3. UNIDADES LEGAIS DE COMPRIMENTO, ÁREA, VOLUME, ÂNGULO, TEMPO, VELOCIDADE, MASSA, DENSIDADE; MÚLTIPLOS E SUB-MÚLTIPLOS

COMPRIMENTO

53. — Unidade legal de comprimemto. A comissão de sábios da Academia de Ciências de Paris que, em 1795, criou o *sistema métrico decimal* (8), procurou ligar o comprimento do metro às dimensões do globo terrestre.

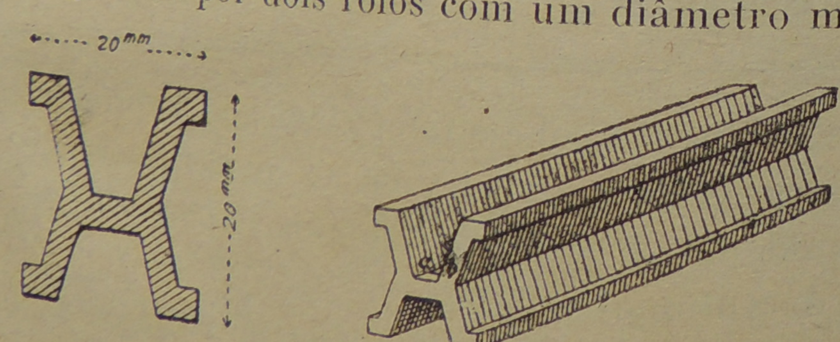
O metro foi definido a princípio como a *décima-milionésima parte do quadrante terrestre*.

As medidas geodésicas sobre as quais se funda a determinação do metro não podem ser absolutamente exatas e estão sujeitas a correções sempre que se aperfeiçoam os instrumentos de medida. Assim, de acordo com as medições mais recentes, a *décima-milionésima parte do quadrante terrestre* é um pouco maior do que o metro adotado.

Tornou-se, pois, necessário estabelecer-se a definição do metro por meio do *protótipo internacional* denominado *metro padrão*.

54. — Definição legal do metro. *O metro é a distância, à temperatura de 0° C (zero graus centígrados), dos eixos dos dois traços médios gravados sobre a barra de platina iridiada depositada na Repartição Internacional de Pesos e Medidas e considerada como protótipo do metro.*

Essa barra deve estar submetida à pressão atmosférica normal e suportada por dois rolos com um diâmetro mínimo de



1 cm, situados simetricamente num mesmo plano horizontal e à distância de 571 milímetros um do outro.

(8) Desta comissão fizeram parte Delambre, Borda, Méchain e outros que efetuaram delicados trabalhos de Geodesia necessários à medição do arco do meridiano de Paris compreendido entre Dunkerque e Barcelona.

55. — Múltiplos e sub-múltiplos. Os múltiplos e sub-múltiplos usuais do metro estão indicados no quadro abaixo:

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
quilômetro	km	1000 m
hectômetro	hm	100 m
decâmetro	dam	10 m
metro	dm	1 m
decímetro	m	0,1 m
centímetro	cm	0,01 m
milímetro	mm	0,001 m
micron	μ	0,000001 m
milimicron	mμ	0,000000001 m
decimilimicron	dmμ ou Å	0,0000000001 m
micromicron	μμ	0,000000000001 m
milha marítima internacional	M ou ′	1852 m

OBSERVAÇÕES. I. Para o *decimilimicron* podem-se usar a denominação de *angström* e o símbolo especial Å empregados de preferência nas medidas espetrométricas.

II. Nas medidas referentes à navegação, poderá ser utilizada a *milha marítima internacional* considerada como equivalente a 1852 m. (9).

Poderão ser adotadas as denominações *milha marítima* ou simplesmente *milha* quando não possa haver dúvidas quanto ao seu significado.

III. Do modo por que se acham escritos os "valores" no quadro acima, se conclue que a maneira legal de indicar a unidade, múltiplo ou sub-múltiplo, a que se refere um número decimal, é escrever o símbolo correspondente em seguida ao número decimal e no mesmo alinhamento deste. Fica assim inteiramente abolida a maneira inconveniente e pouco racional de indicar u'a medida escrevendo-se o símbolo da unidade junto ao algarismo das unidades simples, à guiza de expoente. Na verdade, para saber-se qual é o algarismo que corresponde à ordem das unidades, não é necessário

(9) Comprimento médio de um minuto sexagesimal de latitude terrestre.

que o símbolo se ache junto a este, pois a colocação da vírgula (ou do ponto elevado) é que indica a ordem das unidades.

Não se deve, pois, escrever

$8{,}^{m}25 \qquad 5{,}^{g}45 \qquad 18{,}^{km}5 \qquad 0{,}^{g}025$

e sim

8,25m 5,45g 18,5km 0,025g

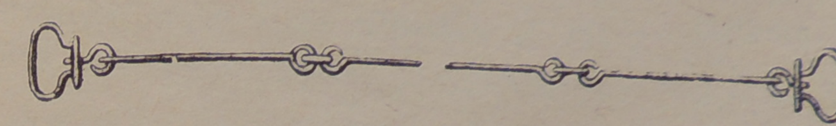
IV. Convém ainda assinalar algumas alterações trazidas [10] aos símbolos que eram usados entre nós. Ficou adotado de um modo geral o uso da letra minúscula com exceção do *M* (para *méga*). Para se distinguirem os múltiplos, formados com os prefixos *míria* e *deca*, dos submúltiplos formados com os prefixos *mili* e *deci*, são aqueles simbolizados por *ma* e *da*, ao invês de *M* e *D* que até há pouco se usavam entre nós. Aliás, nesse ponto, não se fez mais do que restabelecer os símbolos criados pela Comissão que creou o sistema métrico e que sempre foram usados pelos franceses e outros povos que adotaram o sistema referido.

Mudança de unidade. — Considerando o quadro dos múltiplos e submúltiplos usuais do metro, desde o quilômetro até ao milímetro, vê-se que cada um deles vale 10 vezes o imediatamente inferior. A formação destes múltiplos e submúltiplos se faz, em relação ao metro, do mesmo modo que a formação das ordens do sistema de numeração decimal em relação à ordem das unidades simples. A cada uma destas ordens (milhares, centenas, dezenas, décimos, etc.) corresponde, pois, um múltiplo ou um submúltiplo do metro. Tendo em vista esta observação, será facil resolver imediatamente qualquer problema relativo a mudança de unidades lineares do sistema métrico. Deixamos de insistir sobre esses problemas, porque, com eles, já devem os alunos se achar familiarizados desde a escola primária.

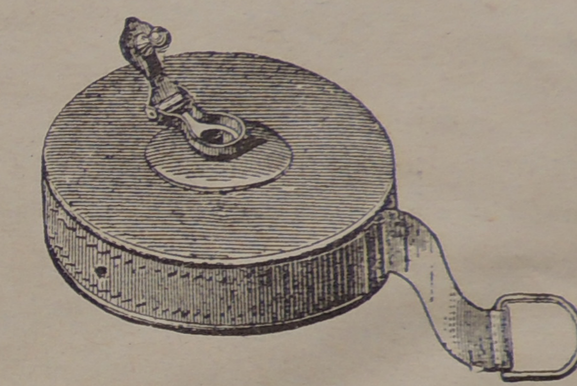
(10) Pelo Regulamento que acompanham o decreto lei nº 4257 de 16-V-939.

56. — Medidas efetivas. As medidas efetivas são as que no comércio e na indústria servem para medição direta dos comprimentos, pesos, etc. As suas formas são reguladas por lei e a sua exatidão sujeita a verificação periódica.

As medidas efetivas para as avaliações dos comprimentos são:



- o meio decâmetro
- o decâmetro
- o duplo metro
- o duplo-decâmetro
- o duplo decímetro
- o meio metro
- o decímetro
- o metro



Essas medidas são bastante conhecidas e por isso parece-nos inútil descrevê-las.

Todos conhecem o metro rígido que os negociantes de fazendas empregam, bem como o metro articulado empregado por carpinteiros e por muitos outros operários. Não há aluno que não tenha usado uma régua de duplo-decímetro. O duplo-decâmetro, o decâmetro e o meio decâmetro são *fitas* ou *trenas* de pano ou aço que se enrolam em estojos de couro ou metal. Estes são tambem os comprimentos de *correntes* de agrimensor, empregadas nas medições de terras.

ÁREA

57. — Unidades de área. A medida de uma superfície, como já vimos, denomina-se *área*.

A unidade legal de área é o *metro quadrado* cujo símbolo é m^2.

No quadro abaixo, damos os múltiplos e submúltiplos usuais do metro quadrado:

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
Quilômetro quadrado	km^2	1000000 m^2
Hectômetro quadrado	hm^2	10000 m^2
Decâmetro quadrado	dam^2	100 m^2
Metro quadrado	m^2	1 m^2
Decímetro quadrado	dm^2	0,01 m^2
Centímetro quadrado	cm^2	0,0001 m^2
Milímetro quadrado	mm^2	0,000001 m^2
Hectare	ha	10000 m^2
Are	a	100 m^2
Centiare	ca	1 m^2

Mudança de unidade. — Os problemas relacionados com as unidades de área já foram estudados na Unidade I.

VOLUME

58. — Primeira unidade legal de volume. A primeira unidade legal de volume é o metro cúbico cujo símbolo é m^3.

O metro cúbico é o volume de um cubo cuja aresta tem o comprimento de um metro.

Os múltiplos e submúltiplos do metro cúbico estão indicados no quadro abaixo:

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
Quilômetro cúbico	km^3	1000000000 m^3
Metro cúbico	m^3	1 m^3
Decímetro cúbico	dm^3	0,001 m^3
Centímetro cúbico	cm^3	0,000001 m^3
Milímetro cúbico	mm^3	0,000000001 m^3.

Os problemas relativos a mudanças de unidade de volume foram estudados na Unidade II.

59. — Segunda unidade legal de volume. A segunda unidade legal de volume é o litro, cujo símbolo é *l*.

O litro é o volume de 1 quilograma de água distilada e isenta de ar, à temperatura de 4° C (4 graus centígrados) e sob pressão atmosférica normal.

Para fins legais, o litro pode ser considerado como equivalente a 1 decímetro cúbico.

Os múltiplos e submúltiplos do litro são:

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
Hectolitro	hl	100 l
Decalitro	dal	10 l
Litro	l	1 l
Decilitro	dl	0,1 l
Centilitro	cl	0,01 l
Mililitro	ml	0,001 l

Cabem aqui as mesmas considerações feitas sob o título Mudança de unidade em o n. **55**.

60. — O estéreo. Para o metro cúbico, pode-se usar a denominação de *estéreo*, quando utilizado nas medidas de volume aparente de lenha.

O símbolo do estéreo é *st*.

O estéreo tem um múltiplo, o *decastéreo* e um submúltiplo, o *decistéreo*.

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
Decastéreo	dast	10 m^3
Estéreo	st	1 m^3
Decistéreo	dst	0,1 m^3

ÂNGULO

61. — Primeira unidade legal de ângulo. Ângulo reto. A primeira unidade legal de ângulo plano é o *ângulo reto* cujo símbolo é *r*.

O ângulo reto é legalmente definido do seguinte modo:

Qualquer dos menores ângulos formados por duas retas concurrentes, que formam entre si ângulos adjacentes iguais.

Os submúltiplos decimais do ângulo reto não teem designação própria, exceto o *grado*.

O ângulo equivalente a 0,01 do ângulo reto é denominado *grado* (símbolo *g* ou *gr*).

O grado admite, por sua vez, três submúltiplos que são: o *decigrado*, o *centigrado* e o *miligrado*.

No quadro abaixo, damos o ângulo reto e seus submúltiplos decimais:

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
Ângulo reto	r	1 r
Grado	g ou gr	0,01 r
Decigrado	dgr	0,001 r
Centigrado	cgr	0,0001 r
Miligrado	mgr	0,00001 r

MUDANÇA DE UNIDADE. — A passagem do ângulo reto para o grado, ou vice-versa, se faz deslocando a vírgula duas casas para a direita ou para a esquerda. Cada um dos outros múltiplos e submúltiplos corresponde a uma ordem.

EXEMPLOS. I. *Referir ao gr um ângulo cuja medida é* 1r 8dgr 5mgr. Tem-se

$$1r\ 8dgr\ 5mgr = 100{,}805\ gr.$$

II. *Referir ao gr os ângulos cujas medidas são* 1,9 r; 3,7 dgr; 4,38 cgr. Tem-se

$$1{,}9\ r = 190\ gr$$
$$3{,}7\ dgr = 0{,}37\ gr$$
$$4{,}38\ cgr = 0{,}0438$$

62. — Segunda unidade legal de ângulo. E' o *grau sexagesimal* ou *grau*, cujo símbolo é ° escrito à direita e um pouco acima do algarismo das unidades do número que exprime a medida.

