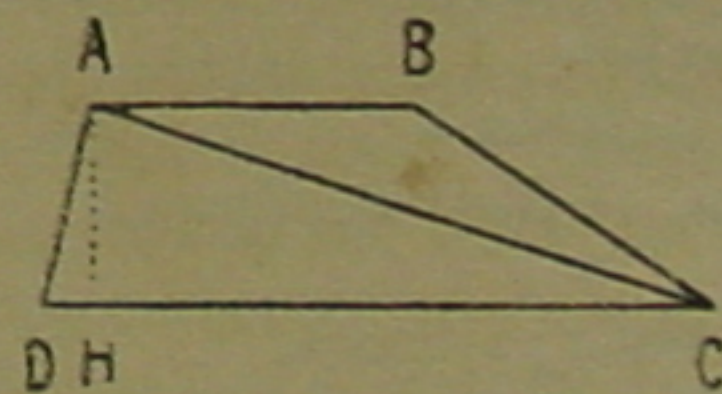


Fig. 49

gulos. Deduz-se d'ahi que: para obter o numero, que mede a sua area, temos que multiplicar a altura AH pela metade da somma das bases AB e DC.



Tambem se pode (fig. 50 a) transformar um trapezio n'um rectangulo da mesma area; basta traçar pelos pontos L e M, meios dos lados AD e BC, as alturas HK e IJ. Os triangulos tracejados LDH e MCI, applicam-se exactamente

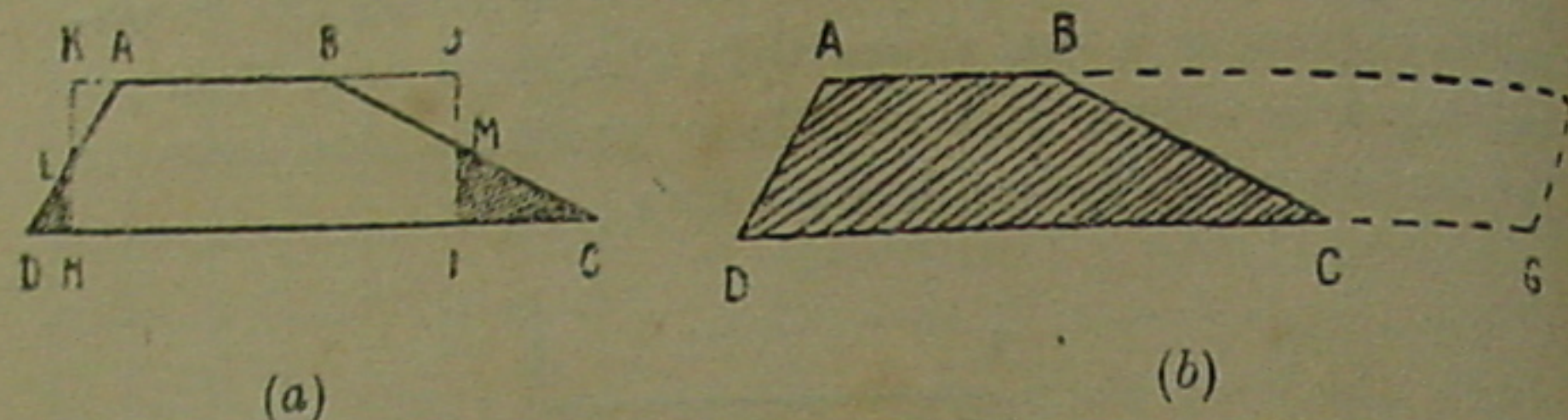


Fig. 50

sobre LAK e MBJ, e formam assim o rectangulo; o que demonstra que HI, ou LM, é igual a metade da somma das bases AB e CD.

Por ultimo (fig. 50 b), se prolongarmos o lado AB d'um comprimento, BF, igual a DC, e o lado DC d'um comprimento, CH, igual a AB, a figura AFGD é um parallelogrammo; cortando-o segundo BC, obtemos dois trapezios, que se sobrepõem exactamente. Cada um d'elles é, pois, metade do parallelogrammo, o que nos dá ainda a area do trapezio por um novo processo: um simples golpe de thesoura n'um parallelogrammo de cartão.

