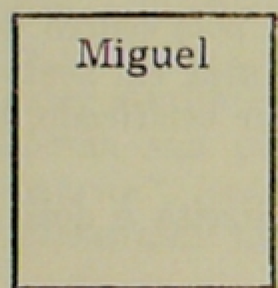
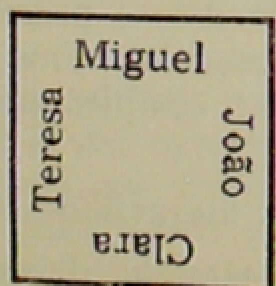
"Se dermos dois giros quaisquer, que você pode executar tantas vêzes quantas quiser, um após o outro, será possível atingir qualquer posição ou apenas algumas?"

A resposta a essa pergunta depende, evidentemente, dos dois giros que foram escolhidos. Naturalmente, poderemos atingir qualquer lugar se escolhermos o "rolar para a direita" e o "giro diagonal", ou, na aldeia, se tomarmos o ônibus que pára após cada rua estreita ou (como segundo) o que pára depois de cada rua larga. Mas o que acontecerá se tomarmos outros itinerários na aldeia, ou outros pares de rotações do cubo? Isso nos conduzirá ao estudo de subgrupos, como veremos.

É lógico que poderemos igualmente representar a aldeia no cubo. Suponhamos que tôdas as 24 casas da aldeia tenham sido marcadas com os nomes das crianças. Podemos então tomar o nosso cubo e escrever na parte de cima da face do cubo o nome de uma das casas, que pode ser escolhida à vontade (o fato da representação funcionar, seja qual fôr o nome que ponhamos na face que escolhemos para iniciar, torna o jôgo ainda mais "mágico" para as crianças). Podemos pôr



na parte superior da face. Supondo que façamos um giro no sentido dos ponteiros, de um ângulo reto, em tôrno de um eixo vertical que passe pelo centro, como se fôsse a viagem por uma rua larga (em vez de "rolar para a direita"), e poderemos imediatamente ir colocando os nomes das crianças cujas casas vamos encontrando ao fazer o percurso pelas ruas largas em que mora o Miguel. O resultado poderá ser:



o que significa que, ao seguir por uma rua larga, partindo da casa de Miguel, encontraremos a de Teresa, depois a de Clara, em seguida a de João, e regressaremos à de Miguel. A

mesma seqüência será produzida girando o cubo cuja face superior é mostrada acima, em sucessivos ângulos retos, no sentido dos ponteiros do relógio. Depois, deve-se escolher uma diagonal para representar o "ônibus triangular" na aldeia e, com a aplicação sucessiva do giro de um ângulo reto em tôrno do eixo vertical e do giro diagonal, cada face será coberta com quatro nomes. Dêsse modo, a aldeia será representada no cubo.

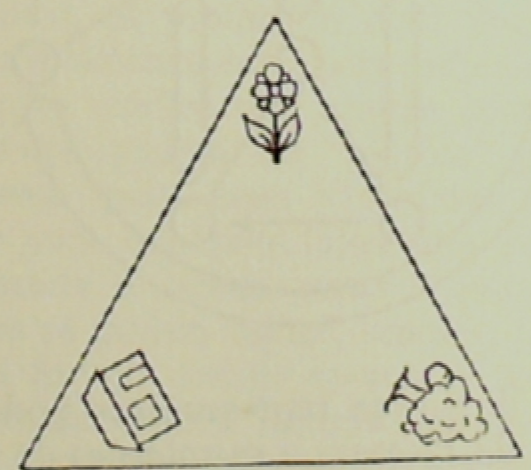
3. *A aldeia de 12 casas e o tetraedro*

De modo semelhante ao que fizemos com o cubo, poderemos fazer com o tetraedro regular. Teremos de providenciar um tetraedro regular de madeira, com seus sete eixos de rotação, como material de manipulação. Os eixos são os seguintes:

I) uniões de vértices com centros da face oposta (em número de quatro)

II) uniões dos pontos médios das arestas opostas (em número de três)

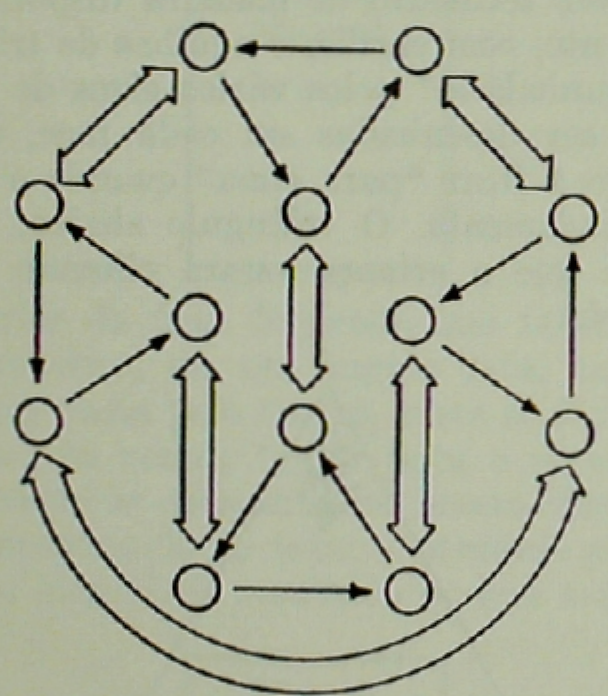
Se não houver tetraedro de madeira disponível, êle pode ser feito, fàcilmente, com cartão, e agulhas de tricô podem ser usadas para "apunhalá-lo" pelos vários eixos de rotação. Três figuras poderão ser desenhadas em cada face, uma em cada "canto", de modo a ficar "para cima" quando o tetraedro fôr colocado apropriadamente. O triângulo abaixo, por exemplo, pode ser a face que a criança estará olhando e as figuras poderiam ser assim:



Poderíamos dizer que o tetraedro está, agora, na posição "flor". Quando as 12 figuras tiverem sido desenhadas, de modo que cada face tenha suas três figuras, poderemos começar o jôgo perguntando às crianças qual o eixo que teremos de usar (isto é, onde teremos de "apunhalar" o bloco com a agulha), para que determinada figura fique em posição. Poderemos, da mesma forma, restringir os movimentos e decidir, por exemplo, que só poderão ser feitos dois movimentos, os quais poderão ser:

I) fazer um têrço de um giro no sentido dos ponteiros do relógio, em tôrno de um eixo vertical,
II) fazer meio giro em tôrno do eixo que passa pelo ponto médio da aresta à direita do triângulo em frente à criança e pelo ponto médio da aresta oposta a esta.

Pode-se, então, executar o jôgo de conseguir determinada figura com o número mínimo de movimentos. Será sempre possível chegar a certa figura, partindo de outra, em um número finito dêsses movimentos, desde que um dos movimentos seja um têrço de giro em tôrno de um eixo que passe por um vértice e pelo centro da face oposta e o outro movimento seja meio giro em tôrno de qualquer eixo que una os pontos médios de duas arestas opostas. A "aldeia" correspondente a êsse jôgo é a seguinte:



e os mesmos jogos de mútua representação podem ser executados, entre a aldeia de 12 casas e as rotações do tetraedro, como foram entre a aldeia de 24 casas e as rotações do cubo.

Pode ser observado que nenhum itinerário de ônibus deverá ter mais que três paradas na aldeia. Naturalmente, há quatro linhas de ônibus com três paradas, e três outras com duas paradas. Os itinerários são:

2 ← COM 3 PARADAS

1 ← ITINERÁRIOS	*em um sentido*	*no sentido oposto*
Itinerário A	estreita	estreita, estreita
Itinerário B	estreita, larga	larga, estreita, estreita
Itinerário C	estreita, estreita, larga	larga, estreita
Itinerário D	estreita, larga, estreita	larga, estreita, larga

2 ← COM 2 PARADAS

1 ← ITINERÁRIOS

Itinerário E	estreita, estreita, larga, estreita
Itinerário F	larga
Itinerário G	estreita, larga, estreita, estreita

Pode-se verificar que, se tomarmos os itinerários E, F e G, sòmente atingiremos três outras casas além daquela de onde partimos. Se usarmos outro itinerário, ou seja H para "voltar para casa", então os itinerários

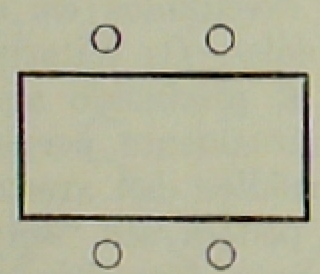
$$(H, E, F, G)$$

formam um grupo fechado de movimentos, no sentido de que quaisquer dois dêles, executados em sucessão, poderiam ser substituídos por um dêles. Os leitores matemáticos reconhecerão o grupo Klein. É produzido aqui por meios giros em tôrno de três eixos mùtuamente perpendiculares, ou seja, os que unem os pontos médios das arestas opostas. A natureza "fechada dêsse grupo poderá ser "sentida" pelas crianças se lhes dermos "passes" para êsses itinerários e lhes dissermos que podem viajar para qualquer lugar que quiserem, mas que só podem sair quando o ônibus parar e que não é permitido caminhar, mas que só podem tomar, sempre, um dêsses quatro ônibus. Da mesma forma, usando *apenas* os meios giros do tetraedro, só aparecerão quatro figuras, por mais que giremos em tôrno dos três eixos. Também será observado que, se tivermos "passes" para os itinerários H e E, ou H e F, ou H e G, apenas duas casas poderão ser visitadas. Os relacionamentos entre essas operações são dados pelo grupo dois, ou seja:

$$H\ H = H, \qquad H\ E = E$$
$$E\ H = E, \qquad E\ E = H$$

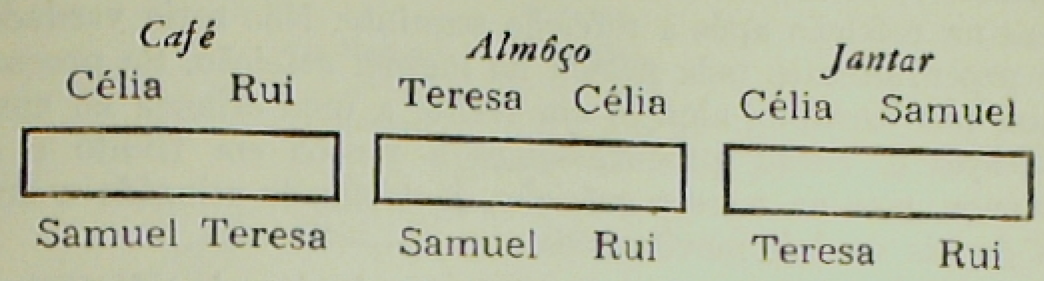
Isso é fundamental para uma grande parte da Matemática, dando, por exemplo, as regras de multiplicação de números positivos e negativos (H correspondendo à multiplicação por um número positivo, E correspondendo à multiplicação por um número negativo), ou as tábuas de adição de números pares e ímpares (H correspondendo aos pares e E aos ímpares). De fato, quaisquer mudanças de estado que, quando realizadas duas vêzes, restauram o estado original podem ser descritas por essa espécie de estrutura simples. Pode-se observar que, começando com as 24 rotações do cubo, podemos chegar ao tetraedro, ao grupo Klein e, finalmente, ao grupo dois, invertendo a ordem normal de procedimento de começar pelo simples para atingir o complexo. Nesse caso, apresentamos, em primeiro lugar, a situação complexa, caminhando gradualmente, por meio de sucessivas situações apropriadas, para os relacionamentos matemáticos fundamentais.

A fim de permitir a probabilidade de aprender uma estrutura abstrata, em vez das propriedades de apenas um ou dois jogos particulares, poderá ser considerado desejável introduzir alguma outra "personificação" que tenha a mesma estrutura que as rotações do tetraedro regular. Tal personificação poderá, por exemplo, ser a estória das três refeições. Digamos que haja três crianças em uma família, cujos nomes sejam Célia, Rui, Teresa e Samuel. Para cada uma das três refeições, elas se sentam a uma mesa retangular, duas de cada lado, como indicado no diagrama:



As crianças gostam de mudar de lugar, mas só querem sentar ao lado da mesma pessoa durante uma das refeições. Para tornar as coisas ainda mais variadas, elas também só querem sentar em frente a uma mesma pessoa em uma das três refeições. Como poderemos arranjar as crianças para o café, o almôço e o jantar, de forma a atender a essas condições? Se uma criança já se sentou em frente a outra uma vez, não quererá fazê-lo outra vez, mas não se incomodará de sentar-se ao seu lado em outra refeição. Se se sentou ao lado de outra criança uma vez, não quererá sentar-se ao seu lado em outra refeição, mas poderá sentar-se em frente a ela. O leitor poderá achar

agradável tentar achar uma solução para o problema acima antes de olhar o diagrama abaixo, onde se apresenta uma solução.



Pode-se verificar que o problema admite muitas soluções. Se fizermos, por exemplo, uma mudança em diagonal em qualquer uma das mesas, obteremos outra solução. Da mesma forma, se mudarmos os pares de crianças que se sentam juntas em qualquer uma das mesas, haverá outra solução. Se trocarmos os dois pares de crianças que se sentem em frente um do outro, em qualquer das mesas, será ainda outra solução. Haverá, portanto, um grande número de soluções. Contudo, se dermos êsse problema a qualquer grupo de pessoas inteligentes, criaremos uma confusão bem grande, muitos até afirmando que o problema não tem solução.

O leitor já poderá estar imaginando como tal jôgo poderia ter qualquer relevância com as rotações do tetraedro. O fato de havermos escolhido doze crianças poderá, talvez, dar-lhe a idéia de que não estamos muito longe do objetivo. Para nos permitir chegar perto da identificação da estrutura dos dois jogos, poderemos sugerir o seguinte tipo de exercício:

"Onde se sentará, na próxima refeição, a criança que está junto a Samuel?"