O grau é o ângulo equivalente a $\frac{1}{90}$ de 1 ângulo reto.

Seus múltiplos e submúltiplos decimais não teem designação própria.

As denominações *grau, minuto* e *segundo* podem ser usadas quando não possa haver dúvidas quanto ao seu significado.

MÚLTIPLOS E SUBMÚLTIPLOS USUAIS

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
Grau sexagesimal ou grau ..	°	$\frac{1}{90}$ r
Minuto de ângulo ou minuto	'	$\frac{1^\circ}{60}$
Segundo de ângulo ou segundo	"	$\frac{1'}{60}$

MUDANÇA DE UNIDADE. — O fato de não ser potência de 10 (isto é, 10, 100, 1000...) a razão do grau para os seus submúltiplos, faz com que a medida de um ângulo em graus dê lugar a um *número complexo*, isto é, um número constituído de várias partes referidas a unidades diversas.

Resolvemos na 1ª Série, os problemas principais que se podem apresentar sobre a mudança de unidade com os números complexos.

63. — Conversão de graus em grados e vice-versa. Das definições de grau e de grado, resulta que o ângulo reto tem 90° e 100 gr. Assim, 90° correspondem a 100 gr, logo 1° corresponde a $\frac{1}{90}$ de 100 gr, ou sejam:

$$\frac{100}{90} = \frac{10}{9}\ gr$$

Inversamente, se 100 gr correspondem a 90°, 1 corresponde a $\frac{1}{100}$ de 90°, ou sejam:

$$\frac{90^{\circ}}{100} = \frac{9^{\circ}}{10}$$

Temos, então:

$$1^{\circ} = \frac{10}{9} \text{ gr} \quad ; \quad 1 \text{ gr} = \frac{9^{\circ}}{10}$$

Conclusão: *para exprimir em grados a medida de um ângulo feita em graus, multiplica-se o número de graus por* $\frac{10}{9}$; *para exprimir em graus a medida de um ângulo feita em grados multiplica-se o número de grados por* $\frac{9}{10}$.

EXEMPLO. I. *Exprimir em graus um ângulo de 56,28 g.*

— Multiplicamos por 9.

$$56{,}28 \times 9 = 506{,}52$$

Dividimos o resultado por 10:

$$50^{\circ}{,}652$$

A parte decimal 0,652 (do grau) convertemo-la em minutos, multiplicando por 60:

$$0{,}652 \times 60 = 39{,}12$$

A parte decimal 0,12 (do minuto) convertemo-la em segundos, multiplicando por 60:

$$0{,}12 \times 60 = 7{,}2$$

O ângulo em graus será expresso pelo número complexo:

$$50^{\circ}39'7'',2$$

II. *Exprimir em grados um ângulo de 32°37'30".*

— Procedemos à decimalização do número dado, exprimindo-o em graus e fração decimal do grau:

$$32^{\circ}37'30'' = 32^{\circ}{,}625$$

Multiplicamos o número assim obtido por 10 e dividimos o resultado por 9.

Multiplicando por 10:

$$32{,}625 \times 10 = 326{,}25$$

Dividindo por 9:

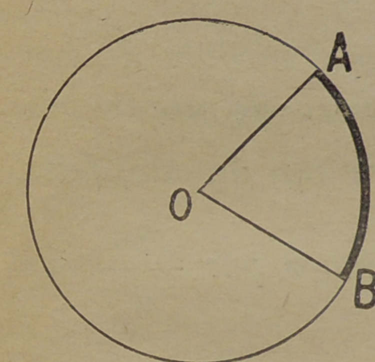
$$326{,}25 \div 9 = 36{,}25$$

Achamos:

$$36{,}25 \text{ g}$$

64. — Terceira unidade legal de ângulo. Radiano. Há uma terceira unidade legal de ângulo denominada *radiano*.

Consideremos numa circunferência de raio R um arco AB cujo comprimento seja igual ao raio.



Tracemos os raios OA e OB.

O ângulo central AOB que intercepta o arco igual ao raio é denominado *radiano*.

RADIANO *é, pois, o ângulo central que intercepta um arco de círculo cujo comprimento é igual ao comprimento do raio do mesmo círculo.*

O símbolo do radiano é *rd* e seus múltiplos e submúltiplos não teem nomes especiais.

65. — Conversão de graus em radianos e vice-versa. Consideremos uma circunferência de raio R. Se o raio R coubesse 6 vezes exatamente na circunferência poderíamos dizer que o ângulo de 360° era equivalente a 6 radianos. Tal, porém, não acontece. O comprimento da circunferência é, como sabemos,

$$2\pi R$$

Importa isso em dizer que a circunferência vale:

$$2\pi \times \text{raio}$$

e o ângulo de 360° (ângulo de uma volta) será, portanto, equivalente a 2π radianos ou a

$$2\pi \text{ rd}$$

visto que o arco igual ao raio corresponde ao ângulo central de 1 radiano.

Ora, se o ângulo de 360° vale 2πrd o ângulo de 1° valerá:

$$\frac{2\pi}{360}\text{ rd} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{180}\text{ rd}$$

O ângulo de 90° valerá:

$$\frac{90\pi}{180}\text{ rd} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2}\text{ rd}$$

Temos, assim,

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{ rd} \quad \text{e} \quad 1\text{ rd} = \frac{180}{\pi}$$

Conclusão: *para se exprimir em radianos a medida de um ângulo, feita em graus, multiplica-se o número de graus por* $\frac{\pi}{180}$; *para se exprimir em graus a medida de um ângulo, feita em radianos, multiplica-se o número de radianos por* $\frac{180}{\pi}$.

Praticamente, neste último caso, *divide-se por* π *o número de radianos, multiplica-se o resultado por* 180° *e transforma-se em complexo a fração decimal do grau, assim obtida.*

Se a medida em radianos não contiver o fator π é preferível multiplicá-la por $\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$, o que equivale a dividir por π.

Convém reter de cór as seguintes correspondências:

$$360^\circ = 2\pi(\text{rd}) \quad ; \quad 180^\circ = \pi(\text{rd}) \quad ; \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}(\text{rd})$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}(\text{rd}) \quad ; \quad 60 = \frac{\pi}{3}(\text{rd}) \quad ; \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6}(\text{rd})$$

EXEMPLOS. I. *Exprimir em radiano o ângulo de* 54°.

Sabemos que o ângulo de 1° é igual a $\frac{\pi}{180}$ rd.

Multiplicamos o número dado (54) por π e dividimos o resultado por 180.

$$\frac{54 \times \pi}{180}$$

Simplificando, temos:

$$\frac{3\pi}{10}\text{ rd}$$

II. *Exprimir em graus o ângulo de* $\frac{3\pi}{10}$ rd.

Procedemos de modo inverso ao do exercício I: multiplicamos o número dado por 180 e dividimos o resultado por π.

— Multiplicando por 180, temos:

$$\frac{3\pi}{10} \times 180$$

ou 54π.

Dividindo-se por π, achamos 54. O ângulo tem, portanto, 54°.

III. *Exprimir em graus o ângulo de* 1 rd.

— Multiplicando-se por 180 e dividindo-se por π, resulta:

$$\frac{180}{\pi}$$

Efetuando a divisão

$$\frac{180}{3{,}1416}$$

obtemos:

57°2958 (aproximadamente e por excesso).

Convertendo-se em complexo a decimal do grau, tem-se:

$$1\text{ rd} = 57^\circ 17' 44''8$$

IV. *Referir ao grau o ângulo de 2,5 rd.*

Multiplicamos o número de radianos (2,5) por 57,2958, que é o valor de 1 rd em graus:

$$2{,}5 \times 57{,}2958$$

Efetuando, achamos

$$143^\circ{,}2395$$

Convertendo em complexo, obtemos, finalmente

$$143^\circ 14' 22'',2.$$

Exercícios

1. Referir ao gr a medida angular *a)* 1 r 7 dgr 6 cgr; *b)* 3/4 r; *c)* $1\frac{5}{8}$ r; *d)* 6 dgr 3 cgr 9 mgr.

2. Exprimir em fração de ângulo reto o ângulo *a)* 75 gr; *b)* 12 gr 5dgr; *c)* 6 dgr 2 cgr 5 mgr.

3. Exprimir em graus o ângulo de *a)* 67 gr; *b)* 435gr; *c)* 965 dgr; *d)* 85 gr 65 cgr.

4. Converter em grados o ângulo de *a)* 45°; *b)* 30°; *c)* 25°27′; *d)* 17°45′18″.

5. Exprimir em radianos a medida de um ângulo de *a)* 84°; *b)* 64°; *c)* 270°; *d)* 24°30′; *e)* 17°24′45″; *f)* 10″.

6. Converter em graus *a)* 1,3788 rd; *b)* 0,19925 rd; *c)* $\frac{13\pi}{8}$ *d)* $\frac{5\pi}{8}$.

TEMPO

66. — Unidade legal de tempo. A unidade legal de tempo é o *segundo* cujo símbolo é *s* ou *seg.*

A definição legal de SEGUNDO é: *intervalo de tempo igual à fração $\frac{1}{86400}$ do dia solar médio definido de acordo com as convenções astronômicas.*

No quadro abaixo, damos os principais múltiplos do segundo com seus respectivos símbolos e valores.

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
dia	d ou da	86400 s
hora	h	3600 s
minuto	m ou min	60 s
segundo	s ou sg	1 s

Os múltiplos decimais do segundo não teem designação própria.

Os símbolos *s*, *m* e *d* serão usados quando não possa haver dúvida quanto ao seu significado.

A lei permite que sejam admitidas as unidades de tempo estabelecidas pelas convenções usuais do calendário civil e da Astronomia.

As outras unidades de tempo, de emprego mais ou menos frequente na prática, são as seguintes:

MÚLTIPLOS DO DIA:

a *semana* que vale 7 dias;
o *mês* que vale 30 ou 31 dias;
o *ano* que vale 365 dias.

MÚLTIPLOS DO ANO:

o *biênio*	2 anos
o *triênio*	3 anos
o *quatriênio*	4 anos
o *quinquênio* ou *lustro*	5 anos
o *decênio* ou *década*	10 anos
o *século*	100 anos
o *milênio*	1000 anos

MÚLTIPLOS DO MÊS:

o *bimestre*	2 meses
o *trimestre*	3 meses
o *semestre*	6 meses

67. — Mudança de unidade. A mudança de unidade, nas medidas de tempo, conduz aos mesmos problemas já estudados no capítulo relativo aos números complexos.

A título de recapitulação vamos resolver os principais problemas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS. I. *Reduzir a segundos um intervalo de tempo expresso por* 2d 9h 52m 48s.

Reduzimos os dias a horas:

$$2 \times 24 = 48$$

Juntamos esse resultado ao número de horas:

$$48 + 9 = 57 \text{ h}$$

Reduzimos esse número total de horas a minutos:

$$57 \times 60 = 3420 \text{ m}$$

Juntamos esse resultado ao número de minutos:

$$3420 + 52 = 3472 \text{ m}$$

Reduzimos esse número total de minutos a segundos:

$$3472 \times 60 = 208320$$

Juntamos esse resultado ao número de segundos:

$$208320 + 48 = 208368 \text{ s}$$

O número assim obtido exprime em segundos o intervalo expresso por um número complexo.

II. *Reduzir a uma fração da hora o intervalo de tempo expresso por* 7h 36m 18s.

Reduzimos, como no problema anterior, o número dado a segundos e obtemos:

$$27378 \text{ s}$$

Dividimos esse número por 3600 que é o número de segundos contidos numa hora:

$$\frac{27378}{3600}$$

Simplificando essa fração, temos:

$$\frac{1521}{200} \text{ h}$$

Reduzimos, assim, o intervalo de tempo a uma fração da hora.

III. *Reduzir a complexos* 13,725 h.

Multiplicamos a parte decimal por 60 (para reduzir a minutos)

$$0{,}725 \times 60 = 43{,}500 \text{ m}$$

Multiplicamos a parte decimal por 60 (para reduzí-la a segundos)

$$0{,}500 \times 60 = 30{,}000 \text{ s}$$

O número complexo pedido será:

13h 43m 30s

VELOCIDADE

69. — Velocidade. Um movimento é dito *uniforme* quando o movel percorre espaços iguais em tempos iguais.