Podemos resumir abreviadamente o que precede, nas formulas seguintes:

Quadrado. — Lado $a$	Area $a^2$
Rectangulo. — Lados $a, b$	Area $ab$
Parallelogrammo. — Base $a$ ; altura $h$	Area $ah$
Triangulo. — Base $a$ ; altura $h$	Area $\frac{ah}{2}$
Trapezio. — Bases $a, b$ ; altura $h$	Area $\frac{(a+b)h}{2}$

De resto, desde que saibamos medir a area d'um trian-

gulo, podemos determinar a d'um polygono qualquer ABCDEF (fig. 51); porquanto, por meio das diagonaes AC, AD e AE, partindo d'um mesmo vertice, podemos decompor um polygono em triangulos, ABC, ACD, ADE e AEF.

Devemos exercitar-nos muito a determinar, d'esta fórma, areas regulares, taes como: a d'uma porta, d'uma janella, d'uma meza, do pavimento ou do tecto d'um compartimento, d'um pateo, etc. Uma simples fita metrica basta para esse fim. Segundo os objectos, tomamos por unidade de comprimento o metro, o decimetro ou o centimetro. Sem possuirmos ainda nenhuma noção theorica, familiarisamo-nos, assim, com as applicações as mais simples do systema metrico; temos a intuição d'ellas; adquirimos a noção justa do emprego das diferentes unidades; e esta aquisição, já util por si só, torna-se mais tarde, no periodo dos estudos serios, um auxiliar valiosissimo.

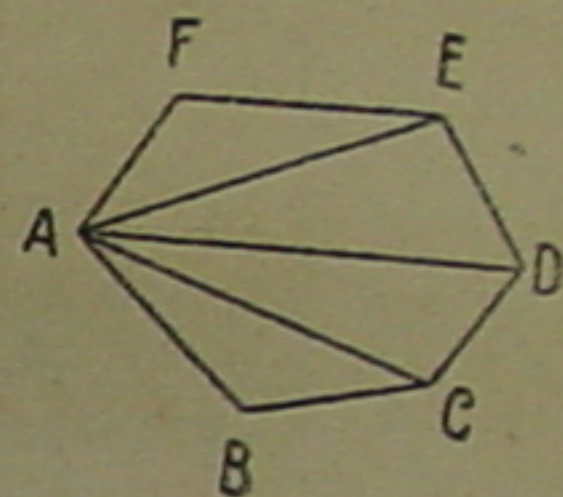


Fig. 51

## 24 — O quadrado da hypotenusa

Existe em geometria um theorema importante e celebre, que tem sido o tormento de muitas gerações de estudantes, porquanto a demonstração classica, habitualmente dada, é pouco natural e difficil de reter. Diversos são os nomes porque é conhecido; chamam-lhe *O quadrado da hypotenusa*, *O theorema de Pythagoras* — apesar de já conhecido muitos seculos antes de Pythagoras — e ainda *A ponte dos burros*, sem duvida por os alumnos mediocres tropeçarem n'elle e ser com difficuldade que vencem esta travessia.

Já sabemos o que é um triangulo rectangulo. O lado maior, BC (fig. 52), opposto ao angulo recto, chama-se *hypotenusa*. Se construirmos tres quadrados, BDEC, CFGA e



AHIB, tendo por lados a hypotenusa e os outros dois lados do triangulo, a area do primeiro será igual á somma das areas dos outros dois. Tal é o enunciado da famosa *Ponte dos burros*.

Ora, ha um meio muito simples de verificar esta proposição, meio inventado na India, na mais remota antiguidade, e de que nos podemos servir para fazer uma demonstração