"Então, onde se sentará a criança que está ao lado dela, nessa nova refeição, na refeição seguinte?", e assim por diante.

Por quanto tempo teremos de continuar, antes de estar de volta a Samuel? No café, Teresa está ao lado de Samuel; então vejamos Teresa no almôço. Êste é o nosso primeiro movimento. No almôço, Célia está ao lado de Teresa; então procuramos Célia no jantar; é o nosso segundo movimento. No jantar, Samuel está ao lado de Célia; procuremos Samuel no café do dia seguinte. Estamos, então, de volta onde começamos, depois de nosso terceiro movimento, porque estamos com Samuel no café.

Quaisquer que sejam as combinações de movimentos que tentemos, estaremos sempre de volta à mesma pessoa na refeição onde começamos, mas no dia seguinte. Portanto, são necessários três "movimentos" para nos levar de volta aonde começamos, se procurarmos as pessoas sempre na refeição seguinte. O mesmo seria verdadeiro se procurássemos pelas pessoas na refeição após a refeição seguinte. Não seria verdadeiro se procurássemos pela pessoa na mesma refeição. Se procurarmos, por exemplo, alguém em frente a uma criança na mesma refeição e, então, procurássemos a pessoa em frente a essa criança, mas na mesma refeição, já teríamos atingido a criança depois de dois movimentos.

Parece que há alguns movimentos de duas batidas e outros de três batidas em nosso jôgo. Isso é certamente verdadeiro com o tetraedro. Se sustentarmos um tetraedro pelos pontos médios de um par de arestas opostas, mantivermos nossas mãos bem imóveis e girarmos o tetraedro com nossos dedos até que êle ocupe o mesmo volume que antes, veremos que êle executará um meio giro, já que, se realizarmos essa caprichosa operação mais uma vez, estaremos de volta à nossa posição de partida. É claro que há três dêsses meios giros que podemos realizar com o tetraedro, e êles correspondem aos movimentos de procurar a criança oposta, a que está ao lado ou a que se senta diagonalmente oposta, mas *na mesma refeição*. Há oito diferentes giros de 120 graus, dois em tôrno de cada um dos quatro eixos que passam por um vértice e a êstes correspondem movimentos como os que estamos considerando, isto é, aquêles em que se introduz uma mudança de refeição. O mapa do tetraedro poderia ser preenchido, escolhendo-se, por exemplo:

I) o movimento para a refeição seguinte, com a mesma criança,

para corresponder a

um têrço de um giro no sentido dos ponteiros do relógio, em tôrno de um eixo vertical;

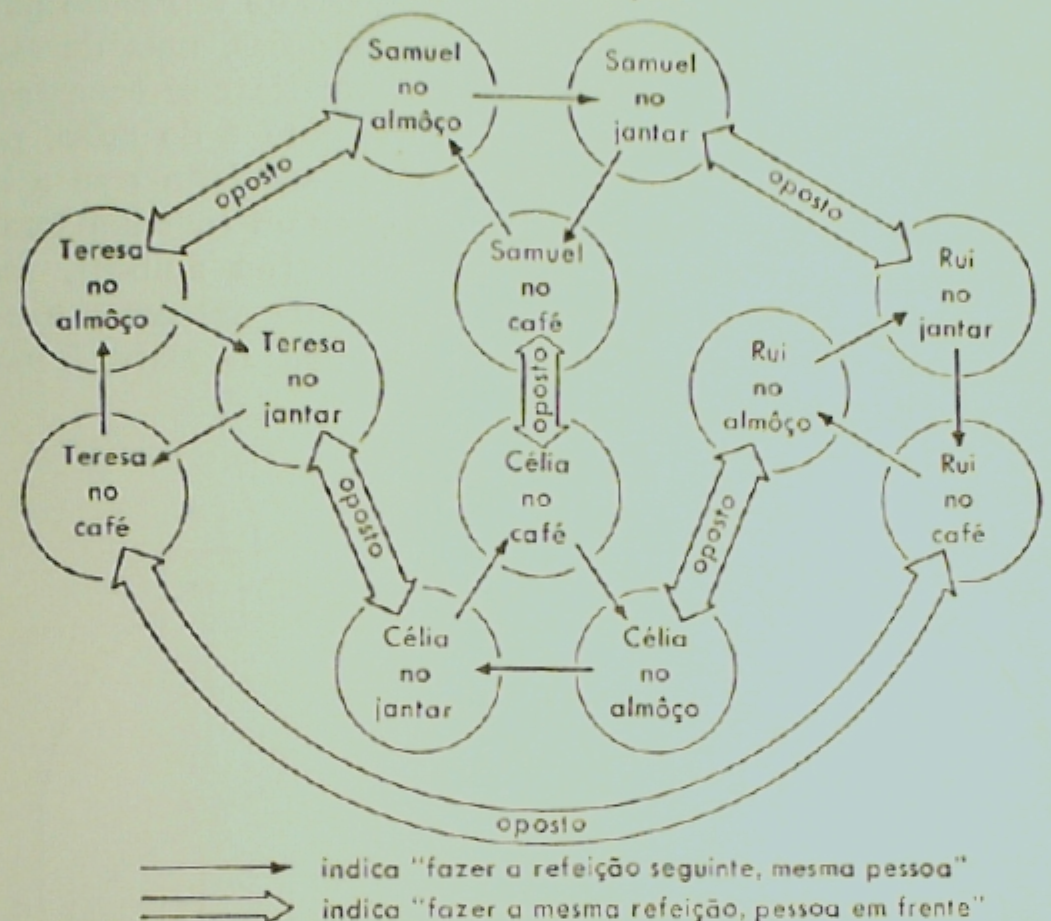
II) o movimento para a criança sentada em frente, mas na mesma refeição

para corresponder a

meio giro em tôrno de um eixo passando pelo ponto médio da aresta limite à direita do triângulo voltado para a criança e o ponto médio da aresta oposta a esta.

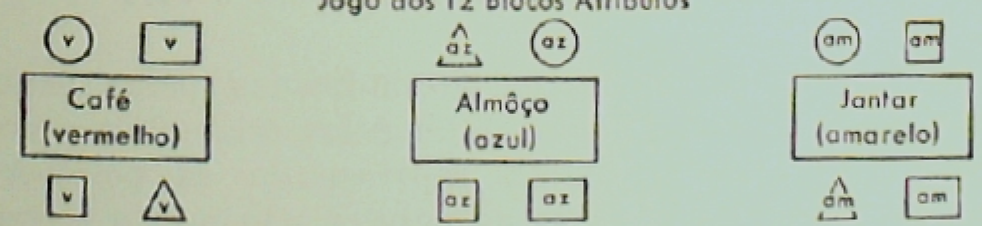
Poderemos, então, tomar "Samuel ao café" como qualquer uma das doze posições e, então, preencher as onze posições restantes como mostrado no diagrama.

Jôgo das Três Refeições



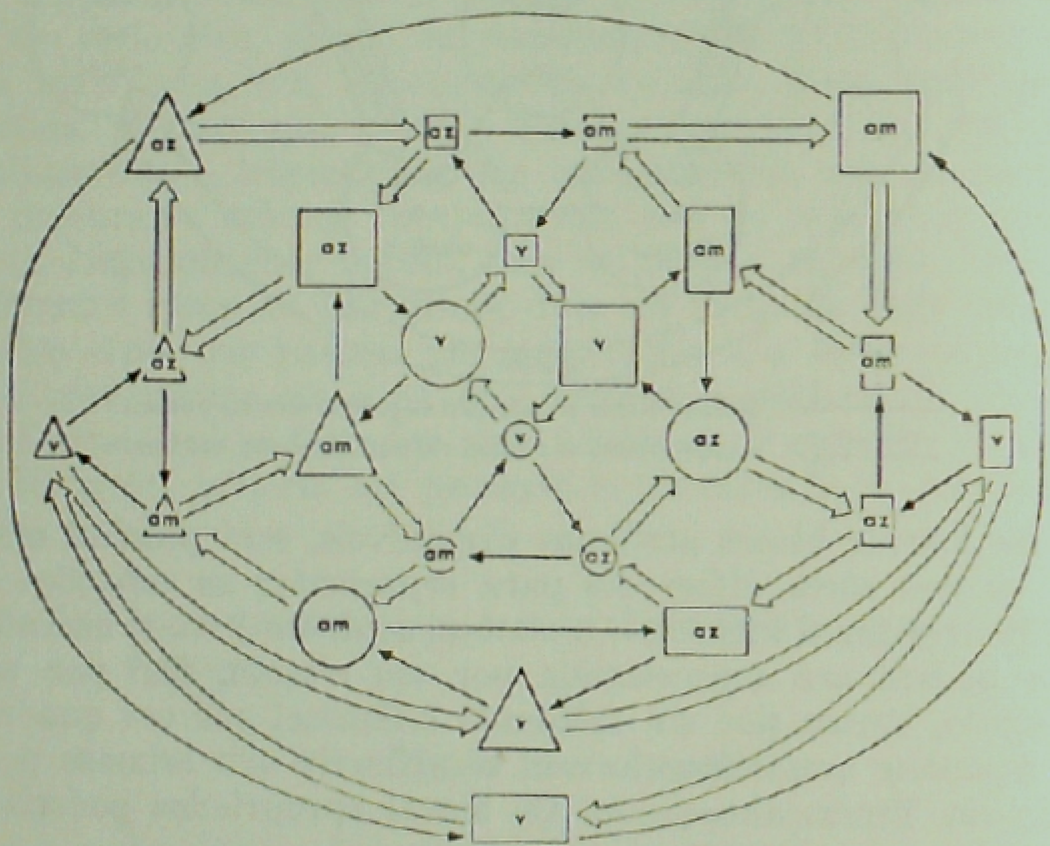
Se houver blocos atributos disponíveis, será possível escolher as três côres diferentes para representar as refeições. O café poderá ser o vermelho; o almôço, azul, e o jantar, amarelo. Célia poderá ser representada por um círculo, Rui por um retângulo, Teresa por um triângulo e Samuel por um quadrado. Apanhar um triângulo azul significaria que estamos pensando em Teresa almoçando. Os blocos apropriados poderiam

Jôgo dos 12 Blocos Atributos



ser colocados nos espaços no mapa, e duas espécies diferentes de setas poderiam ser usadas para reunir as diferentes formas coloridas, para indicar tôda a estrutura do conjunto de rotações do tetraedro regular, que poderá, então, ser visualizado em um relance. O aprendizado da "leitura" de tais mapas preparará as crianças para enfrentar estruturas cada vez mais complexas com relativa facilidade.

É possível estender o mapa das rotações do tetraedro para o das rotações do cubo inserindo duas posições, uma de cada lado de cada seta larga, como se poderá verificar se compararmos os dois mapas. A extensão do mapa para o do cubo, por meio dos blocos atributos, também poderá ser feita com a introdução das mesmas formas coloridas, mas ou com um tamanho diferente ou com espessura diferente (ou ambos). Isso dobra o número de peças, que se enquadram exatamente nas posições dadas no mapa de rotações do cubo. O mapa é mostrado no diagrama a seguir.



Extensão do jôgo do tetraedro para o cubo

As posições do tetraedro são indicadas pelas pequenas figuras, isto é, pelos quadrados, retângulos, triângulos e círculos pequenos. As grandes figuras representam as posições que podem ser atingidas no jôgo do cubo e não no do tetraedro.

Pode-se verificar que o "movimento pela seta fina" segue leis diferentes quando aplicado às peças pequenas ou às grandes, na representação de jôgo do cubo. Quando aplicada às peças pequenas, a regra é simplesmente manter a mesma

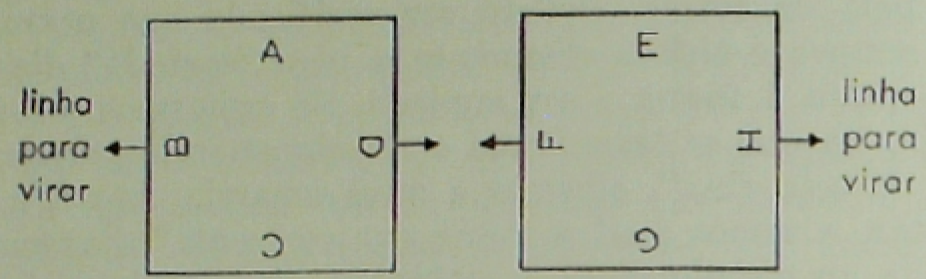
forma e mudar do vermelho para o azul, do azul para o amarelo, e dêste de volta para o vermelho. No caso das peças grandes, veremos que as côres são mudadas no sentido oposto, isto é, o vermelho é mudado para amarelo, êste para azul e o último para vermelho, mas essa troca de côr também é acompanhada pela da forma. Poderá ser verificado que a troca de forma sempre é obtida olhando-se a peça "sentada" diagonalmente oposta à forma a ser mudada. Se quisermos saber, por exemplo, em que se transforma o círculo amarelo grande, pela "regra da seta fina", olhamos a mesa amarela, isto é, a mesa do jantar, e vemos qual a forma que se "senta" diagonalmente oposta ao círculo. Será o retângulo. Como o amarelo é seguido pelo azul no ciclo de mudança de côr, quando aplicado às peças grandes, a peça a que somos conduzidos é o grande retângulo azul. Isso pode ser imediatamente verificado no diagrama, assim como tôdas as outras mudanças efetuadas pela "regra da seta fina", quando aplicada às peças grandes.

