Dividindo histórias e opiniões

Compartilhando e polemizando a operação de divisão

Heloisa Hernandez de Fontes Salvador

Dividindo histórias e opiniões

compartilhando e polemizando a operação de divisão

Heloisa Hernandez de Fontes Salvador

2012

Sumário

Prefácio

Ao surgir a necessidade de se elaborar um produto a ser apensado a uma pesquisa de mestrado profissional, enquanto pesquisadores que centramos nossas produções em História da Educação Matemática, sentimo-nos inseguros, diante do novo. É que, tradicionalmente, esta linha de pesquisa vincula-se aos mestrados acadêmicos. Mas o novo nos faz ousar e Heloisa o fez com a propriedade dos que não temem desafios.

A autora soube conciliar a aventura de uma primeira pesquisa historiográfica com o capital cultural e as dúvidas acumuladas sobre a operação divisão ao longo de sua prática docente e a de colegas, mapeadas nas inúmeras oportunidades que viveu junto à formação inicial e continuada de professores. Seu trabalho, à luz de achados históricos, responde questões sobre tal operação e, de forma instigante, incita o leitor a trilhar novos velhos caminhos. Deliciem-se com "**Dividindo histórias e opiniões:** compartilhando e polemizando a operação de divisão".

Que esta e as outras produções do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática (LaPHEM), da Universidade Severino Sombra, venham a fortalecer e divulgar a área de pesquisa que estamos abraçando.

Lucia Mª Aversa Villela

Fevereiro de 2012

Conversa com o leitor

Este paradidático é parte integrante da dissertação de mestrado "Uma história do ensino primário em tempos de modernização da matemática escolar, Vassouras 1950-1969", sob orientação da professora doutora Lucia Maria Aversa Villela, defendido em março de 2012, junto ao programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Severino Sombra (Vassouras, Rio de Janeiro).

O objetivo principal do livro é partilhar "histórias" encontradas em livros, alguns de *Arithmetica* do século XIX e outros de Matemática dos anos de 50 e 60 do século XX sobre a operação de divisão. Estes achados são utilizados para se levantar reflexões e discussões sobre o como este conteúdo foi e é desenvolvido nas escolas. O resultado esperado depois da leitura é que cada professor(a) possa construir sua opinião a respeito da forma de abordar a divisão em sala de aula.

Esperamos que a visão histórica e as discussões fomentadas ao longo desta obra ofereçam ao professor de matemática uma oportunidade de conhecer mais sobre seu ofício e ampliem o debate sobre a condução da educação matemática hoje.

No primeiro capítulo apresentamos algumas reflexões sobre o algoritmo da divisão, a linguagem utilizada pelos professores, o conceito e o registro do quociente, a verificação da operação e suas ideias. Atividades englobando situações-problemas e suas respostas, algoritmos, calculadora e cálculo mental, foram selecionadas no segundo capítulo para aprofundar o que foi discutido no capítulo anterior. Para concluir, alguns questionamentos para que os professores prossigam com suas reflexões.

A Autora

Dividindo histórias e opiniões

Dividir histórias e opiniões sobre a operação de divisão significa compartilhar práticas de apropriação acerca deste saber, em diferentes contextos do passado. Por ser de natureza histórica, representa um modo privilegiado de ampliar o debate sobre a condução da educação matemática em tempo presente.

Ao manter uma relação com as práticas profissionais realizadas no passado, o professor de matemática possivelmente será capaz de desenvolver suas atividades didático-pedagógicas de melhor qualidade.

Segundo Valente (2007, p.28), a pesquisa em história da educação matemática representa um "alargamento da compreensão do processo de escolarização" do saber matemático. Logo, este paradidático tem como objetivo possibilitar ao professor de matemática reflexões sobre sua prática, sobre a matemática como disciplina escolar, permitindo-o ampliar a compreensão de seu ofício, fortalecendo suas opiniões acerca do ensino da divisão.

Os itens escolhidos para trazer a debate surgiram dos seguintes questionamentos: O que é relevante no estudo da operação de divisão? Sobre quais aspectos da abordagem deste conteúdo, nós professores, devemos refletir? Como nos desvencilhar de "receitas" e pensar sobre os porquês dos procedimentos? Como tornar o ensino da divisão significativo para o aluno?

1.1 O algoritmo

Um algoritmo pode ser considerado como um procedimento ou sequência de procedimentos, com um número finito de passos, destinado a executar uma tarefa que se deseja realizar. (USISKINJ, 1998, p. 7). Exemplos de algoritmos podem ser encontrados através da história, desde os tempos mais remotos dos antigos babilônicos. Considera-se que a palavra **algoritmo** deriva do nome do matemático árabe do primeiro século **al-Khowarizmi**.

> Uma aproximação informal da definição de algoritmo é a noção de "receita". Historicamente os algoritmos surgiram quando foi necessária a realização de cálculos sem o auxílio de ábacos, dedos e outros recursos materiais. De certo ponto de vista os algoritmos são "receitas" para se fazer cálculos. (LOPES, 2009, p.67)

Segundo Boyer (1974), a operação de divisão no Egito era efetuada por sucessivas "duplações", com base no fato de que todo número pode ser representado por uma soma de potências de

2. O divisor é dobrado sucessivamente assim como mostra o exemplo abaixo:

> Quero dividir 1311 por 69. Dobrando o divisor sucessivamente, primeiro obtemos 138 (69 x 2), depois 276 (138 x 2), a seguir 552 (276 x 2) e, finalmente, 1104 (552 x 2). Sabemos que o dobro de 1104 ultrapassa 1311.
>
> Temos 1104 + 138 + 69 = 1311. Então, como 1104 é 16 vezes o 69 e 138 é duas vezes, o quociente será 16 + 2 + 1 = 19.

O ganho deste processo está explicitado em Eves (1995):

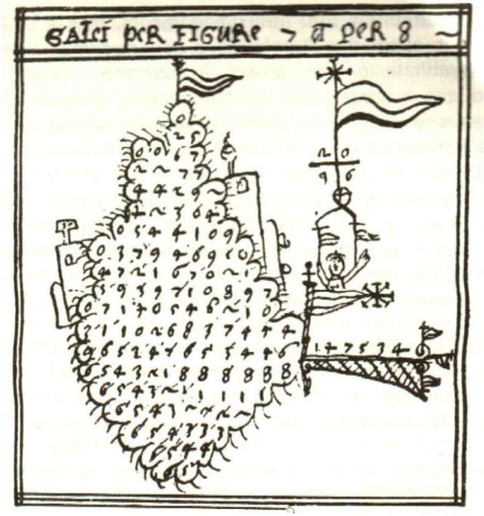
> O processo egípcio de [multiplicação e] divisão não só elimina a necessidade de aprender uma tábua de multiplicação, como também se amolda tanto ao ábaco[1] que perdurou enquanto esse instrumento esteve em uso e mesmo depois. (EVES, 1995, p.73)

Ainda sobre métodos de divisão, Boyer (1974) afirma que:

> [...] os árabes (e através deles os europeus mais tarde) parecem ter adotado a maior parte de seus métodos aritméticos da Índia, e por isso é provável que o esquema de divisão conhecido como o "método de riscar" ou "método do galeão" (por sua semelhança com um navio) também venha da Índia. (Boyer, 1974, p. 158)

[1] Do grego *abax*, "tabuleiro de areia", pode ser considerado o mais antigo instrumento de calcular usado pelo homem.

Figura 1: Divisão em galeão, século XVI



(BOYER, 1974, p.159)

Para esclarecer o método galeão, considere os seguintes passos da divisão de 44977 por 382:

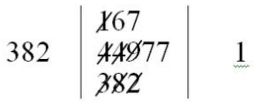
1. Escreva o divisor à esquerda do dividendo, como se mostra abaixo. Obtenha, da maneira habitual, o primeiro algarismo do quociente (449 : 382), que é 1, e escreva-o à direita do dividendo.

382 | 44977 | 1

2. Escreva o produto de 1 x 382, que é 382, abaixo de 449.
   - Faça mentalmente 4 – 3 = 1. Risque o 4 e o 3 e escreva 1 acima do primeiro 4.
   - Como não podemos subtrair 8 de 4, agrupe o 1, que escreveu acima, com o 4 e faça mentalmente 14 – 8 = 6. Risque o 1, o 4 e o 8 e escreva 6 acima do segundo 4.

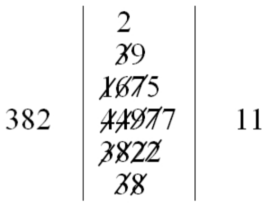
- Faça mentalmente 9 – 2 = 7. Risque o 9 e o 2 e escreva 7 acima do 9.

Veja como fica:



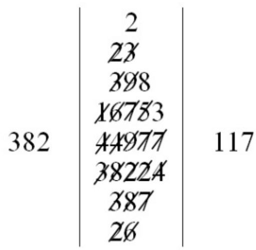
3. O dividendo resultante do passo 2 é 6777, que são os algarismos não riscados, lidos de cima para baixo, na coluna do meio. Obtenha o próximo algarismo do quociente (677: 382), que resulta em 1.

- Escreva o produto de 1 x 382, que é 382, colocando o 3 abaixo do 8, o 8 abaixo do 2 e o 2 abaixo do 7.
- Faça mentalmente 6 - 3 = 3. Risque o 6, o 3 e escreva 3 acima do 6.
- Como não podemos subtrair 8 de 7, risque o 3 e escreva 2 acima do 3 e faça mentalmente 17 – 8 = 9. Risque o 7 e o 8 e escreva 9 acima do 7.
- Faça mentalmente 7 – 2 = 5. Risque o 7 e o 2 e escreva 5 acima do 7.



4. O dividendo resultante do passo 3 é 2957, que são os algarismos não riscados, lidos de cima para baixo, na coluna do meio. Obtenha o próximo algarismo do quociente (2957 : 382), que é 7.

- Escreva o produto de 7 x 382, que é 2674, colocando o 2 abaixo do 3, o 6 abaixo do 8, o 7 abaixo do 2 e o 4 abaixo do 7.
- Faça mentalmente 2 – 2 = 0. Risque os dois algarismos 2.
- Faça mentalmente 9 – 6 = 3. Risque o 9 e o 6 e escreva o 3 acima do 9.
- Como não podemos subtrair 7 de 5, risque o 3 e escreva 2 acima do 3 e faça mentalmente 15 – 7 = 8. Risque o 5 e o 7 e escreva 8 acima do 5.
- Faça mentalmente 7 – 4 = 3. Risque o 7 e o 4 e escreva 3 acima do 7.