Admitamos que um automovel, em movimento uniforme, tenha percorrido a distância de 120 km em 3 h. Em cada hora, o automovel percorreu:

$$120 \div 3 = 40 \text{ km}$$

Exprimimos tal fato, dizendo que a *velocidade* desse automovel *foi de* 40 *km por hora.*

A velocidade é uma grandeza composta, pois é expressa pelo quociente de uma *distância por um intervalo de tempo.*

Exemplo: *um nadador percorreu* 51 m *em* 17 s. *Qual foi a sua velocidade?*

Resposta: $\frac{51 \text{ m}}{17 \text{ s}} = 3$ metros por segundo.

Do exemplo acima resulta que a velocidade é o quociente exato do número que mede o espaço pelo número que mede o tempo. Podemos escrever:

$$Velocidade = \frac{Espaço}{Tempo}$$

ou, simbolicamente:

$$v = \frac{e}{t}$$

Daí se conclue, ainda, que a distância percorrida por um movel em movimento uniforme é igual ao produto do número que mede a velocidade pelo número que mede o tempo. Temos, assim:

$$Espaço = Velocidade \times Tempo$$

ou

$$e = vt$$

Finalmente, o tempo é o quociente do espaço pela velocidade:

$$Tempo = \frac{Espaço}{Velocidade}$$

ou

$$t = \frac{e}{v}$$

70. — Unidade legal. Para a medição das velocidades a unidade legal é o *metro por segundo* cujo símbolo é $^m/_s$ (lê-se: *metro por segundo*).

O METRO POR SEGUNDO *é a velocidade de um movel que, animado de um movimento retilínio e uniforme, percorre uma distância de 1 metro durante 1 segundo.*

Uma pessoa normal, andando a passo uniforme, pode caminhar aproximadamente segundo a unidade legal de velocidade.

71. — Outras unidades. Podemos obter outras unidades de velocidade, substituindo, na definição da unidade legal, o metro por qualquer outra unidade legal de comprimento, e o

segundo por qualquer unidade legal de tempo. Podemos, tambem, substituir o metro e conservar o segundo, ou substituir o segundo e conservar o metro.

Assim, um movel que percorreu 80 km em 2 horas deslocou-se com uma velocidade de 40 km por hora.

Obtemos, desse modo, uma outra unidade de velocidade — *quilômetro por hora* (símbolo $^{km}/_h$ que se lê: *quilômetro por hora*).

Para medir a velocidade das embarcações pode ser utilizado o *nó*, considerado como equivalente a 1 milha marítima internacional por hora.

No quadro abaixo, damos as principais unidades legais de velocidade:

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
Metro por segundo	m/s	1 m/s
Metro por minuto	m/min	$\frac{1}{60}$ m/s
Centímetro por segundo ..	cm/s	$\frac{1}{100}$ m/s
Quilômetro por hora	km/h	$\frac{1}{3,6}$ m/s
Nó		0,51478 m/s

72. — Mudança de unidade. Dada a velocidade de um movel referida a uma certa unidade, podemos exprimí-la em outra unidade.

Exemplo: para exprimir uma certa velocidade em metros por segundo, reduzimos a distância a metros e o intervalo de tempo a segundos. O quociente da distância (em metros) pelo tempo (em segundos) dará a velocidade expressa em metros por segundo.

Tambem se podem usar as relações que figuram no quadro acima. Assim, para reduzir a $^m/$ uma velocidade expressa em $^{m}/_{min}$, ou em $^{cm}/_{s}$, ou em $^{km}/_{h}$, ou em nós, multiplica-se a velocidade dada, respectivamente, por $\frac{1}{60}$, ou por $\frac{1}{100}$, ou por $\frac{1}{3,6}$, ou por 0,51478.

Inversamente, para se reduzir a $^{m}/_{min}$, ou a $^{cm}/_{s}$, ou a $^{km}/_{h}$, ou a n=s, uma velocidade expressa em $^{m}/_{s}$, divide-se a velocidade dada, respectivamente, por $\frac{1}{60}$, ou por $\frac{1}{100}$ ou por $\frac{1}{3,6}$, ou por 0,51478, o que equivale a multiplicá-la por 60, ou por 100, ou por 3,6 ou por $\frac{1}{0,51478}$.

Exercícios resolvidos. I. *Exprimir em* m/min *uma velocidade de* 50 m/s.

1ª *marcha*: $1\,s = \frac{1}{60}$ min. Tem-se, então,

$$50\,m/s = 50\,m \div \frac{1}{60}\,min = (50 \times 60)\ m/min = 3000\ m/min$$

2ª marcha: o quadro nos dá $1\,m/min = \frac{1}{60}$ m/s, logo 1 m/s = = 60 m/min e, portanto,

$$50\,m/s = 50 \times 60\ m/min = 3000\ m/min$$

II. *Exprimir em* m/s *uma velocidade de* 180 m/min.

1ª marcha: 1 min = 60 s, tem-se, então,

$$180\,m/min = 180\,m \div 60\,s = (180 \div 60)\ m/s = 3m/s$$

2ª marcha: o quadro nos dá $1\ m/min = \frac{1}{60}$ m/s, logo

$$180\ m/min = 180 \times \frac{1}{60}\ m/s = 3\ m/s$$

III. *Exprimir em* cm/s *uma velocidade de* 8,5 m/s.

1ª marcha: 8,5 m = 850 cm. Tem-se, então,

$$8,5\ m/s = 850\ cm \div 1\,s = 850\ cm/s$$

2ª marcha: o quadro nos dá $1\,cm/s = \frac{1}{100}$ m/s e, portanto, 1 m/s = 100 cm/s; logo

$$8,5\ m/s = 8,5 \times 100\ cm/s = 850\ cm/s$$

IV. *Exprimir em* m/s *uma velocidade* 540 km/h.

1ª marcha: 540 km = 540000 m; 1 h = 3600 s. Tem-se, então, 540 km/h = 540000 m ÷ 3600 s = (540000 ÷ 3600) m/s = 150 m/s

2ª marcha: o quadro nos dá $1\,km/h = \frac{1}{3,6}$ m/s, logo

$$540\,km/h = 540 \times \frac{1}{3,6}\ m/s = 150\ m/s$$

V. *Exprimir em* km/h *uma velocidade de* 50 m/s.

1ª marcha: 50 m = 0,050 km, $1\,s = \frac{1}{3600}$ h. Tem-se, então,

$$50\,m/s = 0,050\,km \div \frac{1}{3600}\ h = (0,050 \times 3600)\ km/h = 180\,km/h.$$

2ª marcha: o quadro nos dá $1\,km/h = \frac{1}{3,6}$ m/s e, portanto, 1 m/s = 3,6 km/h; logo

$$50\ m/s = 50 \times 3,6\ km/h = 180\ km/h.$$

VI. *Exprimir em* m/s *uma velocidade de* 20 *nós*.

1ª marcha: o nó equivale a 1 M/h; assim 20 nós = 20 M/h.

20 M = 20 × 1852 m = 37040 m; 1 h = 3600 s. Tem-se, assim,

$$20\ nós = 37040\ m \div 3600\ s = (37040 \div 3600)\ m/s = 10,288\ m/s$$

2ª marcha: o quadro nos dá 1 nó = 0,51478 m/s, logo

$$20\ nós = 20 \times 0,51478\ m/s = 10,295\ m/s$$

VII. *Exprimir em nós uma velocidade de* 25,722 m/s.

O quadro nos dá 1 nó = 0,51478 m/s, logo

$$1\ m/s = \frac{1}{0,51478}\ nós \text{ e } 25,722\ m/s = \frac{25,722}{0,51478}\ nós = 50\ nós.$$

VIII. *Exprimir em* m/min. *uma velocidade de* 72 km/h.

1ª marcha: 72 km = 72000 m, 1 h = 60 min. Tem-se, então, 72 km/h = 72000 m ÷ 60 min = (72000 ÷ 60) m/min = 1200 m/min.

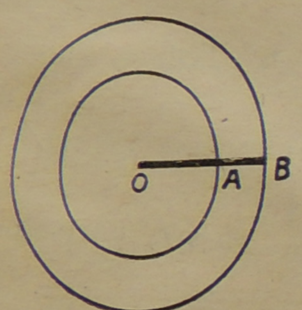
2ª marcha: o quadro nos dá 1 km/h = $\frac{1}{3,6}$ m/s, logo

$$72 \text{ km/h} = 72 \times \frac{1}{3,6} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}.$$

Por outro lado, o mesmo quadro nos dá 1 m/min = $\frac{1}{60}$ m/s ou 1 m/s = 60 m/min, logo

$$72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s} = 20 \times 60 \text{ m/min} = 1200 \text{ m/min}.$$

73 — Velocidade angular. Consideremos dois círculos concêntricos. Tracemos um raio *OB* do círculo maior, o qual corta o menor no ponto *A*.



Se admitirmos que o ponto *B* se desloca descrevendo o círculo maior, o ponto *A* descreverá o círculo menor.

Diremos que esses pontos se acham animados de um movimento de rotação em torno de *O*.

Se o ponto *B* fizer uma rotação completa em 3 minutos, o ponto *A* fará tambem uma rotação completa em 3 minutos.

Para exprimir esse fato, diz-se que os pontos *A* e *B* teem a mesma *velocidade angular*.

Dois pontos A e B, animados de movimento de rotação, teem a mesma velocidade angular quando os arcos descritos por esses pontos, numa certa unidade de tempo, correspondem a ângulos centrais iguais.

Tambem se diz que os dois pontos *giram de ângulos iguais em tempos iguais.*

Unidade legal. — Para a velocidade angular, a unidade legal é o *radiano por segundo*, cujo símbolo é rd/s.

O radiano por segundo *é a velocidade angular de um móvel que, animado de um movimento de rotação uniforme, gira de um ângulo de 1 radiano durante 1 segundo.*

Outras unidades. — Na prática a velocidade angular é, em geral, medida pelo número de rotações (ou voltas) efetuadas por um ponto do círculo durante um segundo ou um minuto.

Assim, quando dizemos — "esta roda faz 40 rotações por minuto" — estamos medindo uma velocidade angular.

Exemplo: uma roda fez 48 rotações em 4 minutos. A sua velocidade angular foi de 12 rotações por minuto.

A velocidade com que gira uma hélice de avião, por exemplo, é expressa em *rotações por segundo*.

No quadro abaixo, indicamos as unidades legais de velocidade angular.

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
Radiano por segundo	rd/s	1 rd/s
Rotação por minuto ou volta por minuto	r.p.m.	$\frac{2\pi}{60}$ rd/s
Rotação por segundo ou volta por segundo	r.p.s.	2π rd/s

Exercícios resolvidos. I. *Exprimir em radianos por segundo uma velocidade angular de 10 voltas por segundo.*

Resol.: 10 r.p.s. = $10 \times 2\pi$ rd/s = 20π rd/s = 62,832 rd/s.

II. *Exprimir em rotações por segundo uma velocidade angular de* 50 rd/s.

$$\text{Resol.: } 50 \text{ rd/s} = \frac{50}{2\pi} \text{ r.p.s.} = \frac{25}{\pi} \text{ r.p.s.} =$$

$$= 25 \times 0,31831 \text{ r.p.s.} = 7,957 \text{ r.p.s.}$$

III. *Referir a rotações por minuto uma velocidade angular de* 200 rd/s.

$$\text{Resol.: } 200 \text{ rd/s} = \frac{200}{\frac{2\pi}{60}} \text{ r.p.m.} = \frac{200 \times 60}{2\pi} = \frac{600}{\pi} =$$

$$= 600 \times 0,31831 = 190,986 \text{ r.p.m.}$$

IV. *Reduzir a rd/s uma velocidade angular de* 30 r.p.m.

Resol.: 30 r.p.m. $= 30 \times \dfrac{2\pi}{60}$ rd/s = 3,142 rd/s.

V. *Reduzir a* r.p.m. *uma velocidade angular de* 15,435 r.p.s.

Resol.: 15,435 r.p.s. $= 15{,}435 \times 60 = 926{,}1$ r.p.m.

VI. *Exprimir em* r.p.s. *uma velocidade angular de* 843,03 r.p.m.

Resol.: 843,03 r.p.m. $= \dfrac{843{,}03}{60}$ r.p.s. = 14,0505 r.p.s.

Exercícios

1. Exprimir em m/s uma velocidade de *a*) 420 m/min; *b*) 54 cm/s; *c*) 5 km/h; *d*) 20 nós.

2. Referir a m/min uma velocidade de *a*) 60 m/s; *b*) 95,4 cm/min; *c*) 81,9 m/min; *d*) 720 km/h; *e*) 63 nós.

3. Converter em cm/s uma velocidade de *a*) 85,6 m/s; *b*) 45,9 m/min; *c*) 540 km/h; *d*) 630 km/h; *e*) 97,2 m/s; *f*) 594 m/min.