Que faz, agora, o "movimento pela seta larga"? Podemos ver que, se aplicada a qualquer peça pequena, obtemos a peça grande correspondente, isto é, uma peça da mesma forma e da mesma côr, mas grande em vez de pequena. Se a "regra da seta larga" é aplicada a uma peça grande, então se efetua não só uma mudança de forma como uma de tamanho. A de forma é relizada passando-se para a forma oposta, do outro lado da mesa. Se aplicamos, por exemplo, a "regra de seta larga" a um grande triângulo amarelo, olhamos a mesa amarela, isto é, a mesa do jantar e notamos que há um círculo "sentado" justamente em frente. A regra nos levará, portanto, a um pequeno círculo amarelo. Isso também pode ser verificado no diagrama.

Não se está exigindo que tôdas essas compreensões detalhadas sejam necessárias antes da criança poder entender algo da estrutura do relacionamento existente no conjunto de rotações de um cubo. Elas são aqui apresentadas em benefício da perfeição, assim como porque foi verificado pelo autor que muitas crianças se tornam curiosas em relação a tais extensões. Será conveniente, para os professôres e outras pessoas, ter as soluções de problemas de extensão aqui esboçados. Naturalmente, não é possível apresentar tôdas as extensões possíveis, já que dependerão dos tipos de perguntas feitas pelas crianças.

4. *O subúrbio de 8 casas da aldeia de 24 casas e o quadrado*

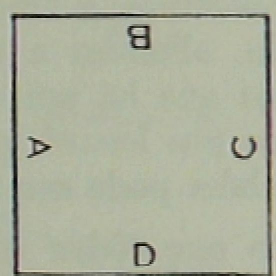
Vamos agora olhar as propreiades do quadrado e ver se podemos encontrá-las assentadas nas do cubo. Digamos que marcamos um lado do nosso quadrado com as letras A, B, C, D (ou com quaisquer figuras que as crianças tenham querido desenhar nêle), como na figura a seguir; viramos, depois, nosso quadrado em tôrno da linha indicada e marcamos o outro lado tal como indicado no quadrado da direita da figura a seguir:



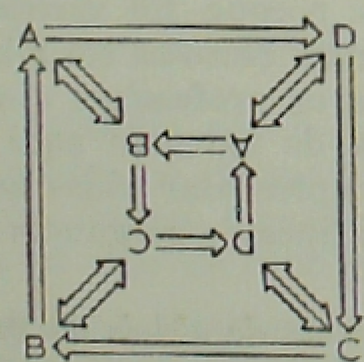
Poderá ser visto que um giro de um ângulo reto no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, em tôrno de um eixo que passe pelo centro do quadrado em ângulo reto com o plano dêste, corresponderá ao "rolar para a direita" do cubo. Uma "virada" em tôrno da linha indicada corresponderá a um movimento

"estreita, estreita, larga, estreita, estreita"

na aldeia. Se quiséssemos colocar os mesmos símbolos do outro lado do quadrado, como temos nas porções correspondentes do mapa, teríamos de marcar o quadrado, em vez do E, F, G, H, como indicado no diagrama anterior, com as letras abaixo:



Uma versão mais simples do submapa poderia ser representada como a seguir, com as posições escolhidas indicadas aí



e onde a "seta tripla" é o "movimento de lançadeira", que leva e traz você entre os dois lados do quadrado, ou entre os dois

ciclos de quatro vias no mapa que representa êsses dois lados. Pode-se notar que o ciclo de quatro vias que corresponde ao ciclo (A, B, C, D) é o que não pode ser atingido dêsse ciclo por meio do uso de ruas estreitas apenas. Dessa forma, se fôr escolhido outro ciclo de quatro vias como o mapa de um lado de qualquer quadrado, o ciclo de quatro vias correspondente ao outro lado dêsse quadrado poderá ser encontrado procurando-se o ciclo que só pode ser atingido usando-se tanto as ruas estreitas como as largas, vindas do primeiro ciclo.

Poderá ser verificado que, usando os itinerários de ônibus

I) "larga"
II) "estreita, estreita, larga, estreita, estreita"

só é possível atingir oito casas, começando de qualquer casa em particular. Dêsse modo, a aldeia se parte, nìtidamente, em três subúrbios de 8 casas, dentro de cada qual qualquer casa pode ser atingida usando os itinerários de ônibus acima mencionados um número suficiente de vêzes, sucessivamente.

Se o segundo dêsses itinerários de ônibus fôr chamado de "triplo", poderemos ver que o seguinte é verdadeiro:

a) "larga, larga, larga, larga" é um itinerário circular;
b) "triplo, triplo" é um itinerário circular;
c) "triplo, larga, triplo" tem as mesmas paradas que "larga, larga, larga".

Ou o último poderia ser substituído por

d) "larga, triplo, larga" tem as mesmas paradas que "triplo".

Longas viagens de ônibus podem ser reduzidas para curtas por meio das "regras" acima. Tomemos, por exemplo,

"triplo, larga, larga, triplo, larga, larga, larga, triplo, triplo, triplo".

Isso, pela regra *b*, pode ser reduzido a "triplo, larga, larga, triplo, larga, larga, larga, triplo",
que, pela regra *d*, pode ser reduzido a
"triplo, larga, triplo, larga, larga, triplo",
e, por aplicação ainda da regra *d*, a
"triplo, triplo, larga, triplo"
e, por nova aplicação de *b*, a
"larga, triplo".

O leitor deverá verificar na aldeia que a primeira viagem pode, realmente, ser substituída pela última, ou, na verdade, por qualquer das viagens intermediárias, se tudo o que nos interessa é onde termina a viagem, tendo começado em uma determinada casa. O mesmo poderia ser verificado no quadrado, começando por qualquer posição dêle (que chamaremos de "lar") e usando "viradas" para os "triplos" e "giro de um ângulo reto no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio" para as "largas". A longa série de viradas e giros indicada pela primeira viagem deveria ser sempre equivalente, isto é, deveria ter o mesmo efeito que um "giro de um ângulo reto no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio seguido de uma virada".

As regras *a*, *b* e *c*, ou *a*, *b* e *d*, poderiam ser o sistema de axiomas em que se basearão as "provas" dos "teoremas". Por exemplo, *d* pode ser "provado" como um teorema, usando-se *a*, *b* e *c*; pode ser provado, por meio de *a*, *b* e *d*. Deixamos êsse exercício para o leitor. Deve ser, naturalmente, bem compreendido que são desde logo admitidas as propriedades de associatividade e do elemento neutro. Êsse é o itinerário circular.

5. *O subúrbio de 6 casas da aldeia de 24 casas e o triângulo eqüilátero*

Vejamos, agora, as propriedades do triângulo eqüilátero dentro de nossa aldeia de 24 casas. As rotações deverão ser indicadas pelas ruas estreitas, isto é, deveremos ter

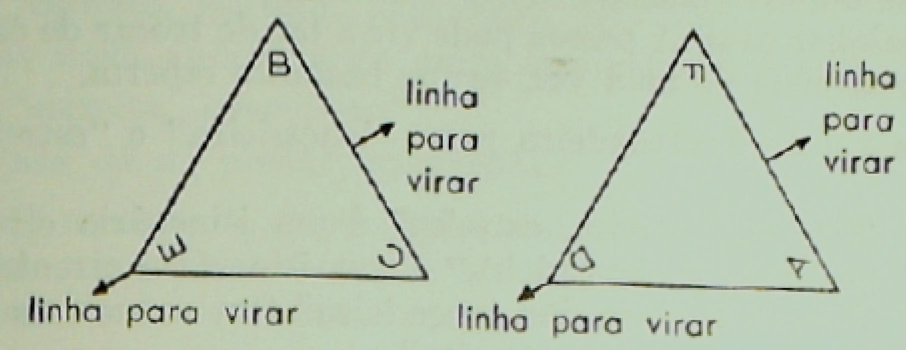
(I) "estreita"; (II) "estreita, estreita"; (III) itinerário circular;

que poderão ser representados por qualquer dos ciclos de três vias que fôr encontrado em nossa aldeia. Qualquer dêsses ciclos de três vias poderia representar um dos lados de nosso triângulo eqüilátero. O problema é: onde está o outro lado? Que conjunto de movimentos corresponderá a uma das "viradas", que girará o triângulo para o seu outro lado? Um dêsses movimentos seria

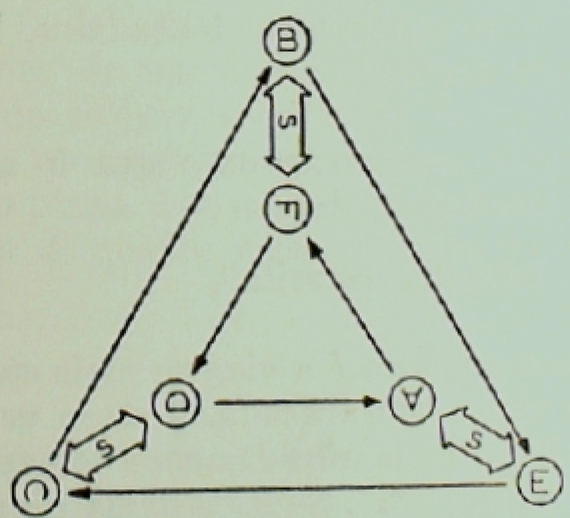
"larga, larga, estreita, estreita, larga"

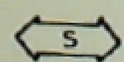
que poderemos imediatamente verificar como sendo seu próprio reverso. Se o repetimos, seremos levados de volta ao nosso ponto de partida. Agirá, realmente, como um movimento de lançadeira entre pares de ciclos de três vias na aldeia e, assim,

representa uma das "viradas". Vamos ver a representação detalhada, como no quadrado.



Cada uma das figuras acima é a que se obtém quando viramos a outra em tôrno da linha para virar, indicada nas figuras. Essa linha é fixa no espaço e *não* no triângulo que giramos. Se chamarmos o movimento "larga, larga, estreita, estreita, larga" de movimento "lançadeira", poderemos atingir qualquer das seis posições indicadas nas figuras, usando movimentos lançadeira e movimentos estreitos um número suficiente de vêzes. De fato, qualquer posição pode ser obtida, vinda de qualquer outra posição, em não mais que dois movimentos, judiciosamente escolhidos. O mapa do subúrbio de 6 casas, com seus itinerários de ônibus, lançadeira e estreitas, pode ser mais simplesmente traçado como se mostra a seguir.



onde  indica o movimento "lançadeira", ou a virada mostrada no diagrama da figura anterior, e o movimento "estreitas" indica um giro de 120 graus, no sentido dos ponteiros do relógio, do triângulo, em tôrno de um eixo passando em seu centro, em ângulo reto com seu plano.

Pode-se verificar que a aldeia se divide, nìtidamente, em quatro subúrbios de 6 casas. Dentro de cada subúrbio, os itinerários de ônibus "lançadeira" e "estreitas" nos conduzem de e para qualquer casa. A pessoa pode vir a ter de trocar de ônibus, mas nunca mais de uma vez, se fôr bastante esperta.

O seguinte é verdadeiro para "lançadeira" e "estreitas":

a) "estreita, estreita, estreita" é um itinerário circular;
b) "lançadeira, lançadeira" é um itinerário circular;
c) "lançadeira, estreita, lançadeira" tem as mesmas paradas que "estreita, estreita";

ou êste último poderá ser substituído por

d) "estreita, lançadeira, estreita" tem as mesmas paradas que "lançadeira".

E novamente os itinerários dos ônibus podem ser reduzidos por meio dessas regras. Tomemos, por exemplo:

"lançadeira, estreita, estreita, lançadeira, estreita, estreita, estreita, lançadeira, lançadeira, lançadeira".

Êle pode ser reduzido, primeiro, pelo emprêgo da regra *a*, para:

"lançadeira, estreita, estreita, lançadeira, lançadeira, lançadeira, lançadeira".

Duas aplicações sucessivas da regra *b* nos livrará das quatro últimas lançadeiras, dando:

"lançadeira, estreita, estreita".

Pode-se pensar que essa é a viagem mais curta que se pode obter. Olhando o mapa simplificado, pode-se ver que a viagem acima pode ser feita mais ràpidamente tomando a linha de ônibus "estreita, lançadeira". Se o "sistema de axioma" descreve, de fato, a situação no subúrbio de 6 casas, efetivamente, poderíamos "provar" que

"lançadeira, estreita, estreita" tem as mesmas paradas que "estreita, lançadeira".

Usando a regra *a* ao inverso, o itinerário "lançadeira, estreita, estreita" terá as mesmas paradas que o itinerário

"estreita, estreita, estreita, lançadeira, estreita, estreita"

que pode ser novamente reduzido, pela regra *d*, para

"estreita, estreita, lançadeira, estreita"

e, por nova aplicação da regra *d*, finalmente para

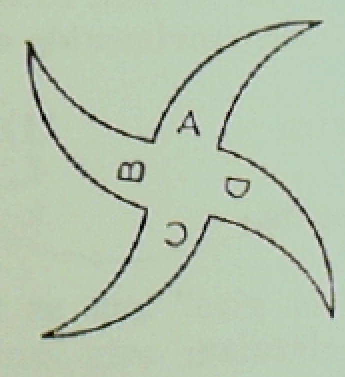
"estreita, lançadeira",

que nos dá a "prova" procurada.

E novamente é possível provar *d*, por meio de *a*, *b* e *c*, ou provar *c*, por meio de *a*, *b* e *d*. Nada se alterará, portanto, se usarmos *c* ou *d* como nosso terceiro axioma.