5. O quociente é 117 e o resto é 283.

No primeiro segmento do ensino fundamental, um grande tempo é dedicado ao estudo do algoritmo da divisão. Há muitos anos a discussão estava entre usar o método curto ou o método longo. De uns anos para cá vem ganhando força o método das subtrações sucessivas. Engana-se aquele que pensa que esta contenda pertence aos nossos tempos.

Vamos resgatar esta discussão através da análise de livros de *Arithmetica* do século XIX e alguns dos anos de 50 e 60 do século XX, dos documentos encontrados no Arquivo da Secretaria de Educação do Município de Vassouras relativos ao período de 1950 a 1969 e materiais didáticos utilizados hoje no Brasil.

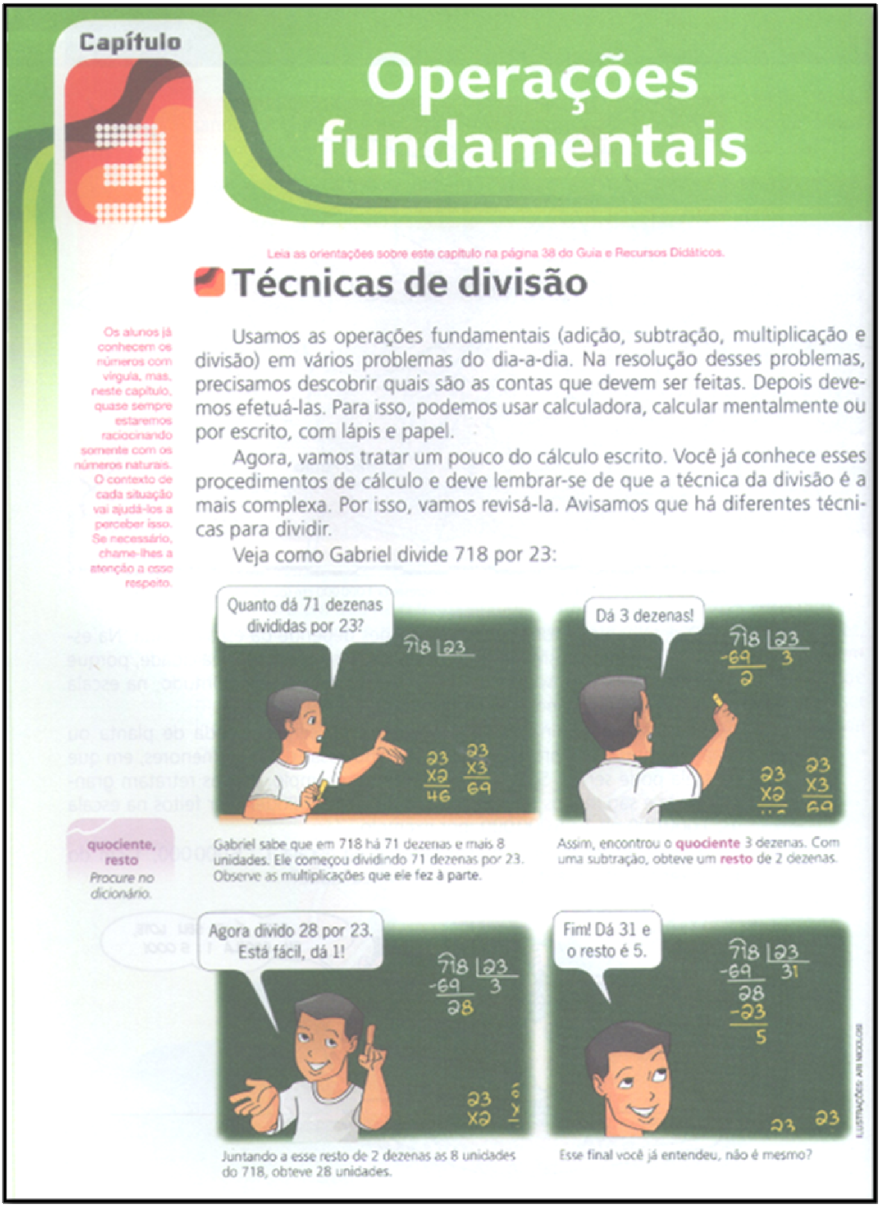
Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis (IMENES, 2009), em seu livro Matemática, 6º ano, iniciam o capítulo de Operações Fundamentais apresentando três diferentes procedimentos para dividir porque, segundo eles, a técnica da divisão é a mais complexa. Mandarino (2005), tal como estes autores, nos afirma:

> O algoritmo da divisão é, sem dúvida, o mais difícil e o mais complexo dentre os algoritmos das quatro operações, pois envolve, além do sistema de numeração, dos fatos básicos e do conceito de operação, a utilização das outras operações (adição, subtração e multiplicação) e a propriedade distributiva da divisão em relação à adição. (MANDARINO, 2005, p. 157)

A figura 2 mostra Gabriel efetua 718 dividido por 23 pelo método longo.

Na figura 3 vê-se Valessa efetuando a divisão de 8156 por 16 pelo método curto e Deise, 1755 ÷ 17 pelo método das subtrações sucessivas.

Figura 2: Técnicas para dividir



Capítulo 3

Operações fundamentais

Leia as orientações sobre este capítulo na página 38 do Guia e Recursos Didáticos.

Técnicas de divisão

Os alunos já conhecem os números com vírgula, mas, neste capítulo, quase sempre estaremos raciocinando somente com os números naturais. O contexto de cada situação vai ajudá-los a perceber isso. Se necessário, chame-lhes a atenção a esse respeito.

Usamos as operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) em vários problemas do dia-a-dia. Na resolução desses problemas, precisamos descobrir quais são as contas que devem ser feitas. Depois devemos efetuá-las. Para isso, podemos usar calculadora, calcular mentalmente ou por escrito, com lápis e papel.

Agora, vamos tratar um pouco do cálculo escrito. Você já conhece esses procedimentos de cálculo e deve lembrar-se de que a técnica da divisão é a mais complexa. Por isso, vamos revisá-la. Avisamos que há diferentes técnicas para dividir.

Veja como Gabriel divide 718 por 23:

Gabriel sabe que em 718 há 71 dezenas e mais 8 unidades. Ele começou dividindo 71 dezenas por 23. Observe as multiplicações que ele fez à parte.

Assim, encontrou o **quociente** 3 dezenas. Com uma subtração, obteve um **resto** de 2 dezenas.

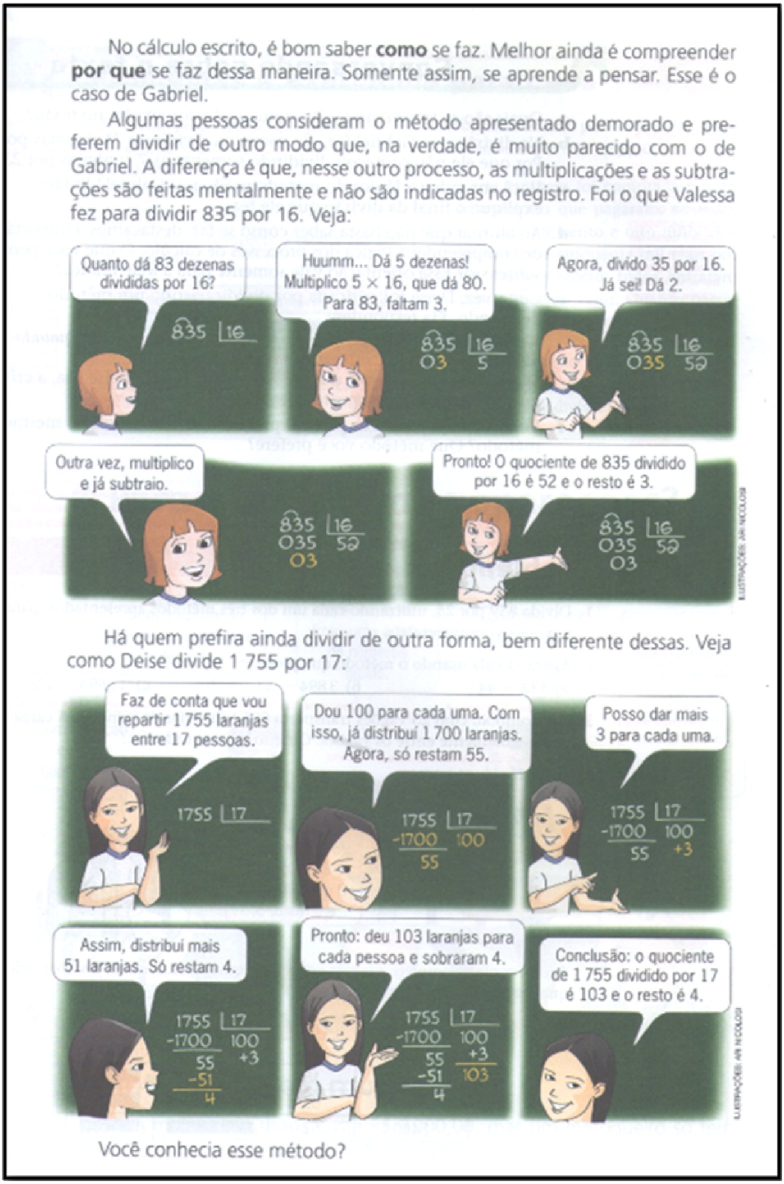
quociente, resto
Procure no dicionário.

Juntando a esse resto de 2 dezenas as 8 unidades do 718, obteve 28 unidades.

Esse final você já entendeu, não é mesmo?

(IMENES, 2009, p.52)

Figura 3: Técnicas para dividir



No cálculo escrito, é bom saber **como** se faz. Melhor ainda é compreender **por que** se faz dessa maneira. Somente assim, se aprende a pensar. Esse é o caso de Gabriel.

Algumas pessoas consideram o método apresentado demorado e preferem dividir de outro modo que, na verdade, é muito parecido com o de Gabriel. A diferença é que, nesse outro processo, as multiplicações e as subtrações são feitas mentalmente e não são indicadas no registro. Foi o que Valessa fez para dividir 835 por 16. Veja:

Há quem prefira ainda dividir de outra forma, bem diferente dessas. Veja como Deise divide 1 755 por 17:

Você conhecia esse método?

