

IV — BIBLIOTECA DE EDUCAÇÃO RACIONAL

CHARLES LAISANT



Iniciação Matemática

TRADUÇÃO DO

Dr. Henrique Schindler

OBRA ORNADA COM 163 GRAVURAS

2.^ª edição



1919

GUIMARÃES & C.ª - Editores

68, RUA DO MUNDO, 70

LISBOA

Iniciação Matemática

Composto e impresso na Imprensa
♦♦ de Manuel Lucas Torres♦♦
Rua do Diário de Notícias, 59 a 61

BIBLIOTECA DE EDUCAÇÃO RACIONAL

Collec. Junho de 98

CHARLES LAISANT

Edição



Iniciação

Matematica

TRADUÇÃO DO

Dr. Henrique Schindler

OBRA ORNADA COM 103 GRAVURAS

2.ª edição



1919

GUIMARÃES & C.^a - Editores

68, RUA DO MUNDO, 70

LISBOA

Preambulo

Este livrinho contem o desenvolvimento de principios expostos, sob o mesmo titulo, a'uma conferencia realisada ha annos e publicada na *Education fondée sur la science*, volume da *Bibliothèque de Philosophie Contemporaine*. Alguns amigos induziram-nos a precisar mais as nossas ideias sobre este ponto especial do grande problema da educação. Talvez tenham razão. Em todo o caso, o commettimento merece ser tentado, em face da persistencia com que se procura, ao que parece, deformar os cerebros juvenis. É á salvação da infancia que exhortamos os paes — mormente as mães — e os educadores. Desde a primeira infancia até ao inicio dos estudos — ou seja, por exemplo: dos 4 aos 11 annos — é possivel inculcar no espirito da creança um numero de cousas vinte vezes superior, ao que hoje em dia se consegue, em materia de mathematica; e isto deleitando-a, em vez de a torturar.

Os diversos capitulos, que adiante se encontram, não formam um todo didactico; mas, tambem não estão dispostos ao acaso. Constituem um guia deposto nas mãos do educador, em que este

pode inspirar-se, mas que nunca poderá dispensal-o do estudo do cerebro, que tem a seu cargo desenvolver. Umas vezes, é preciso ir alem ; outras, parar ou interromper se, e algumas, voltar atraz. O que é perigoso, é querer ir demasiado longe, sem se preoccupar com o que precede.

Encontrareis n'estas paginas, um numero bastante grande de noções ; inspirae-vos n'ellas, mas não vos torneis seus escravos. Procuraes, acima de tudo, interessar, divertir a creança ; NÃO LHE FAZEI APPRENDER NADA DE CÔR ; e, aos 11 annos, se ella for medianamente intelligente, saberá e comprehenderá melhor as mathematicas, do que a decima parte dos nossos bachareis. E — o que é mais importante — terá tomado gosto por ellas e encetará o seu estudo com prazer.

As *sessões de jogos* — fugamos de lhes chamar lições — nunca devem prolongar-se alem do limite em que a attenção fraqueja e a curiosidade se apaga ; de contrario, só alcançareis resultados prejudiciaes.

Muito desejamos que, para as sciencias phisicas e naturaes, possam ser levadas a cabo tentativas analogas. A tarefa não é mais difficil, muito pelo contrario ; e talvez, então, vejamos as gerações futuras, libertadas do collete de forças das que as precederam, prodigalisar largamente, em proveito da humanidade, os thesouros d'uma intelligencia deixada desabrochar livremente.

O presente livro nada tem de comum com as

Recreações mathematicas, que motivaram a publicação d'um grande numero d'obras excellentes, d'entre as quaes, para nos limitarmos ás que estão publicadas ou traduzidas na lingua franceza, citamos apenas os quatro volumes de EDUARDO LUCAS : *Arithmétique amusante* do mesmo auctor, o volume de ROUSE BALL, traduzido do inglez, e o de FOURREY, que tem principalmente por objecto questões d'arithmeticas.

Nas *Recreações mathematicas* — O nome claramente o diz — trata-se d'applicar as theorias mathematicas, já conhecidas, a assumptos graciosos : jogos varios, combinações, etc. ; mas, uma certa instrucção é necessaria, a miudo, para a simples comprehensão das explicações dadas.

Aqui, succede o inverso ; servimo-nos de questões engraçadas, como meio pedagogico, para despertar a curiosidade da creança e conseguir, assim, fazer penetrar no seu espirito, sem imposição de esforço cerebral, as primeiras e mais essenciaes noções da mathematica. E a diversidade das questões, que pôde dar a impressão d'uma desordem apparente, apenas encobre uma sequencia d'ideias, propositadas, uteis e perfeitamente ordenadas.

A nossa *Iniciação* não é, pois, uma duplicação das *Recreações* ; uma e outras tem a sua razão de ser. No decurso dos seus estudos, os alumnos avidos de saber, ao lembrarem-se dos jogos da sua infancia, podem tirar grande proveito da leitura das obras, que a esse tempo são

por elles comprehendidas e lhes despertam ideias novas, aperfeiçoam e aguçam o espirito.

E, a quem lhes vier dizer que as Recreações são indignas d'elles, basta responder que os mais eminentes sabios não desdenharam occupar-se d'ellas, e que, se ás vezes os estudos mathematicos nos levam ao riso, é isso, um merito a mais, visto que, segundo a celebre phrase de Rabelais : «E' proprio do homem o rir-se».

Se, a tal respeito, os pontifices não estão contentes, saibamos consolar-nos. Aquelles, para quem a palavra «instruir» é synonyma de «enfadar» — e, muitas vezes, de «torturar» — são verdadeiros malfeitores publicos. E' tempo d'acabar com a sua dominação nefasta.

Ao escrever este voluminho, tivemos principalmente em vista a França; mas, o mal não é privativo do nosso paiz. Por toda a parte, é preciso collocarmo-nos *fóra dos programmas*, se quizermos libertar a infancia; por toda a parte — se a amamos e a prezamos — devemos contar com a hostilidade d'uma Administração, que parece apostada a estorvar o seu desenvolvimento cerebral.

Uma ultima palavra, talvez inutil. Este livro posto nas mãos da creança, é um livro sem objectivo, quasi perigoso. E' ao educador — e só ao educador — que elle se destina, para lhe servir de guia. Mas, o alumno, chegado que seja ao periodo dos estudos serios, encontrará por vezes vantagem n'esta leitura, especie de relance retrospectivo sobre a evolução primordial do seu espirito juvenil.

INICIAÇÃO MATHEMATICA

1 — Os riscos

Uma das primeiras faculdades, que devemos desenvolver na creança, desde a idade em que a sua actividade cerebral começa a despertar, é a do desenho. Dotada, quasi sempre, d'um gosto instinctivo pelo desenho, convem estimular-lh'o, muito antes de começarmos a ensinar-lhe a escrever ou a ler.

N'esse intuito, devemos principiar por dar-lhe uma ardósia ou uma folha de papel quadriculado, por collocar entre os seus pequeninos dedos primeiramente um lapis, depois, quando já estiver mais adestrada, uma penna, e fazel-a traçar simples riscos; não os classicos riscos obliquos, preparatorios da escripta inclinada, mas pequenas linhas, segundo as direcções do traçado da quadricula e muito regularmente distanciadas.

Com estas linhas, dirigidas primeiramente de cima para baixo, depois, passado algum tempo, da esquerda para a direita, o alumno forma *riscos verticaes* (fig. 1) e *riscos horizontaes* (fig. 2).

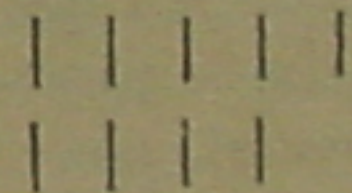


Fig. 1 — *Riscos verticaes*

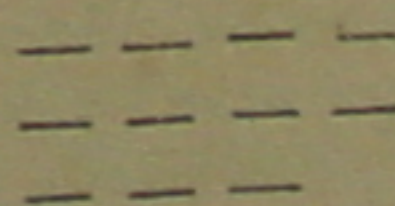


Fig. 2 — *Riscos horizontaes*

Gradualmente vamos-lhe ensinando a traçar riscos mais ou menos longos, a intercalal-os nas linhas da quadricula, a traçar outros obliquos, em todas as direcções possíveis. Depois, levamo-lo a formar figuras constituídas pela reunião de riscos mais ou menos longos. Adeante diremos mais algumas palavras a este proposito.

Mais tarde, quer com o auxilio de instrumentos (regua, esquadro, compasso), quer simplesmente á mão, fazemo-lo desenhar figuras em que entrem linhas curvas. Estes exercicios, que desenvolvem a habilidade manual e a justeza da visão, nunca devem ser postos de banda durante todo o período educativo. Dizemos agora d'elles apenas o indispensavel á comprehensão do que segue; mas, devemos, desde já, insistir n'um facto: é que estes exercicios devem ser indicados — e nunca impostos — á creança. Se deixam de constituir uma simples brincadeira, uma distracção, o nosso fim falhará por completo. Deixe a creança rabiscar na sua ardósia, estragar algumas folhas de papel; guie-a com os vossos conselhos, que ella nunca deixará de vos pedir; mas, quando se mostrar enfastiada, deixae-a fazer outra cousa. E' esta uma condição rigorosamente necessaria para desenvolver n'ella o espirito de iniciativa, para manter a sua curiosidade natural e para evitar a fadiga e tédio.