4. Que tempo gasta um movel para vencer a distância de *a*) 154 km; *b*) 980 km; *c*) 840 m com uma velocidade de *a*) 88 km/h; *b*) 700 km/h; *c*) 500 m/min.

5. Calcular em m/s a velocidade de um movel que percorreu *a*) 1200 km em 8 horas; *b*) 2700 m em 24 h 45 m 30s; *c*) 500 m em 20 min.

6. Calcular em km/h a velocidade de um movel que percorreu 64 m em 8 s.

7. Que distância percorre um movel *a*) em 2 h; *b*) 45 m.; *c*) 50 s; *d*) 1 h 20 m; *e*) 48 m 30 s; *f*) 50 s com a velocidade de *a*) 530 km/h; *b*) 7 m/min; *c*) 18cm/s; *d*) 65 km/h; *e*) 50 m/min; *f*) 600 km/h ?

MASSA

76. — Peso e massa. Na linguagem usual emprega-se comumente o vacábulo *peso* para designar a massa de um corpo. Convem, entretanto, acentuar a distinção entre *peso* e *massa*.

O peso de um corpo é a força que o atrai para o centro da Terra; não depende apenas desse corpo mas de sua posição em relação à Terra. Um dado corpo tem um certo peso no equador

e terá outro peso quando transportado para o polo. Essa variação pode ser verificada pela maior ou menor distensão que esse corpo imprimiria a u'a mola bastante sensivel, quando suspenso pela mesma.

A *massa* de um corpo, ao contrário, conserva-se absolutamente invariavel, qualquer que seja a posição do mesmo em relação à Terra. Na realidade são as massas que se comparam e se medem com a balança. As massas de dois corpos são iguais quando, colocados estes, um após o outro, no mesmo prato de uma balança sensivel, fazem equilíbrio a um terceiro corpo. Esse equilíbrio se manterá quando a balança for transportada para qualquer latitude.

77. — Unidade legal de massa. A unidade legal de massa é o *quilograma* cujo símbolo é *kg*.

O QUILOGRAMA *é a massa do protótipo internacional do quilograma de platina iridiada que se acha depositado na Repartição Internacional de Pesos e Medidas.*

78. — Múltiplos e submúltiplos. A formação dos submúltiplos decimais do quilograma é feita de acordo com o quadro do nº **52** tomando-se como base o *grama* que é igual a um milésimo do quilograma.

O quilograma só tem um múltiplo legal que é a *tonelada*.

A massa de 2 decigramas pode ser denominada *quilate* quando utilizada nas medidas relativas a pedras preciosas e metais preciosos.

No quadro abaixo, apresentamos as unidades legais de massa com seus respectivos símbolos e valores.

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
Tonelada	t	1000000 g
Quilograma	kg	1000 g
Hectograma	hg	100 g
Decagrama	dag	10 g
Grama	g	1 g
Decigrama	dg	0,1 g
Centigrama	cg	0,01 g
Miligrama	mg	0,001 g
Quilate		0,2 g

As unidades *hectograma* e *decagrama* não são de uso corrente.

79. — Observação. De acordo com a definição do litro, dada no nº **46**, o *quilograma* é a massa de 1 litro de água distilada e isenta de ar, à temperatura de 4º C e sob a pressão atmosférica normal. Tem-se, portanto, que 1 *litro de água pura* tem (praticamente) a massa de 1 *quilograma*. Daí resulta que *1 m³ de água pesa* (⁸) *1 t* e 1 *cm³ de água pesa 1 g*.

E' util reter essas correspondências.

80. — Mudança de unidade. Faz-se como para unidades lineares, uma vez que a relação entre dois múltiplos e submúltiplos consecutivos é 10, exceto para a tonelada e o quilograma que é 1000 e para o quilate e o decigrama que é 2.

EXEMPLO. I. *Referir ao grama u'a massa de* 3,7 kg. Basta deslocar-se a vírgula 3 casas para a direita. Tem-se:

$$3,7 \text{ kg} = 3700 \text{ g}$$

II. *Reduzir a quilograma u'a massa de* 19,3 t.

Deslocando-se a vírgula três casas para a direita, tem-se:

$$19,3 \text{ t} = 19300 \text{ kg}$$

III. *Exprimir em g u'a massa de* 3,5 cg.

Deslocando-se a vírgula duas casas para a esquerda, tem-se:

$$3,5 \text{ cg} = 0,035 \text{ g}$$

81. — Determinação de massas e volumes de água distilada. Dado um certo volume de água distilada, expresso em *m³*, ou em *dm³* (litros) ou em *cm³*, obtem-se imediatamente a massa dessa água, conservando-se o próprio número que exprime o volume dado e referindo-se, respectivamente, à tonelada, ao kg ou ao grama. Se o volume dado estiver referido a outra unidade de volume, será conveniente reduzí-lo primeiro a uma das três unidades acima indicadas.

---

(10) Empregamos, aquí e em todo este capítulo, o verbo *pesar* no sentido de *ter a massa de*, emprego tanto mais justificavel quanto a massa se obterá por uma operação que se chama *pesada*.

EXEMPLO. I. *Achar a massa de* 8,720 m³ *de água distilada*.

Resposta.: 8,720 t.

II. *Achar a massa de* 6,70 l *de água*.

Resp.: 6,700 kg.

Dada uma certa massa de água distilada, expressa em toneladas, em kg ou em gramas, teremos imediatamente o volume dessa massa dágua, conservando o mesmo número e substituindo a unidade respectivamente por *m³*, *dm³* (litro) ou *cm³*.

EXEMPLOS I. *Qual é o volume ocupado por* 140,8 g *de água?*

Resp.: 140,800 cm³.

II. *Qual é o volume ocupado por* 5,4 t *de água*.

Resp.: 5,400 m³.

Exercícios

1. Qual é a massa de *a*) 548,5 cm³; *b*) 375,8 dm³; *c*) 739,5 litros; *d*) 73,5 m³ de água distilada?
2. Qual o volume ocupado por *a*) 5,8 g; *b*) 37,9 kg; *c*) 9,39 *t* de água distilada?
3. Qual o volume ocupado por *a*) 37,6 mg; *b*) 28,5 cg; *c*) 3,45 dg; *d*) 4,95 dag; *e*) 5,38 hg de água distilada?
4. Um reservatório tem 1,2 m de comprimento, 7,4 cm de largura e 40 cm de altura. Quantos litros de água pode conter e qual o peso desta?

DENSIDADE

82. Noção de densidade. — Tomemos duas peças perfeitamente iguais quanto à forma e à grandeza, sendo porém a primeira de *ouro* e a segunda de *cobre*.

Fácil será verificar, com auxílio de uma balança, que essas peças não teem a mesma massa; a de ouro pesa mais do que a de cobre.

Em volumes iguais, o ouro tem maior massa que o cobre.

Exprimimos esse fato dizendo que o ouro é mais *denso* do que o cobre, ou que, a *massa especifica* do ouro é maior que a do cobre.

Façamos ainda uma segunda observação: tomemos três cubos de 1 centímetro de aresta cada um, sendo o 1.º de *chumbo*, o 2.º de *prata* e o 3.º de *ferro*.

Com auxílio da balança vamos obter:

1 cm³ de chumbo pesa	11,7 g
1 " " prata pesa	10,4 g
1 " " ferro pesa	7,7 g

Concluimos que o chumbo tem maior *densidade* do que a prata, e que este metal é ainda mais *denso* do que o ferro.

De modo mais preciso, diremos: a densidade do chumbo é de 11,7 gramas por centímetro cúbico; a da prata 10,4 gramas por centímetro cúbico; a do ferro, 7,7 g por cm³.

A massa específica ou densidade de um corpo homogêneo é, pois, *a massa por unidade de volume* desse corpo. Conhecendo-se o volume e a massa total de um corpo, obtem-se a sua densidade dividindo-se a massa pelo volume.

A massa específica ou densidade é, assim, uma grandeza composta, análoga à velocidade.

83. Unidade legal. — A unidade legal de massa específica ou densidade absoluta é o *grama por centímetro cúbico*, cujo símbolo é g/cm³.

O GRAMA POR CENTÍMETRO CÚBICO *é a massa específica de um corpo homogêneo no qual cada centímetro cúbico tem a massa de 1 grama.*

OUTRAS UNIDADES. — Outras unidades de massa específica podem ser obtidas substituindo-se no nome, na definição e no símbolo acima mencionados, o grama por qualquer unidade legal de massa e o centímetro cúbico por qualquer unidade legal de volume.

Exemplo: um corpo homogêneo, no qual 1 metro cubico pesa 1 quilograma, terá a sua massa específica expressa por 1 kg por centímetro cúbico. A massa específica desse corpo pode ser tomada como unidade.

No quadro abaixo, indicamos as principais unidades de massa específica com seus respectivos símbolos e valores.

Nomes	*Símbolos*	*Valores*
Grama por centímetro cúbico	g/cm³	1 g/cm³
Quilograma por decímetro cúbico..................	kg/dm³	1 g/cm³
Tonelada por metro cúbico....	t/m³	1 g/cm³
Quilograma por metro cúbico	kg/m³	0,001 g/cm³
Grama por metro cúbico	g/m³	0,000001 g/cm³

84. Massa específica da água distilada. — Sabemos que 1 cm³ de água distilada tem a massa de 1 grama.

Para fins legais, a massa específica da água distilada e isenta de ar, à temperatura de 4º C, pode ser considerada como equivalente a 1 g/cm³.

85 — Densidade relativa. Consideremos um cubo de aluminio, com 1 cm de aresta. Pesando esse cubo achamos 2,7 g.

Sabemos que um cm³ de água pesa 1 grama.

Temos assim:

1 cm³ de alumínio pesa	2,7 g
1 cm³ de água pesa	1 g

O alumínio é, portanto, 2,7 vezes mais pesado do que a água.

Admitindo-se que a água foi tomada para termo de comparação das *densidades*, podemos dizer que a *densidade relativa* do alumínio é 2,7.

Quando se usar a expressão *densidade* para exprimir a relação entre a massa específica de um corpo e a massa específica de outro corpo, tomado como termo de comparação, deve-se mencionar explicitamente, em cada caso, qual o corpo que serve como termo de comparação e denominar essa grandeza *densidade relativa*. Poderá ser omitida essa menção explícita quando se tomar para termo de comparação um corpo cuja massa específica seja igual a 1 g/cm³.

86. Mudança de unidade. — A massa específica de um corpo, expressa por uma certa unidade, pode ser referida a uma outra unidade.

Vamos apresentar alguns exemplos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS. I. *A densidade absoluta de um corpo é de 4,5 kg/m³. Exprimir essa densidade em g/cm³.*

1ª marcha: quando se diz que a densidade absoluta do corpo é de 4,5 kg/m³ queremos exprimir que 1 m³ tem a massa de 4,5 kg. Isso equivale a dizer que 1000000 cm³ teem a massa de 4500 gramas.

Dividindo a massa (em gramas) pelo volume (em centímetros cúbicos), obtemos a massa específica em g/cm³

$$\frac{4500}{1000000} \text{ g/cm}^3$$

Simplificando

$$0{,}0045 \text{ g/cm}^3$$

2ª marcha: o quadro acima nos dá 1 kg/m³ = 0,001 g/cm³; logo 4,5 kg/m³ = 4,5 × 0,001 g/cm³ = 0,0045 g/cm³.

II. *A densidade absoluta de um corpo é de 1,6 kg/dm³. Exprimir essa densidade em g/m³.*

1ª marcha: a densidade de 1,6 kg/dm³ mostra-nos que no corpo dado

1 dm³ tem a massa de 1,6 kg

ou

0,001 m³ tem a massa de 1600 g

e, portanto, 1 m³ tem a massa de 1600000 g; logo a densidade é de 1600000 g/m³.

2ª marcha: o quadro do nº **83**, nos dá 1 kg/dm³ = 1 g/cm³ e 1 g/m³ = 0,000001 g/cm³; desta última relação se tira 1 g/cm³ = = 1000000 g/m³, logo

1 kg/dm³ = 1000000 g/m³ e, portanto, 1,6 kg/dm³ = 1,6 × × 1000000 g/m³ = 1600000 g/m³.

III. *Um metro cúbico de certa substância pesa 2,5 t. Qual é a massa específica de tal substância em kg/dm³?*

1ª marcha: dizer que 1 m³ pesa 2,5 t, equivale a dizer que 1000 dm³ pesam 2500 kg, logo 1 dm³ pesa (2500 ÷ 1000) kg ou 2,5 kg; logo a massa específica é 2,5 kg/dm³.

2ª marcha: se 1 m³ pesa 2,5 t, então a massa específica é 2,5 t/m³. O quadro do nº **83** nos dá 1 t/m³ = 1 g/cm³ e 1 kg/dm³ = = 1 g/cm³, logo 1 t/dm³ = 1 kg/dm³ e 2,5 t/dm³ = 2,5 kg/dm³.

