Geometria:
do arquivo da Estela à sala de aula

Marcelo Ferreira Martins Salvador

Geometria:
do arquivo da Estela à sala de aula

Universidade Severino Sombra
Vassouras, 2012

1ª Edição 2012

Revisão
Simão Pedro dos Santos

Editora Responsável
Lúcia Maria Aversa Villela

Projeto da Capa
Paulo D'Antonio

Editoração Eletrônica e Diagramação
Monica Penedo

Direitos de Publicação reservados Universidade Severino Sombra
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Educação Matemática
Av. Expedicionário Oswaldo de Almeida Ramos, 280 - bloco 3 / 2º piso
Centro - Vassouras - RJ
Telefax.: (0xx24) 2471-8372

Publicação apresentada como produto da dissertação *Una história de paixão: Estela Kaufman Fainguelernt e o ensino da Geometria,* sob orientação da Profª Drª Lucia Maria Aversa Villela e desenvolvida na linha de pesquisa de História da Educação Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, da Universidade Severino Sombra. (Vassouras, RJ, 31 de março de 2012.

Sa 384 g

Salvador, Marcelo Ferreira Martins
Geometria : do arquivo da Estela à sala de aula / Marcelo Ferreira Martins Salvador. – Vassouras: Universidade Severino Sombra, 2012.
68 p.: il ; 21 cm.

ISBN 978-85-88187-33-7
ISBN E-book 978-85-88187-34-4

1. Geometria - Estudo e ensino. I. Universidade Severino Sombra. Mestrado Profissional em Educação Matemática. II. Laboratório de Pesquisa em História da Educação Matemática - LaPHEM da Universidade Severino Sombra. III. Título.

CDD 516.007

P r e f á c i o

Mais um livro de Geometria(s) !!!!

A um olhar menos atento, talvez este material pareça ser apenas isto. Para quem conhece a professora estela Kaufman fainguelernt ou é um pesquisador em História da educação Matemática este livro é muito mais. É uma forma de se ter flashes da história do ensino das Geometrias após os anos 60.

Marcelo nos traz sugestões pinçadas da vida profissional de uma pessoa que desde 1955, dá aulas de Matemática a gerações. faz considerações sobre o que nos trouxe e, por fim, nos leva a pensar em qual é a essência de nosso trabalho com a Matemática em geral, e em particular com a Geometria.

Que seja útil a todos que consigam acessar este despretensioso, mas significativo trabalho. Útil não só em suas práticas, mas para melhor valorizar seu percurso como pessoas que produzem no presente as marcas que ficarão de nossa cultura escolar.

obrigada, Marcelo, por sua colaboração ao LaPHeM.

Lúcia Maria Aversa Villela
fevereiro de 2012.

SUMário

Apresentação

As propostas aqui apresentadas originaram-se em algum aspecto, em momentos da vida profissional de um professora que declaradamente sempre se disse apaixonada pelas Geometrias.

Na quase totalidade, o material teve como base documentos do seu acervo – o Arquivo Pessoal de estela Kaufman fainguelernt (APeKf) – que foi sendo organizado ao longo da minha pesquisa de Mestrado. em alguns casos estas atividades foram adaptadas, reescritas ou aprofundadas.

o objetivo desta coletânea é oferecer apoio aos colegas, que também são professores de Matemática, que buscam atividades "diferentes" relacionadas ao ensino de Geometria. cabe ressaltar que a sequência das atividades aqui elencadas não segue a nenhum grau de escolaridade e podem ser desdobradas em novas explorações, de acordo com o nível do grupo a que serão aplicadas.

Atividades Propostas

As cinco primeiras atividades foram retiradas de cartazes com a própria letra da professora estela. elas exploram a visualização e propriedades de triângulos e quadrados e, segundo ela foram produzidas e aplicadas durante o período em que esta atuou junto ao projeto Laboratório de currículos da Secretaria estadual de educação e cultura (governo do rio de Janeiro). em oficinas aplicadas aos professores, durante o meu período de estágio surpervisionado, pude observar a desenvoltura da forma que conseguiam ou não para resolver a atividade. foi unânime o comentário sobre a importância deste tipo de atividade para incentivar os alunos a explorar o seu campo visual e, principalmente desafiá-los.

Para explicar a parte ligada à Geometria Plana e Tridimensional, a atividade "Visualizando as paralelas" faz com que o aluno saiba distinguir conceitualmente e visualmente a ideia de paralelismo. esta atividade também foi retirada do livro "reformulação de currículos - Matemática 5.ª a 8.ª séries", de 1982, do mesmo Laboratório de currículos citado anteriormente, período em que a professora estela ali trabalhou. Muitas vezes ainda nos deparamos com a concepção e definição de que duas retas são paralelas quando não possuem ponto em comum (ou não se interceptam). e como ficam as retas reversas?

com o intuito de explorar os conceitos geométricos – polígono e seus principais elementos, comprimento e suas medidas, área e superfície – temos as atividade "construindo e visualizando quadrados" e "Simetria no quadrado". Nelas é possível explorar, de forma mais lúdica, os principais conceitos da Geometria. Principalmente, retificar conceitos elaborados em anos anteriores, como por exemplo, a diferença entre área e superfície.

com a experiência em sala, percebe-se que os livros didáticos não diferenciam os conceitos de superfície (aqui considerada como uma região limitada em uma superfície) e de área, tomando-os como sinônimo. Para medirmos a grandeza superfície escolhemos uma unidade para fazê-lo. A quantidade de vezes que esta unidade couber na superfície será a área da superfície.

Dependendo da unidade de área escolhida, a medida de uma mesma superfície variará, isto é, uma mesma superfície pode ter várias áreas.

Já em “construindo Padrões”, podemos fazer com que os alunos verifiquem diversas representações construídas e suas naturezas, possam fazer surgir até composições que envolvam translações e rotações. em seguida, com ênfase na popularidade do artista escher, cujas obras foram expostas há pouco tempo no Brasil, podemos criar figuras com recursos da Geometria das transformações (no plano). cabe ressaltar que esta atividade ao ser aplicada aos professores, foi a que mais “mexeu” com o interesse do grupo, pois ficaram mais deslumbrados e desafiados a criarem novas formas.

Por meio da atividade “Trioto”, achada em uma folha timbrada da Universidade Santa Úrsula, exploramos as figuras geométricas e propriedades envolvidas nessa composição. A princípio, o aluno acha que é um Tangram, mas depois percebe que a construção tem oito figuras geométricas de mesma natureza, porém de formas distintas. No caso, oito triângulos, por isso chamado de Trioto. interessa explorar a proporcionalidade entre eles e a possibilidade de construir outros polígonos com esses triângulos.

Para sinalizar uma etapa de vida em que a professora estela estave junto aos professores de Matemática no colégio Liessin, a atividade “Semelhança nos triângulos retângulos” é um exemplo de atividade que faz com que o aluno venha a concluir as relações métricas no triângulo retângulo. A maioria dos livros didáticos pouco explora o como se estabelecem estas relações.

em seguida, em “outras razões”, de uma forma lúdica, introduzimos os conceitos das principiais razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).

A atividade “retas paralelas e transversais” explora o conceito de paralelismo entre duas retas, teorema de Thales e as propriedades dos quadriláteros.

em continuação à sua trajetória, a professora tem investido na aplicação da Matemática à Arte. As atividades selecionadas desta fase de sua produção são: “Geometrias na obra de Luiz Sacilotto”, “Malha triangular”, “Arte e Geometria de Lygia clark” e “os retângulos de Piet Mondrian”. Nelas, observam-se atividades não comuns aos livros didáticos, pois relacionam vários conteúdos geométricos às produções dos citados artistas plásticos.

em “interseções e Superfícies” mais uma vez explora-se a diferença entre área e superfície, anteriormente explicada. esta atividade também foi achada em uma folha timbrada da Universidade Santa Úrsula, e segundo depoimento da minha orientadora, que fazia parte do Grupo de estudos e Pesquisas em educação Matemática (GePeM) nesta época, fora elaborada para um concurso. Na aplicação com os professores é muito frequente a busca de soluções via um grande cálculo algébrico e não por meio de uma simples rotação.