Este primeiro ensino do desenho, sobre que tivemos que dizer algumas palavras, constitue materia para um livro a fazer; a escripta e a leitura, fornecem assumpto para outros, que só devem vir mais tarde e que estão fóra do nosso objectivo. Mas, todos estes differentes ensinamentos, quando destinados á infancia, devem inspirar-se invariavelmente no mesmo principio fundamental, isto é: conservar a apparencia de brinquedo, respeitar a liberdade da creança e dar-lhe a illusão — se acaso o é — de que é ella propria quem descobre as verdades, que lhe collocamos deante dos olhos. Quanto á idade em que deve ser começada esta primeira iniciação mathematica, principiando pela do desenho e caminhando em seguida parallelamente, não ha nenhuma regra absoluta a formular. Póde-se comtudo dizer que, em geral, é muito raro que uma creança de trez annos e meio

a quatro annos, não manifeste já o seu gosto pelo manejo do lapis, e não hesitamos em affirmar que aos dez ou onze annos, se ella possui uma normal organização cerebral, é facil ter-lhe mettido na cabeça todas as materias expostas nas paginas que seguem.

Mais d'uma, passados alguns annos, talvez sinta prazer em pegar n'este livrinho, que então já não lhe é destinado. O seu espirito, cultivado por estudos ulteriores e affeito ao raciocinio consciante, encontrará certamente n'elle materia para reflexões uteis.

Para terminar com estas generalidades e não termos que nos repetir inutilmente, devo chamar a attenção das familias e dos professores, que me lerem, para o maior escolho a evitar na primeira educação da infancia: o abuso do exercicio da memoria, tão pernicioso e tão geral ainda hoje na pratica corrente. Ensinando palavras á creança e obrigando-a a repetil-as, deformamos-lhe o cerebro, aniquilamos as suas qualidades nativas, preparamos gerações de individuos sem iniciativa, sem curiosidade, sem vontade, atafalhados de formulas incomprehendidas, apagados e deprimidos.

Se amaes vossos filhos, se estimaes as creancinhas que vos confiam, se quereis que elles sejam fortes, robustos e bons, segui os principios d'esses grandes espiritos e d'esses grandes corações, que se chamaram La Chalotais¹, Froebel², Pestalozzi³. Estes bemfeitores da humanidade teriam, por certo, estatuas em todos os paizes do mundo e os seus nomes estariam estampados em letras d'ouro em todas as escolas, se a terra fosse habitada por seres racionais.

¹ LA CHALOTAIS, magistrado francez, natural de Rennes (1701-1786), autor do *Essai d'éducation nationale*.

² FROEBEL, pedagogo allemão, natural de Oberweisbach (1782-1852), fundador dos *Jardins d'infancia*.

³ PESTALOZZI, educador suizo, natural de Zurich (1746-1827); o seu methodo serviu de base Falchle, como mais, para o recurgimento da Alemanha.

2 — De um a dez

Quando a creança começa a adquirir o habito de traçar os riscos com regularidade e alguma rapidez, ensinamos-lhe a contal-os á medida que os traça, pronunciando successivamente os seus nomes : *um, dois, trez, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez.*

Em seguida, formamos grupos de riscos, separados por intervallos eguaes, e obtemos assim figuras (fig. 3 e 4), que se lêem :

um, dois, dez riscos verticaes, para a fig. 3 ;
um, dois, dez riscos horizontaes, para a fig. 4.