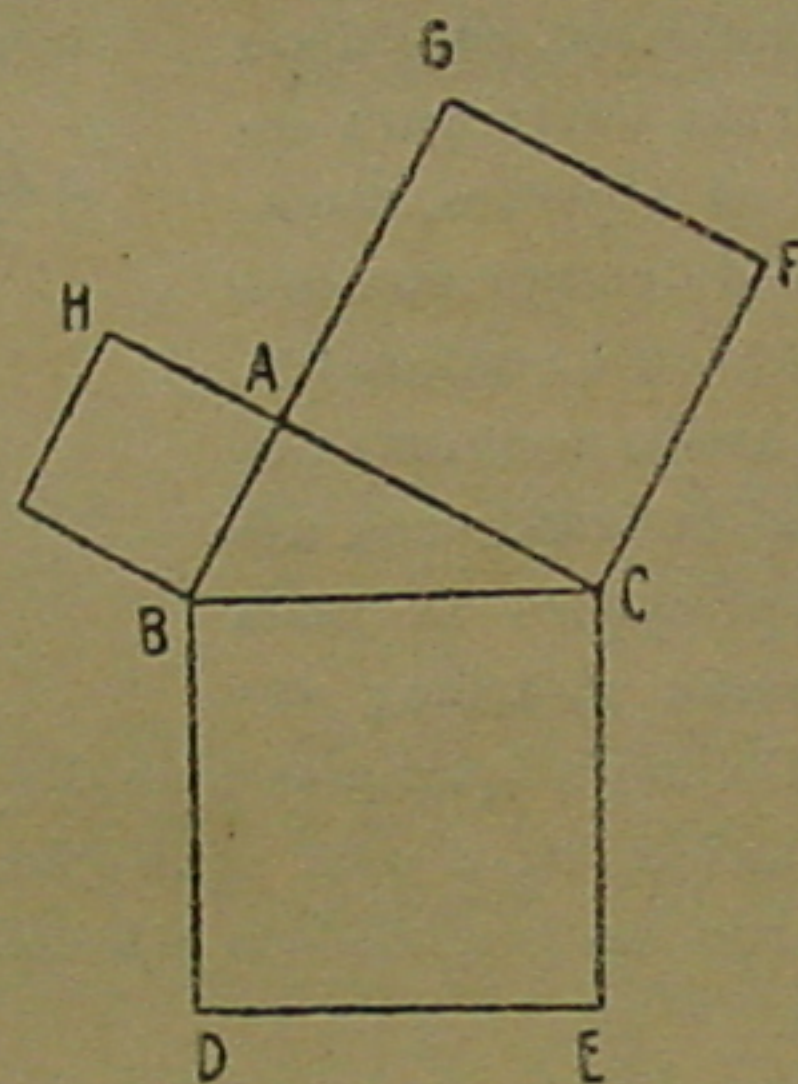


Fig. 52

muito correcta, quando estudarmos Geometria — o que aqui não fazemos.

Consideremos um quadrado (fig. 53-1), cujo lado é AB. Marquemos um ponto C entre A e B, e construamos em madeira, ou em cartão, triangulos rectangulos, tendo AC e CB por comprimento dos lados do angulo recto; basta construir quatro. Disponhamos-os, designando-os por 1, 2, 3 e 4, como se vê na fig. 53 (1), em que estão representados pelas partes tracejadas. Vemos que formam um desenho, que nos mostra no seu interior um quadrado, que tem justamente por lado a hypotenusa. Este quadrado é, pois, o que resulta, quando cobrimos uma parte do quadrado grande com os quatro triangulos. Disponhamos agora estes de maneira que occupem a posição indicada na fig. 53 (2). Temos

então, dois quadrados — os dois quadrados construidos sobre os lados do angulo recto. D'onde: os dois reunidos teem a mesma area que o quadrado da hypotenusa da fig. 53 (1). E' um quebra-cabeça dos mais simples; a creança, que o tenha