(IMENES, 2009, p.53)

As três técnicas apresentadas pelos autores brasileiros já constavam do livro de Thomas H. Palmer "*Arithmetic, oral and written, practilly applied by means of suggestive questions*", de 1854, com o mesmo encaminhamento dado (figuras 4, 5 e 6).

Figura 4: Métodos para dividir parte 1

a. The Long Method.

Dividend,	64235	(24	Divisor.
1st partial product,	48000	2000	
		600	Partial Quotients.
1st remainder,	16235	70	
2d partial product,	14400	6	
2d remainder,	1835	$2676\frac{11}{24}$	Total Quotient.
3d partial product,	1680	24	Divisor.
3d remainder,	155	64235	Proof 1, viz. divisor × quot.
4th partial product,	144		[+remainder.
Undivided rem'r,	11		
Proof 2,	64235	Sum of products and last remainder.	

(PALMER, 1854, p.169)

Thomas solicita que o professor coloque os três cálculos apresentados no quadro:

Figura 5: Métodos para dividir parte 2

b. Contracted Method, by omitting unnecessary ciphers.

Dividend,	64235(	24 Divisor.
1st partial product,	48	$2676\frac{11}{24}$ Quotient.
1st remainder,	162	64235 Proof 1, viz., divisor × quo-[tient + remainder.
2d partial product,	144	
2d remainder,	183	
3d partial product,	168	
3d remainder,	155	
4th partial product,	144	
Undivided remainder,	11	
Proof 2,	64235	Sum of products and last remainder.

(PALMER, 1854, p.169)

Figura 2: Métodos para dividir parte 3

c. Abridged Method, by performing the Subtraction mentally.

Dividend,	64235(	24 Divisor.
Partial dividends formed of remainders and one figure from general dividend,	162	$2676\frac{11}{24}$ Quotient.
	183	
	155	64235 Proof.
	11 undivided remainder.	

(PALMER, 1854, p.169)

Palmer chama de "Long Method" ao das subtrações sucessivas, de "Contracted Method" ao longo e "Abridged Method" ao curto. Acrescenta que iniciantes devem fazer uma tabela de produtos do divisor para ajudá-los no processo da divisão (figura 7). Veja:

Figura 7: Tabela de produtos do divisor

```
                         Dividend.
235 • 2=  470            59469805(235 Divisor factor.
    • 3=  705            470        253063 Quotient factor.
    • 4=  940            ---        ---------
    • 5=1175             1246       59469805 Proof.
    • 6=1410             1175
    • 7=1645             ----
    • 8=1880              719
    • 9=2115              705
                          ---
                           1480
                           1410
                           ----
                             705
                             705
                             ---
```

(PALMER, 1854, p. 172)

Tudo indica que o autor deixa o aluno livre para escolher o método que deseja utilizar para realizar as divisões.

Imenes e Lellis fazem da mesma forma. Logo após a apresentação das técnicas de cálculo interrogam o aluno: “Você acha que todas as pessoas precisam dividir usando o mesmo método? Que método você prefere?” (IMENES, 2009, p.54)

Na maioria dos livros de aritmética analisados o método curto (“*Abridged Method*” para Palmer) é desenvolvido antes do método longo (“*Contracted Method*” para Palmer), o que em minha prática docente tenho verificado não ser o melhor caminho, visto que o método curto é uma “abreviação” do longo. Logo, o aluno precisa compreender as etapas envolvidas no processo longo para depois ter condições de “abreviá-lo”.

Assim como a ideia da multiplicação está associada à da adição de parcelas iguais, a de divisão está relacionada à de subtração. Logo, antes dos dois métodos citados acima, trabalhar com o método das subtrações sucessivas possibilita ao aluno compreender a própria operação, assim como as etapas do algoritmo, além de desenvolver a capacidade de estimar.

Outras questões interessantes são observadas ao analisarmos livros de *Arithmetica* do século XIX. No livro "*Introduction to the National Arithmetic*", de1842, Benjamin Greenleaf define divisão como sendo um caminho curto de subtrações e não apresenta o algoritmo das subtrações sucessivas.

Em 1841 Charles Davies, em seu livro "*Arithmetic*" apresenta ainda um processo para quando o divisor é um número composto:

Figura 8: Processo quando o divisor é um número composto

2. Divide 4967 by 32.

$$4\times 8 = 32 \left\{ \begin{array}{l} 4)\underline{4967} \\ 8)\underline{1241} \;\ldots\ldots\; 3, \text{ 1st remainder} \\ \quad 155 \;\ldots\ldots\; 1\times 4 + 3 = 7 \text{ the true remainder.} \end{array} \right.$$

(DAVIES, 1841, p.64)

Como 32 é um número composto, existe uma multiplicação de dois fatores, diferente de 1, que dá 32. O produto escolhido foi 4 x 8. Logo, fez 4 967 dividido por 4, encontrou como quociente 1 241 e resto 3. Em seguida efetuou 1 241 dividido por 8 e encontrou 155 e resto 1. Para encontrar o quociente e o resto do cálculo inicial podemos observar o desenvolvimento a seguir:

$$4967 \div 32 = \frac{4967}{32} = \frac{4967}{4\times 8} = \frac{4967}{4}\times\frac{1}{8} = \left(1241\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{8} =$$

$$= \left(1241 + \frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{8} = \frac{1241}{8} + \frac{3}{32} = 155\frac{1}{8} + \frac{3}{32} = 155 + \frac{1\times 4+3}{32} =$$

$$= 155\frac{7}{32}$$

Ou ainda,

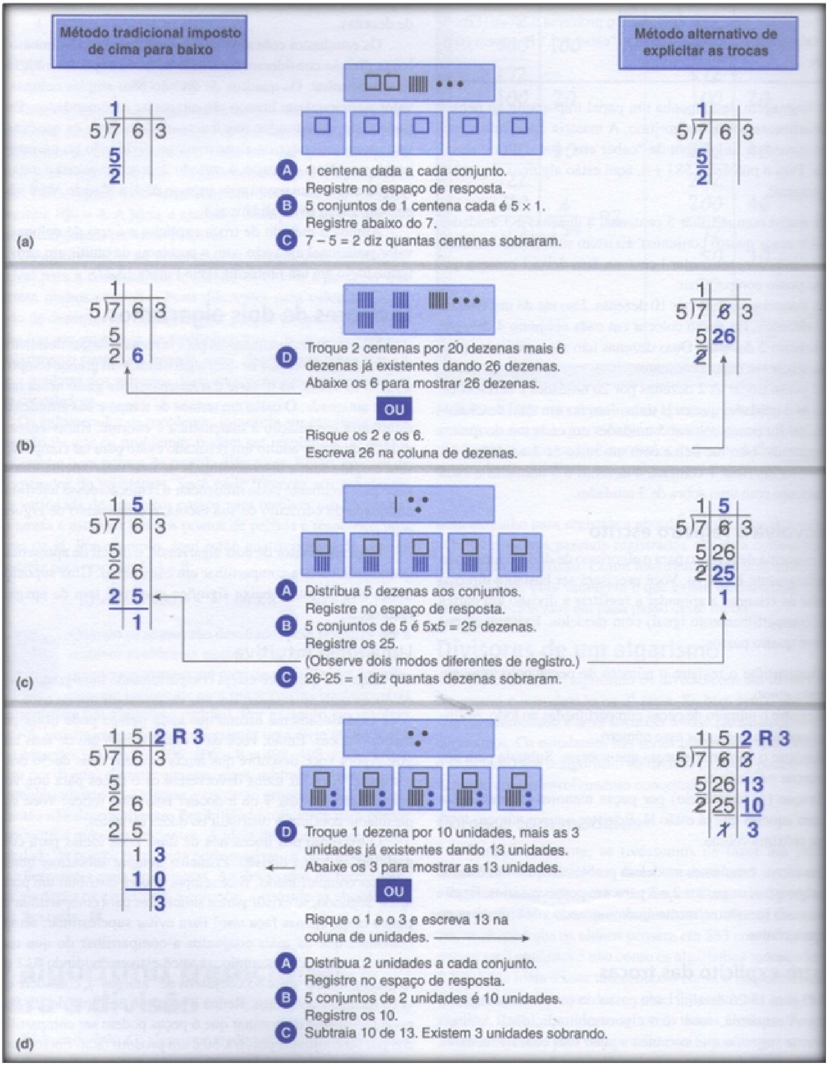
$$
\begin{array}{r|l}
4967 & 4 \\ \hline
3 & 1241
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1241 & 8 \\ \hline
1 & 155
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{r|l}
4967 & 4 \\ \hline
 & 155 \times 8 + 1
\end{array}
$$

$$(155 \times 8 + 1) \times 4 + 3 = 155 \times 8 \times 4 + 1 \times 4 + 3 =$$
$$= 155 \times 32 + 7$$

Dando um salto no tempo, Van de Walle (2009) apresenta uma forma de registro diferente do algoritmo do método longo. Além de usar colunas do valor posicional, vai registrando explicitamente todas as trocas realizadas. A figura 9 mostra do lado esquerdo o método longo com as colunas de valor posicional e do lado direito, o método que o autor chama de método de troca explícita.

Ainda, segundo o autor, usar linhas para marcar as colunas de valor posicional pode ajudar a evitar esquecer o registro dos zeros, como o que existe no cálculo 642÷6=1**0**7.

Figura 9: Método longo e de troca explícita



(VAN DE WALLE, 2009, p.268)

1.2 A linguagem

Trajano (1947), em seu livro "Aritmética Primária", na "5ª Lição de dividir", explica como dividir 2436 por 6:

> Como não podemos dividir 2 por 6, tomaremos também a ordem seguinte e teremos 24. No princípio da operação não é necessário escrever a cifra[2] no quociente. Então, 24 dividido por 6 dá 4, e não fica resto. Temos agora de dividir a ordem seguinte que é 3; ora, como não podemos dividir 3 por 6, tomaremos também a ordem seguinte, que é 6, e teremos 36. Escreveremos uma cifra no quociente e depois dividiremos 36 por 6, que dará 6. O quociente da divisão é 406. (TRAJANO, 1947, p.31)

É assim que hoje em dia a maioria dos professores explica o processo de dividir, mas algumas questões devem ser observadas. Primeiro, "como não podemos dividir 2 por 6"? Aqui há uma imprecisão de linguagem, visto que ao usarmos este tipo de fala, estamos reforçando a concepção errônea de que só é possível um número caber uma quantidade inteira de vezes em outro e, além disso, este 2 representa 2000. Para completar, parece bastante misterioso ignorar os "36" sem qualquer problema.