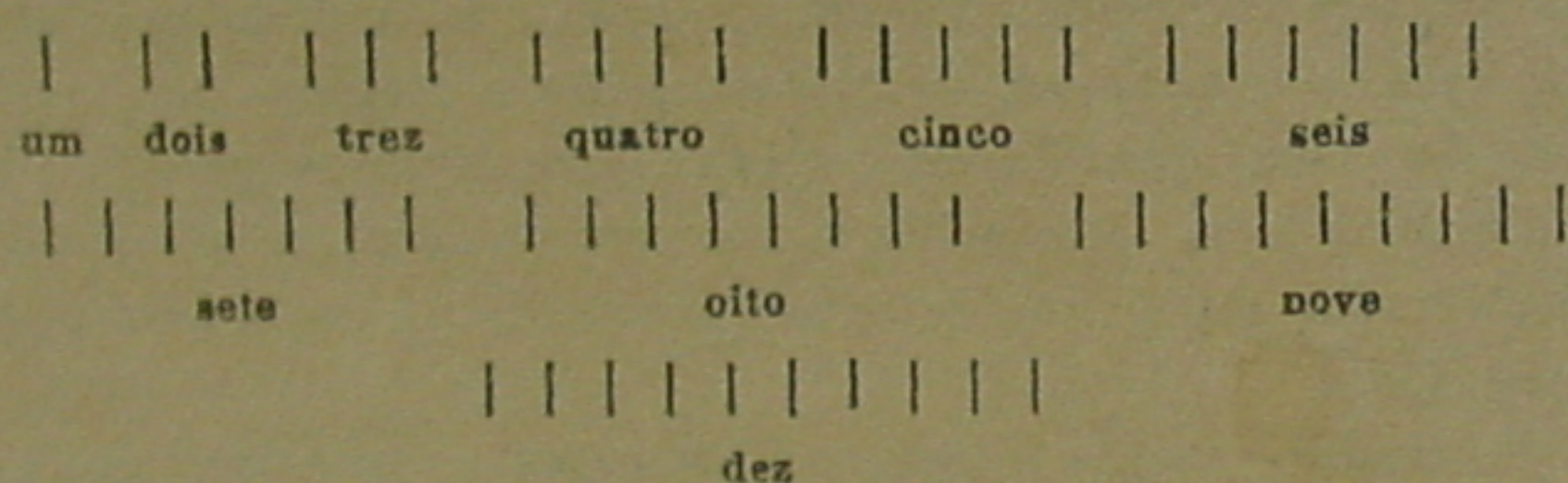


Fig. 3

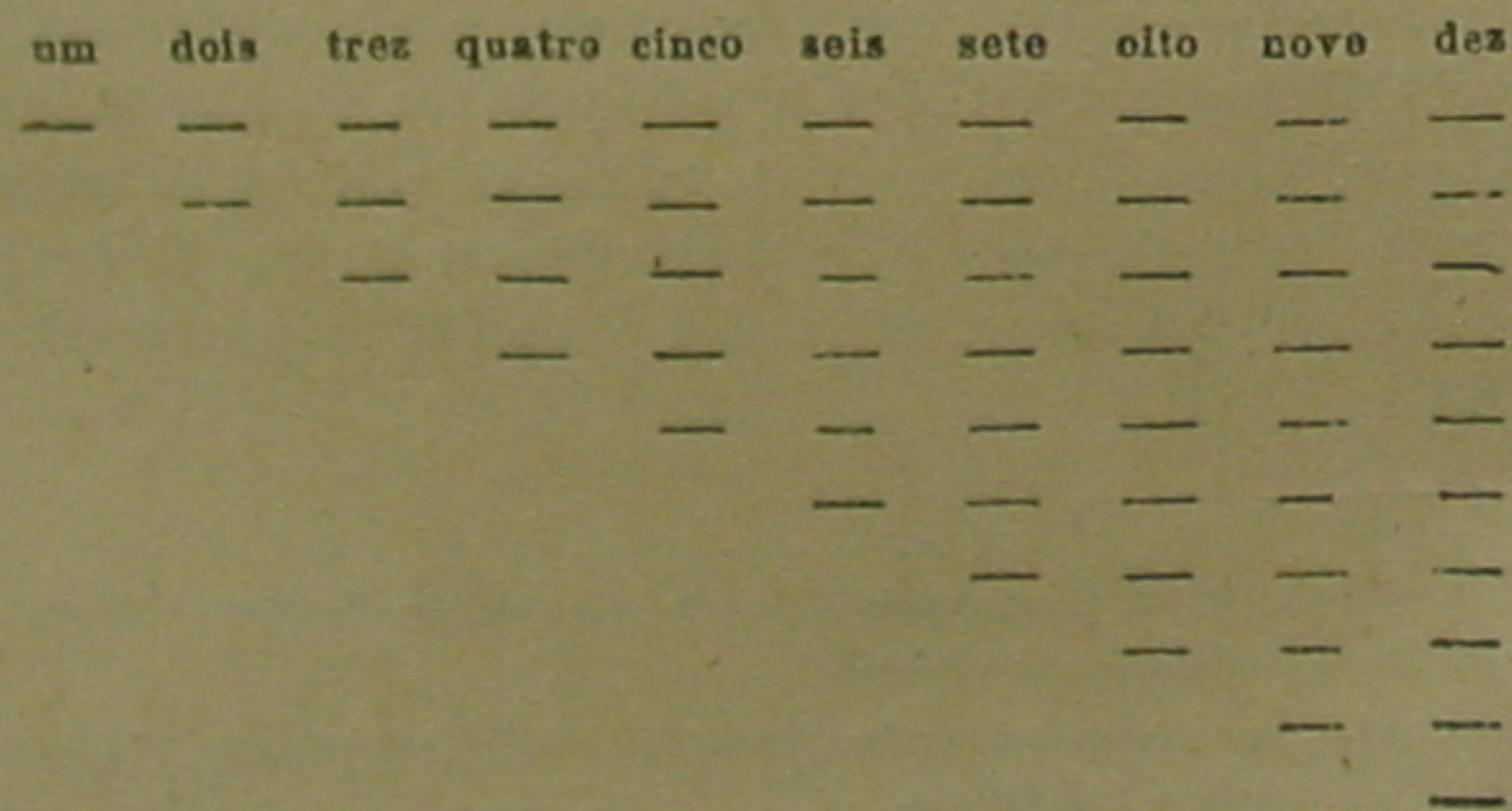


Fig. 4

Simultaneamente servimo-nos de grupos de feijões, de bagos de trigo, de tentos ou de quaesquer outros objectos, e enunciamol-os assim :

um, dois, dez feijões, bagos de trigo, etc.

Em seguida, supomos que os objectos são substituidos por carneiros, cães, homens, etc., e uma vez estes exercicios sufficientemente repetidos e tornados familiares á creança, podemos então dizer-lhe que as expressões de que faz uso : trez riscos, seis bagos de trigo, oito carneiros, por exemplo, são *numeros*, e *numeros concretos*.

Considerando um grupo de cinco riscos, um outro de cinco feijões, um terceiro de cinco tentos; imaginando um de cinco cães, ou de cinco arvores, fazemos-lhe notar que n'estes diferentes casos pronuncia sempre a mesma palavra *cinco*; dizemos-lhe, então, que esta palavra, sem se lhe ajuntar mais nada, representa o que se chama um *numero abstracto*, e que póde servir-se d'ella para designar qualquer outro grupo de cinco objectos : bois, cadeiras, casas, etc.

Não é preciso muito tempo para que a creança saiba contar sem hesitação de um até dez, sejam quaes fôrem os objectos. E' tambem bom habitual-a, o mais cedo possivel, a apanhar n'um só olhar o conjuncto dos objectos, que lhe apresentamos de surpresa — tentos ou feijões, por exemplo, — sem ter necessidade de os contar um por um ; para isso, convem começar por numeros muito pequenos e proceder progressivamente.

3 — Os phosphoros ou palitos; mólhos e feixes

Além dos diversos objectos acima indicados como meios auxiliares para tornar bem comprehensivel á creança a ideia de numero concreto, e que podemos variar até ao infinito, outros existem, que não nos cançaremos de recommendar, e cujo emprego, a nosso ver, é indispensavel. São uns pequenos palitos de madeira, semelhantes aos phosphoros de pau

ordinarios, dos quaes differem apenas pela ausencia do preparado chimico inflammavel. Designamol-os, ás vezes, pelo nome de phosphoros, attenta essa semelhança; e estes phosphoros — que não se accendem — podem considerar-se como modelos dos riscos traçados na ardosia ou no papel quadriculado. Devem ter todos o mesmo comprimento.

Tendo deante de si um monte d'estes palitos e sabendo contar até dez, a creança separa successivamente dez e forma com elles um môlhinho muito regular, que amarra servindo-se d'um d'esses pequenos anneis de cautchu tão commodos e de uso tão espalhado.

Fazemos-lhe vêr então que este môlho, contendo dez palitos, póde denominar-se *uma dezena de palitos*.

Em seguida, a creança arranjará ainda outros môlhos identicos, em numero bastante grande. Verificamos se ella se enganou e, se tal succedeu, mandamol-a emendar o erro comettido.

Mostrando-lhe depois dois môlhos, dizemos-lhe que ao numero de palitos d'esses dois môlhos, reunidos, se chama *vinte* e que portanto :

*um môlho, são dez palitos,
dois môlhos, são vinte palitos.*

Tomando, em seguida, trez, quatro,..... nove môlhos, e procedendo da mesma maneira, mostramos que

trez môlhos	são	trinta	palitos
quatro	»	»	quarenta
cinco	»	»	cincoenta
seis	»	»	sessenta
sete	»	»	setenta
oito	»	»	oitenta
nove	»	»	noventa

Depois de bem comprehendido tudo o que temos dito, e para terminar, pegamos em dez môlhos, que reunimos n'um só volume por meio d'um anel de cautchu mais

largo, formando assim um *feixe*. Explicamos, então, que um feixe é uma *centena* de palitos; que o numero de palitos contidos n'um feixe se chama *cem*, e verificamos que, constituindo dez môlhos um feixe, *dez dezenas é uma centena*.

4 — De um até cem

Tomemos ao acaso um punhado de palitos — em numero inferior a cem — e proponhâmos á creança procedermos juntos á sua contagem. Para isso, vae ella arranjando môlhos, em quanto lhe fôr possivel, pois que um momento chegará em que já não disponha de palitos bastantes para completar um môlho. Collocando, então, á sua esquerda todos os môlhos feitos e á sua direita os palitos, mandamol-a enunciar os dois numeros separadamente; depois, reunindo-os n'um só numero, terá dito assim o numero total dos palitos, que lhe tinhamos confiado.

Se, por exemplo, arranjou *trez* môlhos e sobejaram *oito* palitos, dirá, olhando para a esquerda: «trinta», e, olhando para a direita: «oito»; em seguida, sem interrupção, dirá: «trinta e oito».

Depois de termos repetido muitas vezes este exercicio com collecções de palitos tomadas ao acaso, desmanchamos um feixe, a fim de contar successivamente, um por um, todos os palitos. Começamos a contar um, dois, trez... até dez. Obtemos assim um môlho, que passamos para a nossa esquerda (sem ser necessario atal-o), e continuamos a contar:

*dez-e-um; dez-e-dois; dez-e-trez; dez-e-quatro; dez-e-cinco¹;
dezeses; dezesete; dezoito; dezenove;*

emfim, mais um palito completa um segundo môlho, que collocamos á nossa esquerda, ao lado do primeiro, dizendo: *vinte*

¹ Devemos evitar dizer: onze, doze, treze, quatorze, quinze. Estes nomes aprender-se-hão sem difficuldade alguma, em occasião opportuna. É inutil, por agora, sobrecarregar a memoria da creança.

e continuamos a proceder da mesma fórma até ao nono mó-lho; depois até ao nono palito restante, no qual pegamos dizendo: *noventa e nove*; finalmente, lançamos mão do ultimo, completando o decimo mó-lho, que collocamos á nossa esquerda, ao lado dos nove primeiros, pronunciando a palavra: *cem*.

Nada impede que façamos notar ao nosso estudantinho que acabamos de lhe ensinar a *numeração* de um até cem; podemos mesmo dizer-lhe que quando diz: setenta e trez phosphoros ou palitos, faz o que se chama *numeração fallada*, e que quando dispõe em fila sete mó-lhos á sua esquerda e trez palitos á sua direita, faz *numeração figurada*. Ficará extremamente lisongeadado por se sentir tão sabedor e erudito, tanto mais que ainda não sabe escrever uma lettra ou um algarismo, nem ler: b, a, ba. Mas, desenha riscos; tem olhos; serve-se d'elles para ver, e começa a comprehender o que vê e o que faz.

Sabemos, pois, contar de um até cem. Devemos habituar-nos a contar do mesmo modo quaesquer outros objectos, depois a contar-os mentalmente e, por ultimo, sem os ter á vista. E' o inicio do *calculo mental*, tão importante na pratica e tão facil de effectuar desde a mais tenra idade, se começarmos por cousas muito simples e se procedermos progressivamente.

Mas, ainda não é tudo. Partindo de 1, devemos habituar-nos a contar de dois em dois:

um, trez, até noventa e nove

e explicar que todos estes numeros são *numeros impares*.

Façamos outro tanto, começando por 2:

dois, quatro, seis, até cem

e teremos assim *numeros pares*.

Em seguida, habituar-nos-hemos a contar de trez em trez, de quatro em quatro, partindo de um, para começar, e, depois, de um numero qualquer.

Todos estes exercicios fazem-se primeiramente com objectos — de preferencia palitos —, depois mentalmente.

N'uma palavra: esta manipulação dos numeros, de um até cem, pode-se variar indefinidamente, porque não devemos ter receio de a prolongar emquanto se não tornar fastidiosa e continuar a interessar a creança. E será bom repetil-a de tempos a tempos, mesmo quando a creança já tenha avançado um pouco mais na sua *iniciação scientifica*.