IV. *10 litros de um líquido pesam 480 g. Exprimir a densidade desse líquido em g/m³.*

Se 10 litros pesam 480 g, 1 litro pesará $\frac{480}{10}$ = 48 g e 1 m³ = = 1000 litros pesará 1000 × 48 g = 48000 g. A densidade é, pois, 48000 g/m³.

V. *100 m³ de um gás pesam 427,8 kg. Exprimir a densidade desse gás em g/cm³.*

Si 1000 m³ pesam 427,8 kg, 1 m³ pesará $\frac{427{,}8}{100}$ kg = 4,278 kg = = 4278 g e 1 cm³ = 0,000001m³ pesará (4278 ÷ 1000000) g = = 0,0042782g. A densidade é, pois, 0,004278 g/cm³.

Exercícios

1. Exprimir em g/cm³ uma densidade de *a*) 3,6 kg/dm³; *b*) 5,6 t/m³; *c*) 638,6 kg/m³; *d*) 938 g/m³.

2. Referir ao kg/dm³ uma densidade de *a*) 5,8 g/cm³; *b*) 3,85 t/m³; *c*) 486,5 kg/m³.

3. Converter em t/m³ uma densidade de *a*) 0,8 g/cm³; *b*) 7,6 kg/dm³; *c*) 3,5 t/m³; *d*) 83,6 g/m³.

4. Converter em kg/m³ uma densidade de *a*) 0,95 g/cm³; *b*) 5,86 kg/dm³; *c*) 96,5 g/m³.

5. Referir à g/m³ uma densidade de *a*) 9,6 g/cm³; *b*) 3,9 kg/dm³; *c*) 0,035 t/m³.

PROBLEMAS SOBRE SISTEMA METRICO

1. *Um navio percorre, em média, 350 m por minuto. A quantos quilômetros se acha do ponto de partida após ter viajado 12 dias 10 horas?*

— O navio viaja noite e dia. No momento indicado já terá, pois viajado 12 × 24 + 10 = 298 horas, ou, sejam, 298 × 60 = 17880 minutos. Como percorre 350 m por minuto terá então percorrido 17880 × 350 m = 6258000 m = 6258 km.

2. *Em 1939, o Brasil possuia 34200 km de estradas de ferro e uma população de 40000000 habitantes. Qual a extensão de via férrea por habitante?*

— Reduzindo-se a metros os 34200 km, acham-se 34200000 m, que divididos por 40000000, dão 0,855 m por habitante.

3. *Quantos pregos de 3,5 cm se podem fabricar com 86,95 m de arame, sabendo-se que, na fabricação, se perdem 2 mm em cada prego?*

— Cada prego consome, ao todo, 3,5 cm + 2 mm ou 37 mm de arame. Com 86,95 m, ou sejam 86950 mm, podem-se, pois, fabricar $86950 \div 37 = 2350$ pregos.

4. *Duas pessoas medem u'a mesma estrada contando os passos. A primeira conta mais 12 passos que a segunda. Sabendo-se que o passo da primeira mede 77 cm e o da segunda 8 dm, calcular o comprimento da estrada.*

— Ao dar 12 passos mais que a segunda, a primeira pessoa percorre 77×12 cm, mas, em cada passo, ela vence menos 8 dm — 77 cm = 80 cm — 77 cm = 3 cm que a segunda. Logo o número de passos que deu a segunda pessoa é $\dfrac{77 \times 12}{3} = 308$. Como cada um destes passos vence 8 dm, a distância percorrida é 308×8 dm = 2464 dm = 264,4 m.

5. *Três lotes de terreno medem respectivamente* 72840 m²; 854,5 dam² e 9,8 hm². *Foram vendidos à razão de 2000 cruzeiros o hectare. Em quanto importou a venda?*

— Reduzindo-se as três áreas a ha, tem-se

$$\begin{array}{rcl} 72840 \text{ m}^2 & = & 7{,}284 \text{ ha} \\ 854{,}5 \text{ dam}^2 & = & 8{,}545 \text{ ha} \\ 9{,}8 \text{ hm}^2 & = & 9{,}8 \text{ ha} \\ \hline \text{área total} & = & 25{,}629 \text{ ha} \end{array}$$

A importância da venda foi, pois, de $25{,}629 \times 2000$ cruzeiros = = Cr$ 51258,00.

6. *Um terraço retangular mede 12,5 m de comprimento e 7,5 m de largura. Quantos ladrilhos quadrados de 25 cm de lado são necessários para ladrilhar o terraço?*

— A área do terraço é

$$(12{,}5 \times 7{,}5) \text{ m}^2 = (12{,}5 \times 7{,}5 \times 10000) \text{ cm}^2$$

A área do ladrilho é (25×25) cm².

São, pois, necessários $\dfrac{12{,}5 \times 7{,}5 \times 10000}{25 \times 25}$ ladrilhos =

$$= 5 \times 3 \times 100 = 1500 \text{ ladrilhos}$$

7. *Na construção de um muro de 16 m de comprimento, 1 m de altura e 25 cm de espessura foram empregados tijolos de 22 cm de comprimento, 12 cm de largura e 6 cm de espessura. A argamassa, que ocupa 1/20 do volume do muro, custou, com a mão de obra, 80 cruzeiros o metro cúbico; o milheiro de tijolo custou 120 cruzeiros. Qual foi o custo de construção?*

— O volume do muro é

$$(16 \times 1 \times 0{,}25) \text{ m}^3 = 4 \text{ m}^3$$

A argamassa ocupa $\dfrac{1}{20}$ do volume do muro, isto é,

$$\frac{1}{20} \times 4 \text{ m}^3 = 0{,}2 \text{ m}^3$$

O volume ocupado pelos tijolos é, pois

$$4 \text{ m}^3 - 0{,}2 \text{ m}^3 = 3{,}8 \text{ m}^3$$

Cada tijolo ocupa um volume de

$$(22 \times 12 \times 6) \text{ cm}^3 = 0{,}001584 \text{ m}^3$$

Para a construção do muro foram necessários, pois,

$$3{,}8 \div 0{,}001584 = 2380 \text{ tijolos (aproximadamente)}$$

Preço dos tijolos $2{,}38 \times 120$ = Cr$ 285,60

Preço da argamassa e mão de obra =

= 4 × Cr$ 80,00 = Cr$ 320,00

Custo total Cr$ 285,6 + Cr$ 320,00 = Cr$ 605,60.

8. *Um pedaço de mármore pesa 1296 g e lançado no interior de um vaso cheio dágua fez transbordar 48 cl dágua. Qual é a densidade do mármore?*

— O volume do bloco é 48 cl = 0,48 l = 0,48 dm³ = 480 cm³.

Dividindo-se o peso em gramas pelo volume em cm³ tem-se a densidade em g/cm³. A densidade do mármore é, pois,

$$\frac{1296}{480} \text{ g/cm}^3 = 2{,}7 \text{ g/cm}^3$$

9. *Que profundidade deve ter um lote retangular de terreno de 75 m de frente para que a área seja de 2 ha 7 a?*

— Reduzindo-se a área a m² tem-se 2 ha 7 a = 20700 m². A medida da frente multiplicada pela da profundidade dá a área; logo a profundidade é o quociente da área pela medida da frente. Tem-se

$$\frac{20700}{75} = 276 \text{ m}$$

10. *Sabendo-se que 1 dag de prata fina vale Cr$ 0,84 e que 1 dm³ desse metal pesa 10,51 kg, pede-se o valor de 1 m³.*

1 m³ de prata pesa 1000 × 10,51 kg = 10510 kg = 1051000 dag e valerá, pois 1051000 × Cr$ 0,84 = Cr$ 882840,00.

11. *Que altura devem ter os montantes de um aparelho de medir lenha, cujo comprimento é de 75 cm para que a medida seja de um estéreo, sabendo-se que a largura do aparelho é de 1 m?*

— A lenha arrumada no aparelho forma um paralelepípedo retângulo, cujo volume é dado pela fórmula

$$V = cla$$

A altura será, pois, o número que multiplicado pelo produto do comprimento pela largura dá o volume; para obtê-la devemos, pois, dividir o volume por esse produto, que é 0,75 × 1 = 0,75m²:

$$a = \frac{V}{cl} = \frac{1 \text{ m}^3}{0{,}75\text{m}^2} = 1{,}33 \text{ m (aproximadamente)}$$

12. *Uma garrafa cheia de vinho pesa 1169,34 g e cheia de álcool, 1069,44 g. Sabendo-se que a densidade do vinho é 0,99 g/cm³ e a do álcool 84 kg/dm³, pede-se a capacidade da garrafa e seu peso vazia.*

A diferença 1169,34 g — 1069,44 g = 99,9 g representa o excesso do peso do vinho sobre o do álcool contido na garrafa. A densidade do vinho sendo 0,99 g/cm³ = 0,99 kg/dm³, cada litro de vinho pesa 0,99 kg = 990 g; a densidade do álcool sendo 0,84 kg/dm³, cada litro de álcool pesa 0,84 kg = 840 g. Cada litro de vinho pesa, assim, mais 990 g — 840 = 150 g que o de álcool, logo a capacidade da garrafa é $\frac{99{,}9}{150} = 0{,}666$ l. O peso do vinho contido na garrafa é então, 990 × 0,666 = 659,34 g e o peso da garrafa é

$$1169{,}34 \text{ g} — 659{,}34 \text{ g} = 510 \text{ g}.$$

13. *Uma floresta mede 850 m de comprimento e 500 m de largura. Cada are de terreno produz 18 estéreos de madeira, cuja densidade é 0,72 k/dm³. Em cada estéro, 4/9 é ocupado pelo espaço entre as achas. Calcular o lucro total do corte da floresta, admitindo que 1 tonelada de madeira dá um lucro líquido de Cr$ 30,00.*

Área da floresta: (850 × 500) m² = 425000 m² = 4250 a. Produção total em madeira: (18 × 4250) st = 67500 st. Volume real da madeira (5/9 × 76500) m³ = 42500 m³.

Se a densidade da madeira é 0,72 kg/dm³, cada dm³ pesa 0,72 kg e cada m³ pesa 1000 × 0,72 kg = 720 kg; logo os 42500m³ pesarão 42500 × 720 kg = 30600000 kg = 30600 t. O lucro total será pois, 30600 × Cr$ 30,00 = Cr$ 918000,00.

14. *Qual é o preço de 20 barras de ferro de 6 m de comprimento, 2 1/2 in. de largura e 1 3/4 in. de espessura, sabendo-se que a massa específica do ferro é 7,8 g/cm³ e que o mesmo se vende a Cr$ 0,90 o kg.*

— Cada barra tem a forma de um prisma reto, cuja base é um retângulo de 2 1/2 in. por 1 3/4 in. A área da base, ou da *secção da barra*, é, pois (2 1/2 × 13/4) sq. in. = 4 3/8 sq. in. Sendo 1 sq. in. = 6,4516 cm², a área da secção em cm² é

$$4\ 3/8 \times 6{,}4516 \text{ cm}^2 = 28{,}2257 \text{ cm}^2.$$

O volume de cada barra (prisma reto) é o produto da secção pelo comprimento da barra, que é de 6 m = 600 cm; volume de cada barra = (28,2257 × 600) cm³ = 16935,42 cm³.

Sendo a densidade do ferro 7,8 g/cm³, cada barra pesa 16935,42 × 7,8 g = 132096,276 g = 132,096 kg (aproximadamente).

As 20 barras custarão, pois,

$$20 \times 132{,}096 \times \text{Cr\$ } 0{,}90 = \text{Cr\$ } 2377{,}79$$

Exercícios

ÁREAS

1. Quantos metros de cerca se teem de construir para cercar três terrenos, cujos perímetros medem, respectivamente

1,5 m; 24,96 hm e 187 dam?

2. Um estudante dá, para ir ao Ginásio e voltar, 1564 passos de 50 cm cada um. Quantos quilômetros anda o estudante por semana para ir ao Ginásio e voltar?

3. Uma peça de fazenda mede 35,6 m e outra 328 dm. De quantos cm a primeira excede a segunda?

4. Usando bicicletas com rodas de 1,95 m de circunferência, um ciclista percorreu 7,8 km e outro 58,5 hm. Quantos dam o primeiro percorreu mais que o segundo e quantas voltas a roda de sua bicicleta deu mais que a do segundo ?