O que se quer é que o aluno pense em 2436 como 2 unidades de milhar, 4 centenas, 3 dezenas e 6 unidades e não com os algarismos independentes 2, 4, 3 e 6. Uma ideia é usar um contexto como o empacotamento de doces em pacotes com 10, com 10 pacotes em cada caixa de papelão e com 10 caixas de

[2] Ao analisarmos o livro, de Roswell C.Smith "*Practical and Mental Arithmetic on a New Plan*", de 1827 já encontramos essa associação da palavra cifra ao algarismo zero - 5 is Five, but put a cipher, at the right, thus; 50, and it becomes 10 times 5- (p. 21).

papelão em cada caixote[3]. Dessa forma, se tem 2 caixotes, 4 caixas, 3 pacotes e 6 doces para dividir por 6 pessoas. Nesse contexto, é razoável compartilhar primeiro os caixotes até não mais poderem ser compartilhados. Aqueles restantes são “desempacotados” e as caixas compartilhadas e assim por diante.

Van de Walle (2009, p.267) afirma que “a linguagem desempenha um papel importante ao pensar conceitualmente sobre o algoritmo. A maioria dos adultos está tão acostumada à linguagem de “caber em” que é difícil abandoná-la”.

Voltando ao exemplo dado, pode-se pensar em outra forma de expressão:

Eu quero compartilhar 2 unidades de milhar, 4 centenas, 3 dezenas e 6 unidades entre esses 6 grupos de mesma quantidade. Não existem suficientes unidades de milhar para cada um dos 6 grupamentos ter uma quantidade inteira de unidades de milhar. Logo, passo a ver as 2 unidades de milhar como 20 centenas. Isso me dá um total de 24 centenas e, portanto, posso colocar em cada um dos 6 grupamentos 4 centenas. Da mesma forma, não existem suficientes dezenas para cada um dos 6 grupamentos ter uma quantidade inteira de dezenas. Logo, troco 3 dezenas por 30 unidades. Isso me dá um total de 36 unidades. Posso colocar 6 unidades em cada um dos seis conjuntos. Ao todo distribui 4 centenas e 6 unidades a cada uma das partes, ou seja 406 unidades.

[3] Ou qualquer outro material estruturado, como o material dourado.

1.3 Quociente: conceito e registros

Observando ainda o livro de Palmer, nota-se que este registra o quociente do cálculo 64 235 dividido por 24 como 676 $\frac{11}{24}$. Para entender o porquê de sua notação, observe:

Chamemos de:

D → dividendo,

d →divisor,

q →quociente

r →resto.

Temos que

$$D = d \cdot q + r$$

Como d ≠0,

$$\frac{D}{d} = \frac{d \cdot q}{d} + \frac{r}{d}$$

$$\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$$

o que equivale a escrever

$$\frac{D}{d} = q\frac{r}{d}$$

Sabemos que, quando a criança se depara com a técnica de divisão pela primeira vez, não domina e nem está familiarizada com o conceito de fração. Mas, é importante, em algum momento da formação desse aluno, que se retome a questão de que o quociente pode ser escrito na forma de um número misto.

No guia de 1962, "Matemática na Escola Primária", no programa para a terceira série havia a indicação: "Nas divisões inexatas completar-se-á o quociente com uma fração cujo numerador é o resto e cujo denominador é o divisor". (MEC, 1962, p.120)

Promover este tipo de discussão pode evitar alguns erros conceituais comuns, relacionados ao resto das divisões, como por exemplo, quando dividimos 350 por 40 e simplificamos o cálculo para 35 dividido por 4 encontramos 8 e resto 3. O quociente da conta inicial é 8 mas o resto não é 3, visto que

$$8\frac{3}{40} = \frac{323}{40} \neq \frac{350}{40} = 8\frac{30}{40}$$

ou

$\div 10$

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{3\ 5\ 0} & \mathbf{4\ 0} \\ \hline \mathbf{3\ 0} & \mathbf{8} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} \mathbf{3\ 5} & \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{8} \end{array}$$

$\div 10$

1.4 A verificação da operação

A maioria dos livros de aritmética dos séculos XIX e XX além de valorizar a verificação da operação de divisão pela prova real que usualmente conhecemos (D = d × q + r), dava valor também ao emprego da prova dos nove. Na figura 1 (p.11), no canto direito da imagem do método galeão do século XVI, observa-se o esquema da prova dos nove. Este mecanismo de verificação foi, durante muito tempo, exigida dos alunos apesar de não ser 100% confiável

> A prova dos nove indica apenas probabilidade e não certeza, porque se houver um êrro de 9, ou múltiplo de 9, esta prova não o acusa. Em lugar da prova dos noves pode empregar-se a prova dos setes, dos onzes, etc., que consiste em tirar os setes, ou onzes, etc. (conforme o caso), anàlogamente ao que se faz na prova dos noves. (FREITAS, 1958, p. 19)

O que Freitas quis dizer é que não existe restrição teórica em se utilizar prova dos 7 ou dos 11. Estas não foram muito utilizadas visto que o resto da divisão de um número natural não nulo por 7 ou 11 não é obtido tão facilmente quanto o resto da divisão por 9. Como se sabe, através da regra de divisibilidade por 9 é fácil verificar o resto da divisão, tal como por 3.

Freitas (1958, p. 18) explica o processo para se realizar a prova dos nove:

> Traçam-se duas retas de modo que formem 4 ângulos; no 1º escrevem-se os noves fora do divisor; no 2º, os noves fora do quociente; no 3º, os noves fora do produto que se obtiver multiplicando os noves fora do divisor pelos noves fora do quociente, somados com os noves fora do resto, se o houver; no 4º, os noves fora do dividendo. Se os dois últimos resultados forem iguais, é provável que a operação esteja certa.

Veja este exemplo: $2436 \div 6 = 406$

Noves fora do divisor
(6 : 9 = 0, resto 6)

Noves fora do quociente
(4+0+6=10, 10 : 9 = 1, resto 1).

$$\begin{array}{c|c} 6 & 6 \\ \hline 1 & 6 \end{array}$$

Noves fora do dividendo
(2+4+3+6 = 15, 15 : 9 =1, resto 6).

Para entender por que esta prova dá certo, acompanhe o desenvolvimento abaixo:

$D = d\ .\ q + r$, onde $0 \leq r < d$. (1)

Como na prova dos nove é preciso achar os restos das divisões de D, d, q e r por nove, vamos considerar as seguintes divisões:

$$\begin{array}{r|l} D & 9 \\ \cline{2-2} r_1 & a \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} d & 9 \\ \cline{2-2} r_2 & b \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} q & 9 \\ \cline{2-2} r_3 & c \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} r & 9 \\ \cline{2-2} r_4 & d \end{array}$$

Escrevendo de outra maneira:

$$D = 9a + r_1\ ;\ d = 9b + r_2\ ;\ q = 9c + r_3 \text{ e } r = 9d + r_4$$

Voltando à (1) e substituindo D, d, q e r pelas sentenças acima, temos que:

$$9a + r_1 = (9b + r_2) \cdot (9c + r_3) + (9d + r_4)$$

Aplicando a propriedade distributiva:

$$9a + r_1 = 81bc + 9br_3 + 9cr_2 + r_2r_3 + 9d + r_4$$

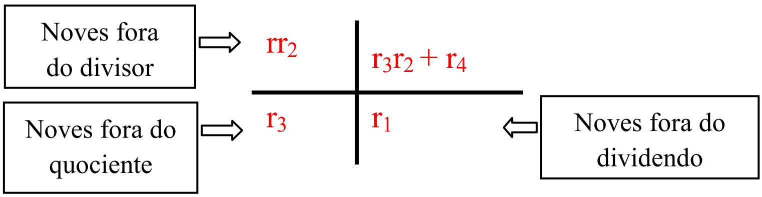
Colocando o 9 em evidência:

$$9a + r_1 = \boxed{9(9bc + br_3 + cr_2 + d)} + r_2r_3 + r_4 \quad (2)$$

Múltiplo de nove

Como se vê, as parcelas destacadas em (2) são divisíveis por 9 e, portanto, vale a igualdade $r_1 = r_2r_3 + r_4$.

Voltando ao esquema da prova dos noves, é fácil percebermos o porquê dos números, à direita do dispositivo, serem iguais.



Quando a prova dos nove acusa erro é certeza de que o resultado da operação está errado. Mas, quando ela não acusa erro, o resultado da operação pode estar correto ou não. Retomemos o exemplo dado anteriormente:

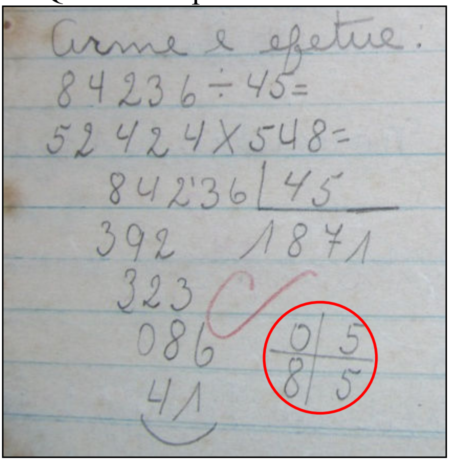
$2436 \div 6 = 406$

6	6
1	6

Se ao invés de 406, tivesse achado como resposta 604, a prova dos nove não iria acusar o erro.