5 — A taboa d'addicção

Sobre uma meza, disponhamos em fileira, da esquerda para a direita, um, dois até nove palitos, separando estes nove grupos uns dos outros. Por baixo do palito unico, colloquemos dois e formemos uma columna que, começando por um, dois, seguirá assim até dez. Uma segunda columna, formada pelo mesmo processo, comprehenderá dois, trez dez-e-um palitos; e, continuando da mesma maneira, teremos nove columnas; o ultimo grupo da nona columna é de dezoito palitos.

E' agora occasião de recorrermos á nossa habilidade de desenhador e á nossa grande aptidão para traçar riscos. Como, porem, é bastante enfadonho traçar os dez riscos correspondentes aos dez palitos d'um molho, representamos este por dois traços mais grossos **H**, unidos por uma pequena barra horizontal, que lembra a presença do anel de cau-chu. Começamos assim a saber escrever os numeros por meio de riscos, e copiando d'este modo a figura, cuja formação acabamos de indicar, obtemos a fig. 5, pelo menos em parte. Para terminal-a, traçamos um, dois, nove riscos, a esquerda dos dois, trez, dez, da primeira columna; finalmente, separamos do resto da figura, por um traço vertical, esta nova columna e, por um traço horizontal, a primeira linha.

A figura, assim obtida, é uma *taboa d'addição*; veremos a breve trêcho porque se denomina assim.

Presta-se ella a diferentes observações interessantes, que

o constructor descobrirá em parte. Em primeiro logar, todos os numeros de cada linha obliqua, subindo da esquerda para a direita, são eguaes; depois, todos os numeros lidos da es-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Fig. 5

querda para a direita na mesma linha horisontal, ou de cima para baixo n'uma columna, são numeros que differem entre si de uma unidade; finalmente, os numeros de cada linha obliqua, descendo da esquerda para a direita, lidos no sentido descendente, são numeros que differem entre si de duas unidades; ora são pares, ora impares.

Nada impede que se leiam estes numeros na ordem inversa, o que nos ensinará a enunciar correntemente os numeros de um em um, ou de dois em dois, no sentido opposto á ordem natural. E' este um exercicio tambem muito importante, por vezes util, de que ainda não tinhamos fallado e que podemos encetar n'esta altura, servindo-nos de numeros pequenos, que não apresentam nenhuma difficuldade séria.

6 — As sommas

Tomemos duas porções de feijões — ou d'outros objectos — e contemol-os, tanto os d'uma, como os da outra. Se os

reunirmos n'um só monte, quantos feijões teremos ao todo? Para o sabermos, basta-nos começar a contar, por sua vez, o monte formado pela reunião das duas porções. Mas, isto é muito moroso e enfadonho, e acarreta grande perda de tempo.

Expliquemos, então, que existe um meio mais rapido para alcançar o resultado desejado; que se chega a elle graças a uma operação, que se chama *adição*, e que o numero dos objectos comprehendidos no monte, e que nós queremos conhecer, se denomina *total* ou *somma*.

Tomando numeros menores do que dez, e recorrendo á fig. 5, fazemos notar que ella nos dá todas as sommas de duas porções ou lotes d'objectos, e pedimos á creança que procure lembrar-se d'ellas. Conseguimos isso repetindo estes exercicios o mais frequentemente possivel, e mandando contar directamente a sômma, quando fôr esquecida.

Mesmo antes da memoria ter completamente fixado esta taboa d'adição, tomemos dois numeros quaesquer — escolhidos por forma que a sua somma seja inferior a cem — e enunciemol-os separadamente. Depois, representemol-os por meio de palitos; sejam: trinta e quatro e vinte e trez.

O primeiro numero representa-se por trez mólhos e quatro palitos; o outro por dois mólhos e trez palitos, que se collocam por baixo d'aquelles — melhor por baixo de mólhos (á esquerda) e palitos por baixo de palitos (á direita).

Perguntamos, então, á creança quantos fazem quatro e trez palitos; ella responderá sete, recorrendo, se fôr preciso, á taboa d'adição, e collocará sete palitos um pouco mais abaixo dos outros. Eguamente perguntamos: quanto fazem trez e dois mólhos? Cinco mólhos, que se collocam por baixo dos mólhos. Temos assim o total: cinco mólhos e sete palitos, ou cincoenta e sete palitos.

Recomeçamos este exercicio com outros numeros, escolhendo alguns, em que só haja mólhos, sem palitos isolados, como sessenta, vinte, oitenta; outros, em que não haja mólhos, isto é: inferiores a dez; mas, de maneira que a somma, tanto de palitos, como de mólhos, seja tambem sempre inferior a dez.

Chegados a este ponto, tomamos outros numeros com os quaes não se dô o mesmo ; por exemplo : quarenta e nove e vinte e cinco.

A operação dispõe-se assim :

quatro mólhos	nove palitos,
dois mólhos	cinco palitos.

Temos então nove e cinco, ou dez-e-quatro palitos, o que nos dá um mólho — que collocamos por baixo dos mólhos — e quatro palitos. Contando os mólhos, começando pelo que acabámos de formar, temos : um e quatro, cinco ; cinco e dois, sete mólhos. O total é, pois, sete mólhos e quatro palitos, ou setenta e quatro.

Este exercicio deve repetir-se, renovar-se com exemplos variados, até á saciedade ; mas, apenas emquanto despertar interesse á creança, sem nunca prolongar a lição até ao ponto d'ella se aborrecer.

Passando depois ás addições de muitos numeros, procederemos do mesmo modo (dispondo sempre as cousas por fórma que o total seja inferior a cem), e faremos notar que se acha assim o numero formado pela reunião de varios lotes, quando se conhece o numero existente em cada lote ¹.

Repitamos ainda estes exercicios com numerosos e variados exemplos, emquanto não provocarem fadiga ou aborrecimento ; quando nos parecer que da parte da creança ha qualquer sombra de má vontade, o castigo consistirá na ameaça — seguida de cumprimento durante alguns dias — de não continuarmos a entretel-a com os jogos de palitos, de tentos, etc., que principiamos a ensinar-lhe. Empregue-se este processo, com alguma habilidade, e ver-se-ha que não é difficil levar novamente, e de moto proprio, os *culpados* aos seus estudos. Mas, não pronunciemos esta feia palavra : estudo, que os pode enfurecer.

¹ Estes exercicios obrigam a saber sommar, sem recorrer á taboa d'addição, um numero mais pequeno do que dez com um mais pequeno do que cem ; por exemplo : sessenta e oito e cinco, setenta e trez. Com a pratica e um pouco de paciencia, consegue-se isto rapidamente.

7 — As differenças

D'um monte de feijões — oitenta e sete, por exemplo — tiramos, ou separamos, uma pequena porção d'elles ; contados, verificamos serem vinte e cinco. Quantos ficaram ? Achar este numero é fazer uma *subtracção* ; o resultado é o *resto* ou *differença*. Note-se desde já que, se ajuntarmos o resto ao numero cerceado, reconstituimos o monte primitivo, isto é : o numero que soffreu a subtracção.

Para achar a differença, escrevemos com palitos o numero maior, oitenta e sete :

oito mólhos	sete palitos
-------------	--------------

e por baixo o mais pequeno, vinte e cinco :

dois mólhos	cinco palitos,
-------------	----------------

tendo todo o cuidado em collocar os mólhos á esquerda e os simples palitos á direita, ficando os palitos por baixo dos palitos e os mólhos por baixo dos mólhos.

Do numero maior, tiramos cinco palitos, ficam dois ; tiramos dois mólhos, ficam seis. Temos, pois, o resto :

seis mólhos	dois palitos,
-------------	---------------

ou sessenta e dois palitos.

Nada mais simples : achámos a differença desejada procurando apenas as differenças entre numeros inferiores a dez, porquanto tirámos cinco de sete e, em seguida, dois de oito.

Mas, nem sempre isto é tão facil. Supponhamos que o monte primitivo é de cincoenta e dois e o que queremos subtrahir é de dezoito — evidentemente mais pequeno do que aquelle. Procedendo como ha pouco :

cinco mólhos	dois palitos
um mólho	oito palitos,

vemos logo que não podemos tirar oito palitos de dois. Tomamos, então, um dos cinco mólhos e collocamol-o á direita, junto dos dois palitos. Quer o desatemos, quer não, vemos claramente que ficamos com dez-e-dois palitos á direita, e que, á esquerda, temos apenas quatro mólhos, em vez de cinco.

Dos dez-e-dois palitos, tiramos então oito: restam quatro; dos quatro mólhos, que ficaram á esquerda, tiramos um: restam trez.

A differença é, portanto,

trez mólhos quatro palitos,

ou trinta e quatro.

Para este caso, precisamos, pois, saber subtrahir um numero menor do que dez d'um numero maior do que dez, mas, sempre inferior a vinte.