A última atividade aplicada foi adaptada de um dos livros produzidos pelo Laboratório de currículos, aqui citado anteriormente. A princípio parece ser fácil, porém muitas vezes confunde o aluno, e, se aplicada ao ensino médio, pode se desdobrar no cálculo de volumes de objetos até então difíceis como, por exemplo, uma batata.

Retirando Palito

com 12 palitos de fósforo foi criada a figura 1. reproduza-a e depois retire dois palitos para formar dois quadrados.

Figura 1. Arquivo pessoal da Profa. Dra. Estela Kaufman Fainguelernt pôster nº 1

Esta atividade e as quatro que se seguem foram adaptadas a partir de cartazes existentes no APEKF: estavam numeradas numa sequência a qual obedeci, embora as tenha desdobrado em novos itens.

Nas três primeiras propostas, explora-se a visualização e propriedades dos quadrados. As duas outras, envolvem a construção de triângulos.

Busque, junto à turma, se é viável mais de uma solução para cada uma das situações.

Lembre-lhes que os palitos representam "lados" das figuras, embora não o sejam na realidade. Lembre-lhes também de que o comprimento do palito não é exatamente o dos lados das figuras a serem construídas.

Dependendo do nível de seus alunos, levante questões como: o que *caracteriza um quadrado? O que é um retângulo? O quadrado também é um retângulo?*

Embora possa citar divergências que existem com relação às classificações sobre os quadriláteros, o professor precisa se posicionar em relação a estas definições: atualmente, a corrente mais aceita define o retângulo como sendo o quadrilátero que possui os quatro ângulos retos,

Mexendo Palitos e Visualizando Quadrados 1

A cada nova etapa da atividade, reproduza a figura 2, que foi construída com doze palitos de fósforo.

a) retire quatro palitos para formar dois quadrados.

b) Mexa quatro palitos para formar dois quadrados.

c) Mexa quatro palitos para formar três quadrados.

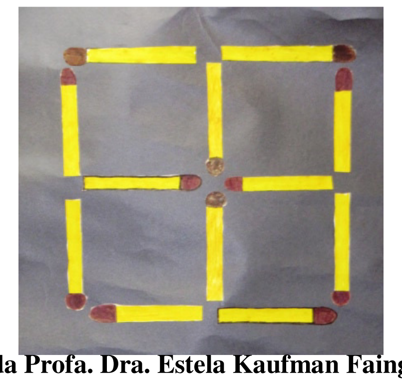


Figura 2. Arquivo pessoal da Profa. Dra. Estela Kaufman Fainguelernt pôster nº 1

Mais uma vez, explorar a visualização e propriedades dos quadrados.

Embora parecida, houve uma mudança de ações entre a atividade anterior e esta: aqui, em um momento, é possível retirar palitos e em outro, apenas mexê-los.

A cada nova etapa da atividade, reproduza a figura 3, que foi construída com doze palitos de fósforo.

a) Mexa três palitos para obter três quadrados.

b) Mexa em dois fósforos para formar três quadrados grandes e quatro pequenos.

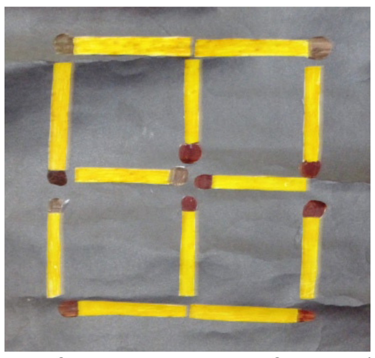


Figura 3. Arquivo pessoal da Profa. Dra. Estela Kaufman Fainguelernt pôster nº 1

O grau de complexidade desta terceira proposta, principalmente o segundo item, é bem maior do que o das anteriores.

Acrescentando Palitos e Visualizando Triângulos

com seis palitos foi formado o triângulo equilátero da figura 4, acrescente-lhes três palitos para formar cinco triângulos equiláteros: quatro pequenos e um grande.

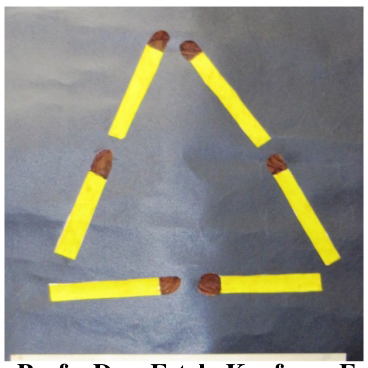


Figura 4. Arquivo pessoal da Profa. Dra. Estela Kaufman Fainguelernt pôster nº 6

Explore a lógica e visualização dos triângulos equiláteros.

Aqui está uma boa oportunidade para se debater sobre o que caracteriza o triângulo equilátero. Que outros tipos de triângulos os alunos conhecem?

com doze palitos foram formados quatro triângulos equiláteros, conforme indica a figura 5.

Mexa em quatro fósforos de modo a formar seis triângulos equiláteros.

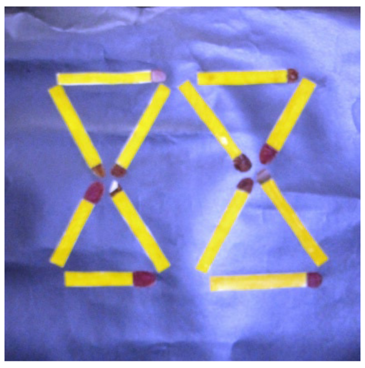


Figura 5. Arquivo pessoal da Profa. Dra. Estela Kaufman Fainguelernt pôster nº 5

Questione se há uma única solução.

Descubra a visualização, propriedades e construção de um hexágono regular mediamte a junção de seis triângulos equiláteros.

Tópicos a serem levantados com os alunos: o que é um polígono? Quando é que um polígono é regular?

observe a figura 6.

a) Ao visualizar esta figura apenas num plano, pinte com um lápis vermelho as retas que são paralelas à que contém o segmento AB.

b) Agora com um lápis verde, visualize esta figura num plano tridimensional e pinte as retas que sejam paralelas à que contém o segmento AB.

A B

Figura 6. Modificado da SEC-RJ 1982 - Acervo APEKF 1460 cx. 31

Esta atividade explora fortemente a visualização no plano e no espaço tridimensional. É possível levantar características que nos façam distinguir retas de segmentos de reta, bem como as retas paralelas das que não o são, no plano e no espaço tridimensional.

forme cinco quadrados com apenas doze palitos de fósforo.

Se esta atividade não tiver sido precedida das anteriores, certamente ocorrerão tentativas de construção, e é nesta hora que o professor terá de conduzir o debate, para que sejam analisadas as soluções. Há uma única forma de se construir estes cinco quadrados? Todos os quadrados possuem lados de mesmo tamanho? De que forma foi dividido o quadrado maior em quadrados menores?

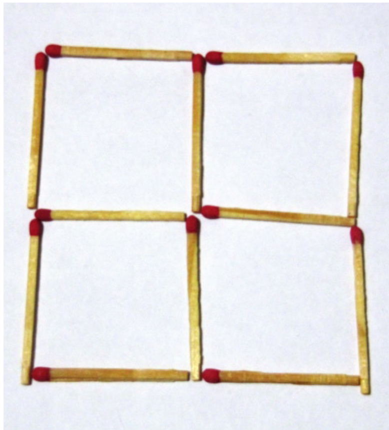


Figura 7. Foto e Criação do Autor

Provavelmente, a solução encontrada após a discussão será a que segue na figura 7.