Podemos observar na questão abaixo, em uma prova de 2ª série de 1952, a preocupação do aluno em realizar a prova dos nove:

Figura 10: Questão de prova de 2ª série de 1952

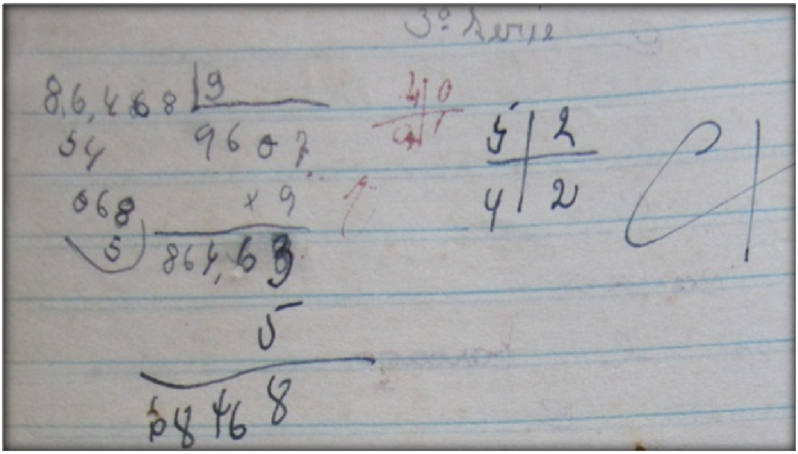


Arquivo da Secretaria Municipal de Educação de Vassouras

Na prova da 3ª série de 1952 (figura 11), a professora considera meio acerto o cálculo realizado pelo aluno. Pelo que parece, o aluno, ao fazer a prova real, somente multiplica o quociente pelo divisor. A caligrafia indica que, a adição deste produto com o resto, foi feita pela professora. Na soma (ou total), ela deve ter cometido o engano de trocar o 8 e o 6 de ordens. Quanto às provas dos nove que constam da correção, parecem ter sido feitas por duas avaliadoras diferentes: uma que usou a caneta vermelha e outra, a preta. Só que certamente ocorreram erros nos dois dispositivos apresentados. Segundo o que vimos, o esquema correto para a prova dos nove seria:

0	5
4	5

Figura 11: Questão da prova de 3ª série de 1952



(Arquivo da Secretaria Municipal de Educação de Vassouras)

Palmer nos traz outra prova real para a conta de divisão além da $D = d.q + r$. Ele propõe que se faça a soma dos produtos parciais com o resto final, como mostra a figura 12 na página ao lado.

Esta prova também não é explorada nos dias de hoje, apesar de estar baseada na ideia das subtrações sucessivas e possibilitar ao aluno uma retomada da construção do sistema decimal de numeração que possivelmente trabalhou no quadro valor de lugar (Q.V.L.), já que o 48 que se vê abaixo do dividendo, na verdade é uma forma simplificada de representar 48 unidades de milhar, e, portanto, 48 000.

Figura 12: Prova real da divisão

b. Contracted Method, by omitting unnecessary ciphers.

Dividend,	64235	(24 Divisor.
1st partial product,	48	$2676\frac{11}{24}$ Quotient.
1st remainder,	162	64235 Proof 1, viz., divisor × quotient + remainder.
2d partial product,	144	
2d remainder,	183	
3d partial product,	168	
3d remainder,	155	
4th partial product,	144	
Undivided remainder,	11	
Proof 2,	64235	Sum of products and last remainder.

$$
\begin{array}{r}
48\,000 \\
14\,400 \\
+ \quad 1\,680 \\
144 \\
11 \\
\hline
64\,235
\end{array}
$$

(PALMER, 1854, p.169)

1.5 Ideias da operação

O primeiro ponto que podemos destacar é o fato de a divisão, para a maioria dos autores, estar ligada a duas diferentes ideias - repartir igualmente e medir - sendo a primeira bem mais enfatizada na prática docente que a segunda. (TOLEDO, 1997, p.145)

Para esclarecer tais ideias vejamos as situações abaixo:

A - Tenho 32 alunos e quero formar 4 grupos de trabalho. Quantos alunos ficarão em cada grupo?

B - Tenho 32 alunos e quero formar grupos com 4 alunos cada. Quantos grupos serão formados?

Na situação A, cuja ideia é de repartição, é conhecido o número total (32 alunos) que deverá ser distribuído em partes iguais (4 grupos) e o objetivo é determinar o valor de cada parte (quantos alunos haverá em cada equipe). Ou ainda, é conhecido o número de grupos (4), que deve ser formado com certo total de alunos (32) e é preciso determinar a quantidade de pessoas a serem colocadas em cada grupo.

Na situação B, cuja ideia é de medida, é preciso saber quantos grupos podemos formar com certo total (32 alunos), sendo conhecida a quantidade que cada grupo deve ter (4 alunos em cada). Ou ainda, onde o número (32 alunos) deve ser dividido em partes de tamanho determinado (4 pessoas em cada equipe). O objetivo é saber quantas serão as partes (quantos grupos serão formados).

Considerando os livros de *Arithmetica* do século XIX analisados, somente Roswell C.Smith, no seu livro "*Practical and Mental Arithmetic on a New Plan*", de 1827, apresenta o conceito de divisão como o processo de dividir um número em partes iguais, ou achar quantas vezes um número está contido em outro, enquanto que nos demais livros, somente é abordada a ação de achar quantas vezes um número está contido em outro.

Trajano (1956), em seu livro “Aritmética Elementar”, inicia dizendo “A divisão tem duas aplicações diversas que são: 1º Achar quantas vêzes um número contém outro; 2º Dividir um número em partes iguais.” E a seguir mostra dois exemplos que chama de aplicações.

> Primeira aplicação. Com 12 cruzeiros quantos livros podemos comprar do preço de 3 cruzeiros cada um?
> Solução. Êste problema tem por fim achar quantas vêzes 3 cruzeiros estão contidos em 12 cruzeiros.
> Segunda aplicação. Dividindo-se 12 cruzeiros por 4 pessoas, que quantia receberá cada uma?
> Solução. Êste problema tem por fim dividir 12 em partes iguais. (TRAJANO, 1956, p. 31)

Diferentemente, o mesmo autor, em seu livro “Aritmética Primária”, cuja primeira edição é posterior ao livro acima citado, somente apresenta a noção de “quantas vezes um número contém outro”, apesar de no “Exercício oral de aplicação” apresentar problemas que envolvem as duas ideias apresentadas anteriormente:[4]

- Repartir em partes iguais: Dividindo 10 penas por 5 meninos, quantas penas receberá cada um? (TRAJANO, 1947, p.29)
- Descobrir quantos grupos: Com 12 cruzeiros, quantos metros de renda posso comprar de 2 cruzeiros cada metro? (TRAJANO, 1947, p.29)

[4] No livro, o primeiro exemplo é o problema de número 5 e o segundo, o de número 9.

Freitas (1958) explorou as mesmas ideias anteriores[5], mas não teve a preocupação de colocar situações simples que mostrassem de forma imediata a diferença entre estas concepções:

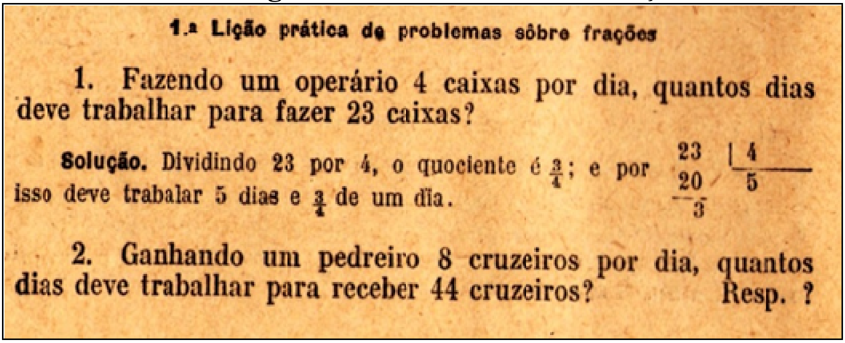
> ⇒ repartir em partes iguais: "Uma herança de Cr$23.400,00 deve ser dividida por 3 herdeiros. Quanto receberá cada um?" (FREITAS, 1958, p.68)
>
> ⇒ descobrir quantos grupos: "Se 3 pares de meias custam Cr$18,00, quantos pares de meias poderei comprar com Cr$ 48,00?" (FREITAS, 1958, p. 68).

Este problema é dividido em duas partes, primeiro, usando a ideia de repartição, descobre-se quanto custa um par de meias (Cr$ 6,00). A seguir, trabalha-se com a ideia de quotização, onde o número (Cr$ 48,00) deve ser dividido em partes de tamanho determinado (o preço de cada par de meias – Cr$ 6,00). O objetivo é saber quantas serão as partes (quantos pares de meias poderão ser comprados). Ou ainda, é preciso saber quantos grupos (pares de meias) podemos formar com certo total (Cr$ 48,00), sendo conhecida a quantidade que cada grupo deve ter (o preço de um par de meias – Cr$ 6,00)

Trajano (1947), ao trabalhar o conteúdo de frações, apresenta uma "lição prática de problemas sobre frações", trazendo situações que envolvem em sua resolução cálculos de divisão não exata.

[5] Os exemplos que se seguem, no livro, aparecem em outra ordem: o primeiro é o de número 23 e o segundo, o de número 18.

Figura 13: Problemas sobre frações



1.ª Lição prática de problemas sôbre frações

1. Fazendo um operário 4 caixas por dia, quantos dias deve trabalhar para fazer 23 caixas?

Solução. Dividindo 23 por 4, o quociente é $\frac{3}{4}$; e por isso deve trabalar 5 dias e $\frac{3}{4}$ de um dia.

$$\begin{array}{r|l} 23 & 4 \\ \hline 20 & 5 \\ \hline 3 & \end{array}$$

2. Ganhando um pedreiro 8 cruzeiros por dia, quantos dias deve trabalhar para receber 44 cruzeiros? Resp. ?

(TRAJANO, 1947, p. 52)

A solução apresenta um erro, que possivelmente pode ser de impressão, quando afirma que “Dividindo 23 por 4, o quociente é $\frac{3}{4}$”. Na verdade, o quociente inteiro é 5 e, o resto na ordem das unidades é 3[6]. Este 3 significa a quantidade de caixas a serem produzidas em uma parte do sexto dia. Em outras palavras, o quociente é 5 $\frac{3}{4}$.

Esta é uma ideia interessante de se trabalhar quando se desenvolve o conteúdo de frações: associar à fração a ideia da operação de divisão.

Também, na “Lição sôbre as quatro operações”, Trajano (1947) traz alguns problemas sobre proporcionalidade direta e inversa, cuja resolução envolve cálculos de divisão. Não é preciso saber “regra de três” para resolver tais situações:

> 1. Se 3 penas de aço pesam 6 gramas, quanto devem pesar 5 penas?

[6] Percebe-se aqui uma imprecisão de linguagem, frequentemente cometida em nossas aulas. Normalmente, em casos assim, dizemos que o quociente é 5 e o resto é 3.

Solução. Se 3 penas pesam 6 gramas, 1 pena deve pesar 6 ÷ 3 = 2, e 5 penas devem pesar 5 × 2 gramas, que são 10 gramas.