6. *Os diferentes subúrbios de 4 casas, a roda de engrenagem de quatro vias e o losango*

Será fàcilmente visto que a metade de um subúrbio de 8 casas dará um subúrbio de 4 casas, se escolhermos apropriadamente as casas. Mesmo assim, êsses subúrbios de 4 casas não terão, todos, a mesma estrutura de serviço de ônibus, uma vez que alguns dêles só serão servidos por um itinerário. A fim de acomodar todos os habitantes do outro tipo de subúrbio, necessitaremos de dois itinerários, no mínimo. Está claro que o serviço "larga" atenderá ao subúrbio constituído das casas marcadas (A, D, C, B) e visitá-las-á nesta ordem. Poderíamos, igualmente, providenciar um serviço "larga, larga, larga", que visitará as mesmas casas, mas parará nelas na seguinte ordem (A, B, C, D). É evidente que o itinerário "larga" corresponde ao giro de um ângulo reto no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, e o "larga, larga, larga", ao giro de um ângulo reto no sentido dos ponteiros, feito com o quadrado, em seu próprio plano. Isso corresponde às rotações de uma roda de engrenagem de quatro vias, tal como na figura a seguir.



Vejamos, agora, o que acontece quando permitimos os movimentos

I) "larga, larga", II) "triplo",

lembrando-nos que "triplo" é a forma reduzida do movimento:

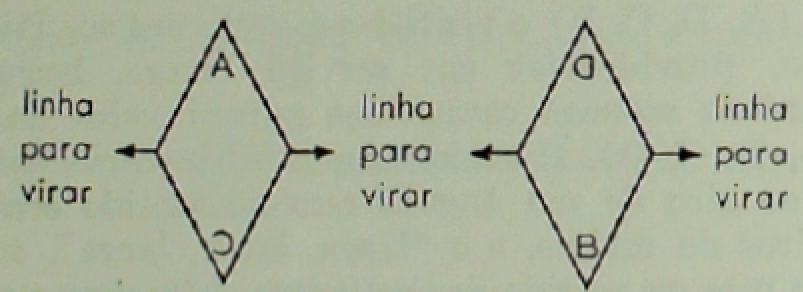
"estreita, estreita, larga, estreita, estreita".

Veremos que só poderemos atingir as casas

(A,C,ɑ,ᗺ) ou (B,D,Ͻ,∀)

dependendo da casa de onde partimos. Não há possibilidade de organizar um itinerário de ônibus para cuidar dos habitantes de qualquer um dêsses dois subúrbios de quatro casas, estabelecendo itinerários que possam reunir largas e estreitas. Dizemos que a aldeia (A, B, C, D) é cíclica e que as outras duas são aldeias não-cíclicas.

Poderá ser visto que temos a mesma estrutura nas aldeias não-cíclicas que as dadas pelas simetrias e rotações de um losango, ou de um retângulo que não é quadrado, ou, na verdade, de qualquer figura que só tenha dois eixos de simetria. Essa estrutura é conhecida como o grupo Klein, já encontrado como subúrbio da aldeia de 12 casas. A seguir, temos uma representação possível:



onde a "larga, larga" é considerada como sendo um meio giro da figura em seu próprio plano, e o "triplo" é considerado como uma "virada" em tôrno de uma linha, mostrada nas figuras. Chamando, agora, êsses movimentos de

I) meio giro II) virada

teremos as seguintes regras:

a) "meio giro, meio giro" tem as mesmas paradas que um itinerário circular;
b) "virada, virada" tem as mesmas paradas que um itinerário circular;
c) "meio giro, virada" tem as mesmas paradas que "virada, meio giro".

Novamente, qualquer longo itinerário, num sentido e noutro, nesse subúrbio, ou qualquer subúrbio servido por tais itinerários de ônibus, poderá ser reduzido a outros muito mais curtos. Qualquer itinerário de ônibus pode ser reduzido a um dos quatro seguintes:

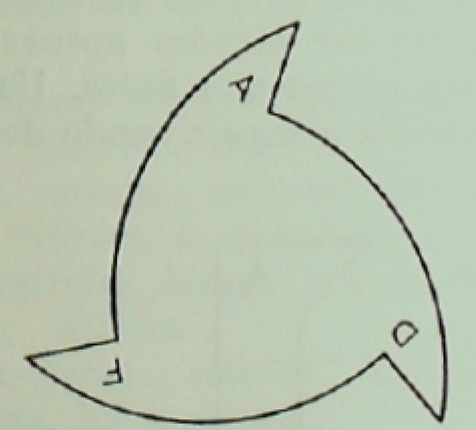
I) itinerário circular;
II) virada;
III) meio giro;
IV) meio giro, virada.

Êstes itinerários representam os elementos do grupo Klein.

7. *Os subúrbios de 3 casas e roda de engrenagem de três vias*

Se fizermos o itinerário do ônibus "estreita", seja qual fôr a casa de onde partirmos, poderemos visitar três casas, incluindo aquela de onde partimos. Êsse itinerário de ônibus divide, pois, a aldeia de 24 casas em oito subúrbios de 3 casas. Mas há outros meios de dividi-la dêsse modo. São os itinerários de ônibus A, B, C e D, apresentados na discussão da aldeia de 12 casas. Para traduzir êsses itinerários em têrmos de aldeia de 24 casas, apenas teremos de substituir "larga" por "larga, larga". O itinerário B, por exemplo, é "estreita, larga" na aldeia de 12 casas. Será, portanto, "estreita, larga, larga" na aldeia de 24 casas.

Eis uma representação possível do ciclo de três vias na roda de engrenagem de três vias:



Nessa representação, um giro de 120 graus no sentido dos ponteiros, na figura acima, corresponde ao movimento "estreita, larga, larga" na aldeia de 24 casas, ou ao "estreita, larga" na de 12 casas. Se chamarmos êsse movimento de "giro", então a seguinte "regra" é verdadeira:

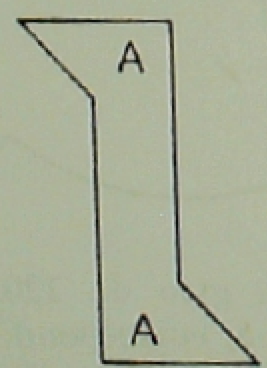
a) "giro, giro, giro" tem as mesmas paradas que o "itinerário circular" que é a regra geratriz do cíclico grupo três, o módulo-3 aritmético, da mesma forma que

"larga, larga, larga"

tem as mesmas paradas que o "itinerário circular" é a regra geratriz do cíclico grupo quatro ou módulo-4 aritmético.

Como já se mencionou, o grupo dois pode ser obtido do "itinerário circular" como neutro, e de qualquer dos itinerários que tenha apenas duas paradas. Os itinerários E, F e G da aldeia de 12 casas nos darão tais itinerários, novamente com a condição de que "larga" deve ser substituído por "larga, larga" se estivermos vendo o mapa da aldeia de 24 casas. Ainda há mais dois itinerários de 2 paradas além dêsses três na aldeia de 24 casas. Na verdade, há nove. A procura de tais itinerários é deixada como um exercício interessante para o leitor. Podem, certamente, ser obtidos imediatamente olhando a aldeia tal como traçada para as diferentes posições do cubo e indo por todos os possíveis meios giros que trarão o cubo de volta para ocupar o mesmo volume que tinha, antes que o tivéssemos movido. Há três dêsses eixos que estão em ângulos retos com as faces e correspondem aos itinerários E, F, G; mas há seis outros, cujos eixos unem os pontos médios das arestas opostas do cubo. Como o cubo tem 12 arestas, há 6 pares de arestas opostas, e a junção dos pontos médios dêsses pares dará os eixos das meias rotações que irão gerar os itinerários de ônibus de 2 paradas na aldeia de 24 casas.

Êsses itinerários de 2 paradas correspondem às figuras geométricas que podem ser giradas apenas uma meia volta para ocupar o mesmo espaço que antes. Uma dessas figuras poderia ser a apresentada a seguir, sendo dada uma representação particular.



Aqui, a meia volta da figura em seu próprio plano é feita para corresponder a

"estreita, estreita, larga, estreita, estreita"

na aldeia de 24 casas, ou ao meio giro em tôrno de um eixo vertical que passe pelo centro de um cubo, se estivermos observando os movimentos do cubo.

8. *Jogos de palavras como geradores de estruturas*

Uma "palavra" pode ser definida como uma determinada sucessão de símbolos disponíveis. Podemos começar com qualquer número de símbolos, tal como tôdas as letras do alfabeto, ou todos os algarismos entre zero e nove, inclusive. Nas estruturas com que temos lidado, não têm sido necessários mais que dois símbolos. Êles têm sido os "átomos" com que temos construído os itinerários de ônibus, tais como "larga", "estreita", "triplo", "lançadeira", "virada", "meio giro", e assim por diante. Cada um dêstes pode ser considerado como um símbolo, possìvelmente representado por uma única letra, e uma sucessão de tais símbolos, uma "palavra", será uma forma concisa de descrever determinadas seqüências de movimentos, seja nas aldeias, ou nas rotações de nossos cubos, tetraedros etc. As regras que governam a equivalência de diferentes itinerários de ônibus foram tentativamente chamadas de axiomas nos sistemas formais que foram sendo desenvolvidos para reunir a essência abstrata de cada conjunto de movimentos. Dois itinerários de ônibus são equivalentes se começam e acabam na mesma casa ou, mais precisamente, se, quando começam ambos na mesma casa, terminam, os dois, no fim dos itinerários.

Pode-se verificar que as regras são as seguintes:

a) "larga, larga, larga, larga" tem as mesmas paradas que um "itinerário circular";
b) "estreita, estreita, estreita" tem as mesmas paradas que um "itinerário circular";
c) "larga, estreita, larga" tem as mesmas paradas que "estreita, estreita";
d) "estreita, larga, estreita" tem as mesmas paradas que "larga, larga, larga".

Se indicarmos o "itinerário circular" pelo símbolo 1, "larga" por L e "estreita" por E, vemos que temos *a*) L L L L = 1; *b*) E E E = 1; *c*) L E L = E E; *d*) E L E = L L L como os axiomas formais dos quais podem ser deduzidas tôdas as equivalências de itinerários na aldeia de 24 casas.

Poderíamos selecionar um "lar" na aldeia, no qual corresponderia uma determinada posição do cubo. Poderia ser considerada como a posição A. As outras casas poderiam ser denominadas de acôrdo com os itinerários dos ônibus cuja primeira parada é nessas casas, depois de deixarem o "Lar", isto é, depois de deixarem A. Dêsse modo, cada casa poderia ter uma infinidade de nomes, mas sugerimos que o menor nome seja utilizado em cada caso. Se houver vários nomes de igual tamanho, podem-se fazer exigências de evitar três largas sucessivas, mas isso não é, de modo algum, necessário. As casas da aldeia terão, assim, os seguintes nomes:

Lar, L, L L, L L L, E, E E, E L, E L L, E E L E, E E L, E E L L, L E, L E E, E L E E, E L L E, E L L E E, L E E L, L E E L E E, L L E, L L E E, L L E E L, L E E L L, E E L E E, L E E L L E.

Deixamos ao leitor verificar se qualquer dos nomes acima poderá ser ainda mais simplificado ou não. Isso pode ser realizado seja por cuidadosa verificação do mapa, seja usando os quatro axiomas *a*, *b*, *c* e *d*. Outro problema sugerido é se três ou quatro axiomas serão suficientes. Por exemplo, poderíamos provar *d* com auxílio de *a*, *b* e *c*?

Em grau crescente de complexidade vem a aldeia de 12 casas. As regras geradoras dêsse jôgo poderiam ser, por exemplo, usar L para significar "larga", *tal como vista na aldeia de 12 casas*, e E ser "estreita" e 1 representar o "itinerário circular" neutro:

a) E E E = 1; *b*) L L = 1; *c*) L E E L = E L E

Escolhendo uma das casas como "Lar", poderemos designar as casas de acôrdo com os itinerários a serem seguidos para essas casas, a partir do "Lar". Os nomes das casas seriam:

Lar, L, E, E E, L E, L E E, E L, E L E, E L E E, E E L, E E L E, L E L

Novamente deixamos ao leitor decidir se os nomes poderão ser reduzidos.

O próximo subúrbio, em grau de complexidade, é o de 8 casas e já vimos quais são as "regras" que geraram êsse jôgo.

São:

a) L L L L = 1; *b*) T T = 1; *c*) T L T = L L L
ou *c*) pode ser substituído por *d*) L T L = T

Os nomes das casas, segundo êsses movimentos a partir de um "Lar" arbitràriamente escolhido, serão:

Lar, L, L L, L L L, T, T L, T L L, L T

O subúrbio seguinte, em grau de complexidade, é o de 6 casas, e as regras para o serviço de transportes nesse subúrbio são, como já vimos, as seguintes: (LN significando lançadeira)

a) E E E = 1; *b*) LN LN = 1; *c*) LN E LN = E E
ou *c*) pode ser substituído por *d*) E LN E = LN

e os nomes das cassas correspondentes serão:

Lar, E, E E, LN, LN E, E LN

No subúrbio de 4 casas, com um único ônibus, só teremos a regra

a) 0 0 0 0 = 1

e os nomes das casas serão Lar, 0, 0 0, 0 0 0. Isso personifica o cíclico grupo quatro, ou o módulo-4 aritmético ou as inter-relações de múltiplos giros de ângulo reto.

No subúrbio de 4 casas com dois itinerários de ônibus, teremos as regras:

a) M M = 1; *b*) V V = 1; *c*) M V = V M

e os nomes das casas são Lar, M, V, M V. Êsse sistema de transporte personifica o grupo Klein.

O subúrbio de 3 casas é caracterizado pela regra G G G = = 1, e o subúrbio de 2 casas pela regra G G = 1. No de 3 casas, estas têm os nomes "Lar", G, G G; no de 2 casas, "Lar" e G. Poderemos completar o quadro usando subúrbios de 1 casa, nos quais só podemos tomar ônibus circulares; a regra é 1 1 = 1 e a única casa se chama "Lar".