Este momento abrirá espaço para que se revejam vários termos e conceitos geométricos, como no Quadro 1:

Quadro 1. Especifica os conteúdos e os pontos a relembrar com os alunos

Conteúdo	Pontos a Relembrar com o Aluno
Reta, segmento de reta	**Reta – não possui nem início nem fim** **Segmento de reta – parte da reta que possui extremos (Nesta atividade, cada palito representa visualmente um segmento de reta).**
Elementos de um polígono	**Lado, vértice e ângulo – como a atividade é desenvolvida em um nível intuitivo, vale observar estes conceitos de forma correta, mas sem preciosismos matemáticos.**
Medidas e unidades de comprimento	**Para medirmos grandezas, são escolhidas unidades. Pode-se medir a grandeza comprimento com a unidade "palito de fósforo" (1uc) e a quantidade de "palitos" com que se construiu o lado será a medida do seu comprimento. Exemplo: o quadrado grande, cujo lado é formado por dois palitos, medirá 2uc.**
Perímetro	**Perímetro - soma de todas as medidas dos lados de um polígono (no caso particular do quadrado, o perímetro será o quádruplo da medida de seu lado).**
Quantos cabem?	**Considere que o comprimento de cada palito corresponde a uma unidade de comprimento (1 uc) e que a medida da superfície de cada quadradinho formado por quatro palitos seja uma unidade de área (1 ua). Responda:** **. Quantas vezes o quadrado pequeno cabe no quadrado grande? Quantas vezes o quadrado grande cabe no quadrado pequeno? Normalmente esta segunda pergunta causa estranheza, pois os alunos afirmam logo que não cabe, esquecendo-se que o "caber" não implica necessariamente em caber um número inteiro de vezes!**

Superfície e área	**Como na linguagem usual, os livros não diferenciam as palavras superfície e área, tomando-as como sinônimos, cabe discutir as concepções matemáticas ali envolvidas.** **Para medirmos a grandeza superfície, escolhemos uma unidade para fazê-lo. A quantidade de vezes que esta unidade couber na superfície será a área da superfície. Exemplo: se escolhermos como unidade de área (1 ua) a medida da superfície do quadrado pequeno, cujo lado possui um palito de comprimento, então esta medida caberá quatro vezes na superfície do quadrado grande (cujo lado tem comprimento igual a dois palitos de fósforo) e, portanto, a sua superfície terá 4 ua.** **Dependendo da unidade de área escolhida, a medida de uma mesma superfície vai variar, isto é, uma mesma superfície pode ter várias áreas.**
Semelhança e congruência de formas geométricas	**A congruência é um caso particular de semelhança, quando a razão de semelhança é igual a um, ou seja, toda figura congruente é semelhante, porém nem toda figura semelhante é congruente.** **Exemplo: dos quadrados pequenos formamos triângulos semelhantes e congruentes. Quanto aos triângulos menores e aos maiores, são apenas semelhantes.**

Os quadrados de mesmo perímetro possuem, de dois em dois, pelo menos um lado em comum? Lembretes ao professor (quadro 2)

Quadro 2. Especifica os contéudos e os pontos a relembrar com os alunos

Conteúdo	Pontos a Relembrar com o Aluno
Segmentos consecutivos e segmentos adjacentes	**Segmentos consecutivos são os que possuem um extremo em comum. Serão adjacentes quando, além de consecutivos, forem também colineares.**

considerados os quatro quadrados de mesma área, e com apenas mais quatro palitos, de que forma podemos dividi-los para que possamos obter todos os triângulos congruentes?

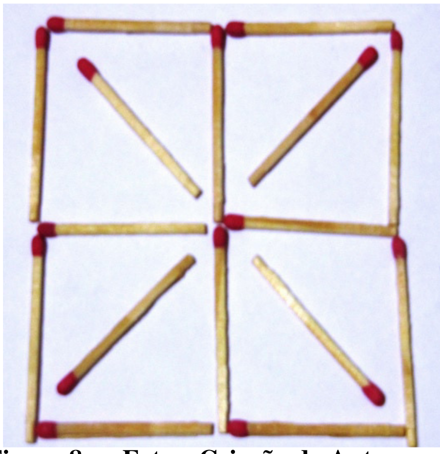


Figura 8. Foto e Criação do Autor

a) Quantos triângulos foram obtidos? *Explorar a visualização e percepção do aluno.*

b) construa uma representação no papel para a atividade feita.

Ao levarmos o aluno a representar no papel, o obrigamos a ter outra percepção do que construiu com o material que manipulou.

Lembretes ao professor

Quadro 3. Especifica os contéudos e os pontos a relembrar com os alunos

Conteúdo	Pontos a Relembrar com o Aluno
Diagonal	**O palito que dividirá os quadrados menores representará, apesar de seu tamanho ser efetivamente menor do que a diagonal do quadrado, a divisão de suas áreas.** **Explore o conceito de diagonal, e a partir do que já foi falado sobre medida de comprimento do palito, levante a questão sobre o tamanho da diagonal. A medida da diagonal é igual ao tamanho do palito?**
Eixo de simetria	**Explore a ideia de espelho, e alerte que na construção inicial do quadrado maior havia dois eixos de simetria, porém ao colocar mais quatro palitos, as diagonais do quadrado maior constituem-se em mais dois eixos de simetria.**

construir ornamentos a partir de um padrão dado, de maneira que dois cartões sempre tenham pelo menos um lado inteiro em comum (figura 9)

Figura 9. Criação do Autor

O trabalho será realizado em grupo. Deveremos entregar a cada equipe uma folha com quatro cartões, e pedir que os recortem, seguindo a borda pontilhado.

Figura 9a. Criação do Autor

Levar os grupos a reproduzirem em uma folha de papel os padrões criados.

Na etapa seguinte, depois de afixarem estas folhas em um painel, levá-los a observar a variedade de padrões construídos, para discutir a natureza geométrica dos movimentos utilizados.

Observemos que surgirão padrões ao se utilizar apenas translações e ou rotações (180º).

Cabe lembrar que uma transformação em que a figura muda de lugar, desloca-se segundo uma direção, é uma translação. Uma transformação do plano, na qual o transformado é uma figura congruente à figura inicial, é chamada de isometria.

Os padrões foram construídos por meio de translações.

o artista gráfico holandês escher (1898-1972) foi um dos maiores representantes no mundo das artes. empregou a matemática como base na maioria das suas obras, mesmo sem que tivesse consciência disso.

> "É esquisito que eu pareça abordar teorias matemáticas, sem que eu próprio as conheça"
>
> M. c. escher (http://www.mcescher.com)

escher usou transformações geométricas ao fazer suas criações. Vejamos um exemplo na figura 10.