Repetindo bastas vezes estes exercicios, variando-os o mais possivel, as differenças — que é necessario ficar sabendo — fixam-se rapidamente na memoria; mas, abstenhamo-nos absolutamente de as fazer decorar e recitar. E' a pratica muito repetida que as fará reter para sempre.

Devemos ter em attenção nunca tomarmos, para numero maior, um numero superior a cem, visto que, por emquanto, não sabemos contar mais além.

8 — Os mil e os milhões

Até agora, sabemos contar até cem. Já é um numero bastante grande, se considerarmos a idade d'um individuo em annos; um homem, que tem cem annos, é muito velho, e os centenarios são raros. Mas, é um numero muito pequeno, se se refere a bagos de trigo; um monte de cem bagos de trigo não tem nada de grande; nem sequer chega para alimentar uma creança durante um dia. Pararmos ahí, é pois impossivel; temos que caminhar muito mais longe, o que, de resto não é difficil.

Chegámos a cem, agrupando os palitos em mólhos de dez e agrupando dez mólhos n'um feixe, que contem uma centena de palitos, ou cem palitos. Mettamos agóra dez feixes n'uma caixa; depois, com dez caixas eguaes formemos um pacote; ponhamos dez pacotes n'uma condeça; com dez condeças enchamos um caixote; com dez caixotes carreguemos uma carreta e com dez carretas, um vagão; finalmente, com dez vagões formemos um comboio.

Recapitulando tudo o que fica dito, vamos indicar as designações dos numeros, que representamos por este processo.

Um phosphoro ou um palito, é o que denominamos uma unidade simples;

N'um mólho, temos dez phosphoros ou uma dezena;

N'um feixe de dez mólhos, cem phosphoros ou uma centena;

N'uma caixa de dez feixes, mil phosphoros ou um milhar;

N'um pacote de dez caixas, dez mil phosphoros ou uma dezena de milhar;

N'uma condeça de dez pacotes, cem mil ou uma centena de milhar;

N'um caixote de dez condeças, um milhão;

N'uma carreta de dez caixotes, dez milhões ou uma dezena de milhão;

N'um vagão de dez carretas, cem milhões ou uma centena de milhão;

N'um comboio de dez vagões, mil milhões ou um billião.

Podiamos caminhar assim tão longe, quanto quizessemos; mas o numero a que chegámos: um billião, é bastante grande para satisfazer a todas as exigencias do uso corrente. Para fazermos uma ideia da grandeza d'esse numero, basta dizer que, se collocassemos encostados uns aos outros, topo a topo, um billião de phosphoros de pau ordinarios, o seu comprimento total excederia sensivelmente a circumferencia da terra. Se pretendessemos contar, um por um, um billião de phosphoros, suppondo que gastavamos um segundo com cada um e que nos occupavamos n'esta pequena contagem durante dez horas por dia, seriam precisos mais de setenta

e seis annos; tarefa esta algo demorada, não muito divertida e fracamente instructiva.

Se agora quizermos contar um grande monte de palitos, começamos por agrupal-os em mólhos de dez, collocando em seguida, á direita, os palitos que subejarem, depois de feitos todos os mólhos: sejam *trez* palitos. Depois, formamos feixes com os mólhos, reunindo-os aos dez; supponhamos que nos sobejaram *oito* mólhos; collocamol-os á esquerda dos *trez* palitos e contamos os feixes aos dez e dez, para obtermos caixas. Sobejaram-nos *cinco* feixes, que collocamos á esquerda dos *oito* mólhos, e, contando as caixas, vemos serem *seis*; collocamol-as á esquerda dos *cinco* feixes e temos, assim, o numero total de palitos:

seis caixas, *cinco* feixes, *oito* mólhos, *trez* palitos.

ou

seis mil quinhentos e oitenta e *trez* palitos.

Unicamente com os mólhos e os feixes, podemos contar e formar todos os numeros até mil, tendo sempre presente que

	feixe	mólho	palito	
significa:	(cem	dez	um)	palitos

Se no numero, que queremos escrever, não houver palitos isolados, ou mólhos, nenhum embaraço isso nos acarreta. Por exemplo:

oito feixes	seis mólhos
-------------	-------------

comprehendem oitocentos e sessenta palitos,

e cinco feixes *trez* palitos

comprehendem quinhentos e tres palitos.

Devemos mandar formar d'este modo muitos numeros inferiores a mil e fazer muitas adições e subtracções, tal qual como indicámos precedentemente, estendendo, porém, o processo até aos feixes, em vez de nos limitarmos aos mólhos.

E' bom fazer notar que deparamos differentes vezes com os mesmos numeros dez e cem, ou dezena e centena. Assim:

palito		um
mólho		uma dezena
feixe		uma centena
caixa	querem dizer	um mil ou milhar
pacote		uma dezena de milhar
condeça		uma centena de milhar
caixote		um milhão
carreta		uma dezena de milhão
vagão		uma centena de milhão

Um numero, que comprehende milhares ou milhões, contar-se-ha, pois, como se contam simples palitos de um até mil. Assim:

trez vagões	duas carretas	sete caixotes
uma condeça		nove caixas
quatro feixes	cinco mólhos	

comprehendem um numero de palitos, que exprimimos d'est'arte:

trescentos e vinte sete milhões	}	palitos.
cento e nove mil		
quatrocentos e cincoenta		

Podemos mandar contar assim alguns numeros, mas sem insistir, por agóra, em numeros muito grandes; restringir-nos-hemos aos mólhos e aos feixes, ou, quando muito, ás caixas.

Em tudo o que precede, tivemos sempre o cuidado de collocar os palitos (unidades) á direita, os mólhos (dezenas) á esquerda d'elles, os feixes (centenas) á esquerda dos mólhos, e assim por diante. Devemos notar que, em rigor, isto é inutil, mas é mais commodo, e que é bom observar sempre esta disposição, porquanto a contagem se faz assim em perfeita ordem. Mais tarde, a creança, tendo adquirido este habito, achel-o-ha natural, quando chegar o momento, em que se torna indispensavel para o calculo.

Para representar por meio de palitos todos os numeros de que temos fallado, e de que é bom fallar para fixar o espirito da creança, torna-se necessario um material um tanto empectivo e nada facil de collocar sobre uma meza ou sobre uma folha de papel, muito antes mesmo de chegarmos a empregar os vagões. Vamos ver como podemos simplificar as cousas e mostrar ao novel mathematico — que ainda não sabe ler, nem escrever, correntemente — que está perfeitamente nos casos de manejar com os seus dedinhos os numeros enormes, de que nos occupamos.

9 — Os tentos de côr

Vermo-nos já tão embaraçados com os nossos mólhos e feixes, quando temos que contar apenas um milhar de phosphoros, é deveras desagradavel. Como já sabemos que os numeros se applicam a qualquer objecto, seja elle qual fôr, substituamos os nossos phosphoros por tentos brancos, o que em nada altera as nossas contas, nem a maneira de as fazer. Substituamos, depois, os nossos mólhos por tentos vermelhos, que são de mais facil manuseamento; é claro que, sempre que nos seja preciso, podemos substituir um tento vermelho por dez tentos brancos. Continuemos: na casa dos feixes, colloquemos tentos côr de laranja; na das caixas tentos amarellos; na dos pacotes, tentos verdes; na das condeças tentos azues; na dos caixotes, tentos indigos; na das carretas, tentos violetas; na dos

vagões, tentos pretos; finalmente, na dos comboios, tentos alongados e brancos.

Os objectos e os numeros correspondem-se, pois, da seguinte fórma:

Phosphoros	{	Comboios, Vagões, Carretas, Caixotes, Condeças, Pacotes, Caixas, Feixes, Mólhos, Phosphoros.
Tentos	{	Alongados, Pretos, Violetas, Indigos, Azues, Verdes, Amarellos, Côr de laranja, Vermelhos, Brancos.
Numeros	{	Biliões, Centenas de milhão, Dezenas de milhão, Milhões, Centenas de milhar, Dezenas de milhar, Milhares, Centenas, Dezenas, Unidades.

Nada nos impede, pois, de escrever todos os numeros que quizermos, até um billião ou ainda além, com os nossos tentos, sem termos que recorrer aos caixotes, aos vagões e aos comboios; igualmente podemos, se isso nos interessar, fazer adições e subtracções. E' mister, porém, ter sempre bem presente que um tento vermelho vale dez brancos; um tento côr de laranja, dez vermelhos, e assim por diante.

Parece, á primeira vista, que em vez de tentos brancos poderíamos empregar moedas de cinco réis, depois substituir os tentos vermelhos por moedas de cinquenta réis e continuar assim até final; mas, isso tornar-se-hia incommodo e embaraçoso, e era necessario possuir uma bella *fortunasinha*, porquanto para representar os biliões era forçoso servirmo-nos de moedas de cinco mil contos. A Casa da Moeda não cunha dinheiro de tal typo, que seria pouco maneavel; e, decedidamente, é melhor contentarmo-nos com o tento branco alongado para representar o billião, o que de resto, é mais economico.