Em cada um dêsses sistemas poderemos executar "jogos de redução", nos quais uma longa fieira de símbolos (uma longa "palavra") é reduzida, pelas regras, à menor palavra possível. Em cada jôgo ou "língua" há classes de "palavras". As palavras pertencentes à mesma classe podem ser transformadas, umas nas outras, com um número finito de passos, cada um sendo a aplicação de uma das regras ou axiomas, definindo a "língua" ou sistema. A menor versão de tal classe de nomes é o nome dado a cada casa em cada subúrbio. O modo pelo qual as "palavras" podem ser reunidas para "fazer" outras "palavras" pode também ser investigado, usando-se apenas as regras. Os resultados podem sempre ser verificados nos mapas correspondentes, bem como nos movimentos do sólido cuja representação estamos vendo. Dêsse modo, poderemos organizar as tábuas de relacionamentos, que nos darão uma tabela de 4-por-4 no caso do sistema de transporte do subúrbio de 4 casas (haverá duas espécies de tabelas aqui, dependendo se usamos a aldeia com serviço de um ônibus ou a de dois ônibus), uma tabela de 6-por-6, uma de 8-por-8, uma de 12-por-12 ou uma de 24-por-24, dependendo da parte do mapa que estivermos estudando.

9. *Exemplos de outros jogos*

Há, certamente, muitos outros jogos de palavras possíveis, e estruturas correspondentes, que não surgem da aldeia de 24 casas. Mas pode-se ver, contudo, que a aldeia de 24 casas é surpreendentemente rica em subúrbios, cada um dos quais espelha a estrutura de alguns conjuntos mais elementares de transformações, tais como as viradas e rotações de um triângulo eqüilátero, as viradas e rotações do quadrado, as rotações do tetraedro e assim por diante. A seguir apresentamos algumas outras estruturas que não são subestruturas do jôgo de 24 casas que estivemos executando.

Tomemos as letras a e b como geradoras de estruturas. Poderemos fazer surgir o cíclico grupo seis ou módulo-6 aritmético da seguinte maneira:

I) a a a = 1; II) b b = 1; III) a b = b a

em que as "palavras", na língua, são

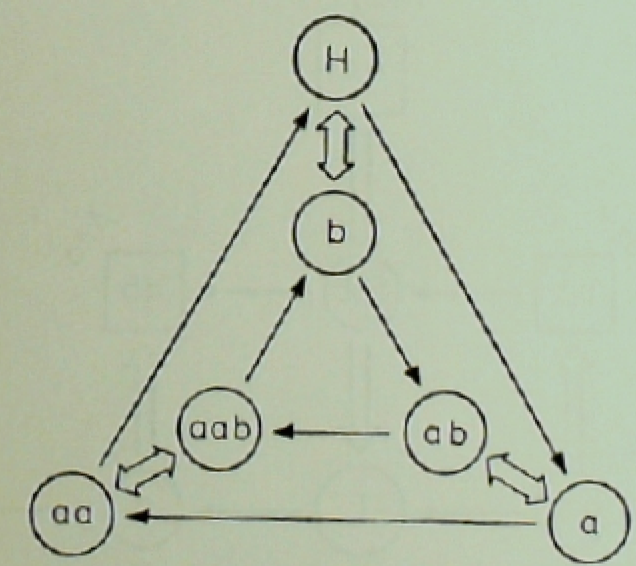
a b; a a; b; a; a a b; 1

Será observado que

a b seguido de a b = a a
a b seguido de a b seguido de a b = b
a b seguido de a b seguido de a b seguido de a b = a
a b seguido de a b seguido de a b seguido de a b seguido de a b = a a b

e que a b tomado mais vêzes sucessivas é o "itinerário circular" ou 1. Tomando os elementos dêsse grupo na ordem acima, obtemos o ciclo no ciclo 6 do cíclico grupo 6. Se tomarmos a a b, obtê-lo-emos na ordem oposta. Na figura a seguir está a "estrutura de setas" ou "aldeia" consistindo em seis casas, correspondendo a êsse "jôgo de palavras", onde as "casas" são marcadas com seus nomes. O sistema de transporte é muito semelhante ao do subúrbio de 6 casas da aldeia das 24 casas, mas o sentido dos dois ciclos aqui é o mesmo, enquanto, no outro jôgo, era oposto. E, também, o ônibus a b pára em cada casa. Se êsse ônibus tomasse o nôvo nome c, as casas teriam, então, os novos nomes

c, c c, c c c, c c c c, c c c c c, 1



e as regras poderiam ser expressas escrevendo-se apenas c c c c c c = 1.

Deixa-se ao leitor construir o sistema de transporte correspondente às regras

I) a a a a = 1; II) b b = 1; III) a b = b a

Alertamos o leitor que isso não dará o sistema de transporte que seria equivalente ao módulo-8 aritmético. Dará o sistema conhecido como o grupo dois por quatro. Será, porém, um jôgo comutativo, como exigido por III.

Um jôgo muito interessante pode ser construído com as regras

I) a a a a = 1; II) a a = b b; III) a b a = b

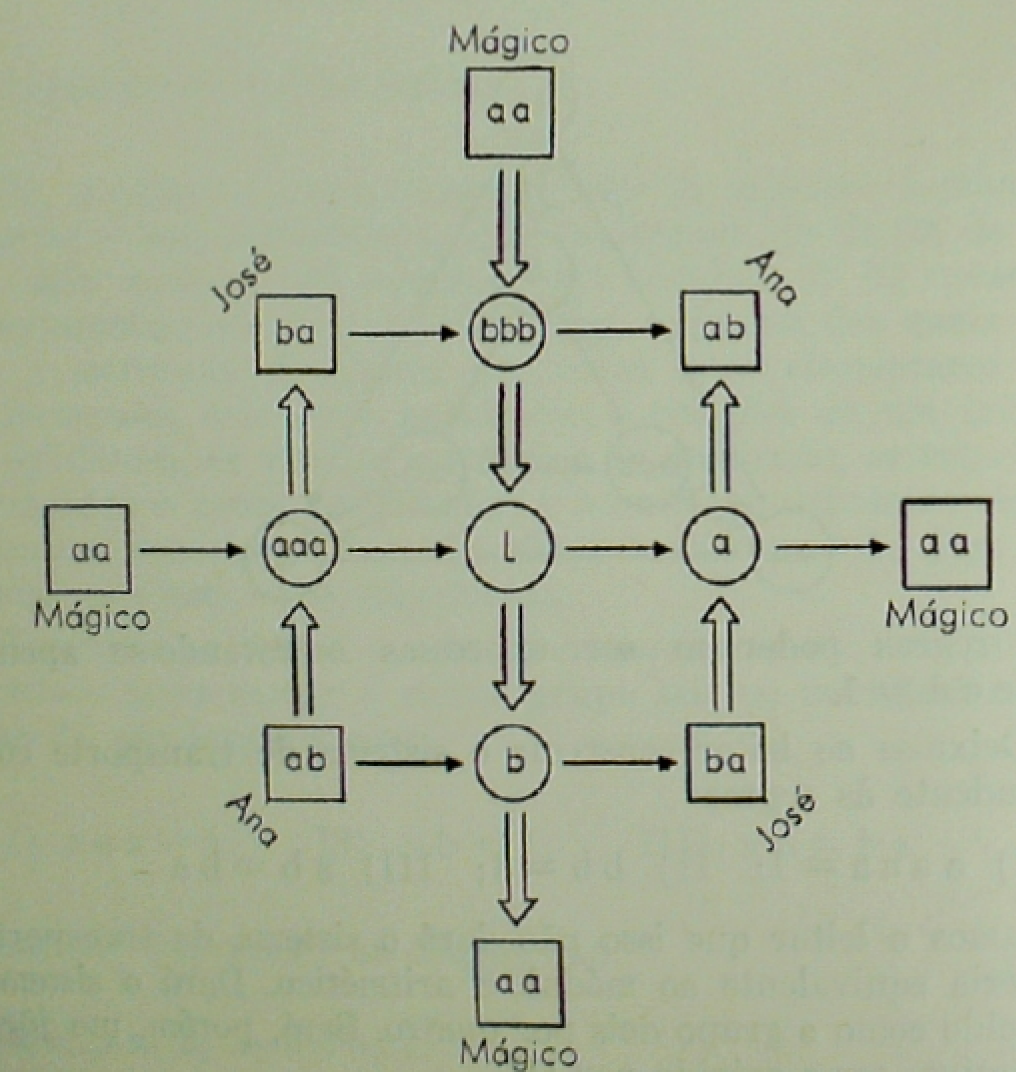
que tem um vocabulário de oito palavras e contém, em si, três ciclos de quatro vias. O vocabulário é

1, a, a a, a a a, b, b b, a b, b a

e os três ciclos de quatro vias são

(primeiro ciclo) 1, a, a a, a a a
(segundo ciclo) 1, b, a a, b b b
(terceiro ciclo) 1, a b, a a, b a

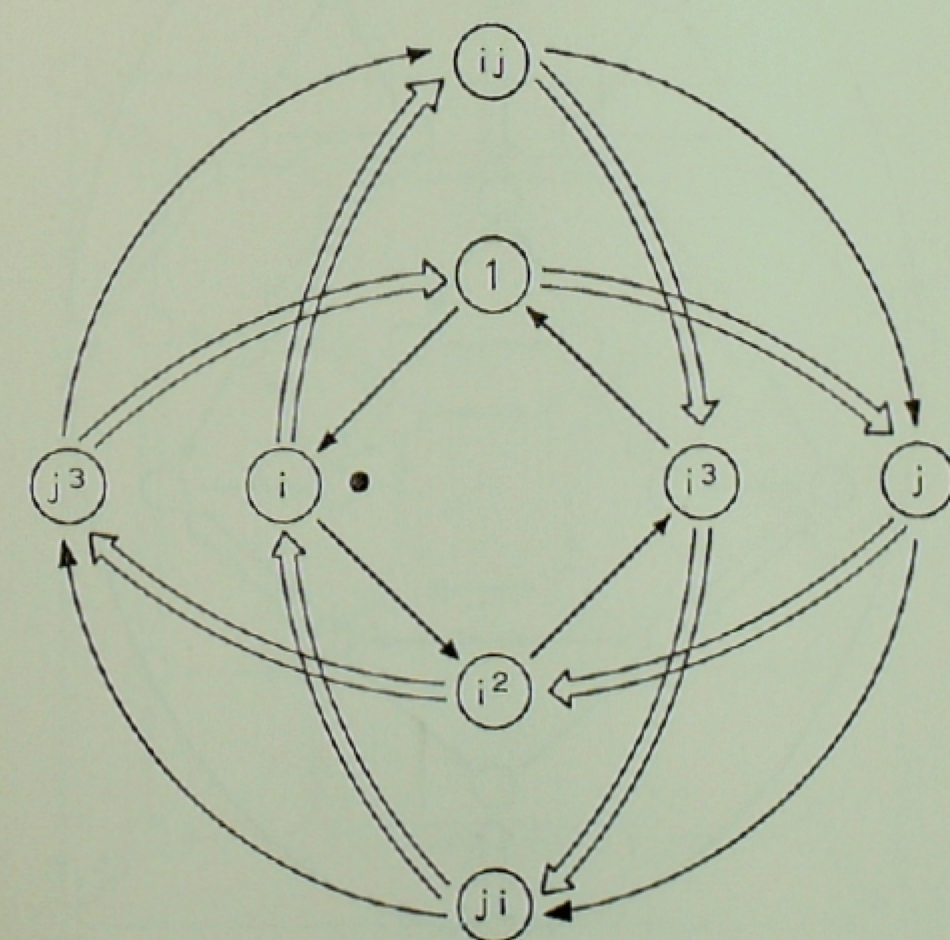
Isso pareceria um ótimo jôgo para executar se o objetivo fôsse praticar os ciclos de quatro vias. É difícil, à primeira vista, pensar em uma aldeia que represente a estrutura acima. Uma possibilidade é uma "aldeia mágica", no sentido de que seja



possível estar em vários lugares ao mesmo tempo. Isso significa que, se alguém está em uma dessas casas "mágicas", estará em tôdas as outras ao mesmo tempo, como se fôsse mágico. A aldeia está reproduzida na página anterior, os quadrados representando as casas "mágicas" e as casas "comuns" simbolizadas pelos círculos. A casa do mágico é extremamente mágica, já que se pode estar em quatro lugares ao mesmo tempo. José e Ana são apenas aprendizes de mágico e, nas casas dêles, só se pode estar em dois lugares ao mesmo tempo. As outras casas são bem comuns. Pode-se ver que tôdas as regras são satisfeitas, supondo-se que as propriedades mágicas das casas são levadas em consideração. Em Matemática, essa estrutura é conhecida como o grupo do número quatro, por causa de seus muitos ciclos de quatro vias.

É lógico que não é necessário escolher a casa central como "Lar". Poderíamos, na verdade, fixar residência com o mágico, ou com Ana ou José, ou em qualquer das casas comuns. Os nomes das outras casas seriam, então, correspondentemente diferentes.