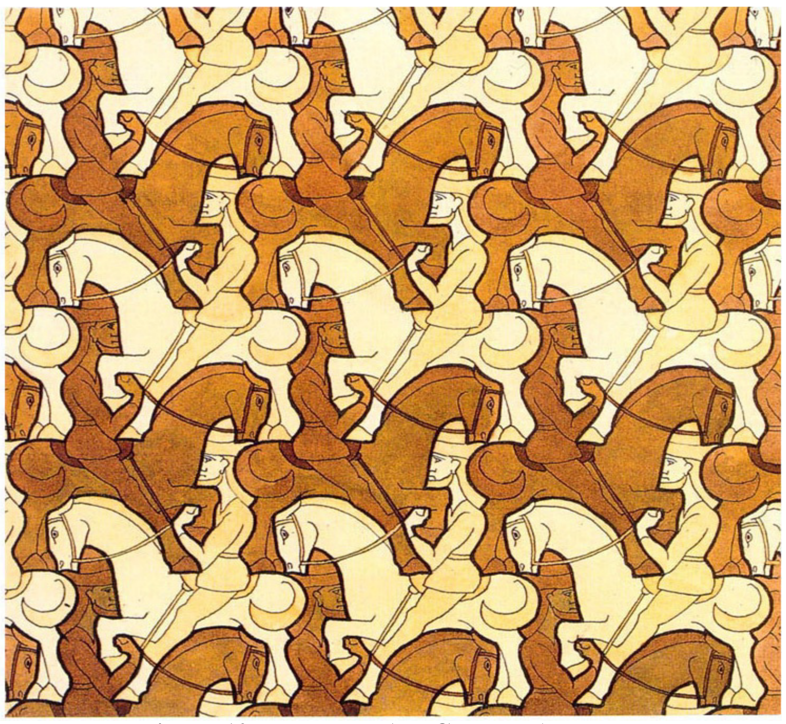


Figura 10. Horsemen (M. C. Escher)
fonte: http://www.pleacher.com/mp/mlessons/calculus/escher.html

Observe com seus alunos que Escher ao construir a ilustração acima utilizou apenas translações. Ressalte que o recurso aqui empregado pelo artista também foi aplicado por alunos na atividade anterior.

Vamos agora mostrar os recursos possíveis de serem utilizados para construção de padrões. Veja a sequência de figuras e perceba os movimentos realizados.

Utilizamos dois retângulos congruentes (Desenho B). em cada um deles, fizemos um corte dividindo-o em duas regiões (Desenho A e B).

Figura 1

Desenho A Desenho B Desenho C

Figura 2

Figura 3

em cada um dos retângulos cortados, foi feita uma translação (figura D e e).

Figura 4

Desenho D

Desenho E

Figura 5

Observe que, apesar das translações feitas, o valor da superfície não se altera.

Utilizamos as peças de um dos retângulos para transladar para encaixar junto às peças do outro retângulo, e desse modo, conseguimos formar o nosso padrão. (figuras G e H)

Desenho F Figura 6 Desenho G

Figura 7

Figura 8 Desenho H

com um encaixe entre nossos padrões, construímos a figura H.

Será que com estes padrões, repetidos indefinidamente, conseguimos pavimentar todo um plano?

Agora, aproveite os retângulos dados e crie, através de translações, uma figura.

É interessante o professor alertar o aluno de que as formas criadas a partir dessas transformações geométricas têm a mesma área, mas as formas e, portanto, as superfícies delimitadas pelos contornos são diferentes.

Trioto

A figura abaixo representa o trioto. como indica o nome é constituído de oito triângulos.

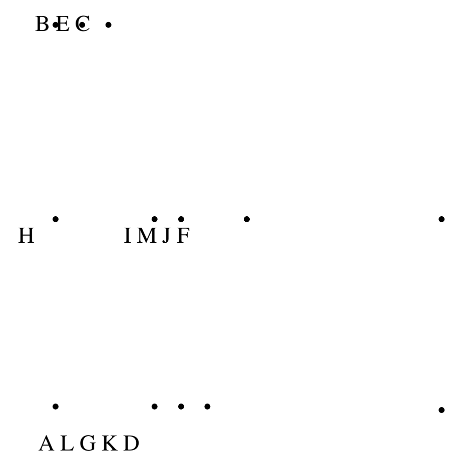


Figura 11. Adaptado do EPEKF, doc _____ , s/data

a) entregar uma folha de papel A4 para cada aluno.

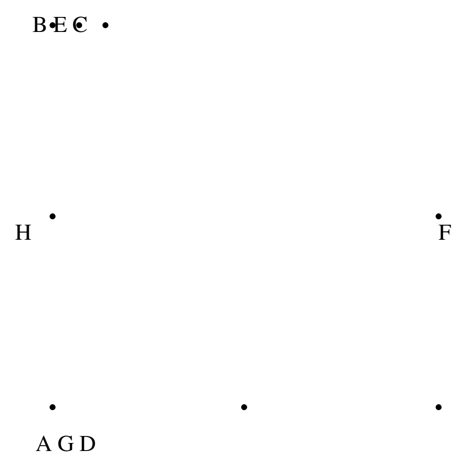
b) Pedir que a dobre de modo a obter o maior quadrado possível. certamente, “sobrará” uma parte da folha.

Debater sobre o processo utilizado para a obtenção deste quadrado: alguém utilizou um processo diferente?

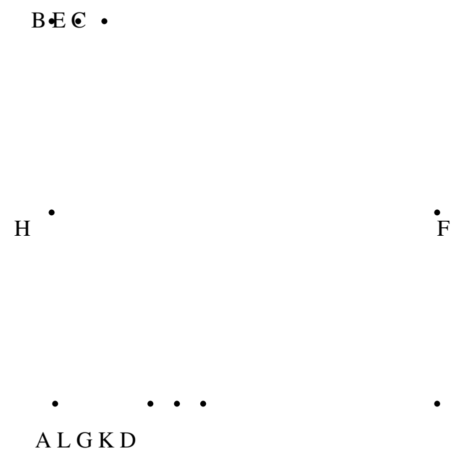
c) Mediante a dobradura, com o quadrado formado, descobrir os pontos médios dos lados desse quadrado.

Discutir a forma utilizada para achar os pontos médios.

d) Vincar uma dobra, de modo a obter um segmento de reta, em que um dos extremos é o ponto médio de um dos lados do quadrado (ponto e) e o outro, um dos vértices sobre o lado oposto ao que contém o ponto médio. com um lápis, traçar o segmento obtido

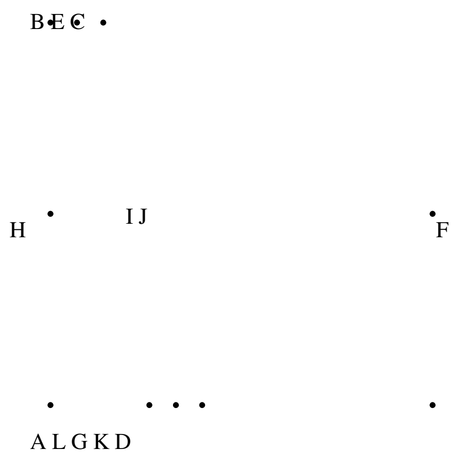


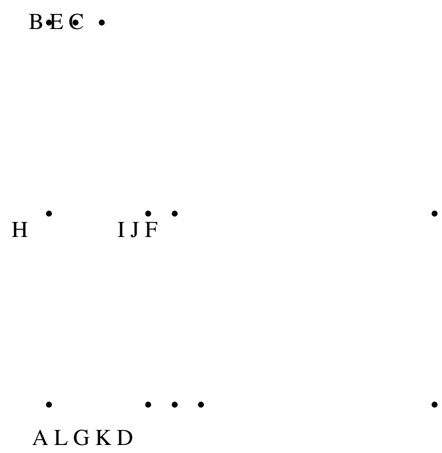
e) repetir o processo, a fim de traçar o segmento que unirá o ponto médio escolhido ao outro vértice do lado oposto.



Explorar a construção do triângulo eqüilátero formado.

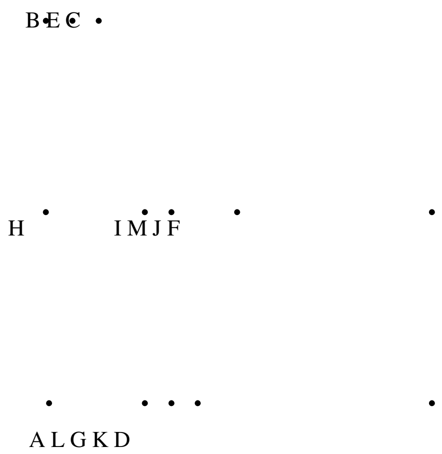
f) Vincar o quadrado, a partir dos pontos médios H e f, de forma a construir um outro quadrado inscrito no triângulo equilátero formado anteriormente. Traçar o quadrado desenvolvido.