Como fizemos acima, collocaremos sempre os nossos tentos cuidadosamente ordenados, a começar da direita :

Alongado	Preto	Violeta	Indigo	Azul	Verde	Amarello	Côr de laranja	Vermelho	Branco

e, pela simples inspecção de cada casa, sabemos qual a côr que ella deve alojar, segundo o logar que occupa, a partir da direita.

10 — Os algarismos

Sabemos já escrever todos os numeros, pelo menos até aos billhões — e facil seria ir mais além —, com os nossos tentos redondos de differentes côres e os brancos alongados. Para isso, basta-nos collocar em cada uma das casas destinadas aos tentos brancos, vermelhos, etc., ou ás unidades, dezenas, etc., um numero de tentos sempre menor do que dez.

Se houvesse um meio, que evitasse termos que contar todas as vezes esses tentos, seria muito mais commodo. Ora n'esta altura, o nosso discipulo já sabe escrever alguma cousa ; podemos, pois, exercital-o a traçar caracteres, que representem os nove primeiros numeros de que temos necessidade, caracteres que se denominam *algarismos*.

São elles :


um dois trez quatro cinco seis sete oito nove
1 2 3 4 5 6 7 8 9










Quer com o lapis, quer com a penna, devemos habituar a creança a escrevel-os muito eguaes, sem floreados, d'um só traço, excepto o 4 e o 5, que exigem dois, servindo no começo d'uma ardosia com pauta, ou de papel pautado, para

que os algarismos tenham todos a mesma altura, o que, de futuro, é da maxima importancia na pratica do calculo.

Eis o typo que, em principio, devemos adoptar :

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Como méra curiosidade, faremos notar que todos estes algarismos, no dizer d'alguns auctores antigos, tiveram a sua origem na figura , como abaixo se vê, o que, em boa verdade, não está averiguado.

        
1 2 3 4 5 6 7 8 9

O que importa é fazer representar os numeros de palitos por tentos, os de tentos por algarismos, tendo o cuidado de não nos servirmos de numeros muito grandes, sobretudo no começo. Devemos notar que não temos necessidade de escrever os nossos algarismos com côres differentes, porquanto o logar que elles occupam facilmente nos permite saber se representam simples unidades, dezenas, centenas, etc., ou tentos brancos, vermelhos, côr de laranja, etc., ou ainda palitos, môlhos, feixes, etc.

Mas, aqui, temos uma observação importante a fazer. Ainda agóra, quando na representação d'um numero não tinhamos que empregar tentos d'uma dada côr, não collocavamos nada na respectiva casa. Como agóra não temos côres a distinguir — porquanto o logar occupado por cada um dos algarismos, que constitnem o numero, diz-nos, por si só, qual a ordem da casa a que esse algarismo pertence —, se não collocamos nada, confundimos tudo, porque deviamos deixar um espaço em branco exactamente igual á largura d'um algarismo, e não somos tão habeis que escrevamos sempre com essa regularidade. Além d'isso, se a ausencia d'algarismos se dá nas unidades, como podemos saber o que significa o ultimo algarismo da direita ? Para evi-

tar todas estas difficuldades, colloca-se nas casas não occupadas, um caracter redondo, 0, denominado *zéro*¹, que não tem valor algum, mas que occupa a casa. E' um bom e modesto servo, que guarda a casa e que nos diz: «Aqui não está ninguém; nada valho, sou cousa nenhuma; mas, prohibo que se entre.»

Podemos, desde já — multiplicando e variando muito os exercicios — mandar escrever grande quantidade de numeros, mandar ler muitos numeros escriptos, empregando a miude o *zéro*. Se tivermos mais de um alumno, podemos collocar-os em competencia entre si, estimular-lhes a emulação, leval-os a ler e a escrever cada vez mais rapida e correctamente, e declarar-lhes, por fim, que já estão conhecedores da *numeração escripta*.

Chegados a este ponto, é conveniente voltarmos aos exemplos d'addições e subtracções precedentemente feitas com palitos ou tentos, servindo-nos agora dos algarismos. Temos, porém que fazer algumas observações uteis, muito uteis mesmo, que anteriormente não tinham cabimento. Uma d'ellas, concernente á addição, consiste em habituar o alumno a fallar o menos possível, a nunca dizer: «Escrevo tal algarismo e vae tal numero.»

Para nos fazermos comprehender, basta o exemplo d'addição aqui junto, que se deve traduzir em linguagem fallada, da seguinte fórma: 7 e 4: dez-e-um, e 8: dezanove, e 9: vinte e oito, e 4: trinta e dois. Escreve-se, e, sem dizer, nada; depois diz-se: vão 3, e 8: dez-e-um, e 4: dez-e-cinco, e 6: vinte e um, e 2: vinte e trez (escreve-se 3). Vão 2, e 9: dez-e-um, e 5: dezeseis, e 2: dezoito (escreve-se 8). Vae 1, e 3: quatro, e 6: dez: e 2: dez-e-dois. Escreve-se, 2, depois 1 á sua esquerda, e lê-se o total: dez-e-dois mil oitocentos e trinta e dois.

¹ Ignora-se quem foi o inventor do *zéro*; mas, esta ideia, verdadeiramente genial, parece ser d'origem hindu.

Uma segunda observação diz respeito á pratica da subtracção, quando no numero maior se encontra, n'uma dada casa, um algarismo menor do que aquelle que se lê por baixo d'elle. Tomemos o exemplo do n.º 7; de 52, temos que tirar 18.

$$\begin{array}{r} 52 \\ 18 \\ \hline 34 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ 1 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ 8 \\ \hline 4 \end{array}$$

O que fizemos com os nossos palitos fica assim traduzido em algarismos. Mas, não se deve escrever nada mais do que 52 e 18, antes do resultado da operação; pôde, porém, succeder que nos esqueçamos de que nos appossámos de uma dezena do numero de cima e que, portanto, ficaram apenas 4 em vez de 5. Deve-se, então, proceder d'outro modo, tendo em vista que: tirar 1 de 4, é o mesmo que tirar 2 de 5. Dir-se-ha, pois: 8, de dez-e-dois: 4 (escreve-se 4); vae 1, e 1: 2, de 5: 3. Adquire-se assim o habito de transportar 1, sempre que previamente se tenha ajuntado 10 ao algarismo de cima.

Devemos fazer persistentemente muitos exercicios d'addição e de subtracção. A creança interessar-se-ha por elles; mas, não tentemos demonstrar-lhe seja o que fôr. Se algumas vezes ella se mostrar embaraçada, recorramos aos seus tentos ou aos seus palitos; procuremos apenas ensinar-lhe a pratica do calculo e não forçal-a a aprender palavras incompreensíveis. Se ao seu espirito occorrerem observações e se ellas nol-as communicar, escutemol-a com muita attenção. Não tenhamos receio de voltar atraz de tempos a tempos, afim de a habituar a assimilar os seus numeros, escriptos em algarismos, com as collecções de palitos, de tentos ou de quaesquer outros objectos. E, primeiro que tudo, não prolonguemos as lições; não deixemos afrouxar o interesse e sobrevir a fadiga: é este o mais terrivel flagello do ensino.

Se nos parecer conveniente, podemos d'óra avante, embora não haja pressa alguma n'isso, iniciar o alumno no

3087
7944
560
208
29
2004
2004
12832

emprego dos nomes vulgares dos numeros 11, 12, 13, 14 e 15 (onze, doze, treze, quatorze e quinze).

11 — Os palitos topo a topo

Retomemos os palitos, de que já nos temos servido tantas vezes, e supponhamos que temos, por exemplo trez lotes respectivamente de 5, 3 e 4 palitos. Se disposermos todos os palitos em seguida uns aos outros e na mesma direcção, o comprimento da fileira assim formada será de 12 palitos, isto é: dará a somma dos numeros representados pelos trez lotes.

Chegar-se-hia ao mesmo resultado, substituindo os palitos do primeiro lote por uma haste do comprimento de 5 palitos; os do segundo lote, por uma haste do comprimento de 3 palitos, e os do terceiro, por uma haste, cujo comprimento seria o de 4 palitos.

Se, em vez d'estes numeros muito pequenos, tomassemos outros maiores, e se, em lugar de trez numeros, tomassemos tantos quantos nos aprouvesse, procederíamos da mesma forma, repetiríamos tudo o que acabamos de dizer. As hastes seriam mais compridas; haveria mais de trez hastes; eis tudo.

Verificamos, assim, que um numero qualquer pôde ser representado por uma haste de conveniente comprimento, e que, para fazer a somma de varios numeros, temos apenas que collocar topo a topo, umas em seguida ás outras, as hastes que os representam. O comprimento d'esta fileira de hastes é a somma que se procura.