O Mágico vai em férias

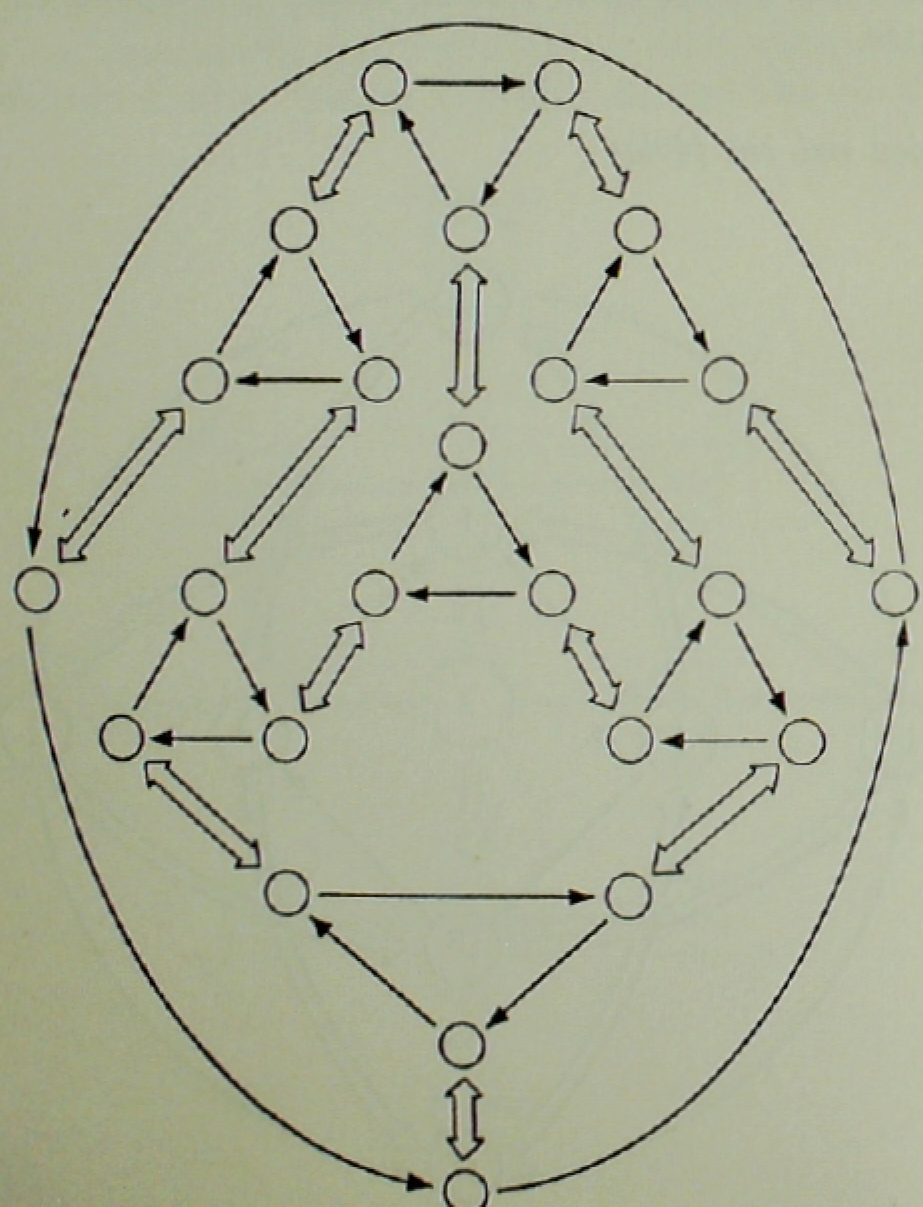


Êste é outro jôgo, cuja estrutura é exatamente a mesma da do jôgo mágico, exceto que o mágico foi gozar férias. Então, a casa dêle tem de ser transformada em uma única casa, e as duas posições da casa de José, assim como as duas da de Ana, têm de ser reduzidas a um só lugar.

E damos em seguida alguns outros exercícios, que o leitor poderá querer resolver. Na aldeia de 12 casas abaixo, por exemplo, o seguinte é verdadeiro:

$$(\rightarrow \Rightarrow \rightarrow)(\rightarrow \Rightarrow \rightarrow)(\rightarrow \Rightarrow \rightarrow) = \text{nenhum movimento}$$
$$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow = \text{nenhum movimento}$$
$$\text{e} \quad (\rightarrow \Rightarrow \rightarrow) \rightarrow (\rightarrow \Rightarrow \rightarrow) \rightarrow = \text{nenhum movimento}$$

Talvez uma representação de uma aldeia em relação à outra possa ser na forma a seguir, como conseqüência do apresentado acima.



No caso da aldeia de 6 casas, poder-se-á notar que

$$(\rightarrow \Rightarrow)(\rightarrow \Rightarrow)(\rightarrow \Rightarrow) = \text{nenhum movimento}$$

e no caso da aldeia de 8 casas, da mesma forma,

$$(\rightarrow \Rightarrow)(\rightarrow \Rightarrow)(\rightarrow \Rightarrow)(\rightarrow \Rightarrow) = \text{nenhum movimento}$$

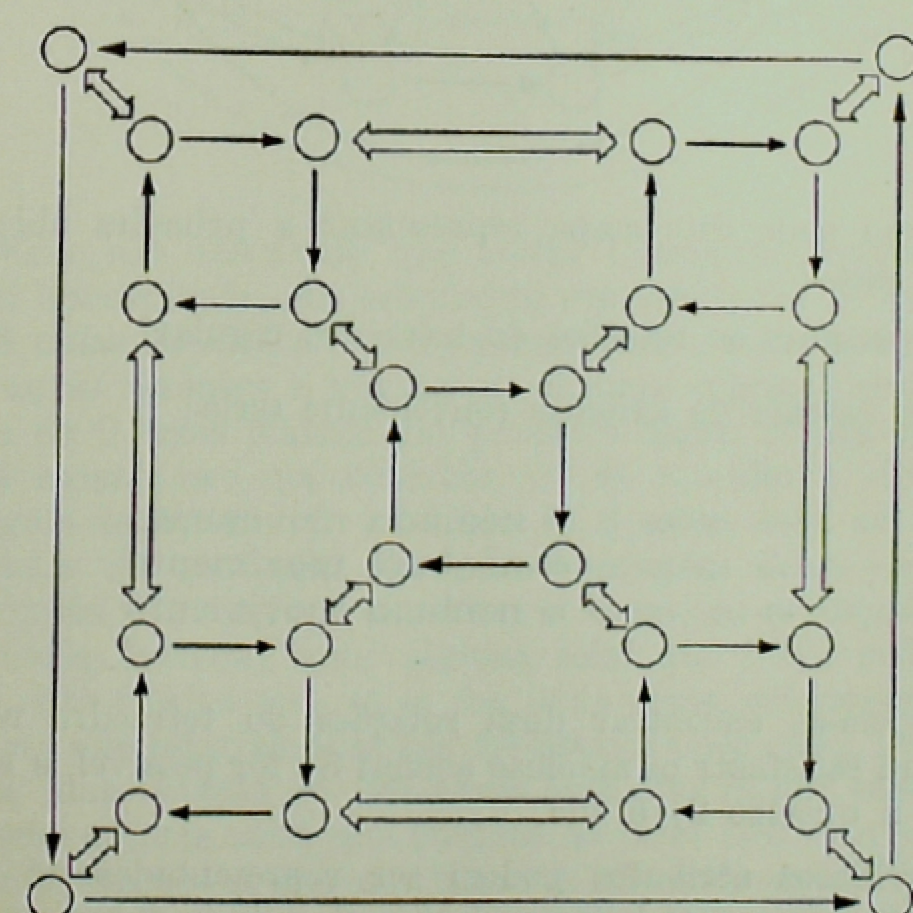
Em ambos os casos $(\rightarrow \Rightarrow) \rightarrow (\rightarrow \Rightarrow) \rightarrow = \text{nenhum movimento}$

Os "mapas" poderiam ser construídos, agora, de vários modos: Na figura da página anterior está uma aldeia de 24 casas.

1) O cubo poderá ser representado nesta aldeia? Se puder, que movimentos do cubo correspondem a $\rightarrow$ e a $\Rightarrow$? Se não puder, de que modo essa estrutura é diferente da do cubo?

2) Que sistema de axiomas descreveria a estrutura acima?

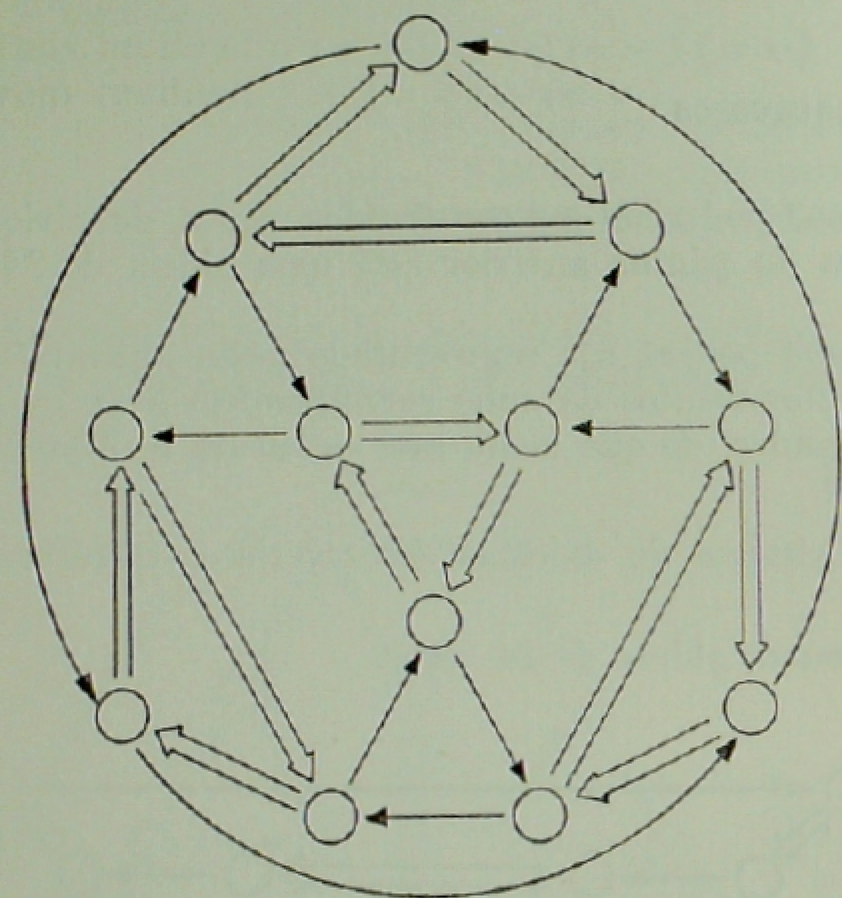
Eis outra aldeia de 24 casas.



1) Se o cubo puder ser representado neste mapa, que rotações corresponderão a $\rightarrow$ e a $\Rightarrow$?

2) Que sistema de axiomas descreveria a estrutura acima?

3) Se tomarmos todos os blocos com o mesmo tamanho e também os grossos, quatro formas e três côres, que mudanças de atributos corresponderiam às funções $\rightarrow$ e $\Rightarrow$?



1) Como pode êste mapa representar a primeira aldeia de 12 casas?

2) Representa as rotações do tetraedro regular?

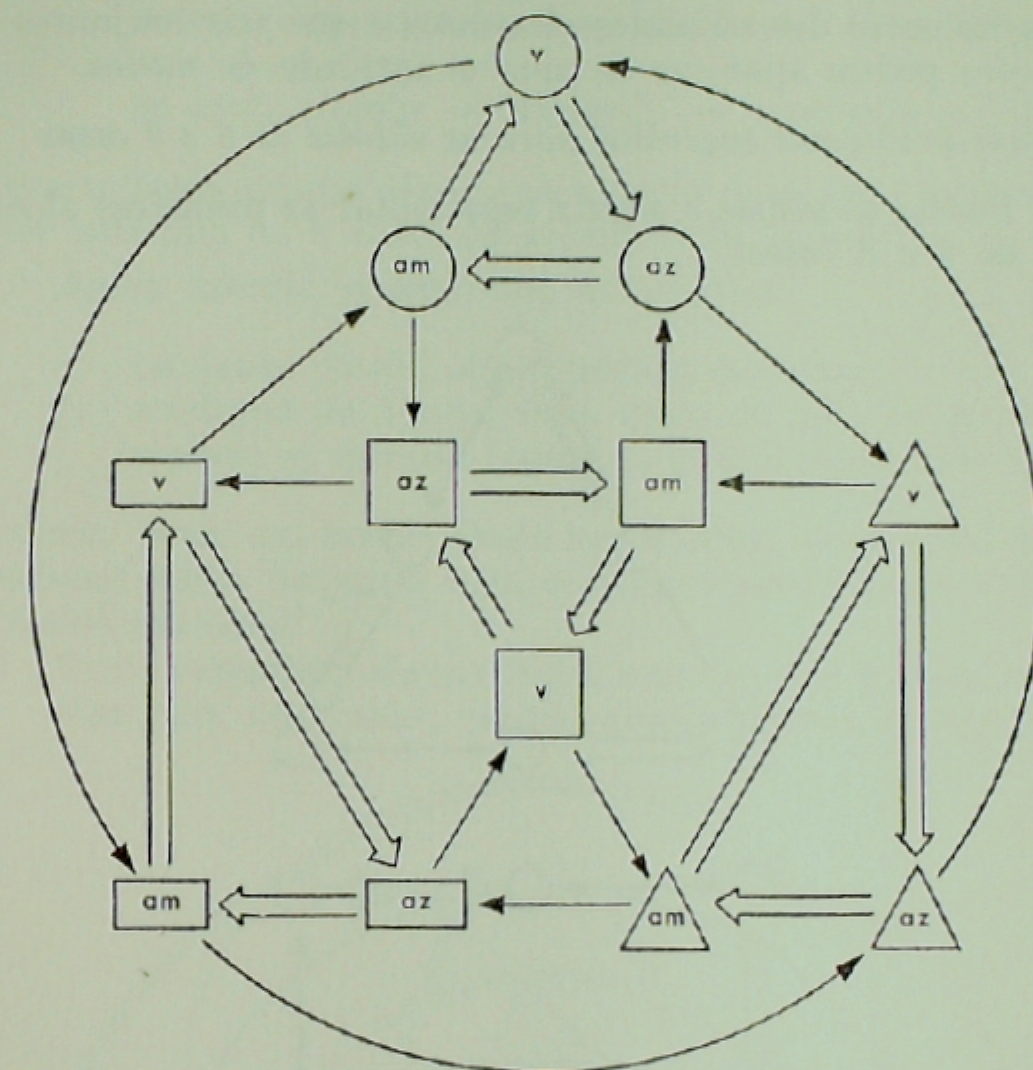
Um sistema de axiomas conveniente seria:

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ = nenhum movimento
$\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$ = nenhum movimento
$\rightarrow\Rightarrow\rightarrow\Rightarrow$ = nenhum movimento

3) Podem-se encontrar duas rotações do tetraedro regular para satisfazer os axiomas acima? Se fôr possível, a resposta à questão 2) é sim.