Aproveitar a dobradura no eixo de simetria horizontal para traçar o lado de cima do quadrado. As partes laterais (ILGK *) podem ser traçadas por meio de dobraduras. Observe que o lado* AD *ficou dividido em quatro partes iguais*

g) com o quadrado menor repetiremos o processo realizado com o maior. Em IJ marcaremos M, seu ponto médio. Vincaremos e traçaremos os segmentos de reta ML e MK, que têm extremidades no ponto médio do quadrado menor (M) e cada vértice da base do quadrado (A e D).



Discutir as diferentes formas geométricas visualizadas a partir da construção do trioto.

h) construído o trioto, vamos cortá-lo, desmontando-o em suas diferentes partes. Qual é a natureza de cada um destes polígonos?

Explorar os oitos triângulos formados, suas propriedades e natureza.

i) estes triângulos são semelhantes? colorir com a mesma cor os triângulos que possuem semelhança da seguinte maneira: verde – os de maior superfície, vermelho – os de menor, e azul os demais.

Figura 12. Criação do Autor

Ao discutir o conceito de semelhança, é preciso esclarecer imprecisões que vêm da linguagem cotidiana. É preciso que se verifique se a proporcionalidade entre as medidas ocorre em todas as grandezas. Um exemplo já bem divulgado, e que ressalta esta imprecisão, é quando dizemos que as garrafas de dois refrigerantes (uma de 600 ml e outra de 2 litros) são "semelhantes", o que não é verdade, uma vez que, dentre outras medidas que não atendem à proporcionalidade, ambas as garrafas possuem uma mesma "tampa".

j) Vamos agora observar cada tipo de triângulo e ver quantas vezes cada um destes cabe-nos outros:

Quantas vezes o triângulo:

. vermelho cabe no azul?

. vermelho cabe no verde?

. azul cabe no amarelo?

. verde cabe no vermelho?

. verde cabe no azul?

. azul cabe no vermelho?

Discutir o conceito de "quantos cabe" e, principalmente, ressaltar quando for do maior para o menor. Há uma ideia disseminada de que "caber" é só quando a figura couber um número inteiro de vezes. Como exemplo, podemos afirmar que a peça azul cabe duas vezes na verde e que esta, por sua vez, cabe meia ($\frac{1}{2}$ ou 0,5) vez na superfície azul.

k) com os resultados obtidos podemos montar a seguinte tabela.

	Vermelho	**Azul**	**Azul**
Vermelho			
Azul			
Azul			

l) Utilizando duas ou mais peças, é possível formar outras figuras geométricas? Quais?

Explore a criatividade dos alunos quanto à formação de quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos e trapézios.

Aproveite para ressaltar que, neste caso, é possível obter-se losangos que não sejam quadrados, bem como retângulos que não são quadrados.

Caso considere ser pertinente, promova o debate sobre a classificação de triângulos e quadriláteros:

Quadro 4. Triângulos

Quanto à medida dos lados		Quanto à medida dos ângulos	
escalenos	Os três lados possuem medidas diferentes	acutângulos	Possui os três ângulos agudos (menores do que 90 º)
isósceles	Possui apenas dois lados congruentes (com a mesma medida)	retângulos	Possui um ângulo reto (igual a 90 º)
equiláteros	Possui todos os seus lados congruentes	obtusângulos	Possui um ângulo obtuso (maior do que 90º).

Quadriláteros

Quadrilátero qualquer

Paralelogramos
Dois pares de lados paralelos

Trapézios
Apenas um par de lados paralelos

Paralelogramo qualquer

Retângulo
Possui os quatro ângulos congruentes

Losango
Possui os quatro lados congruentes

Trapézio qualquer

Trapézio retângulo
Possui dois ângulos retos

Trapézio Isósceles
Seus lados não paralelos são congruentes

Figura 11. Quadriláteros

Semelhanças no Triangulo Retângulo

Pegue uma folha de papel:

a) Divida-a em dois triângulos retângulos e recorte-os.

b) em um deles, trace a altura relativa a hipotenusa.

c) Divida-o em dois outros, e recorte-os pela altura traçada.

d) classifique-os quanto aos ângulos:

e) em cada um dos três triângulos abaixo, identifique os ângulos congruentes, pintando-os da mesma cor:

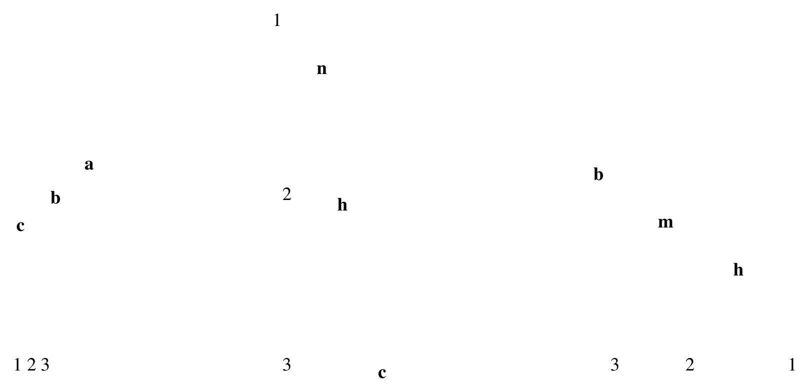


Figura I Figura II Figura III

f) coloque sobre sua carteira os triângulos que você cortou, do mesmo modo que na figura i.

g) Numere os triângulos e nomeie seus elementos, de acordo com a figura i.

h) Nessas condições, qual a posição relativa das hipotenusas de medidas *a, b,* e *c* , respectivamente?

i) Podemos afirmar que os triângulos são semelhantes? Justifique.

j) coloque, agora, os triângulos recortados do mesmo modo que na figura ii.

k) Nomeie seus elementos como na figura ii.

l) Qual a posição relativa dos segmentos de medidas *m, h* e *c* ? Justifique.

m) Mude a posição dos triângulos recortados, arranje-os do mesmo modo que na figura iii.

n) Qual a posição dos segmentos de medidas *b, m* e *h*? Justifique.

o) Sabendo que os triângulos retângulos 1 e 2 são semelhantes, complete:

. elementos do triângulo 1: c = n = h

. elementos do triângulo 2: ....

p) Do item anterior, concluímos que:

. h^2 = ______

. h . b = ______

. h . c = ______

q) Sabendo que os triângulos retângulos 2 e 3 são semelhantes, complete:

. elementos do triângulo 2: $\frac{b}{\ldots} = \frac{h}{\ldots} = \frac{m}{\ldots}$

. elementos do triângulo 3: ....

r) Do item anterior, concluímos que:

. $a \cdot h =$ ______

. $b^2 =$ ________

. $h \cdot b =$ ______

s) Sabendo que os triângulos retângulos 1 e 3 são semelhantes, complete:

. elementos do triângulo 1: c = n = h

. elementos do triângulo 3: ....

t) Do item anterior, concluímos que:

. $c^2 =$ _______

. $a \cdot h =$ ______

. $h \cdot c =$ ______

Liste todas as relações métricas possíveis de serem obtidas com os triângulos 1, 2 e 3 desta atividade:

a) _________ f) __________

b) _________ g) __________

c) _________ h) __________

d) _________ i) __________

e) __________ j) __________

Outras Razões

com a folha de papel A4 que você recebeu, faça uma dobradura de modo a vincar duas retas que se cortam em um ponto: chamemos a este ponto de A. A partir do ponto A, destaque as semirretas que formam o menor dos ângulos. chame-o de a.