5. Quantos tubos de meio decâmetro são necessários para fazer uma canalização com 11,25 km ?

6. De quantos metros o comprimento de um terreno retangular excede a largura, sabendo-se que a área é de 12,15 a e o comprimento é 3/5 da largura

7. Compraram-se 5,783 ha de terreno a Cr$ 0,42 o m² e 87,2 a a Cr$ 0,37 o m². Em quanto importou a compra ?

8. Compraram-se dois terrenos com uma área total de 4,3216 ha pelo preço total de Cr$ 15125,60. Calcular o preço de cada are, sabendo-se que a área do primeiro é 1/3 da do segundo, mas 25 m² do primeiro valem um are do segundo.

9. O revestimento do piso de uma galeria retangular de 7,5 m de comprimento e de 2 m de largura foi feito com ladrilhos quadrados de 25 cm de lado. A mão de obra foi paga à razão de 10 cruzeiros o metro quadrado e o custo total do revestimento foi de 324 cruzeiros. Calcular o preço do custo de ladrilhos.

10. O perímetro de um campo retangular mede 156 dam e o comprimento tem mais 3 hm que a largura. Sabendo-se que foi comprado por Cr$ 60000,00 e revendido à razão de Cr$ 210,00 o are, calcular o número de hectares e o lucro obtido.

VOLUMES

11. Um muro de pedra mede 24,8 m de comprimento, 15 dm de altura e 30 cm de espessura. Cubar a pedra empregada, sabendo que a argamassa ocupa 2/9 do volume total.

12. Quantos tijolos de 25 cm por 15 cm por 6 cm são necessários para construir um muro de 32,4 m de comprimento, 15 dm de altura e 30 cm de espessura ?

13. Calcular, em litros, a capacidade de uma caixa prismática, de 73 cm de altura e cujo fundo tem uma área de 4,54 m².

14. Uma barra prismática, de 5,4 m de comprimento, lançada num tanque cheio dágua fez transbordar 648 litros. Calcular a área de secção da barra em dm².

15. Calcular em m³ o volume de uma pirâmide de 155 cm de altura e 402 dm² de base.

16. Calcular a altura que deverá ter uma vasilha piramidal de 84 dm² de base para que a sua capacidade seja de 280 litros.

17. Quantos litros pode conter uma vasilha cilíndrica de 1 m de raio e 1 m de altura ?

18. Que altura deve ter um tanque circular de 2,6 m de raio interno para conter 42452,8 litros ?

19. Que dimensões deve ter um terreno para que nele se possa construir um depósito circular de 10 m de altura com a capacidade de 816714 litros, sendo de 30 cm a espessura da parede ?

20. Quantos litros pode conter uma vasilha cônica de 50 cm de diâmetro na base e de 3 dm de altura ?

21. Que profundidade deve ter um poço cônico de 16 dm de diâmetro para conter 904,32 litros ?

22. Quantos centimetros deve ter o diâmetro da bôca de uma vasilha cônica de 15 dm de altura para conter 290,293 litros ?

MASSAS E PESOS

23. Quanto pesa a água contida numa caixa de 1,4 m de comprimento, 80 cm de largura e 40 cm de altura ?

24. Um vaso vazio pesa 135 g e cheio dágua pura, 8,53 kg. Qual é a capacidade do vaso em litros ?

25. Uma barrica vazia pesa 38,5 kg e com água até aos 4/5, pesa 107,7 kg. Quantos litros dágua pode conter ?

26. Quanto pesa o ar contido numa sala cujas dimensões são 8 m ; 62,5 dm e 525 cm, sabendo-se que 1 hl de ar pesa 12,93 dag ?

27. Se 4 cl de uma substância pesam 8 g, quantos dag pesarão 50 cm³ ?

28. Quanto custarão 14 dl de uma substância, da qual 900 cm³ custaram Cr$ 108,00 ?

29. Quanto custarão 180 cm³ de uma substância que se vende a Cr$ 500,00 o kg, sabendo-se que 3 cl pesam 36 g ?

30. Quanto custarão 21 dl de uma substância, que se vende a 40 centavos o grama, sabendo-se que 300 cm³ de tal substância pesam 33 dag ?

31. Dispenderam-se Cr$ 43,2 na compra de uma substância que se vende a Cr$ 58 o duplo decalitro. Por quanto se deve revender o litro para ter um lucro total de Cr$ 10,80 ?

32. Um vaso cheio dágua pesa 800 g e a massa do vaso é $\frac{1}{7}$ da massa da água que ele contém. Quanto pesaria o vaso cheio de um liquido, do qual 1 cm^3 pesa 875 g ?

33. Uma lata cheia de óleo pesa 27,45 kg. Sabendo-se que o peso da lata é 2/13 do peso do óleo e que 1 litro de óleo pesa 915 g, calcular o preço do mesmo, sabendo que se vende a 132 cruzeiros o hectolitro.

34. Certa usina consumiu em um ano 1502870 kg de hulha. Que espaço ocupava esta hulha na mina, sabendo-se que a hulha em pedaços representa 6/11 do metro cúbico da hulha em rocha e pesa 81 kg por hectolitro ?

DENSIDADE

35. Quanto custam 75 litros de óleo, de densidade 0,92 g/cm^3, sabendo-se que é vendido a 12 cruzeiros o meio quilograma ?

36. Um decimetro cúbico de madeira lançado nágua imerge até os $\frac{3}{4}$ de sua altura. Calcular a massa específica dessa madeira em g/cm^3.

37. Um tubo de 1 cm^2 de secção contém mercúrio até à altura de 76 mm. Calcular a massa desse mercúrio, sabendo que a densidade do mesmo é 13,6 kg/dm^3.

38. Um barril de azeite pesa 81 kg ; vazio pesaria 7,8 kg. Calcular a densidade do azeite em g/cm^3, sabendo que a capacidade do barril é de 80 l.

39. O grão de colza contém 0,47 do seu peso de óleo, mas na fabricação só se aproveitam 8/11 deste peso. Quantos kg de grão se devem utilizar para se obter 1 hl de óleo ?

40. Calcular a massa específica do gelo em kg/m^3, sabendo que a água, ao congelar-se, se contrai de 1/15 do seu volume.

41. Num depósito cujo fundo tem 110 m^2, lançam-se 8800 kg de certo liquido, cuja densidade é 0,5 g/cm^3. A que altura atinge o liquido no interior da caixa ?

PROBLEMAS COM VÁRIAS GRANDEZAS

42. Um terreno retangular de 2,5 km por 18 hm está plantado de cereal, que se vende a 500 cruzeiros a tonelada. Qual o valor da colheita, sabendo-se que 1 dal do cereal pesa 16 kg e admitindo-se que cada ha produza 8 hl ?

43. De uma floresta retangular de 2,5 km por 16 hm, cada ha fornece 150 m^3 de madeira de lei e 200 dast de lenha. Calcular o valor do corte da floresta, supondo que 1 m^3 de madeira de lei pesa 92 hg, que 1 t de madeira de lei vale Cr$ 50,00, ao passo que 1 st de lenha se vende por 3 cruzeiros.

44. Um reservatório, cujas dimensões medem 1,8 m, 90 cm e 8 dm^3 está cheio de óleo, cuja densidade é 0,96 kg/dm^3 e que deve ser vendido em latas de 45 cm por 2 dm por 20 cm, a 65 centavos o kg. Calcular o número de latas e o preço de cada uma.

45. Fabricam-se fios de platina com $\frac{1}{1200}$ de milímetro de diâmetro. Calcular o peso de 1 km desse fio, sabendo que a densidade da platina é de 21,6 g/cm^3.

46. Sabe-se que se colhem, em média 24 hl de trigo por hectare plantado, que 1 litro de trigo dá 625 g de farinha e que são necessários 96 kg de farinha para fazer 120 kg de pão. Quantos alqueires (mineiros ou de 10.000 braças quadradas) se deveriam cultivar de trigo para alimentar a população do Brasil (40000000 habs), admitindo-se um consumo diário de 200 g por habitante ?

47. A secção transversal de um tanque é um trapézio, cujas bases medem 15 ft e 9 ft, e cuja altura tem 62 $\frac{1}{2}$ ft. Quantos galões e quantas toneladas inglesas de água pode conter ?

(Supõe-se que 1 pé cúbico dágua pesa 100 oz e equivale a 6 $\frac{1}{4}$ galões; 1 ton = 35840 oz).

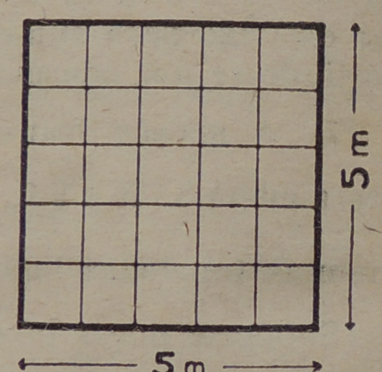
UNIDADE IV

POTÊNCIAS E RAIZES

1. DEFINIÇÕES

87. — Quadrado de um número. Consideremos um quadrado cujo lado mede 5 metros, por exemplo.

Podemos decompor esse quadrado, como indica a figura, em 25 quadrados de 1 metro de lado, isto é, em 25 *metros quadrados*.



A área do quadrado será:

$$5\text{ m} \times 5\text{ m} = 25\text{ m}^2$$

Em geral, sendo l o lado de um quadrado a área desse quadrado será $l \times l$.

O produto $l \times l$, de dois fatores iguais a l, denomina-se *segunda potência* de l.

A 2ª potência de um número l exprime, portanto, a área do quadrado de lado l. A 2ª potência de um número é, por isso, denominada *quadrado* desse número. Assim, *denomina-se* QUADRADO *de um número a um produto de dois fatores iguais a esse número*: 8 × 8 ou 64 é quadrado de 8.

88. — Cubo de um número. Consideremos um cubo cuja aresta mede, por exemplo, 5 metros.

O volume do cubo de 5 metros de aresta será, como já sabemos,

$$5\text{ m} \times 5\text{ m} \times 5\text{ m} = 125\text{ m}^3$$

Em geral: sendo l a aresta de um cubo o volume desse cubo será $l \times l \times l$.

O produto $l \times l \times l$, de três fatores iguais a l, denomina-se *terceira potência* de l.

A *terceira potência* de um número l exprime, portanto, o volume de um *cubo* de aresta l. A 3ª potência de um número é, por isso, denominada *cubo* desse número. Assim, *denomina-se* CUBO *de um número a um produto de três fatores iguais a esse número*: 7 × 7 × 7 ou 343 é o cubo de 7.

89. — Potência de um número. De um modo geral, partindo da noção que acabamos de apresentar para o quadrado e para o cubo, é fácil concluir a seguinte definição.

Chama-se POTÊNCIA *de um número a um produto de fatores iguais a esse número.*

Por exemplo: 7 × 7 × 7 × 7 é uma potência de 7.

$$\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \text{ é uma potência de } \frac{4}{5}.$$

0,8 × 0,8 é uma potência de 0,8.

O número de fatores considerados indica a ordem da potência e chama-se *grau* da mesma.

O número que está repetido como fator chama-se *base* da potência.

Assim: 8 × 8 × 8 é uma potência do 3º grau e de base 8.

Para indicar uma certa potência de um número, escreve-se este número uma só vez e à sua direita, um pouco acima, em caracteres menores, escreve-se o número que indica o grau.

Assim, em vez de 8 × 8 × 8 × 8, escreve-se 8^4 e lê-se: 8 *elevado a* 4. Este número assim escrito chama-se *expoente*.

EXPOENTE *é o número que indica o grau de uma potência e que se escreve à direita e um pouco acima da base, em caracteres menores.*

Em a^3, a é a base e 3 o expoente.

Todo expoente indica uma potência, mas nem sempre a potência é indicada com expoente: 3.3.3.3.3 é a 5ª potência de 3 e aí não há expoente.

OBSERVAÇÕES. I. Convem notar que a *primeira potência* de um número, por analogia, é, o próprio número.

Quando um número não está afetado de expoente, subentende-se que esse número tem expoente 1. Por convenção, m será a primeira potência de m.

II. Qualquer potência de 1 é igual a 1.

Exemplo: $1^6 = 1$.

III. Para se obter uma potência de 10 basta escrever-se a unidade seguida de tantos zeros quantas forem as unidades contidas no grau dessa potência.

Assim:

$$10^3 = 1000 \qquad 10^4 = 10000$$

IV. Chama-se *potenciação* ou *elevação a potência* a operação pela qual elevamos um número a uma potência qualquer.

A potenciação não é uma operação comutativa.

A base e o grau são os *termos* da potenciação. Evidentemente 3^2 não é igual a 2^3, isto é, não podemos inverter a situação dos termos de uma potenciação.