9. Se 8 homens fazem uma obra em 5 dias, 4 homens em quantos dias farão?
   Solução. 8 homens fazendo a obra em 5 dias, 1 homem a fará em 5 × 8 = 40 dias; então, 4 homens devem fazê-la na quarta parte do tempo, que é 40 ÷ 4 = 10 dias. (TRAJANO, 1947, 34-35)

Outro conteúdo que pode ser desenvolvido utilizando-se a divisão é o cálculo do maior divisor comum (m.d.c.). Trajano (1947) apresenta este cálculo através das divisões sucessivas sem o uso do dispositivo usual do algoritmo de Euclides, como se vê abaixo:

Figura 14: Máximo divisor comum

67. Máximo divisor comum de dois ou mais números é o maior número que divide êsses dois ou mais números sem deixar resto; assim, 2 e 4 são divisores comuns de 16 e 24, mas 8 é o máximo divisor comum dêstes números, porque não ha um número maior que os divida sem deixar resto.

Problema. Qual é o máximo divisor comum de 28 e 40?

Solução. Dividindo-se o número maior pelo menor, o quociente é 1, e o resto é 12. Dividindo-se depois o número menor, 28, pelo resto, 12, o quociente é 2, e o resto é 4. Dividindo-se ainda o resto 12 pelo resto 4, o quociente é 3, e não ha mais resto. O divisor que não deixa resto, é 4, e por isso é o maximo divisor comum de 40 e 28.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 28 \\ \hline 28 & 1 \\ \hline 12 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 28 & 12 \\ \hline 24 & 2 \\ \hline 04 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 4 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

(TRAJANO, 1947, p. 37)

Pelo dispositivo usual do algoritmo de Euclides, temos:

	1	2	3
40	28	12	4
12	4	0	

Trajano (1947) faz divisões sucessivas: divide o maior dos dois números pelo menor e então divide o divisor pelo resto. Continua esse processo de dividir o último divisor pelo último resto, até que a divisão seja exata. Discute o quociente e o resto de cada uma das divisões efetuadas, chegando à conclusão de que, o divisor que deixa resto zero, será o m.d.c.

Capítulo 2 Algumas atividades

Sendo hoje reconhecido e estudado que toda operação aritmética possui mais do que uma ideia (TOLEDO, 1997), é natural que discutamos qual é a que está ou não presente na realização de um determinado algoritmo e, por isso, quais são as situações e problemas que poderão facilitar o trabalho com esse algoritmo.

A divisão está relacionada à subtração. Na verdade, ela é uma subtração reiterada de parcelas, por isso apresenta questões semelhantes às daquela operação.

A discussão de hoje relacionada ao algoritmo que deva ser utilizado no ensino da divisão e que encontramos no século XIX deve ser ampliada para aquela relacionada às ideias da operação e aos conceitos que estão por trás da utilização de qualquer algoritmo.

> Sabemos que para muitos professores o ensino da Aritmética reduz-se ao ensino dos passos dos algoritmos. Não há dúvida de que é mais simples ensinar regras fechadas do que desenvolver ideias, o sentido numérico e explorar os vários significados das operações. (LOPES, 2009, p.67)

A seguir será apresentada uma seleção de atividades que nos farão refletir sobre questões discutidas anteriormente.

2.1 Englobando situações-problemas e suas respostas

É importante que o aluno se depare com situações que envolvam ideias diferentes da operação de divisão, mas que também reflita sobre a solução que dará a cada um dos problemas, porque sabemos que nem sempre a resposta de uma questão cuja resolução empregue uma divisão será o quociente encontrado. Todos os problemas abaixo são resolvidos por meio da operação 125 ÷ 8, mas suas respostas variam de acordo com o que está sendo pedido:

Resolva os problemas abaixo prestando atenção nos cálculos efetuados:

a) Para participar de um jogo, cada grupo de alunos precisa de 8 cartelas. Quantos grupos poderão jogar se a professora dispõe de 125 cartelas?

b) Tenho 125 reais para comprar blusas que custa 8 reais cada uma. Quantas blusas posso comprar?

c) Um elevador tem capacidade para, no máximo, 8 pessoas. Qual o menor número de viagens necessárias para que sejam transportadas as 125 pessoas de uma fila?

d) 125 litros de tonel deverão ser distribuídos em 8 garrafões. Qual a capacidade de cada garrafão?

e) Tenho 125 reais para dividir igualmente entre meus 8 sobrinhos. Quanto vai receber cada um?

f) Você vai organizar um jantar para 125 pessoas. Em cada uma das mesas cabem 8 pessoas, mas com boa vontade podem sentar 9. Dando preferência a mesas com 8 pessoas, mas admitindo-se também mesas com 9, quantas mesas com 9 pessoas serão necessárias?

g) 125 é divisível por 8?

Sabe-se que o cálculo 125 dividido por 8 tem como resultado (inteiro) 15 e resto 5. Tanto para o problema **a** quanto para o **b**, o resto será desprezado. Na questão **a** poderão jogar 15 grupos e sobrarão 5 cartelas e na **b**, será possível comprar 15 blusas e sobrarão 5 reais. Já na situação **c** o resto deverá ser considerado, porque <u>todas</u> as pessoas deverão ser transportadas. Logo, serão necessárias 16 viagens: 15 com 8 pessoas e uma com as 5 pessoas restantes.

Para resolver a situação **d** é preciso prosseguir o cálculo, já que o resto deverá ser distribuído também pelos garrafões. Logo,

$$
\begin{array}{r|l}
125 & 8 \\ \cline{2-2}
45 & 15,625 \\
50 & \\
20 & \\
40 & \\
0 &
\end{array}
$$

Sendo assim, cada garrafão terá a capacidade de 15,625 litros. Na questão **e** não podemos considerar todas essas casas decimais, visto que nosso sistema monetário só vai até os centésimos. Assim, cada sobrinho irá receber R$ 15,62 e irão sobrar R$0,04. Nesta situação não é possível fazer o arredondamento de R$ 15,625 para R$ 15,63 porque não há dinheiro suficiente, visto que 15,63 x 8 = 125,04.

No problema **f** a resposta será o próprio resto. Cada uma das 5 pessoas restantes deverá ocupar uma mesa, logo serão 5 mesas com 9 pessoas.

Para finalizar, a questão **g** irá associar o conceito de divisibilidade à divisão exata de quociente inteiro. Portanto, 125 não é divisível por 8.

2.2 Envolvendo algoritmos

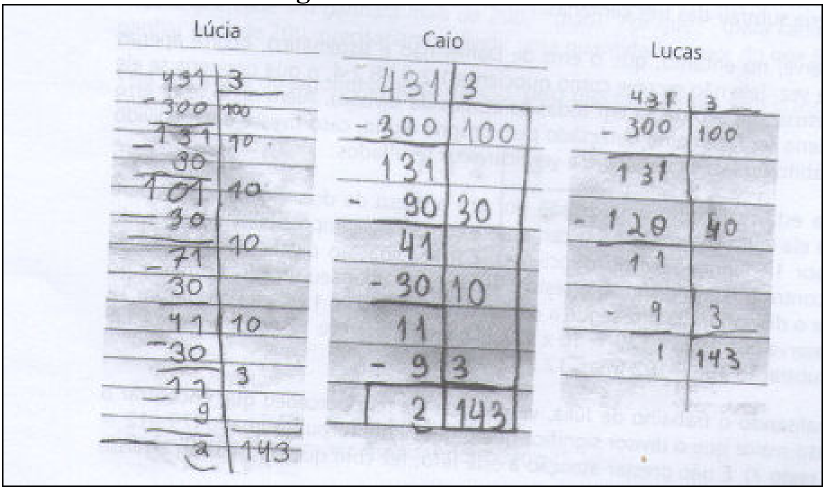
Sabemos o quanto é importante discutir e valorizar diferentes encaminhamentos, bem como formas de resolução que os alunos apresentam e, mais ainda, fazê-los exercitar a habilidade de expor e defender seus argumentos. É preciso olhar para a produção do aluno discutindo seus erros e acertos. Sendo assim, seguem algumas atividades que têm como objetivo desenvolver a capacidade de investigar a produção dos alunos e intervir sobre ela.

> 1. Abaixo, apresentamos a mesma divisão feita por Lúcia, Caio e Lucas, por intermédio do algoritmo das subtrações sucessivas. Escreva um pequeno parágrafo comentando as diferenças de estratégias nas retiradas. Comente também, erros cometidos, e decida se estes são ou não relacionados com a compreensão do processo do algoritmo. (MANDARINO, 2005, p.172)

Os exemplos de cálculos mostrados a seguir foram realizados por três crianças em estágios de desenvolvimento diferentes. Observando-os, percebemos que Lúcia vai agrupando de 100 em 100, de 10 em 10 e depois as unidades, enquanto que Caio já percebe que se 3 x 3 = 9, então 30 x 3 = 90. Já Lucas, apesar de ter cometido um erro na subtração final 11–9=1 e não 2, se aproxima dos outros algoritmos (método longo e método curto), porque consegue identificar quantas centenas, dezenas e unidades cabem no dividendo.

A criança que vivencia o trabalho com o algoritmo das subtrações sucessivas, possivelmente perpassa por tais estágios de desenvolvimento.

Figura 15: Atividades 1

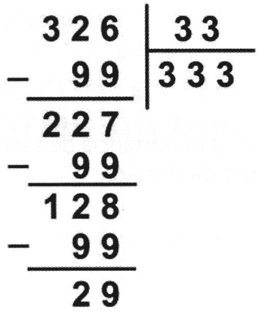


(MANDARINO, 2005, p. 172)

Essas três crianças não se preocuparam em organizar seus quocientes parciais, colocando centena abaixo de centena, dezena abaixo de dezena e unidade abaixo de unidade, o que pode gerar enganos na hora de se efetuar a adição.

2. A professora de Ana, ao conferir os cálculos feitos por ela na divisão de 325 por 33 ficou impressionada, pois o quociente encontrado por Ana estava obviamente errado, mas o resto estava absolutamente correto. Observe os cálculos de Ana e tente oferecer uma explicação para o seu erro. (MANDARINO, 2005, p. 173)

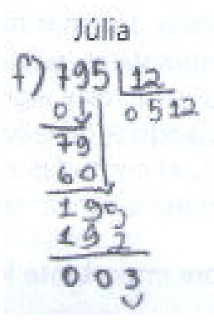
Figura 16: Atividades 2



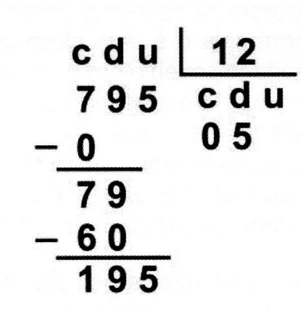
(MANDARINO, 2005, p. 173)

Ao invés de Ana colocar os quocientes parciais um abaixo do outro para efetuar a adição no final, colocou um ao lado do outro, o que gerou o resultado 333 e não 3 + 3 + 3 = 9. Fazer o aluno refletir sobre o resultado encontrado, desenvolvendo estimativas, é bastante interessante: como podemos dividir 326 por 33 e encontrar 333, um número maior do que o que foi dividido?