A a

escolha um dos lados deste ângulo e, por meio de dobradura, marque uma reta perpendicular ao lado selecionado. esta reta corta os lados do ângulo traçado em dois pontos, formando outro segmento de reta. chamemos a este segmento de Bc.

B

A a

C

a) este segmento corta perpendicularmente:

. a semirreta que constitui o lado do ângulo que você escolheu?

. a outra semirreta que compõe o ângulo a?

b) Qual a natureza do triângulo ABc que você acabou de construir?

c) considere o ângulo a e indique a razão entre:

. o cateto oposto (em frente) ao ângulo marcado e a hipotenusa do triângulo.

. o cateto adjacente (do lado) ao referido ângulo e a hipotenusa do triângulo.

. o cateto oposto ao ângulo a e o cateto adjacente a este ângulo.

Veja o Quadro i, na próxima página

Da mesma forma que você marcou o segmento Bc, marque dois outros vincos também perpendiculares à primeira semirreta escolhida. chame-os respectivamente De e fG.

d) os segmentos De e fG são paralelos a Bc? Por quê?

e) os triângulos ADe e AfG são da mesma natureza do triângulo ABc?

f) estes três triângulos são semelhantes? Por quê?

g) o que acontecerá se você, com os três triângulos, estabelecer novamente as razões entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa?

Quadro 1 -

Estas razões recebem nomes especiais:

- à primeira, isto é, à razão entre o cateto posicionado em frente ao ângulo e a hipotenusa do triângulo chamamos de **seno deste ângulo** (sen a).
- à segunda razão, estabelecida entre o cateto posicionado ao lado do ângulo (ou cateto adjacente ao ângulo) e a hipotenusa, chamamos de **cosseno deste ângulo** (cos a).
- quanto à terceira das razões, obtida a partir do cateto oposto ao ângulo e do cateto que lhe é adjacente, chamamos de **tangente deste ângulo** (tg a).

Resumindo:

$$\text{sen a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

essas três relações entre os lados de um triângulo retângulo são denominadas razões trigonométricas e todas dependem do ângulo a . Seus conhecimentos e propriedades são utilizados em diversas atividades, a saber, engenharia, navegação, astronomia e arquitetura.

Retas Paralelas e Transversais

observe a figura 11:

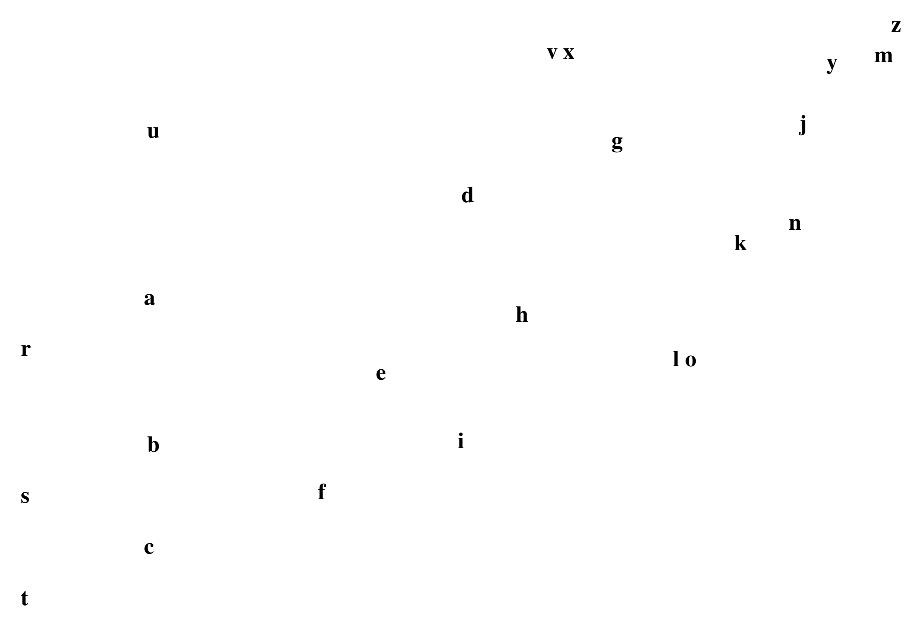


Figura 13. Adaptado da SEC-RJ 1982 - Acervo APEKF 1460 cx. 31

a) existem retas paralelas à reta u?

b) Quais são as retas paralelas à reta v? e à reta r?

c) Podemos afirmar que duas retas que não possuem ponto comum são paralelas?

d) Que tipos de polígono foram construídos com os vértices das intersecções entre as retas dadas?

e) existem polígonos semelhantes? Quais?

observe a figura 14 - obra do artista plástico Luiz Sacilotto:

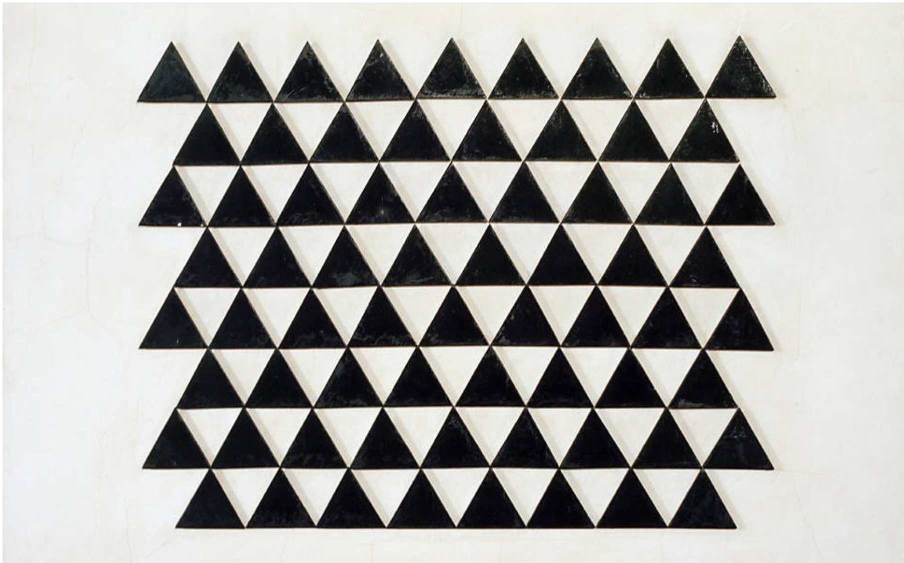


Figura 14. Obra Concreção 5629 (1956 – óleo sobre tela – 60 x 80 cm)

Fonte: FAINGUELERNT e NUNES, 2011, p.19

considerando as medidas reais do quadro, calcule seu perímetro e área.

considere o pequeno triângulo equilátero preto (padrão) do quadro como unidade de medida de área (u.a.) e o lado de mesmo triângulo como unidade de medida de comprimento (u.c.).

a) identifique:

. dois triângulos congruentes;

. um hexágono de área igual a 6u.a.

. um trapézio.

. outro trapézio semelhante ao anterior.

. um triângulo de área 64u.a.

. um paralelogramo que não seja losango.

. um losango de perímetro igual a 8u.c.

. um losango de área igual a 8u.a.

b) Quanto mede cada um dos ângulos internos do trapézio que você identificou?

c) Quanto mede cada um dos ângulos internos do paralelogramo que você identificou?

d) Qual o perímetro do hexágono que você identificou? esse hexágono é regular?

e) Qual a área do losango que você identificou?