Os blocos atributos podem ser representados na aldeia de 12 casas acima. O leitor poderá gostar de se distrair tentan-

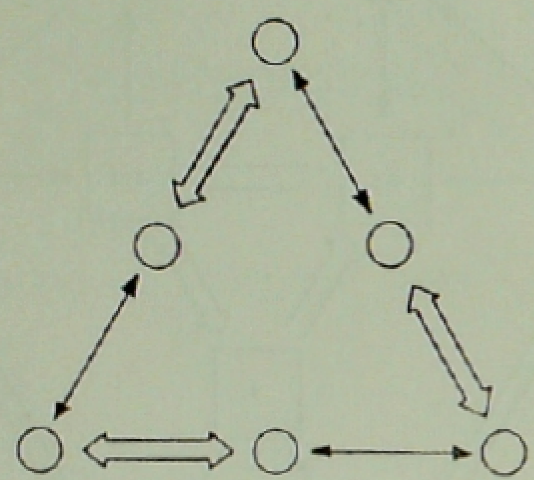
do enquadrar dois dos movimento de três batidas no mapa. Se estiver sendo difícil, damos a seguir uma solução. Naturalmente, há muitas outras soluções possíveis.

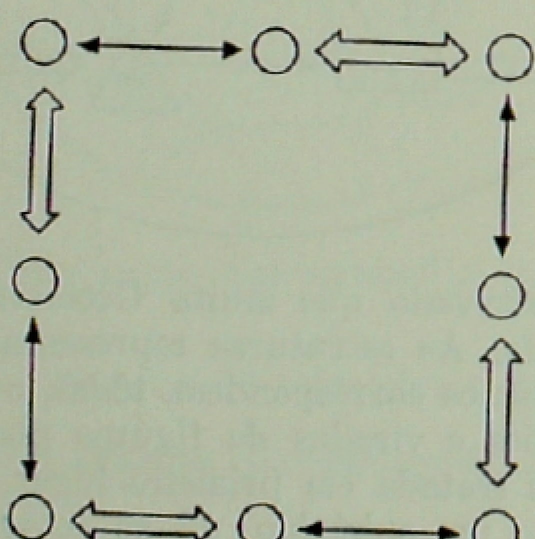


Pode ser observado que muita Geometria bidimensional já foi apresentada. As estruturas representadas pelas aldeias com 8 casas ou menos correspondem, tôdas, ou apenas às rotações ou às rotações e viradas de figuras planas regulares. A aldeia de 6 casas tratada em primeiro lugar, tirada da aldeia de 24 casas como um subúrbio, dá as rotações e viradas do triângulo eqüilátero. O subúrbio de 8 casas dará as rotações e viradas do quadrado. Uma das vantagens dessa espécie de introdução às rotações e simetrias será que as crianças olharão a simetria (virada) como alguma coisa que é seu próprio inverso, isto é, algo que, se se faz duas vêzes, coloca-nos na posição em que estaríamos se não tivéssemos feito nada. Da mesma forma, uma rotação de 120 graus será olhada por essas crianças como alguma coisa que teremos de fazer três vêzes antes de voltar à posição em que estaríamos se não tivéssemos feito nada. O mesmo acontece com os giros de um triângulo reto. Êle é um caso particular de qualquer ciclo de quatro vias. Tal apreciação abstrata dessas simples estruturas ajudarão as crianças a não ficarem confusas com linhas e planos "reais" e assim por diante. Compreenderão que o que interessa é o conjunto de relações entre determinados elementos e que tais conjuntos de relações podem aparecer de uma quantidade de modos.

Alguns problemas sugeridos para as aldeias de 6 e 8 casas

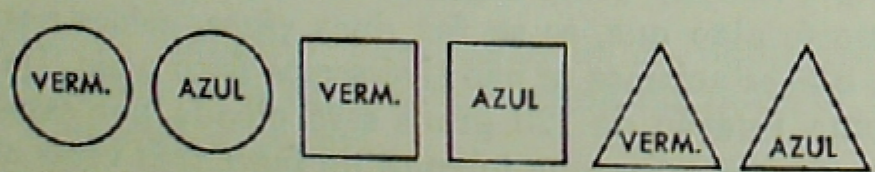
1) Podem os mapas a seguir representar as primeiras aldeias de 6 e 8 casas?





2) Se puderem, que itinerários são as rotações?

3) Use os seis blocos atributos seguintes



e estabeleça as seguintes "regras de mudança":

e) mudança de côr, sem mudança de forma;
f) mudança de forma, mas sem mudança de côr, tal como se segue:

se vermelho: círculo → quadrado → triângulo → círculo.
se azul: círculo → triângulo → quadrado → círculo

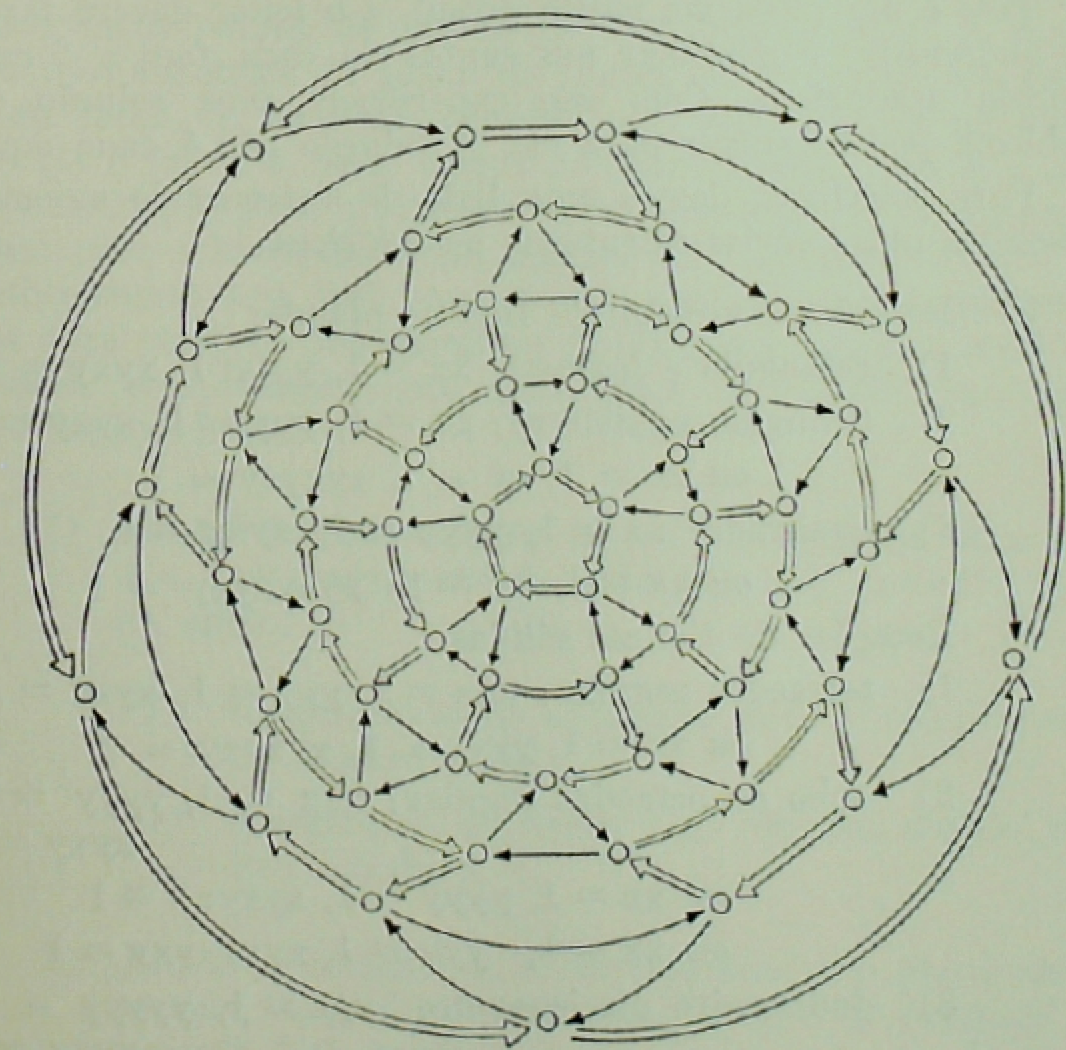
Procure fazer o mapa dêsses movimentos. Será igual ao de qualquer subúrbio de 6 casas na aldeia de 24 casas?

Agora execute os seguintes movimentos:

e) mudança de côr, sem mudança de forma;
f) mudança de forma, bem como de côr; as de forma seguem as mesmas regras do último movimento (*f*).

Procure fazer um mapa dêsses movimentos. Será igual ao de qualquer outro mapa de uma aldeia ou subúrbio de 6 casas? Ou será um nôvo?

4) Tente organizar alguns jogos como os das 6 casas acima, mas para oito casas, usando quatro formas e duas côres.



Organize um que seja como o primeiro tipo de combinações de c e f, e então que seja semelhante ao segundo tipo de combinações c e f. Algum dêsses jogos de extensão será igual aos outros de 8 casas que já descrevemos?

Esta é uma aldeia de 60 casas que representa o grupo de rotações do dodecaedro regular.

1) As rotações do icosaedro regular poderão ser representadas no mapa acima?
2) As rotações do octaedro regular poderão ser representadas em uma aldeia de 24 casas?
3) Se tivermos cinco formas, três côres, dois tamanhos e duas espessuras, e construirmos tôdas as combinações possíveis com essas formas, tamanhos, côres e espessuras, obteremos exatamente sessenta posibilidades. Será possível inventar um "movimento de seta grossa" e um "movimento de seta fina", que nos permitirá representar êsse conjunto de sessenta objetos nas 60 posições na aldeia de 60 casas? Se fôr, como faremos?

Êsse é um problema muito difícil, e o leitor deverá fazer um dodecaedro e desenhar nos cantos de cada face a forma colorida apropriada. Com essa experiência, uma solução do problema poderá surgir para êle. A solução não é dada aqui.

Para sintetizar, damos uma lista de sistemas de axiomas satisfeitos pelas várias estruturas geométricas:

a) Rotações e viradas de figuras planas:
   1) retângulo e losango: xx = 1, yy = 1, xyxy = 1
   2) triângulo eqüilátero: xx = 1, yyy = 1, xyxy = 1
      ou xx = 1, yy = 1, xyxyxy = 1
   3) quadrado: xx = 1, yyyy = 1, xyxy = 1
      ou xx = 1, yy = 1, xyxyxyxy = 1

b) Rotações de figuras sólidas:
   1) tetraedro regular: xxx = 1, yyy = 1, xyxy = 1
      ou xx = 1, yyy = 1, xyxyxy = 1
   2) cubo ou octaedro regular: xxx = 1, yyyy = 1, xyxy = 1
      ou xx = 1, yyyy = 1, xyxyxy = 1
      ou xx = 1, yyy = 1, xyxyxyxy = 1
   3) dodecaedro ou icosaedro: xxx = 1, yyyyy = 1, xyxy = 1

Muitos leitores, a esta altura, estarão pensando o que é que todo êsse brinquedo com itinerários de ônibus, rotações de cubos, quadrados, triângulos e outros, tem a ver com o que êle se lembra de fazer na escola sob o nome de Geometria. A resposta é que neste capítulo estamos dando ênfase aos *aspectos construtivos* do aprendizado dos conceitos geométricos, particularmente desde que tais aspectos foram deixados de lado quase sempre nas seqüências de aprendizado; as partes analíticas, normalmente encontradas sob o nome de Geometria, podem ser iniciadas depois que os conceitos "em grosso" tiverem sido construídos como resultado das próprias experiências das crianças. As construções normalmente ensinadas como uma introdução à Geometria, bastante curiosamente, não são, realmente, atividades que possam ser chamadas de construtivas, no sentido em que esta palavra tem sido usada neste livro. A fim de executar a maioria das construções usuais, deve ter sido realizada uma quantidade de pensamento analítico (ou aprendizado de cor). Uma ferramenta fundamental, por exemplo, em um grande número de construções, é a compreensão de que dois círculos congruentes que se interceptam formam uma figura com duas linhas de simetria, ou seja, uma linha que passa pelos pontos de interseção dos dois círculos. A representação simétrica do plano da figura em si mesma, em tôrno dessa linha de simetria, representará cada círculo no outro círculo e também cada centro no outro centro. Isso é a base da construção para a bisseção de um segmento de linha, assim como para a bisseção de um ângulo. Mas, mesmo antes que tal conhecimento seja útil para pensar nas construções apropriadas para resolver determinados problemas como êste, será necessário compreender uma quantidade de "fatos", tais como as relações abaixo:

1) Se A é representado em A' por uma simetria, cujo eixo é s, e se o segmento da linha reta AA' encontra s em O, então,

   I) comprimento do segmento AO = comprimento do segmento OA'

   II) o segmento da linha AA' está em ângulo reto com a linha s.

2) Em uma rotação, que vai representar o plano em si mesmo, se A é representado em A', e se o centro de rotação é O, então

I) durante a rotação, A "viaja" para A' pelo arco de círculo cujo centro está em O,

II) conseqüentemente, OA = OA'.