3. Retornemos à conta feita por Júlia no "Escute seu aluno" desta aula.



a) Faça a divisão de 795 por 12 e anote o quociente e o resto.
b) A solução de Júlia, apesar de alguns erros, é uma solução possível. Pense sobre ela e continue a conta de Júlia a partir do ponto indicado abaixo, mas utilize o apoio do Q.V.L. para registrar seu resultado nas ordens corretas do quociente:



c) Compare os resultados dos itens (a) e (b). O que você pode observar?
d) Você é capaz de explicar sua resposta no item (c)? (MANDARINO, 2005, p.171 e 173)

Ao realizar o cálculo 795 por 12 encontramos 66 e resto 3. Apesar de Júlia ter cometido alguns erros, podemos ajudá-la a encontrar a resposta correta partindo do que realizou no algoritmo. Ainda temos 19 dezenas que divididas por 12, dá 1 dezena e sobram 7 dezenas. Esta sobra junto com as 5 unidades, totalizam 75 unidades que divididas por 12 dão 6 unidades e restam 3. Assim, 5 dezenas + 1 dezena + 6 unidades = 66 unidades. Logo, o quociente é 66 e o resto, 3.

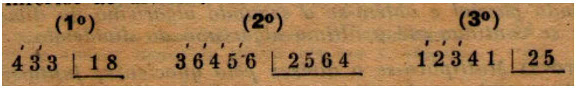
c	**d**	**u**	**1**	**2**	
7	**9**	**5**	**c**	**d**	**u**
-0			**0**	**5**	
7	**9**		+	1	6
-6	**0**			6	6
1	**9**	**5**			
-1	2				
	7	5			
	-7	2			
		3			

6. Observe que Júlia registrou o "zero" no seu quociente. No entanto, sabemos que um "zero à esquerda" não altera o valor do número.
a) Explique por que Júlia registrou este zero.
b) Você acha que o registro deste zero ajuda ou atrapalha a compreensão do algoritmo? Justifique sua resposta:
c) Se um aluno seu registrasse este zero na ordem das centenas, como Júlia, como você agiria? (MANDARINO, 2005, p.173)

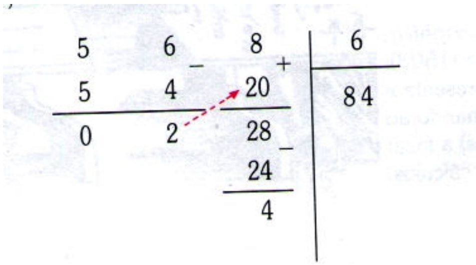
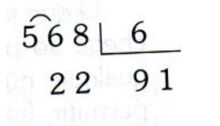
Júlia sabe que na ordem das centenas o 12 não cabe nenhuma vez inteira em 7. Logo, para representar isto, colocou o zero no seu quociente.

Antes de se iniciar um cálculo de divisão, é interessante solicitar que os alunos verifiquem quantas ordens terá a resposta. Por exemplo, na conta de Júlia, se na ordem das centenas está sendo ocupada pelo algarismo 7 e este é menor do que 12, não haverá centenas no quociente, logo o resultado terá duas ordens. Essa análise ajuda também nos casos em que temos zeros no quociente, por exemplo, 1 785 ÷ 17: como 1 é menor do que 17, sabemos que no quociente não teremos unidade de milhar, logo o resultado terá 3 ordens. Sabendo disso, o aluno nunca dará como resposta 15, que é um erro bastante comum.

Trajano (1956) chama atenção dos alunos para esta questão:

> Quando o divisor constar de mais de um algarismo, separam-se no dividendo tantos algarismos quantos tiver o divisor, e ainda mais um, se o número separado no dividendo fôr inferior ao divisor.
>
> 
>
> (1º) 433 | 18 (2º) 36456 | 2564 (3º) 12341 | 25
>
> Ilustração. No primeiro exemplo, separam-se dois algarismos; no segundo exemplo, separam-se quatro algarismos; e no terceiro exemplo, separam-se três algarismos, porque 12 é menor do que 25.
>
> Antes de operarmos uma divisão já podemos saber quantos algarismos terá o quociente. Para isto, bastará só contar os algarismos do dividendo a partir do último algarismo marcado para a direita, e o número de algarismos que ali houver, será o número de algarismos do quociente. Assim, o quociente do primeiro exemplo terá só dois algarismos; o do segundo também terá dois, e do terceiro terá três. (TRAJANO, 1956, p.33-34)

A maioria dos livros didáticos utilizados nas escolas hoje em dia não aborda esta discussão que é tão importante para a estimativa do quociente. É bastante relevante tal resgate histórico a fim de contribuir para a prática docente atual.

> 4. Numa prova, um aluno fez a divisão pedida da seguinte maneira:
>
> 
>
> E outro aluno fez assim:
>
> 
>
> Que observações você faria com relação ao domínio de cada um no algoritmo da divisão? Que sugestões você daria a eles para corrigir seus erros? (TOLEDO, 1997, p.159 e 160)

O único erro cometido pelo primeiro aluno foi o resultado do produto 8 x 6, que pensou ser 54. Ele demonstrou dominar o algoritmo que estava executando e o valor de cada resto, como visto no transporte das 2 dezenas para 20 unidades.

O segundo dividiu as 56 dezenas por 6 e encontrou 9 dezenas, restando 2 dezenas. Ele desprezou esse resto e dividiu as 8 unidades por 6, achou uma unidade e restaram 2 unidades. Seu resto total foi de 22 unidades, que ainda seria possível dividir por 6, como se vê no cálculo a seguir:

$$
\begin{array}{cccc|c}
\mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{6} & \\
\cline{4-5}
 & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{9} & \mathbf{1} \\
 & & 4 & & +3 \\
\cline{4-5}
 & & & 9 & 4
\end{array}
$$

Manipular aritmeticamente os valores envolvidos em uma divisão leva o aluno a aplicar o princípio fundamental da divisão ($D = d \times q + r$), a desenvolver seu raciocínio e perceber algumas propriedades da operação.

As perguntas seguintes referem-se a esta divisão:

$$
\begin{array}{cc|c}
3 & 5 & 8 \\
\cline{3-3}
-3 & 2 & 4 \\
\cline{1-2}
 & 3 &
\end{array}
$$

a) Se o dividendo aumentar 2 unidades o que acontecerá com o quociente e o resto da divisão?
b) E se o dividendo aumentar 5 unidades o que acontecerá com o quociente e com o resto da divisão?
c) Se quisermos que o quociente aumente 2 unidades e o resto permaneça o mesmo, o que devemos fazer com o dividendo?
d) Se quisermos que o resto seja zero e que o quociente aumente 3 unidades, o que devemos fazer com o dividendo?
e) Se quisermos que o resto seja o maior possível, o que devemos fazer com o dividendo?
f) Se quisermos que o quociente diminua 1 unidade e o resto também diminua 1 unidade, o que devemos fazer com o dividendo?

Dividindo histórias e opiniões

(MANDARINO, 2005, p.140 e 141)

Aumentando o dividendo em duas unidades, o resto aumenta também em duas unidades, passando a ser 5 e o quociente permanece 4.

+2

3	5	8		3	7	8
-3	2	4		-3	2	4
	3				5	

+2

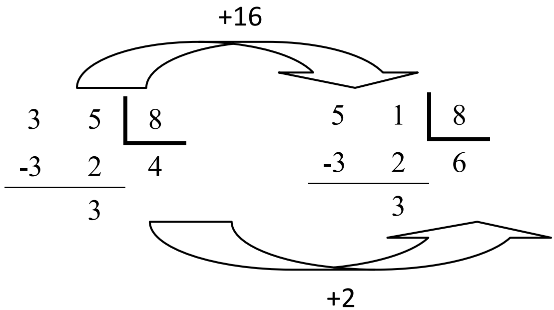
Se o dividendo aumenta cinco unidades, o resto aumenta para 8. Neste caso, é possível formar mais um grupo de 8, logo o quociente passa a ser 5 e o resto fica zero, pois foi possível completar um novo grupo.

+5

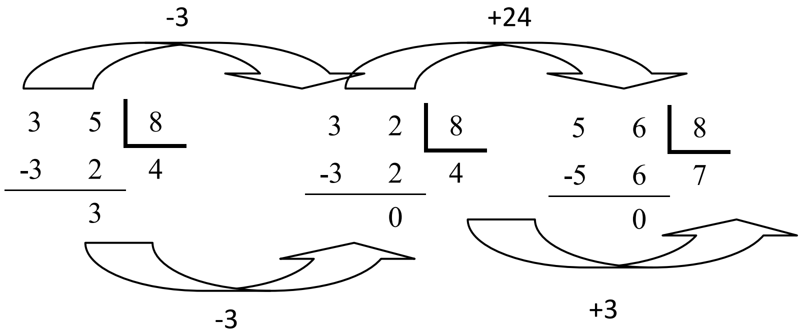
3	5	8		4	0	8		4	0	8
-3	2	4		-3	2	4		-4	0	5
	3				8				0	

+5

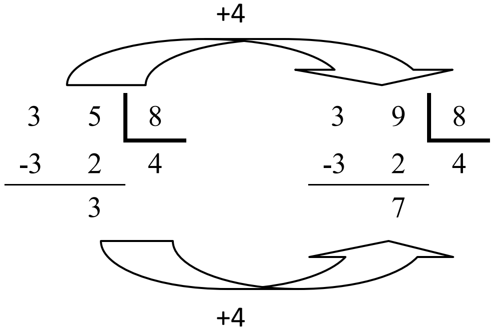
Para aumentar o quociente em duas unidades, é preciso aumentar o dividendo em 2 x 8 = 16 unidades. O resto deve permanecer o mesmo e o dividendo passa a ser 35 + 16 = 51.