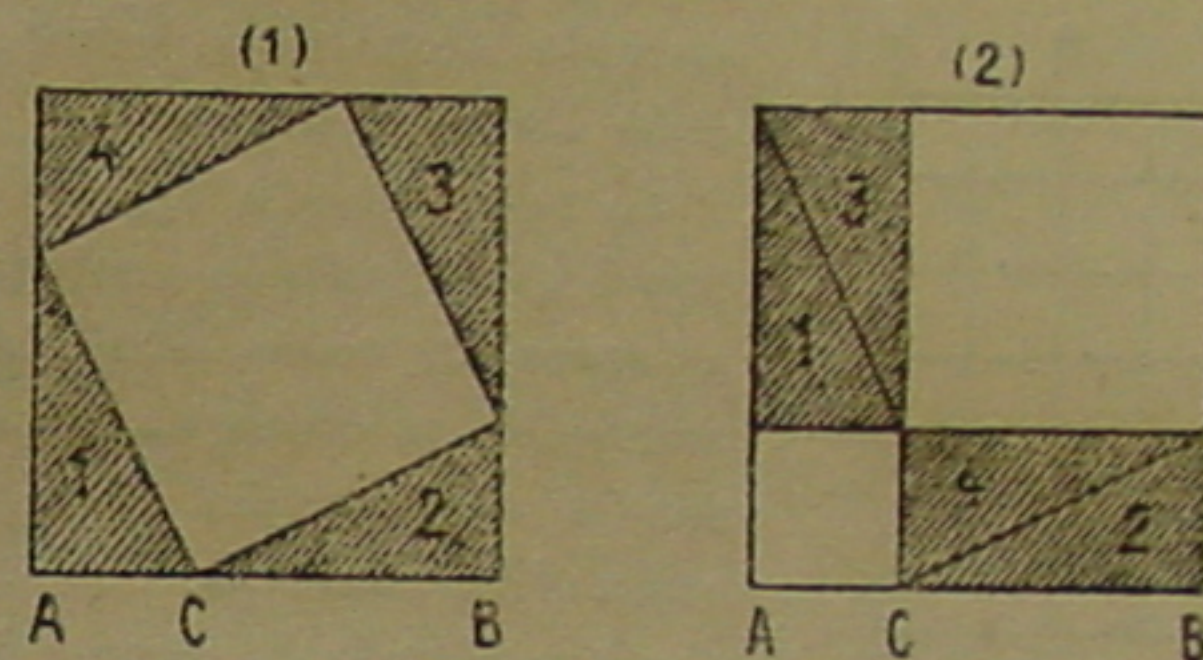


Fig. 53

feito uma ou duas vezes, nunca mais o esquece e não se assusta, nem se atrapalha, ao aproximar-se da *Ponte dos Burros*. A maior das burrices é complicar as cousas simples e tornar difficil o que é comestinho.

## 25 — Alguns quebra-cabeças; miscellanea mathematica

Sobre um segmento ABC (fig. 54), construimos o quadrado ACIG. Tomando, depois,  $CF = BC$ , traçamos FD parallela a AC, e BH parallela a CI; o quadrado fica, assim, dividido em 4 partes pelas linhas BH e FD. Com dois golpes de tesoura, podemos separar essas partes, que são:

- 1.º—BCFE, quadrado tendo por lado BC;
- 2.º—EHGD, " " " " DE, que é igual a AB;
- 3.º—EFIH, rectangulo tendo os seus lados eguaes a AB e BC;
- 4.º—ABED, rectangulo igual ao precedente.



Acabamos, assim, de verificar este theorema de Geometria: «O quadrado, construido sobre a somma de duas linhas, é equivalente ao quadrado construido sobre a primeira, mais o quadrado construido sobre a segunda, mais duas vezes o rectangulo construido sobre estas duas linhas, como lados.»

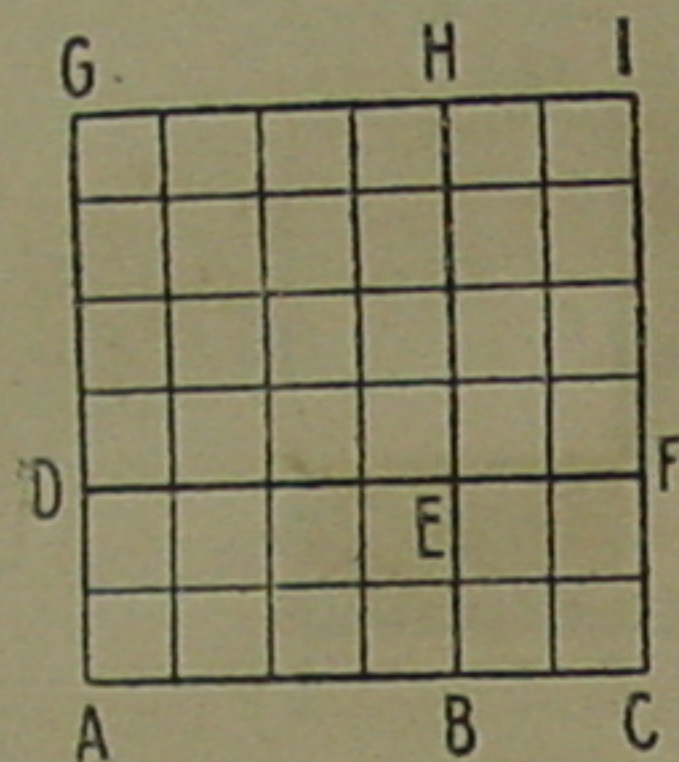


Fig. 54

Se traçarmos a fig. 54 sobre papel quadriculado e avaliarmos as areas de todas estas figuras, contando as casas do papel, temos a confirmação d'este theorema d'Arithmetica:

«O quadrado da somma de dois numeros é igual á somma dos quadrados d'esses numeros, mais o dobro do seu producto.»