12 — A linha recta

Nas operações indicadas, as hastes, de que acabamos de fallar, devem sempre ser collocadas *em linha recta*, umas em seguida ás outras. O que é, pois, uma *linha recta*? O traço deixado sobre o papel por um lapis bem aparado, deslizando ao longo d'uma regua muito direita, ou um fio

extremamente fino — um cabello, por exemplo — tendido entre dois supportes, dão-nos a ideia do que seja uma linha recta. Esta noção geral basta-nos; vêmos claramente que, se, por exemplo, a regua fôsse mais comprida e a folha de papel maior, podíamos prolongar o traçado da nossa linha recta, quer para um lado, quer para o outro, e, como nunca ha razão para se parar, comprehendemos que a linha recta é, como se diz, uma *figura indefinida*. Nunca nos servimos d'ella senão até ao ponto ou limite, de que carecemos; mas, este ponto ou limite, pôde ser tão afastado quanto nos convenha.

Se tomarmos uma recta (fig. 6) e se sobre ella marcarmos um ponto A e um ponto B, a porção de recta AB compre-

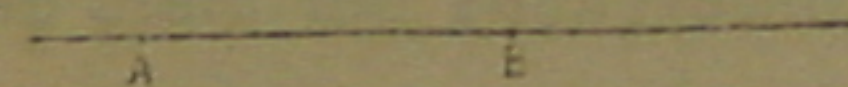


Fig. 6

hendida entre estes dois pontos, é o que se chama um *segmento de recta*.

As hastes, de que nos servimos ha pouco, applicam-se pois sobre segmentos de recta, e o comprimento d'estas hastes é o mesmo que o dos segmentos sobre que ellas se applicam.

Assim (fig. 7), para voltarmos ao exemplo do numero pre-

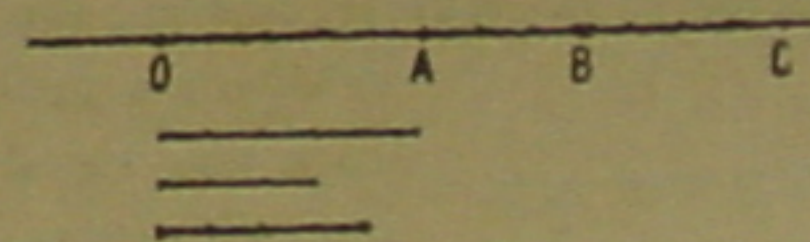


Fig. 7

cedente, tomemos uma linha recta sobre a qual marcamos, pouco importa onde, um ponto O; a partir d'este ponto, marquemos um segmento OA, do comprimento da nossa 1.^a haste: 5 palitos; a partir de A, marquemos um segmento AB, tendo o comprimento da 2.^a haste: 3 palitos; por ultimo, a partir de B, um outro BC, cujo comprimento é igual ao da 3.^a haste: 4 palitos. O segmento OC tem de compri-

mento 12 palitos (somma de 5, 3 e 4). Vêmos, pois, que o processo é sempre o mesmo, quer se adicionem números, hastes ou segmentos de recta: a adição faz-se collocando as hastes ou os segmentos, topo a topo, em seguida uns aos outros.

Esta operação deve necessariamente fazer-se collocando os segmentos sempre n'um mesmo sentido; assentemos que seja da esquerda para a direita, invariavelmente.

Sobre figura 7, podemos, assim, fazer sommas, que podem ir tão longe quanto quizermos, para a direita de O; mas, nunca para a sua esquerda.

13 — As differenças por meio de palitos

Não é mais difficil achar uma differença do que uma somma, servindo-nos dos nossos palitos. Supponhamos, por exemplo, que se trata de tirar 4 de 11. Collocamos 11 palitos, topo a topo, em linha recta; depois, começando pela extremidade da direita d'esta fileira, tiramos 4 palitos; ficamos uma fileira de 7 palitos; 7 é a differença entre 11 e 4.

Se em vez de palitos empregarmos, de começo, uma haste do comprimento de 11 palitos, é obvio que se torna necessario cortar-lhe um pedaço com o comprimento de 4, para termos a differença. Existe, porém, um outro modo de

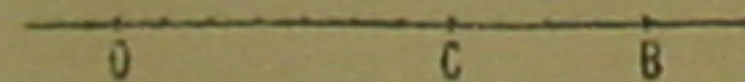


Fig. 8

resolver o problema, que consiste em substituir as hastes por segmentos, como passamos a mostrar. Sobre uma recta (fig. 8, marquemos, a partir do ponto O, um segmento OB, do comprimento de 11 palitos. A partir de B, marquemos um segmento do comprimento de 4 palitos; mas, em vez de o traçarmos da esquerda para a direita, marquemos-o ao contrario da direita para a esquerda, em BC. O segmento OC representa, na sua extensão, a differença 7.

Podemos resumir o que acima fica exposto dizendo que:

para sommar differentes segmentos, devemos marcal-os um logo em seguida aos outros, *no mesmo sentido*, e para abater um segmento d'um outro, devemos marcal-o logo em seguida a este, mas *em sentido contrario*.

Todas estas cousas são, de resto, não só faceis, mas evidentes; basta variar um pouco os exemplos para que a creança se interesse por ellas, e não nos devemos arrear de a fazer manusear o mais possivel os palitos e as hastes (muito faceis de arranjar) e reproduzir as suas operações sobre a ardosia ou sobre o papel.

O nosso discipulosinho vae penetrar agóra nas regiões da «alta sciencia». Se elle se envaidecer com isso, calmemos e refreemos essa manifestação, lembrando-lhe, por um lado que a Algebra é uma das partes mais faceis da sciencia mathematica, e, por outro lado, que presentemente elle nada sabe, não apprende nada, senão umas brincadeiras ou passatempos, que lhe virão a aproveitar mais tarde, pela lembrança que d'ellas guardar.

14 — Entremos na Algebra

Até agóra, apprendemos a fazer addições, dando sommas, e subtracções, dando differenças. Por exemplo: a somma de 8, de 5 e de 14, é 27. Convencionou-se um signal +, que representa a addição e se denomina *mais*, e um simbolo =, que se denomina *igual a*. O exemplo, que acabamos de citar, pôde, pois, escrever-se

$$8 + 5 + 14 = 27$$

e ler-se: 8 mais 5 mais 14, igual a 27.

Da mesma sorte, para a subtracção, servimo-nos d'um signal —, que se denomina *menos*; e se escrevermos

$$7 - 5 = 2,$$

leremos: 7 menos 5, igual a 2, o que quer dizer que, tirando 5 de 7, obtemos 2, como differença.

Todas as operações d'esta natureza podem traduzir-se por hastes ou segmentos, como vimos precedentemente. Assim, olhando para a Fig. 7, vemos que ella significa

$$5 + 3 + 4 = 12,$$

o que ainda póde escrever-se

$$OA + AB + BC = OC.$$

A Fig. 8 significa

$$11 - 4 = 7$$

ou ainda

$$OB - CB = OC.$$

Podemos recrear-nos a traduzir, sob estas differentes fórmas, quantas operações quizermos.

Compreende-se facilmente que em logar de 8, 5, 14, ou de 5, 3, 4, nos exemplos precedentes, podemos tomar quaesquer outros numeros. Se os denominarmos a, b, c , quando escrevermos

$$a + b + c = s$$

exprimimos sempre a somma de trez numeros; somma que é 27 no primeiro exemplo, 12 no segundo.

Da mesma fórma

$$a - b = r$$

exprime que a differença, que se obtem tirando b de a , é igual a r . Por exemplo: na Fig. 8, $a = 11$, $b = 4$ e $r = 7$.

E' de grande commodidade, muitas vezes, indicar as operações assim por signaes e substituir os numeros por letras. E' bom habituarmo-nos cedo a esta maneira de es-

crever, que é de grande vantagem para o futuro e evita muito trabalho. Precisamos tambem saber o que significa

$$() + () \text{ ou } () - ()$$

quando escrevemos alguma cousa dentro dos parentheses. Significa, pura e simplesmente, que se deve substituir cada expressão comprehendida entre parentheses pelo seu resultado effectuado. Por exemplo:

$$(a - b) - (c - d) + (e - f)$$

se a, b, c, d, e, f ,
são substituidos por 10, 2, 9, 6, 7, 5,
quer dizer $(10 - 2) - (9 - 6) + (7 - 5)$
ou $8 - 3 + 2$, isto é: 7.

Todas estas fórmas de escrever são, ás vezes, chamadas *algebricas*. Mas, as palavras pouca importancia teem; o que importa são as cousas, e as paginas, que seguem, vão dar-nos a conhecer cousas novas.

Quando estamos a sommar numeros, nada impede que continuemos a operação indefinidamente; nada nos obriga a parar em dada altura. Sempre que tivermos varios lotes de feijões, podemos reunil-os n'um só. Por outras palavras: a addição é sempre possivel, e podemos traduzil-a em algarismos, em tentos, em phosphoros, em palitos, em hastes, em segmentos de recta, como melhor nos parecer.

Outro tanto não succede com a subtracção. Se tivermos, por exemplo, um lote de 7 tentos, e quizermos tirar d'elle 10, é, como já notámos, manifestamente impossivel.