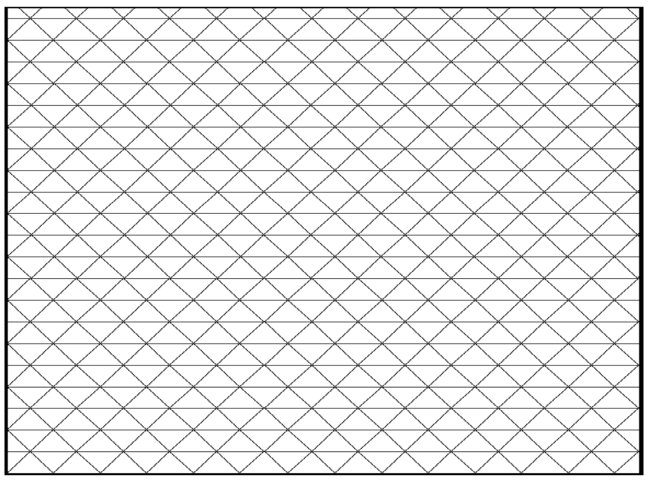
Arte e matemática de mãos dada

No APEKF há alguns exemplos de trabalhos construídos por alunos a partir de malhas. Prazer em criar, conceitos geométricos, proporcionalidade, construção coletiva, educação do olhar... Enfim, há também Geometria para além das "fórmulas" e dos "cálculos".

Figura 15. Arquivo pessoal da Profa. Dra. Estela Kaufman Fainguelernt

Malha Triangular

observe a folha com malha triangular.



a) Qual a natureza dos triângulos desta malha?

b) Ao utilizar apenas as linhas da malha, é possível construir um:

. retângulo?

. Quadrado?

. Paralelogramo?

. Trapézio?

. Losango?

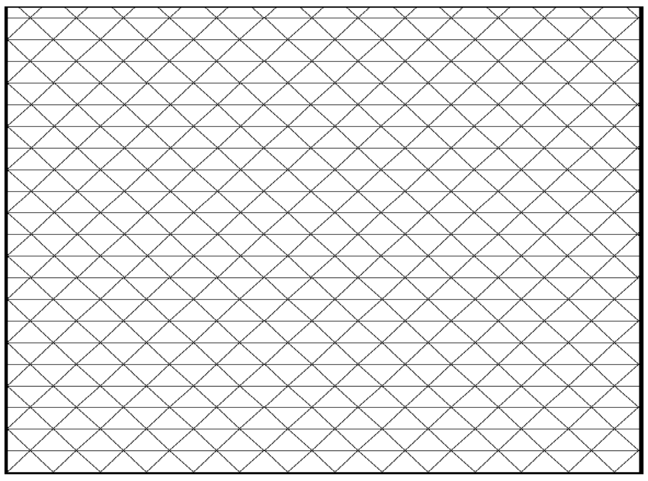
. Hexágono?

. círculo?

c) Qual o polígono regular, com maior número de lados, podemos construir?

d) como no painel encontrado no acervo, crie uma figura qualquer a partir desta malha.

e) observe as figuras abaixo, construídas na malha, e diferencie os polígonos não convexos dos convexos.



f) crie um hexágono convexo e um outro não convexo que tenham a mesma área.

Novamente, nesta unidade, volta-se a sugerir o debate em torno de ideias como o que é forma? O que é superfície? E área?

Além disso, o centro da proposta está em se debater a classificação dos polígonos em geral e, em particular, dos tipos de quadriláteros. Outro ponto que normalmente gera polêmica na sala de aula é o porquê de o círculo não ser um polígono. Isto força o grupo a ter clareza nas definições que surgem ao longo do debate.

Aliás, por conta desta precisão de linguagem é oportuno lembrar aos colegas que, no tocante à classificação dos quadriláteros há duas correntes. Uma, usada em livros publicados, por exemplo, no Canadá, e que define como paralelogramos os quadriláteros que têm pelo menos um par de lados paralelos, e neste caso, os trapézios seriam enquadrados nessa natureza.

A outra, e a mais utilizada, inclusive no Brasil, e que a professora Estela segue em suas publicações, de que paralelogramos são quadriláteros que têm dois pares de lados paralelos (ver anotações na atividade Trioto). Cito esta divergência com relação à classificação dos quadriláteros, apenas como um alerta, embora o professor deva optar por aquela a que está habituado, mesmo que possa citá-la em determinados níveis de ensino.

Arte e Geometria de Lygia Clark

Notar a obra da artista Lygia clark:

Figura 14. obra "Plano em superfícies moduladas nº 2".

Fonte: FAINGUELERNT e NUNES, 2009, p.41

a) A obra é formada somente por quadriláteros. Que quadriláteros você identifica?

b) Determine a medida dos ângulos de cada uma das figuras que aparecem nesse quadro.

c) Utilize recortes, e demonstre que a área ocupada por dois retângulos que aparecem nesse quadro é igual a área de qualquer paralelogramo do quadro.

d) reproduza quatro vezes um dos retângulos que consta do quadro. No primeiro, trace segmentos, de modo a dividi-lo em três triângulos. No segundo, divida-o em dois trapézios, no terceiro em um trapézio e um triângulo e no quarto, em um triângulo e um pentágono.

e) crie uma obra que utilize somente os quadriláteros que figuram nesse quadro.

Retome a conversa sobre a classificação de quadriláteros. Insista nas ideias de inclusão, como "todo quadrado também é um retângulo", mas "nem todo retângulo é um quadrado", etc.

Em termo de cultura geral há uma boa chance de buscar informações sobre os movimentos das Artes Plásticas, Lygia Clark (1920-1988) e qual foi a sua proposta de trabalho.

Os Retângulos de Piet Mondrian

o artista Mondrian aprimorou o seu estilo em linhas e retângulos. Vejamos algumas de suas obras:

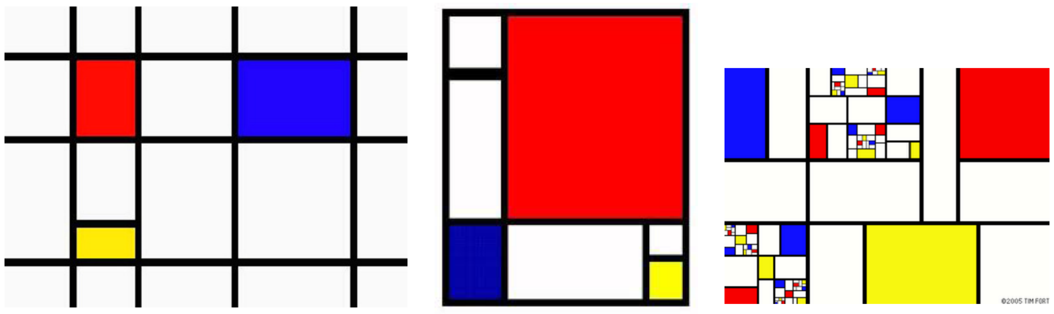


Figura 15. Obras de Piet Mondrian – retiradas do Google

estes seus trabalhos influenciaram alguns artistas plásticos, publicitários, arquitetos e até estilista. Yves Saint-Laurent, reconhecido estilista, inventou um vestido nas cores primárias para homenagear o artista.

a) Quais polígonos o artista utilizou?

b) Aproveitando sua criatividade e baseado nas obras de Montrian, construa um desenho usando retas paralelas e perpendiculares.

Estimule seus alunos a trazerem curiosidades sobre a vida e ação de Piet Mondrian (1872-1944).

Usando Espelho

observem a figura abaixo:

P1 P2

R

Figura 16. Adaptado da SEC-RJ 1982 - Acervo APEKF 1460 cx. 31

coloque um espelho na reta que divide os semiplanos P1 e P2, tente completar a figura do desenho.

Cabe diferenciar a simetria axial e a central. A axial ocorre quando objetos (ou parte deles) e sua imagem aparecem espelhados um em relação ao outro no que concerne a uma reta dada, a qual se denomina eixo de simetria.