Se designamos AB por  $a$  e BC por  $b$ , temos, por ultimo, esta formula d'Algebra:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Aqui estão trez verdades, com que por trez vezes se sobrecarrega a memoria das creanças desprevenidas, quando, de facto, constituem uma só e tão evidente, que salta aos olhos. As apparencias, os trajos, são diferentes; mas, a pessoa é a mesma. Sabendo-o d'antemão, poupa-se muito tempo perdido, muito esforço inutil, além de se ficar sabendo que as classificações da sciencia são necessarias, mas muitas vezes artificiaes pela força das cousas, e que é preciso habituar-nos cedo a conhecer as analogias, que se nos deparam.

Vamos indicar mais algumas. Formemos (fig. 55), sobre o

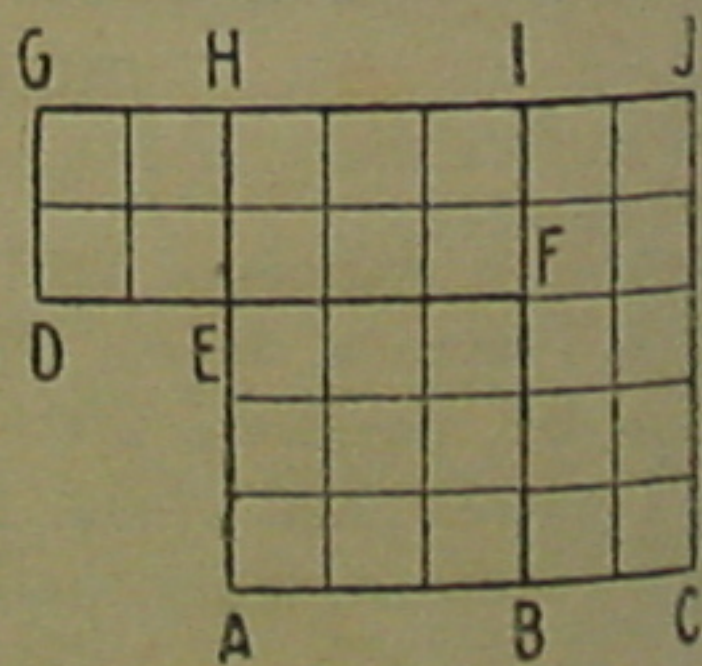


Fig. 55

segmento ABC, um quadrado tendo por lado AB, que é ABFE, e um quadrado, ACJH, cujo lado é AC. Prolonguemos BF até I, e, sobre EH, construamos o quadrado EHGD.

Para termos o quadrado ABFE, é preciso separar da figura total os rectangulos BCJI e FIGD; a figura total consta da reunião de dois quadrados, cujos lados são eguaes a AC e BC; os dois rectangulos são eguaes e os seus lados eguaes a AC e BC; finalmente, AB é a differença entre AC e BC. D'onde:

Geometria — O quadrado, construido sobre a differença de dois segmentos, é equivalente á somma dos quadrados construidos sobre esses segmentos, menos duas vezes o rectangulo construido sobre os dois segmentos como lados.

Arithmetica — O quadrado da differença de dois numeros é igual á somma dos quadrados d'esses numeros, menos o dobro do seu producto.

Algebra — Temos a formula:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ainda um exemplo, que nos é dado pela figura 56. ABJH é um quadrado e ACGD um rectangulo; FG, FJ e DE, são eguaes a BC; DEIH é um quadrado.