Todavia, se recorrermos ao que ficou dito mais acima e ao que a Fig. 8 traduz, vemos que, para fazer esta subtracção por meio de hastes ou segmentos de recta, temos que marcar (Fig. 9) sobre uma recta um segmento OB, do comprimento de 7 phosphoros, e,

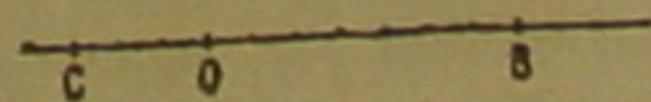


Fig. 9

depois, a partir do topo e em sentido contrario, isto é: da direita para a esquerda, marcar um segmento, tendo por comprimento o numero a sub-

trahir. Ora, isto é sempre possível, e a Fig. 9 claramente o mostra, suppondo, como nós fizemos, que o numero a subtrahir é 10; obtemos assim — sendo o comprimento BC igual a 10 — um ponto C e temos, como resto, o segmento OC. Mas, o ponto C não está aqui, como na Fig. 8, á direita do ponto O, está á esquerda; o segmento OC é dirigido da direita para a esquerda e o seu comprimento é igual a 3.

Um numero assim, chama-se *negativo*; escreve-se -3 , e lê-se: *menos 3*. Temos, pois, o direito de escrever a nossa subtracção d'esta maneira:

$$7 - 10 = -3$$

A criação dos numeros negativos torna, portanto, possíveis todas as subtracções, que não o eram com os numeros ordinarios, que, por opposição, se chamam *numeros positivos*.

Na Fig. 10, toda a parte da recta á direita do ponto O representa o dominio dos numeros positivos, ou da Arithmetica (flecha 1); toda a parte á esquerda (flecha 2) representa o dominio dos numeros negativos, e o conjuncto das duas flechas, comprehendendo a linha recta na sua totalidade, nos dois sentidos, representa o dominio da Algebra.

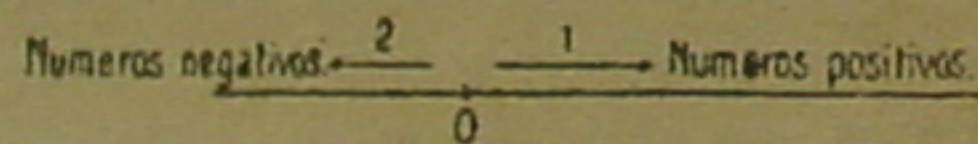


Fig. 10

Agóra, quando quizermos representar os numeros por meio de hastes ou de segmentos, temos, pois, que attentar no *sentido* d'esses segmentos, ou no *signal* do numero. Assim (Fig. 9), OB é um segmento positivo, representando o numero 7, ou $+7$; OC é um segmento negativo, representando o numero -3 , negativo tambem.

Para não nos enganarmos, somos obrigados a considerar n'um segmento os seus dois extremos, dos quaes um se denomina *origem* e o outro *extremidade* do segmento; o *sentido* do segmento é sempre o que vae da origem para a extremidade. Quando escrevemos: segmento AB, queremos sempre dizer que A é a origem e B a extremidade.

Isto obriga-nos a modificar um pouco, e d'uma maneira facil, o nosso material de palitos. Basta corar ligeiramente de preto um dos seus dois topos, mergulhando-o, por exemplo, em tinta da China, substancia corante absolutamente inoffensiva; convencionar-se-ha que o topo preto representa sempre a extremidade. De sorte que, quando collocamos trez palitos em fileira, com o topo preto para a direita, representamos assim o numero $+3$; quando dispomos em fileira dois d'elles com o topo preto para a esquerda, representamos o numero -2 ; e assim por deante.

Dir-se-ha, pois, que, para addicionar um numero a outro, se collocam sempre topo a topo, no sentido conveniente, os segmentos que os representam. Por exemplo: para sommar 11 e -4 , toma-se um segmento OB de comprimento 11, dirigido da esquerda para a direita, e a seguir um segmento BC de comprimento 4, dirigido da direita para a esquerda. Ora (Fig. 8), foi precisamente o que fizemos para obter a differença $11 - 4$. Póde-se portanto escrever $11 + (-4) = 11 - 4 = 7$, e as subtracções reduzem-se assim a addições.

Os exercicios com numeros negativos podem variar-se tanto quanto quizermos e são extremamente facéis com os nossos palitos de extremidade preta. Nada impede que arranjemos tambem hastes do comprimento de alguns palitos e que igualmente coremos de preto um dos seus topos, para distinguir a sua extremidade. Rapidamente nos familiarisamos com esta noção tão simples, e tão necessaria, do signal ou do sentido dos numeros.

Demais, se algumas vezes os numeros negativos causam surpresa á primeira vista, basta reflectir um pouco para encontrar a sua explicação perfeitamente natural. Um numero $-$ diz-se $-$ não póde ser menor do que nada, isto é: do que zero. Comtudo, na linguagem corrente, dizemos todos os dias que o thermometro marcou tantos graus abaixo de zero. Quando queremos indicar a altura d'um ponto acima do nivel do mar, comprehendemos sem a menor difficuldade que, se esse ponto estivesse no fundo do mar

estaria abaixo do seu nível. Se, partindo de nossa casa, quizermos tomar nota da extensão do percurso que faríamos n'um determinado sentido, e se caminhar-mos em sentido contrario, sabemos perfeitamente que não podemos empregar o mesmo numero para representar duas cousas oppostas. Um homem sem fortuna alguma, mas que nada deve, não é rico; se, porém, falto de fortuna, tem dividas, podemos dizer d'elle que tem menos do que nada: a sua fortuna é negativa. Uma rolha de cortiça tem um certo peso; se a abandonarmos no ar, cae. Ponhamos essa rolha debaixo d'agua e abandonemol-a; vel-a-hemos subir: o seu peso tornou-se negativo, pelo menos na apparencia. N'uma palavra, os numeros negativos, longe de terem um character mysterioso, adaptam-se da maneira mais natural a todas as quantidades, e muitas d'estas é sabido que, pela sua propria essencia, admittem duas modalidades oppostas: quente e frio, alto e baixo, credito e debito, futuro e passado, etc. Por meio de exemplos concretos, podemos fazer penetrar no cerebro das creancinhas estas noções simples, porquanto são verdadeiramente infantis. Vel-as-hemos tomar verdadeiro interesse pelas nossas explicações, se tivermos o cuidado de as amenisar com manipulações com palitos e hastes, e isto é muito mais proveitoso para a formação do seu espirito, do que a recitação monotona de regras incomprehendidas ou de definições incomprehensíveis.

Ainda não praticaram, á laia de brincadeira, senão as primeiras operações da arithmetica: a addição e a subtracção; ainda não ha muito tempo que sabem escrever algarismos ou traçar algumas lettras, e eil-as já lançadas — e nós tambem — a toda a velocidade, na *Algebra*. Se pronunciar-mos deante d'ellas esta palavra tremenda, não deixemos de lhes dizer que essa sciencia, tão util e tão bella, é relativamente moderna e que pertence a Francisco Viète¹ a gloria de ter sido o seu inventor.

¹ VIÈTE; mathematico francez, natural de Fontenay-le-Comte (1540-1603).

15 — Contar, medir e comparar

Desde o começo, que o nosso proposito constante tem sido, como se tem visto, contar e medir. Se temos deante de nós um monte de bagos de trigo e se, contando-os, verificamos que são 157, este numero, como já fizemos notar, podemos servir igualmente para representar uma collecção de tentos, de phosphoros, d'arvores, de carneiros ou de qualquer outra cousa. Se, para determinar um comprimento, collocamos topo a topo uma porção de palitos, todos eguaes entre si, e se empregamos 157 para medir esse comprimento, dizemos que ella é de 157 palitos. Em todos estes diferentes casos, nada podiamos avaliar, se não possuíssemos a noção do que seja um bago de trigo, um tento, uma arvore, um carneiro, um palito.

Um numero só tem razão de ser pela comparação que d'elle fazemos com o objecto unico — (bago de trigo, tento, etc.) — sem o qual não o podemos formar; este objecto unico chama-se *unidade*. Tal comparação é o que se denomina uma *relação*, e esta ideia de relação leva-nos a dizer que um numero é simplesmente a relação entre a collecção e a unidade.

E' absolutamente necessario reter bem esta noção, porquanto a unidade não é sempre a mesma. Assim, depois de termos formado *mólhos* de palitos, tomemos uma porção d'elles e contemol-os; vemos que são sete. Sete é, pois, a relação entre a nossa collecção de mólhos e um mólho, que é a unidade.

Espalhemos agora os nossos palitos, desmanchando previamente os mólhos, e contemol-os; o palito é que passa a ser a unidade. Contámos setenta; este numero é a relação entre a mesma collecção e um palito.

D'egual modo, podemos tomar trez feixes de palitos; se fizermos a contagem por mólhos, acharemos trinta mólhos; se por palitos, trezentos.