Não há espaço suficiente para uma prolongada descrição de como os conceitos "em grosso" são transformados em conceitos cuja estrutura interna também tem sido apreciada por uma variedade suficiente de exercícios analíticos. Êstes são apresentados no Programa Adelaide, e notas de professôres, bem como os cartões de instrução às crianças, estão disponíveis e foram escritos tendo essa finalidade em vista. Os exercícios descritos neste capítulo foram apresentados com sucesso, tendo pequenas variações, a crianças com idades entre seis e doze anos. Espera-se que os professôres aceitem o desafio e inventem uma grande variedade de exercícios semelhantes, para auxiliar as crianças a se empolgar com as propriedades do espaço em que se encontram.

10. *Conclusões*

Há uma quantidade enorme de variações dos jogos descritos, que podem ser executadas. Os "jogos dos produtos", tais como dois por três e dois por quatro, podem ser estendidos a quaisquer jogos n por m. Para a organização da aldeia, sugere-se uma câmara de ar de pneu de automóvel. Um conjunto de ciclos pode ir em tôrno da roda, e o outro pelo "furo" da câmara de ar. Os subúrbios de 8 e 6 casas podem sem ampliados, dando-se às crianças hexágonos ou pentágonos regulares, ou, na verdade, quaisquer polígonos regulares para brincar e para representar em aldeias. Elas acabarão vendo de que modo tais aldeias são "parecidas", tal como expresso no sistema-axioma

$$a^n = 1 \qquad b^2 = 1 \qquad a\,b\,a = b$$

que será verdadeiro para o polígono regular de n lados. Poderão mesmo ser feitas tentativas de estender êsses resultados ao círculo, onde o grupo correspondente é infinito. A aldeia de 24 casas pode ser estendida sugerindo-se que as crianças olhem seu cubo marcado em um espelho e copiem, em outro cubo, aquilo que estiverem vendo. A rotação, efetuada com o primeiro cubo, pode ser "copiada no espelho", executando alguma rotação no cubo copiado? Ou terão de copiar o cubo mais de uma vez? Isso abrirá o problema de simetrias (viradas) no mundo tridimensional.

Para resumir, sugeriríamos que a passagem da

I) manipulação concreta de objetos para

II) mapa representativo de tais manipulações e, então, para

III) formalização de tais representações em estruturas-regra ou "sistemas-axioma"

abrirá o caminho para a abstração, pràviamente apenas trilhado por poucos selecionados, que tiveram a possibilidade de gozar a satisfação de manipular estruturas puras, apesar de nossa falta de conhecimento de como tais estruturas podem ser percebidas pelas crianças. Sugerimos que tratamento semelhante seja imaginado para pavimentar o caminho de cada criança para a abstração, em todos os outros ramos da Matemática.

Recapitulemos, finalmente, os aspectos essenciais dos quatro princípios nos quais baseamos as sugestões dêste livro.

Primeiro, o *Princípio Dinâmico*. De acôrdo com êle, qualquer abstração e, portanto, tôda a Matemática surge da experiência. Há um processo definido de psicodinâmica, de acôrdo com o qual se procede à formação de conceitos; e é essencial proceder em harmonia com êsse processo, não contra êle. Devem ser projetadas experiências e situações de aprendizado (por exemplo: jogos de prática) que se devem encaixar nesse processo natural, que parece retribuir em ciclos sucessivos. Nenhum nôvo ciclo deve ser tentado até que todos os ciclos que conduzem aos conceitos componentes tenham sido integralmente completados.

Em seguida, o *Princípio da Construtividade*. Supõe-se que as crianças podem pensar construtivamente muito antes de poderem pensar lògicamente. É, portanto, sempre melhor formular uma situação de tal forma que conduza mais ao pensamento e à compreensão construtiva que analítica. Além disso, nenhum pensamento analítico tem possibilidade de se realizar *in vacuo*, e a coisa que tem de ser analisada deve, primeiro, ser construída. Isso é confirmado por outras pesquisas que foram feitas no aprendizado matemático (ver, por exemplo, Campedelli*).

* Ver (12).

Depois, há o *Princípio de Variabilidade Matemática*. Estabelece que todos os aspectos essenciais da estrutura do conceito devem ser variados, para que se possa focalizar o que é realmente constante. O aspecto constante será, de fato, o conceito matemático geral, livre de qualquer mancha e particularização. É importante, aqui, relembrar que isso pode envolver afastamentos revolucionários de métodos estabelecidos séculos atrás.

Finalmente, chegamos ao *Princípio da Variabilidade Perceptiva*. A essência da abstração é retirar propriedades comuns de diferentes tipos de situações. Estas devem, de fato, ser tornadas diferentes, enquanto sua estrutura conceptual essencial permanece a mesma. As propriedades comuns assim obtidas serão, então, as abstrações que devem ser aprendidas.

Tendo aceitado êsses princípios como válidos para a criação de situações dinâmicas de aprendizado, os professôres encontrarão um amplo campo para sua própria iniciativa criadora quando aplicarem os princípios a condições particulares em que se encontrem. Um aspecto essencial dessa orientação proposta é sua natureza aberta, correspondendo à natureza essencialmente aberta da Matemática. Da mesma forma que sempre haverá mais Matemática esperando pela criação em suas mentes, sempre haverá mais caminhos, e melhores, para apresentar às crianças as alegrias da criação matemática em seus níveis. Exatamente como o matemático de pesquisa se alegra ao conduzir a corrida do predicado, e, dêsse modo, atingir formas cada vez mais elevadas de pensamento matemático, assim também os professôres podem ter satisfação com a tarefa igualmente (ou mais) criadora de cada vez mais enriquecer o ambiente matemático pelo qual passarão as crianças às quais êles ensinam. Um conjunto de cartões de instrução para as crianças, junto com o material a que se referem êsses cartões, está, porém, disponível, a fim de dar aos mestres uma idéia de, pelo menos, um caminho pelo qual tal ambiente poderá ser criado. Não se precisa dizer que os métodos sugeridos não precisam ser seguidos servilmente; o sistema de cartões é o resultado de muito trabalho com crianças de todos os níveis de inteligência, encontradas nas escolas comuns. Os professôres que pretendem usar a orientação indicada aqui podem gostar de começar com essas situações e elaborar seus próprios métodos, quando estiverem familiarizados com os trabalhos práticos dos princípios.

Alguns leitores de mentalidade mais matemática podem estar pensando, agora, que o aspecto da Matemática, aqui apresentado, é muito unilateral. Embora haja muita construção na Matemática, o completo rigor da análise lógica é tanto uma parte da Matemática quanto as construções que a precedem. Isso é, naturalmente, perfeitamente verdadeiro. Mas eu gostaria de dar ênfase ao progresso histórico do pensamento matemático, que tem seguido muito mais do intuitivo para o lógico. Um absoluto rigor matemático apenas existiu nos tempos de Cauchy, exatamente há 150 anos. Por um longo tempo depois disso, os matemáticos ainda estavam muito impacientes a respeito da preocupação com coisas tão sem importância como saber se uma série era convergente ou não. O que interessava era que, no fim, funcionava. Na verdade, o real auto-exame só começou durante êste século, sob a forma de desenvolvimento da lógica matemática simbólica e, por outro lado, como uma demanda de maior rigor dos intuicionistas e construtivistas. Se a compreensão de que devemos examinar criticamente o que construímos nos tomou, literalmente, séculos para conseguir, faríamos bem em nos colocar no lado lógico, no que diz respeito às crianças. Uma vez que as construções que devem preceder essa autopesquisa lógica nunca foram verdadeira e completamente realizadas pelas crianças nas escolas, torna-se uma questão aberta saber quando ela poderá ou deverá efetuar-se. E assim voltamos ao valor do título dêste livro. Temos, primeiro, de verificar que alguma matemática *real* está, de fato, sendo *construída* nas mentes das crianças. Depois, poderemos começar a fazer perguntas sôbre quando e como as crianças devem começar a ser engajadas em discussões lógicas sôbre o que tiverem construído. Êste é, certamente, um ponto dos mais importantes, e muita pesquisa será necessária para esclarecê-lo. Enquanto isso, aquêles dentre nós que vão começar a encorajar a construção terão de manter abertos os olhos para os primeiros sinais de apalpadelas das crianças em direção à análise crítica. Se as construções forem sólidas, essas apalpadelas não tardarão a chegar e, então, outro volume terá de ser escrito, sôbre o esfacelamento da Matemática.

REFERÊNCIAS NO TEXTO

1. Piaget, J. (e outros). *L'enseignements mathématiques* (Neuchâtel & Paris, 1955).
2. Piaget, J. *The child's conception of number* (Londres, 1952).
3. Hadamard, J. *An essay on the psychology of invention in the mathematical field* (Nova York, 1954).
4. Waismann, F. *Introduction to mathematical thinking: the formation of concepts in modern mathematics* (Londres, 1951).
5. Wertheimer, M. *Productive thinking* (Nova York, 1945).
6. Rokeach, M. *A study in religious and political dogmatism*, Psychological Monographs (Nova York, 1956).
7. Adorno, T. W. (e outros). *The authoritarian personality* (Nova York, 1950).
8. Bruner, J. S. (e outros). *A study of thinking* (Nova York, 1956).
9. Bartlett, Sir Frederick, *Thinking* (Londres, 1958).
10. Dienes, Z. P. *Concept formation and personality* (Leicester, 1959).
11. Dienes, Z. P. "On the growth of mathematical concepts in children through experience" (em *Educational Research*, Vol. II, Nº 1, novembro de 1959).
12. Gattegno, C., Servais, W., Castelnuovo, E., Nocolet, J. L., Fletcher, T. J., Motard, L., Campedelli, L., Biguenet, A., Peskett, J. W., Puig Adam, P. *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques* (Neuchâtel & Paris, 1958).
13. Stern, C. *Children discover arithmetic* (Londres, 1953).
14. Gattegno, C., e Cuisenaire, G. *Numbers in colour* (Londres, 1954).
15. Dienes, Z. P. *Introduction to the use of the multibase arithmetic blocks* (M. A. B.) e *Indroduction to the use of the algebraic experience material* (A.E.M.) (E.S.A. School Materials Division, Pinnacles, Harlow, Essex).

OUTRAS REFERÊNCIAS

Bruner, J. S. *The process of education* (Harvard, 1960).

Churchill, Eileen. *Counting and measuring in the Infant school* (Londres, 1961).

Dienes, Z. P. *The power of mathematics* (Londres, 1963).

Dienes, Z. P. *An experimental study of mathematics-learning* (Londres, 1963).

Dienes, Z. P. "On abstraction and generalization", *Harvard Educational Review*, Vol. 31, Nº 3 (verão, 1961).

Dienes, Z. P. "On the learning of mathematics", *The Arithmetic Teacher* (março, 1963).

Dienes, Z. P. *Mathematics in the primary school* (Melbourne, 1964).

Dienes, Z. P., e Golding, E. W. "First Years in Mathematics", I, II, III (E.S.A., Londres).

Dienes, Z. P. "Geometry through transformations", I, II, III (E.S.A., Londres).

Sealey, L., e Gibbon, V. *Communications and learning* (Oxford, 1963).

Skemp, R. "The teaching of mathematical concepts", *Mathematics Teaching*, Nº 20 (outono, 1962); "Schematic and rote learning", Nº 21 (inverno, 1962); "Sensorimotor intelligence and reflective intelligence", Nº 22 (primavera, 1963).

Skemp, R. *Understanding mathematics* (Londres, 1964).

COMPOSTO E IMPRESSO POR

SEDEGRA SOCIEDADE EDITÔRA E GRÁFICA LTDA.

RUA MATIPÓ, 101/115 — TEL.: 261-8160 — RIO-GB

matemática — a precedência das *construções* em relação aos julgamentos, *concepção* que o autor dêste livro amplia e aprofunda nestas páginas decisivas.

Z. P. Dienes nasceu na Hungria, tendo estudado na Áustria e na França. Emigrou para a Inglaterra nos primeiros anos da década de 1930, ensinou Matemática na Universidade de Londres, onde se doutorou. Foi professor nas universidades de Southampton, Sheffield e Manchester, fixando-se finalmente em Leicester e ampliando seu campo de interêsse da matemática pura ao estudo da lógica em geral e da psicologia com referência especial aos problemas de cognição. Aos poucos, foi se concentrando nas implicações educacionais de seu trabalho, que hoje ocupam o centro de suas preocupações e estudos. Recentemente, ditou cursos nas Universidades de Harvard e Columbia, nos Estados Unidos, e Adelaide, na Austrália, além de haver organizado o Instituto de Aprendizado da Matemática na Universidade de Sherbrooke, Quebec, no Canadá.

BIBLIOTECA DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO

Os grandes nomes e as novas idéias e correntes da pedagogia moderna, ajudando mestres e educadores a guiarem as novas gerações na difícil passagem do passado para o futuro.

Aprendizado Moderno da Matemática
Z. P. Dienes, da Universidade de Sherbrooke

Introdução à Filosofia da Educação, 3ª edição
George Kneller, da Universidade da Califórnia

O Nascimento da Inteligência na Criança
Jean Piaget, da Universidade de Geneva

A Construção do Real na Criança
Jean Piaget, da Universidade de Geneva

Gênese das Estruturas Lógicas Elementares
Jean Piaget, da Universidade de Geneva

Infância e Sociedade
Erik H. Erikson, da Universidade Stanford

ZAHAR EDITÔRES

a cultura a serviço do progresso social

RIO DE JANEIRO

A cultura a serviço do progresso social

Distribuidores exclusivos:
LIVRARIAS EDITÔRAS REUNIDAS

LIVRARIA LER

Rio de Janeiro: Rua México, 31-A
São Paulo: Praça da República, 71