O rectangulo ACGD tem, pois, por lados  $AB + BC$  e  $AB - BC$ ; como os dois rectangulos BCGF e FJIE são eguaes, separando o primeiro e collocando-o no lugar do segundo, temos ABJIED, que é a differença dos quadrados ABJH e DEIH, construidos sobre AB e  $DE = BC$ . Assim:

Geometria — O rectangulo, tendo por lados a somma e a differença de dois segmentos, é equivalente á differença dos quadrados, tendo por lados os mesmos segmentos.

Arithmetica — O producto da somma de dois numeros pela sua differença, é igual á differença dos quadrados d'esses numeros.

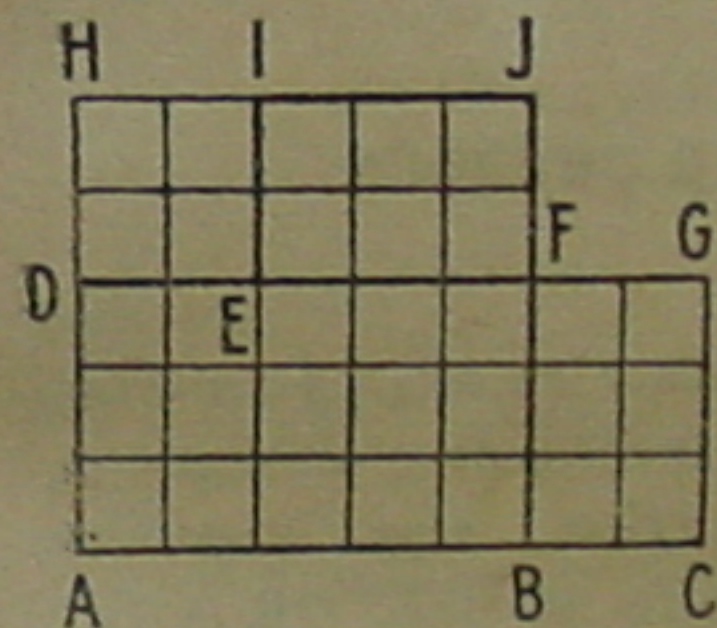


Fig. 56



Algebra — Temos a formula :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

E para comprovar tantas proposições, respeitantes a tantas sciencias, basta recortar com cuidado alguns pedaços de cartão, depois de ter desenhado cuidadosamente algumas figuras!

Tem-se dado, por vezes, o nome de quebra-cabeças a estes jogos de recorte. E' uma injustiça, porque, pelo contrario, empregados como acabamos de dizer, evitam muita quebra-deira de cabeça, instruindo pelos olhos.

## 26 — O cubo em oito pedaços

Tomemos (fig. 57) um cubo de madeira e, a partir d'um dos seus verticeis O, marquemos, sobre as trez arestas que d'elle partem, trez distancias eguaes entre si, OA, OB e OC. Supponhamos que, por cada um dos trez pontos assim obtidos, fazemos passar um corte feito com uma serra, AAA, BBB, CCC.

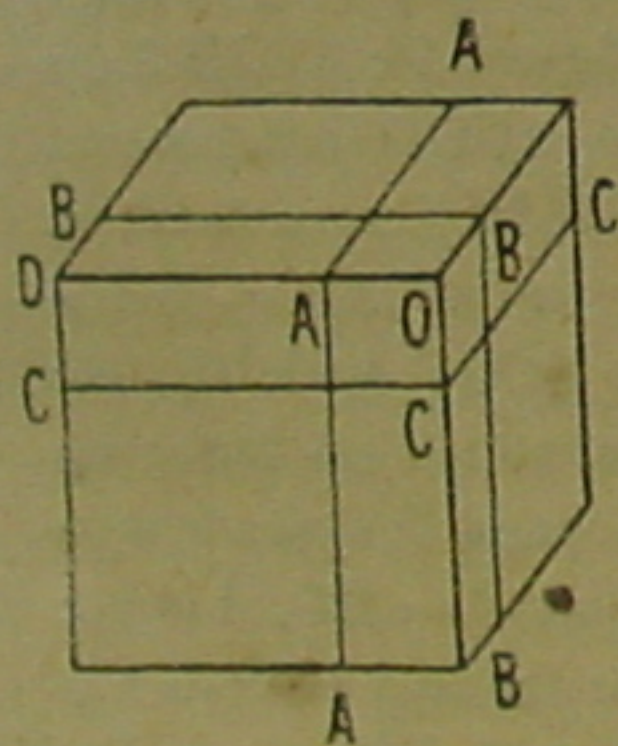


Fig. 57

Cortamos, assim, o cubo em oito pedaços. Para fazer ideia do que estes sejam — o que melhor veriamos sobre o proprio cubo — chamemos (fig. 57)  $a$  á distancia DA e  $b$  á distancia AO, e construamos a figura 58. As duas partes, que se compõem, representam o que se vê depois dos cortes segundo AAA e BBB, quando o cubo é visto por cima. Além d'isso, as letras  $(a)$  e  $(b)$ , entre pa-