2. OPERAÇÕES COM POTÊNCIAS

90. — Potência de um produto. Consideremos a expressão $(8 \times 7 \times 10)^3$, a qual indica que se deve elevar ao cubo a quantidade entre parêntesis, isto é, o produto $8 \times 7 \times 10$. De acordo com a definição de potência, temos, pois,

$$\begin{aligned}(8 \times 7 \times 10)^3 &= (8 \times 7 \times 10)\ (8 \times 7 \times 10)\ (8 \times 7 \times 10)\\ &= 8 \times 7 \times 10 \times 8 \times 7 \times 10 \times 8 \times 7 \times 10\end{aligned}$$

Ora, como a multiplicação é uma operação comutativa, temos:

$$(8 \times 7 \times 10)^3 = 8.8.8 \times 7.7.7 \times 10.10.10 = 8^3 \times 7^3 \times 10^3$$

Daí concluímos a seguinte regra: *para se elevar um produto a uma potência, basta elevar-se cada fator a essa potência.*

OBSERVAÇÃO. A potenciação é uma multiplicação repetida, do mesmo modo que a multiplicação é uma adição repetida. Estas operações formam a seguinte escala:

adição, multiplicação, potenciação.

Vimos que a multiplicação é distributiva em relação à adição. Agora vemos que *a potenciação é distributiva em relação à multiplicação.*

91. — Produto de potências de mesma base. Seja multiplicar 4^2 por 4^3; temos:

$$4^2 \times 4^3$$

De acordo com a definição de potência, o 1º fator, 4^2, é igual a 4×4; o 2º fator, 4^3, é igual a $4 \times 4 \times 4$. Podemos, portanto, escrever:

$$4^2 \times 4^3 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$

O 2º membro dessa igualdade é a quinta potência de 4, isto é, 4^5. Logo:

$$4^2 \times 4^3 = 4^5$$

Podemos enunciar a seguinte regra: *para multiplicar potências de mesma base, somam-se os expoentes, conservando-se a mesma base.*

EXEMPLOS. I. *Efetuar o produto* $6^3 \times 6^2 \times 6^4$.

A soma dos expoentes é $3 + 2 + 4$ ou 9.

Temos, portanto:

$$6^3 \times 6^2 \times 6^4 = 6^9$$

II. *Efetuar o produto* $5^3 \times 5 \times 5^2$.

$$5^3 \times 5 \times 5^2 = 5^6$$

92. — Elevação de uma potência a outra potência. A expressão $(5^3)^4$ indica que o cubo de 5 deve ser elevado à 4ª potência. De acordo com a definição de potência, podemos, então, escrever:

$$(5^3)^4 = 5^3 \times 5^3 \times 5^3 \times 5^3$$

O 2º membro sendo um produto de potências de mesma base, podemos aplicar a propriedade anterior e escrever:

$$(5^3)^4 = 5^3 \times 5^3 \times 5^3 \times 5^3 = 5^{3+3+3+3} = 5^{3\times 4} = 5^{12}$$

Concluimos, pois a seguinte regra: *para se elevar uma potência a outra potência basta multiplicar-se o expoente da potência dada pelo expoente a que se quer elevá-la.*

EXEMPLOS. I. *Elevar ao quadrado o produto*: $5^3 \times 7^4 \times 11$.

$$(5^3 \times 7^4 \times 11)^2 = 5^6 \times 7^8 \times 11^2$$

II. *Efetuar*: $(5^2 \times 7^3 \times 4)^3$.

$$(5^2 \times 7^3 \times 4)^3 = 5^6 \times 7^9 \times 4^3$$

93. — Divisão de potências da mesma base. Seja dividir, por exemplo, 7^5 por 7^2.

Sabemos que 7^3 multiplicado por 7^2 dá um produto igual a 7^5. Logo 7^5 dividido por 7^2 dá um quociente igual a 7^3.

Temos: $\dfrac{7^5}{7^2} = 7^3$.

Do mesmo modo: $\dfrac{10^8}{10^3} = 10^5$.

Conclusão: *para se dividir uma potência por outra da mesma base, toma-se para quociente a base comum elevada ao excesso do expoente do dividendo sobre o do divisor.*

Abreviadamente se diz:

Para se dividirem potências de mesma base, subtraem-se os expoentes.

EXEMPLOS. I. *Dividir* $5^2 \times 7^5 \times 11$ *por* 7^2.

Dividindo o 2º fator 7^5 por 7^2, temos:

$$\frac{5^2 \times 7^5 \times 11}{7^2} = 5^2 \times 7^3 \times 11$$

II. *Dividir* $2^2 \times 3^5 \times 5^4 \times 7$ *por* $3^2 \times 5^3$.

Dividimos o produto dividendo por 3^2, dividindo o 2º fator por 3^2, o que dá $2^2 \times 3^3 \times 5^4 \times 7$. Em seguida, dividimos este resultado por 5^3, dividindo o 3º fator por 5^3 e achamos $2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$.

Temos, pois,

$$(2^2 \times 3^5 \times 5^4 \times 7) \div (3^2 \times 5^3) = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$$

94 — Propriedades que se não verificam. Já observámos que a potenciação não é comutativa. Assim, embora se tenha $4^2 = 16$, $2^4 = 16$ e, portanto, $4^2 = 2^4$, o fato não é geral, pois 2^3 não é igual a 3^2.

Podemos, ainda, notar que a potenciação não é distributiva em relação à adição nem em relação à subtração. Com efeito, $(2+3)^2$ *não é igual* a $2^2 + 3^2$, pois $(2+3)^2 = 5^2 = 25$ e $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$.

Analogamente, $(7-2)^2$ *não é igual* a $7^2 - 2^2$, pois,

$$(7-2)^2 = 5^2 = 25 \text{ e } 7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45.$$

3. POTÊNCIAS DAS FRAÇÕES

95. — Potenciação de uma fração. De acordo com a definição de potência e com a regra de multiplicação de frações, tem-se:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 5} = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

Assim: *para se elevar uma fração a uma certa potência, elevam-se ambos os termos da fração a tal potência.*

OBSERVAÇÕES. I. Devemos reduzir um número misto a fração imprópria sempre que precisarmos elevar esse número a uma potência.

Exemplo:

$$\left(2\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{9}{4}\right)^3 = \frac{729}{64}$$

II. *Qualquer potência de uma fração irredutivel é também uma fração irredutivel.*

Assim, $\dfrac{4}{15}$ é irredutivel porque não há fator primo comum a 4 e 15; $\dfrac{4^2}{15^2} = \dfrac{4 \times 4}{15 \times 15}$ também é irredutivel, porque não haverá fator primo comum a 4×4 e a 15×15.

96. — Potenciação de um número decimal. *Para se elevar a uma potência um número decimal, eleva-se a essa potência o número inteiro que se obtem fazendo-se abstração da vírgula e separam-se no resultado tantos algarismos decimais quantos são os do número dado vezes o grau da potência.*

Seja achar $0{,}02^5$. Tem-se $2^5 = 32$. Logo:

$$0{,}02^5 = 0{,}0000000032$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS. I. *Achar pela decomposição em factores o m.d.c. e o m.m.c. aos números 5304, 9756 e 10140 e os quocientes sucessivos do m.m.c. por esses números.*

— Decompondo os números dados em fatores primos, acha-se

$$5304 = 2^3 \times 3 \times 13 \times 17$$
$$7956 = 2^2 \times 3^2 \times 13 \times 17$$
$$10140 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13^2$$

O m.d.c. será, pois,

$$2^2 \times 3 \times 13 = 156$$

e o m.m.c.,

$$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 13^2 \times 17 = (2^3 \times 3 \times 13 \times 17) \times 3 \times 5 \times 13 =$$
$$= 5304 \times 3 \times 5 \times 13 = 1034280$$

Os quocientes serão:

$$(2^3 \times 3^2 \times 5 \times 13^2 \times 17) : (2^3 \times 3 \times 13 \times 17) = 3 \times 5 \times 13 = 195$$
$$(2^3 \times 3^2 \times 5 \times 13^2 \times 17) : (2^2 \times 3^2 \times 13 \times 17) = 2 \times 5 \times 13 = 130$$
$$(2^3 \times 3^2 \times 5 \times 13^2 \times 17) : (2^2 \times 3 \times 5 \times 13^2) = 2 \times 3 \times 17 = 102$$

II. *Efetuar o seguinte produto:*

$$0{,}02^5 \times 0{,}03^2 \times 0{,}005^2 \times 0{,}002^3 \times 0{,}7 \times 0{,}005^6 \times 10^{35}$$

— No produto $2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 2^3 \times 7 \times 5^6 \times 10^{35} = 2^8 \times 5^8 \times 3^2 \times 7 \times 10^{35} = 63 \times 10^8 \times 10^{35} = 63 \times 10^{43}$ devemos separar $2.5 + 2.2 + 3.2 + 1 + 3.3 + 3.6$ ou 48 decimais, o que nos dá 0,00063.

III. *Sem efetuar as potenciações, decompor em fatores primos o produto* $15^3 \times 12^2 \times 21 \times 35^2$.

Tem-se

$15^3 \times 12^2 \times 21 \times 35^2 = (3 \times 5)^3 \times (2^2 \times 3)^2 \times (3 \times 7) \times (5 \times 7)^2 = 3^3 \times 5^3 \times 2^4 \times 3^2 \times 3 \times 7 \times 5^2 \times 7^2 = 2^4 \times 3^6 \times 5^5 \times 7^3$.

Exercícios

1. Efetuar o produto $7^2 \times 7 \times 7$.
2. Efetuar o produto $5^3 \times 5^6$.
3. Elevar ao quadrado $7^3 \times 3^2 \times 5$.
4. Elevar ao cubo $2^3 \times 3 \times 7^2$.
5. Dividir 7^6 por 7^2.
6. Dividir $3^4 \times 5^2$ por $3^2 \times 5$.
7. Dividir $7^2 \times 11$ por 7×11.
8. Dividir $3^2 \times 7^2 \times 11$ por 3×11.
9. Somar o quadrado de 0,8 com o cubo de 1,5.
10. Somar o cubo de $1\frac{1}{2}$ com o quadrado de $\frac{5}{4}$.
11. Somar o quadrado de 0,12 com o cubo de 1/5.
12. Multiplicar o cubo de 0,02 por 10^4.
13. Somar o cubo de 2,5 com o quadrado de 0,6.
14. Escrever o valor das seguintes expressões sob forma de uma potência:

a) $2^4 \times 2^6$ *b*) $5^3 \times 5^4 \times 5^6$
c) $(2^3)^4$ *d*) $3^2 \times 3 \times 3^5$
e) $(2 \times 5)^2 \times (2^3 \times 5^2) \times 2 \times 5^2$
f) $(2 \times 7^2 \times 5) \times (2 \times 7) \times (3^3 \times 5^4) \times 7^2$
g) $(2^2 \times 6^3 \times 7)^2 \times (2 \times 7^2)^2$ *h*) $7^6 : 7^4 \times 7$
i) $(3^3 \times 4^3) : 12^2$ *j*) $(4^3 \times 4^2)^3 : 2^{28} \times 5^2 : 10$

15. Calcular as seguintes expressões, simplificando os cálculos com auxílio das regras do cálculo de potências:

a) $(35^3 : 7^3 + 785) \times (12^3 - 75 \times 12) : 36$
b) $14^2 \times 7^5 : 7^3 - (176 + 4^3 \times 4 - 6^3)$
c) $15 \times (8^7 : 4^7 - 112) + 7^5 : 7^3 \times [42^3 : 14^3 - 2^3 \times (84 - 9^2)]$.

16. Sem efetuar as potenciações decompor em fatores primos:

a) $15^2 \times 18^2 \times 75 \times 245$ *b*) $18^3 \times 24^2 \times 36 \times 363$

CÁLCULO MENTAL

Calcular mentalmente:

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\left(\frac{2}{5}\right)^2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^2$;

$\left(\frac{2}{3}\right)^3$; $\left(\frac{5}{3}\right)^3$

2. $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(2\frac{1}{3}\right)^2$;

$\left(3\frac{1}{3}\right)^3$; $\left(1\frac{2}{3}\right)^3$

3. $(0,3)^2$; $(0,2)^3$; $(0,1)^3$; $(0,05)^2$;
$(1,3)^2$; $(0,12)^2$

4. QUADRADO DA SOMA DE DOIS NÚMEROS

97. — Quadrado. Do estudo sobre potências em geral e do estudo das frações, resulta imediatamente:

1.º que se chama quadrado de um número a um produto de dois fatores iguais a esse número ou ao produto desse número por si mesmo;

2.º que para elevar ao quadrado uma potência de um número basta dobrar o expoente dessa potência;

3.º que para elevar ao quadrado um produto de vários fatores eleva-se cada fator ao quadrado;

4.º que o quadrado de um número contem os mesmos fatores primos que ele, mas com expoentes duplos.