Simetria central é aquela em que um objeto, ou parte dele, pode ser girado em relação a um ponto fixo, denominado de centro de simetria, de modo que esse objeto, ou parte dele, coincidam com o outro em um determinado número de vezes.

É importante instigar o aluno quanto à simetria de seu rosto: será que existe efetivamente?

com o quadrado recebido em papel, dobre sobre uma de suas diagonais três vezes seguidas.

B C B C

A D A D

B B

A D A D

A D

Ao abrir o papel todo é possível observar os eixos de simetria. Vejamos:

B C

A D

observados os eixos de simetria, vamos dobrar novamente, conforme as instruções iniciais.

com uma pequena tesoura cortaremos em uma das faces triangulares um desenho qualquer. como exemplo, cortaremos um “z”.

Abrindo, teremos:

Nesta atividade poderemos, além de explorar os eixos de simetria, também perceber as reflexões.

Identificar uma Simetria Central

observem o número à esquerda do ponto c e o número à direita do ponto c. os desenhos foram Adaptado da Sec-rJ 1982 - Acervo APeKf 1460 cx. 31.

6 c

a) observem a letra à esquerda de c e à direita de c.

P

c

b. Segundo a mesma regra observada em a e b tracem a correspondente à letra P.

P c

Os alunos deverão perceber que, para encontrar o correspondente a P, deverão traçar retas que partam de pontos desta figura e que passem por c: os pontos correspondentes estarão equidistantes de c, à direita de c.

Transformando o Triângulo

Num papel quadriculado desenhe um polígono qualquer.

C

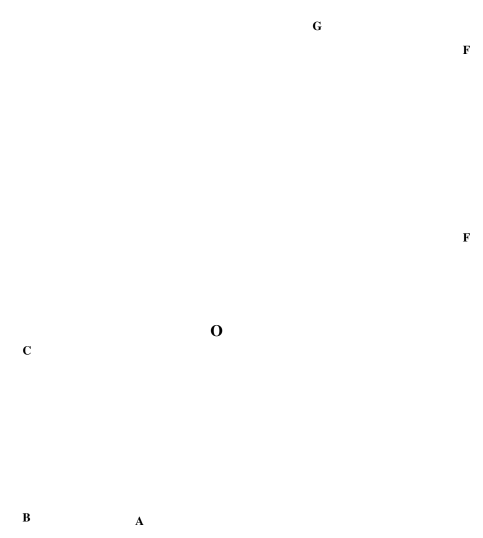
B A

Toma-se um ponto O fora do polígono. Traçam-se semirretas que partam de cada vértice e passem pelo ponto O.

O
C

B A

em cada semirreta marque outro ponto cuja distância até o ponto o seja o dobro da distância do vértice até o ponto o. Depois de achar todos os pontos novos, obteremos um novo polígono.



comparando os polígonos:

a) Quais as relações entre os lados do obtido e do original?

b) Podemos garantir que o polígono obtido é uma ampliação do original? Por quê?

Que tipo de transformação foi utilizada nesta construção? Manteve-se a forma? E a área? Alguém lembra de alguma logomarca que utiliza esses recursos em sua elaboração?

o quadrado pequeno tem 1m de lado e o grande, 1,5m. este tem um dos vértices no centro do quadrado pequeno. o lado do quadrado grande corta o lado do pequeno ao terço do seu comprimento.

B C
I
G
E
A D F
J
H

Figura 17. Adaptado do Acervo APEKF, doc, 21012.2, s/data

Qual é a medida da superfície da parte comum aos dois quadrados?

Explore com seus alunos, por exemplo, a conservação de área que ocorre ao se fazer a rotação a partir do ponto E, centro do quadrado ABCD.

Trabalhando com Volumes

Apresentar dois recipientes transparentes de mesma forma e tamanho, que contenham igual quantidade de água, e pedir que se constate a igualdade entre seus níveis de água. Separar dois copos de requeijão com tampa: um totalmente cheio de água, outro com água até a metade.

colocar o copo que está pelo meio no recipiente transparente, pressionando-o (por exemplo, com o dedo), de modo que permaneça totalmente imerso. Marque o nível atingido pela água.

Antes de continuarmos a experiência, responda:

a) Ao repetirmos o experimento com a imersão do copo de requeijão cheio, qual será o nível de água a ser alcançado? ficará igual, mais alto ou mais baixo em relação ao nível de água do outro recipiente?

realizemos esta segunda etapa e vamos ver o que acontecerá.

b) o que você pode concluir com esta atividade?

Como recipientes transparentes de mesma forma e tamanho use, por exemplo, duas garrafas pet cortadas, embora o ideal seja utilizar algo como duas provetas, pois apresentam marcações milimétricas.

No exemplo abaixo, usamos apenas uma jarra transparente, e realizamos o experimento em duas etapas, fazendo marcação do nível atingido pela água ao final da primeira etapa.

Usamos os copos de requeijão, não com água, mas com o próprio requeijão. (todas as fotos são do acervo do autor)

Cabe ressaltar que estes copos têm o mesmo volume, porém com massas distintas.

Lembremo-nos de que a causa do aumento do nível da água foi ocasionado pelo mergulho de um mesmo sólido, independentemente da sua massa.

Aqui é pertinente que o professor levante o debate em torno de conceitos tais como:

. massa;

. volume;

. capacidade.

Se necessário, solicite a parceria de algum colega da área de física.

Um Comentário Final

Ao pesquisar o material da professora estela encontrei uma grande quantidade de materiais relacionados aos conteúdos de Geometria(s). o que apresentei como sugestões de atividades, apenas é um estímulo a você, colega, a produzir outras tão instigantes quanto as que aqui estão.

Na maioria, as atividades apresentadas nos remetem a conceitos básicos das Geometrias euclidianas (plana e espacial) e, principalmente, à exploração da visualização, mas há outras que conduzem-nos à Geometria das Transformações. em nenhuma delas foi necessário o uso de fórmulas, pois tudo centrou-se na necessidade de se dominar conceitos geométricos básicos. isto me fez lembrar uma tirinha de jornal, sem data, que encontrei no APeKf, e se a professora estela a guardou durante tanto tempo (e o amarelado do papel o garante), é porque reflete sua maneira de pensar.

Pude perceber que apesar de algumas atividades terem sido construídas e utilizadas em épocas passadas, ainda hoje, mesmo aplicando-as a colegas, em encontros de formação continuada, possibilitaram esclarecer muitas dúvidas que trazemos de nossa prática docente.

Que este material abra outras possibilidades de troca e nos estimule a trazer, de forma prazerosa, a(s) Geometria(s) de volta às aulas em todas as séries.

Referências

APeKf - arquivo Pessoal estela Kaufman fainguelernt. Deposito

fAiNGUeLerNT, estela Kaufman et al. *Trabalhando com Geometria*, vol. 4. São Paulo: editora ática, 1989.

_______________. o ensino de Geometria no 1.º e 2.º graus. in *A Educação Matemática em Revista*. São Paulo, 1995.

_______________, NUNeS, Katia regina Ashton A. *Fazendo arte com a matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2006.

________________. *Descobrindo matemática na arte: atividades para o ensino fundamental*. Porto Alegre: Artmed, 2011.

SeecrJ Secretaria de estado de educação e cultura do rio de Janeiro. Projeto de reformulação de currículos – Suplência: da quinta à oitava séries do 1.° grau. s/data. Governo de floriano de faria.

SeecrJ Secretaria estadual de educação e cultura do estado do rio de Janeiro. reformulação de currículos; subsídios teóricos e sugestões de atividades. 1982. APeKf doc. 1460 caixa 31.