renteses, indicam a espessura, depois do corte segundo CCC. A figura da esquerda representa o que está abaixo de CCC e a da direita, o que fica acima.

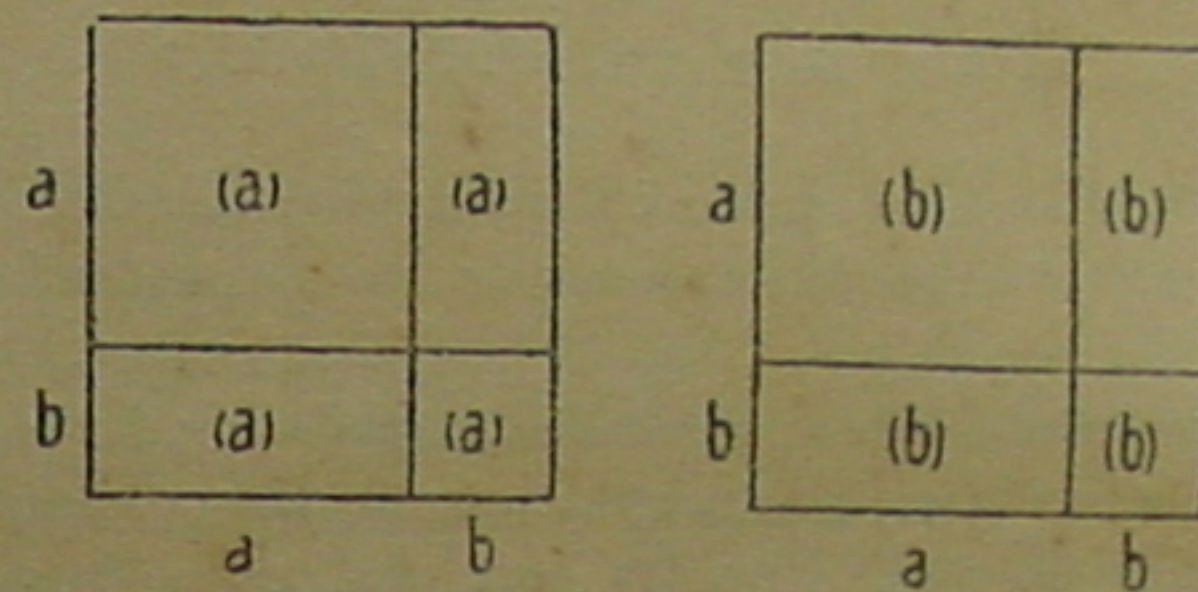


Fig. 58

Vemos, assim, que temos oito paralelepipedos, cujas dimensões são:

fig. da esquerda     $aaa \quad aba \quad bba \quad baa$   
fig. da direita     $aab \quad abb \quad bbb \quad bab$ ;

o que nos dá:

1 cubo, cuja aresta é  $a$ ;  
1 " " " "  $b$ ;  
3 paralelepipedos tendo por dimensões  $a, a, b$ ;  
3 " " " "  $a, b, b$ ;

A aresta do cubo, que cortámos em oito pedaços, era  $a + b$ .

Verificamos, assim, que o cubo construido sobre a somma de dois segmentos  $a$  e  $b$ , compõem-se :

- 1.º da somma dos cubos construidos sobre cada um dos segmentos;
- 2.º de 3 vezes um paralelepipedo tendo por base um quadrado de lado  $a$  e por altura  $b$ ;
- 3.º de 3 vezes um paralelepipedo tendo por base um quadrado de lado  $b$  e por altura  $a$ .

Isto é Geometria.

A mesma figura mostra-nos que, em Arithmetica: o cubo da somma de dois numeros é igual á somma dos cubos d'es-