5.º que o quadrado de uma fração é outra fração cujos termos são os quadrados dos termos da primeira:

6.º que o quadrado de uma fração irredutivel é tambem uma fração irredutivel, porque, se dois números são primos entre si, duas potências quaisquer deles são também números primos entre si.

Observações. — I. *Para se elevar ao quadrado um número formado pela unidade seguida de zeros, escreve-se a unidade seguida do dobro de zeros.* Com efeito, a unidade seguida de n zeros é 10^n, cujo quadrado é 10^{2n} ou a unidade seguida de $2n$ zeros; assim, os quadrados de 10, 100, 1000... são 100, 10000, 1000000... *Para se elevar ao quadrado um número terminado em zeros, eleva-se ao quadrado o número que se obtem fazendo abstração dos zeros e ao resultado acrescentam-se o dobro de zeros que há no número dado.* Com efeito, o quadrado de 800, por exemplo, ou de 8×100 é $8^2 \times 100^2$ ou $64 \times 10000 = 640000$.

II. *O quadrado de um número inteiro nunca pode terminar em 2, 3, 7 e 8.*

Formemos os quadrados dos números de 1 a 10, que sabemos de cor, pois se acham na tabuada de multiplicar: 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100. Nenhum deles termina em algum dos algarismos citados.

Consideremos o quadrado de um número qualquer: 584, por exemplo. Ao efetuar o produto de 584×584, podemos notar que êle terminará pelo mesmo algarismo por que termina o
Temos, assim, que o quadrado de um número termina
produto 4×4, isto é, 6.
sempre do mesmo modo que o quadrado das suas unidades, logo não pode terminar em 2, 3, 7, 8.

98 — Quadrado da soma de dois números. Vimos (1ª S. A., n. **59**) que, para multiplicar uma soma por um número, multiplicam-se todas as parcelas por esse número, o que se pode traduzir simbolicamente pela igualdade:

$$(a + b + c)m = am + bm + cm$$

Assim, dada a expressão numérica $(7 + 5 + 8) \times 3$, podemos substituí-la por $7 \times 3 + 5 \times 3 + 8 \times 3$ ou $7.3 + 5.3 + 8.3$.

Dizemos, então, que *desenvolvemos* o produto indicado pela expressão dada.

Consideremos a soma de dois números, $7 + 5$, e vejamos como se pode obter o quadrado dessa soma sem efetuá-la.

O quadrado de $7 + 5$ será igual ao produto de dois fatores iguais a $7 + 5$.

Temos, assim:

$$(7 + 5)^2 = (7 + 5)(7 + 5)$$

Substituindo-se, no 2.º membro, a primeira soma por 12, vem:

$$12(7 + 5)$$

Desenvolvendo-se o produto do número 12 pela soma $(7 + 5)$ resulta:

$$7 \times 12 + 5 \times 12$$

Substituindo o fator 12 pela soma $7 + 5$, temos:

$$7(7 + 5) + 5(7 + 5)$$

Desenvolvendo-se esses produtos, vem:

$$7 \times 7 + 7 \times 5 + 5 \times 7 + 5 \times 5$$

O primeiro produto é o quadrado de 7 e o último é o quadrado de 5. Temos, assim:

$$7^2 + 7 \times 5 + 5 \times 7 + 5^2$$

Observemos ainda que os dois produtos 7×5 e 5×7 são iguais; a soma $7 \times 5 + 5 \times 7$ será igual a 2 vezes 7×5. Resulta, pois:

$$(7 + 5)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2$$

Podemos, então, enunciar a seguinte regra:

O quadrado de uma soma indicada de dois números é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

Exemplo:

$(8 + 3)^2$	=	8^2	+	$2.8.3.$	+	3^2
		Quadrado do 1º número		Duas vezes o 1º pelo 2º		Quadrado do 2º número

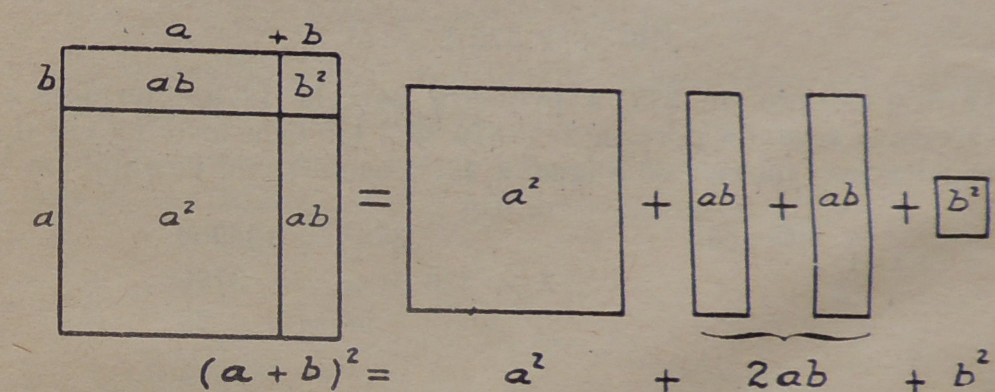
A regra acima se pode exprimir simbolicamente do seguinte modo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Esta regra, que se denomina *lei de formação do quadrado de uma soma de dois números*, pode ser explicada geometricamente.

Construamos um quadrado cujos lados medem $a + b$. A área deste quadrado será $(a + b)^2$. Podemos, entretanto, decompor o quadrado em dois outros quadrados, um de lado a e outro de lado b, e dois retângulos iguais de lados a e b.

A lei que acima estabelecemos pode ser obtida exprimindo-se que a área do quadrado de lado $a + b$ é igual à soma das quatro figuras em que ele se decompõe, como se vê na figura abaixo:



Observação. No cálculo corrente, para elevar uma soma de dois ou mais números ao quadrado efetuamos a soma e elevamos o resultado ao quadrado:

$$(7 + 3 + 5)^2 = 15^2 = 225$$

O conhecimento da lei que permite efetuar o quadrado de uma soma de dois números é, porém, de grande utilidade para a explicação de outras regras e propriedades, como veremos a seguir.

99. — Aplicações. I. *Achar o quadrado de 97 sem multiplicar esse número por si mesmo.*

Tem-se

$$97 = (90 + 7)^2 = 90^2 + 2.90.7 + 7^2 = 8100 + 1260 + 49 = 9409$$

Daí concluímos: *o quadrado de um número de dois algarismos se obtém somando o quadrado das dezenas, com o duplo produto das dezenas pelas unidades e com o quadrado das unidades.*

II. *Mostrar que o quadrado de um número terminado em 5 termina forçosamente em 25.*

Seja 375 um número terminado em 5. Vamos mostrar que o quadrado de 375 termina em 25.

Separamos, no número, as dezenas das unidades e escrevemos:

$$370 + 5$$

Elevemos essa soma ao quadrado. Temos

$$(370 + 5)^2 = 370^2 + 2.370.5 + 5^2$$

Na soma

$$370^2 + 2.370.5 + 5^2$$

que é o quadrado de 375, a primeira parcela $(370)^2$ termina em dois zeros; a segunda parcela $2 \times 370 \times 5$ também termina em dois zeros; a terceira parcela 5^2 é igual a 25. Logo a soma termina em 25.

Verificação

$$\begin{array}{r} 370^2 = 136900 \\ 2 \times 370 \times 5 = \quad 3700 \\ 5^2 = \quad\quad 25 \\ \hline 140625 \end{array}$$

100. — Diferença entre os quadrados de dois números consecutivos. Vamos supor que conhecemos o quadrado de 48 e queremos calcular o quadrado de 49. Temos:

$$48^2 = 2304$$

Em lugar de 49, escrevamos:

$$48 + 1$$

e elevemos essa soma ao quadrado:

$$(48 + 1)^2 = 48^2 + 2 \times 48 \times 1 + 1$$

ou, suprimindo o fator 1:

$$(48 + 1)^2 = 48^2 + 2 \times 48 + 1$$

O quadrado de 49 será igual ao quadrado de 48 aumentado do dobro de 48 e de uma unidade:

Quadrado de 48	2304
Dobro de 48	96
Unidade	1
	2401

A soma 2401 será o quadrado de 49.

Do exemplo acima podemos concluir o seguinte: *a diferença entre os quadrados de dois números consecutivos é igual ao dobro do menor mais 1.*

Exemplo:

$$49^2 - 48^2 = 2 \times 48 + 1$$

Com auxílio dessa propriedade, podemos calcular facilmente uma tabela de quadrados.

Escrevamos em coluna a série dos números inteiros (I) e um pouco adiante a dos números impares (III):

I	II	III
1	1	1
2	4	3
3	9	5
4	16	7
5	25	9
6	36	11
7	49	13
8	64	15
9	81	17
10	100	19
11	121	21
.	.	.
.	.	.
.	.	.

O número impar que corresponde a um dado número inteiro, 4, por exemplo, é igual ao dobro do número inteiro precedente, 3, mais 1, isto é, 7. Daí resulta que o quadrado de um número inteiro qualquer se obtem somando o número ímpar que lhe corresponde ao quadrado do número inteiro precedente. Se adiante de 1 escrevermos, numa coluna II, o seu quadrado que é 1, somando-o ao segundo número da coluna III, obtemos 4, que é o quadrado de 2; este, por sua vez, somado ao terceiro número ímpar dá 9, que é o quadrado de 3 e, continuando assim, iremos obtendo na coluna II os quadrados de todos os números inteiros, por simples adições, pois podemos prolongar indefinidamente as duas colunas I e III, isto é, a série dos números inteiros e a dos números ímpares. Por esse modo de formação dos quadrados, vê-se claramente que *o quadrado de um número qualquer* n *é igual à soma dos* n *primeiros números ímpares.*

EXEMPLO. *A diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos é 237. Quais são esses números?*

— A diferença entre os quadrados de dois números consecutivos é o dobro do menor mais um; logo 237 representa o dobro do menor dos números considerados, acrescido de uma unidade. O dobro do menor, é, pois, 236 e o menor é igual a $236 \div 2 = 118$. Os números são 118 e 119.

5. REGRA PRÁTICA PARA EXTRAÇÃO DE RAIZ QUADRADA. APROXIMAÇÃO NO CÁLCULO DA RAIZ

101. — Raiz quadrada. *Chama-se* RAIZ QUADRADA EXATA, ou simplesmente RAIZ QUADRADA, *de um número, outro número que, elevado ao quadrado, reproduz o primeiro.*

Assim, a raiz quadrada de 49 é 7, porque 7 elevado ao quadrado é igual a 49; $\frac{2}{3}$ é a raiz quadrada de $\frac{4}{9}$ porque $\frac{2}{3}$ elevado ao quadrado é igual a $\frac{4}{9}$; 0,5 é a raiz quadra de 0,25 porque 0,5 elevado ao quadrado é igual a 0,25.

Indica-se a raiz quadrada de um número escrevendo-o embaixo do sinal $\sqrt{}$ que se chama *radical*. O traço horizontal desse sinal e que se chama *vínculo* deve ser prolongado até abranger todo o número, ou expressão, cuja raiz se quer indicar. Esse traço produz o mesmo efeito de um parêntesis.

Assim, a igualdade:

$$\sqrt{49} = 7$$

que se lê "raiz quadrada de 49 é igual a 7", equivale à seguinte:

$$7^2 = 49$$

Do mesmo modo, as igualdades:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$$

equivalem a:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad ; \quad (0{,}5)^2 = 0{,}25$$

Se, dado um número inteiro ou fracionário, existir outro número, inteiro ou fracionário que, elevado ao quadrado, reproduza o número dado, diz-se que o número dado é um *quadrado.*

Assim, 49, $\frac{4}{9}$, 0,25 são *quadrados.*

Tratando-se de números inteiros, usa-se geralmente a expressão *quadrado perfeito.*

Diz-se, ainda, no caso referido, que o número dado *admite uma raiz* (quadrada) *exata.*

102 — Quadrados perfeitos. Há números que não teem raiz quadrada (exata). Exemplo: não há número inteiro que, elevado ao quadrado dê 40. Não há, tampouco, nenhuma fração que elevada ao quadrado dê 40. Com efeito: qualquer fração pode sempre ser reduzida à expressão mais simples, isto é, substituida por uma fração irredutivel igual. Vimos, (nº **95** Ob. II) por outro lado, que o quadrado de uma fração irredutivel é uma fração irredutivel e não pode, pois, ser igual a 40.

Daí resulta que os únicos números inteiros que teem uma raiz quadrada exata são os quadrados dos números inteiros. Tais números chamam-se *quadrados perfeitos.* Em conclusão:

Dado um número inteiro, dois casos se podem apresentar: ou esse número é quadrado de outro número inteiro, caso em que se diz *quadrado perfeito*, ou esse número não tem raiz qua-