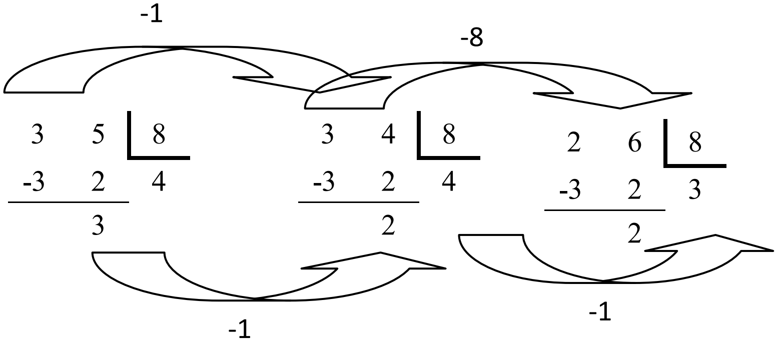
Retirando 3 unidades do dividendo (35 – 3 = 32), o resto fica sendo zero e o quociente permanece o mesmo. Assim, para aumentar o quociente em 3 unidades, é preciso aumentar o dividendo em 3 x 8 = 24 unidades. Logo, 32 + 24 = 56. Temos, então, dividendo igual a 56, quociente igual a 7 e resto 0.



O maior resto possível nesta divisão é 7, logo para se ter este resto é preciso aumentar o dividendo em 4 unidades (35 + 4 = 39).



Para diminuir o resto em uma unidade deve-se retirar uma unidade do dividendo (35 – 1 = 34) e para diminuir o quociente em uma unidade, é preciso tirar 1 x 8 = 8 unidades do dividendo. Assim, o dividendo passa a ser 34 – 8 = 26, o quociente fica 3 e o resto igual a 2.



2.3 Com calculadora

A utilização das calculadoras no ensino está nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e nas propostas curriculares dos estados.

> A calculadora é mais um instrumento do qual se lança mão para resolver certos tipos de tarefas em um dado contexto. (...) as atividades com calculadora potencializam a capacidade dos alunos de fazer, mais e melhor, cálculo mental e estimativa, bem como ajudam a compreender o que fazem (às vezes, mecanicamente) no cálculo escrito. (LOPES, 2009, p.147)

No caso da operação de divisão, se proponho a um aluno que resolva o cálculo $132 \div 12$ com uma calculadora, cuja tecla $\boxed{\div}$ está quebrada, provavelmente usará a ideia da divisão como subtração sucessiva, fará 132 - 12 = = = =..... até chegar ao zero.

A quantidade de vezes que a tecla $\boxed{=}$ for acionada é o quociente do cálculo proposto, como se sabe, 11.

Também é possível encontrar o resto da divisão 1692 ÷ 13 utilizando uma calculadora cujo visor tenha espaço para nove dígitos. Ao teclar 1 6 9 2 ÷ 1 3, obtém-se 130,153846. Logo, sabendo que $D = q \times d + r$, temos que $r = D - q \times d$. Considerando o quociente até as unidades simples, temos que 1692 – 130 x 13 = 1692 – 1690 = 2; portanto, o resto é 2.

É importante destacar que dependendo de até que ordem o quociente for considerado, teremos restos diferentes. Observa-se que a diferença entre um resto e outro é igual a 13 vezes a diferença entre os quocientes considerados.

Quociente considerado	**Quociente com erro a menos de**	**Cálculo do resto**	**Resto**	**Diferença entre os restos**
130	1	1692 – 130 x 13 = =1692 – 1690 = 2	2	2 – 0,7 = 1,3 = = 0,1 x 13
130,1	0,1	1692 – 130,1 x 13 = =1692 – 1691,3 = 0,7	0,7	0,7 – 0,05 = 0,65 = = 0,05 x 13
130,15	0,01	1692 – 130,15 x 13 = = 1692 – 1691,95 = 0,05	0,05	0,05 – 0,011 = 0,039 = = 0,003 x 13
130,153	0,001	1692 – 130,153 x 13 = =1692 – 1691,989 = = 0,011	0,011	0,011 – 0,0006 = =0,00104 = = 0,0008 x 13
130,1538	0,0001	1692 – 130,1538 x 13 = =1692 – 1691,9994 = = 0,0006	0,0006	

A segunda coluna da tabela está se referindo ao erro relativo do quociente considerado. Veja que

$$130 < \frac{1692}{13} < 131$$

Erro menor do que uma unidade

$$130{,}1 < \frac{1692}{13} < 130{,}2$$

Erro menor do que um décimo

A seguir outra atividade que tem como objetivo trabalhar com os restos decimais:

1. Numa calculadora de 8 dígitos, efetuei as divisões abaixo:

$$37 \div 160 \qquad 43 \div 128 \qquad 3 \div 1024$$

a) Como posso saber em que quocientes houve aproximação?
b) Em caso de aproximação, qual o resto da operação neste momento, em cada um das situações?
c) Como determinar o quociente com a precisão de pelo menos dez casa decimais, usando esta mesma calculadora? (Ficha elaborada por Eneida Guedes e Lúcia Villela, CECIERJ, 1993)

É possível saber se houve aproximação nos quocientes realizando a operação inversa, ou seja, a multiplicação. Quando não se encontra como produto o dividendo, sabe-se que houve a aproximação e pode-se calcular o resto fazendo o dividendo menos o quociente encontrado. Por exemplo, 3 ÷ 1024 = 0,0029296. Como 0,0029296 x 1024 = 2,9999104, então, 3 – 2,9999104 = 0,0000896, e, portanto o resto considerando o quociente até a sétima casa decimal.

Para determinar o quociente com a precisão de pelo menos dez casas decimais, se considera o resto 0,0000896 e continua-se a divisão por 1024. Se a calculadora não tiver esta quantidade de dígitos, pode-se dividir 896 por 1024. O quociente será 0,875. Já que o divisor foi dividido por 10 000 000, o quociente também o será. Logo, o resultado com precisão de 10 casas será de 0,0029296 + 0,0000000875 = 0,0029296875.

2.4 De cálculo mental

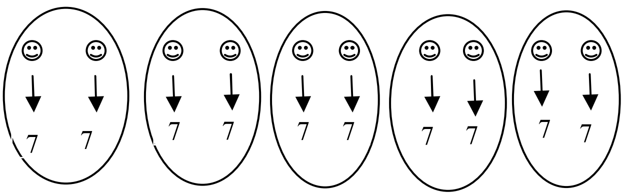
As atividades abaixo mostram estratégias que se pode utilizar para efetuar divisões mentalmente. Através destas pode-se explorar algumas propriedades da operação.

Sabe-se que $(a \pm b) \div c = a \div c \pm b \div c$, com $c \neq 0$ (propriedade distributiva à direita da divisão em relação à adição ou subtração). Quando os alunos conhecem fatos fundamentais da multiplicação ("tabuada"), eles decompõem adequadamente o dividendo, de modo a usar tal propriedade. Veja:

$26 \div 2 = (20 + 6) \div 2 = 20 \div 2 + 6 \div 2 = 10 + 3 = 13$
$148 \div 4 = (120 + 28) \div 4 = 120 \div 4 + 28 \div 4 = 30 + 7 = 37$
$475 \div 5 = (500 - 25) \div 5 = 500 \div 5 - 25 \div 5 = 100 - 5 = 95$

Sabe-se que $5 = 10 \div 2$ e $25 = 100 \div 4$. Logo, para dividir por 5, equivale a dividir por 10 e depois multiplicar por 2. Para dividir por 25, basta dividir por 100, depois multiplicar por 4. Pode-se mostrar concretamente o porquê desta propriedade:

Quero dividir 70 por 5. Faço $70 \div 10 = 7$. Depois multiplico por 2, encontrando 14.



Capítulo 3 Alguns questionamentos

O resgate histórico feito com esta viagem no tempo visa contribuir para a prática docente atual, mas é fundamental que o professor reflita, juntamente com seus pares, sobre as mudanças que ocorrem nas diferentes culturas escolares, a cada espaço e tempo, de modo a privilegiar ou relegar ao segundo plano determinados aspectos dos processos de ensino e de aprendizagem, bem como o papel de nós professores neste processo. É importante discutir sobre algumas questões que foram levantadas ao longo do livro e que são retomadas agora:

- Qual a importância de se trabalhar as diferentes ideias de uma operação?
- Faz-se necessário impor um único algoritmo para a realização de uma operação?
- Quais as vantagens e desvantagens de se apresentar vários caminhos para a realização de cálculos?
- Pensando na divisão, qual(is) dos algoritmos vistos contribui para melhor aquisição das ideias da operação?
- Quais os cuidados que o professor deve ter ao apresentar oralmente os passos de um algoritmo?
- Qual o papel das estimativas no trabalho com as operações?
- Em que a resolução de problemas pode contribuir com o estudo das operações?
- O uso da calculadora e o trabalho com cálculo mental podem contribuir para o aprendizado das operações?

Dividam opiniões, histórias e compartilhem suas descobertas.

Referências Bibliográficas

BOYER, Carl Benjamin, 1906. **História da matemática**; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

DAVIES, Charles. **Arithmetic**: designed for academies and schools. Philadelphia: 1841. Disponível em http://books.google.com/books/download/Arithmetic.pdf?id=bCSHpZu-OMQC&hl=ptBR&capid=AFLRE70c4TOoZf5pH_CTia2xOT0R0FsZ1jZPPre0_FRfgMgB8kh5rBolR3BcFxE0wzamUhIJmp31r46TowHV4I6Lg8q5D0hneHobR1j1jy_KAzQDPfKOBSc&continue=http://books.google.com/books/download/Arithmetic.pdf%3Fid%3DbCSHpZu-OMQC%26hl%3Dpt-BR%26output%3Dpdf. Acesso em 04/06/2010.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**/ Howerd Eves; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 1995.

FREITAS, G. **Lições práticas de aritmética, geometria e desenho**. 28ª edição. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1958.

GREENLEAF, Benjamin. **Introduction to the National Arithmetic**. Boston: 1842. Disponívelemhttp://books.google.com/books?id=dAgj4vuPuisC&printsec=frontcover&dq=bibliogroup:%22Harvard+science+and+math+textbooks+preservation+microfilm+project%22&lr=&ei=Z_QITKCHD5iWyAS-jJWlBw&hl=pt-BR&cd=25#v=onepage&q&f=false. Acesso em 04/06/2010.

IMENES, Luiz Márcio. LELLIS, Marcelo. **Matemática 6º ano**. São Paulo: Moderna, 2009

LOPES, Antônio José. RODRIGUEZ, Joaquin Gimenez. **Metodologia para o ensino da aritmética: competência numérica no cotidiano**, volume único: livro do professor. São Paulo: FTD, 2009

MANDARINO, Mônica Cerbella Freire. BELFORT, Elizabeth. **Números naturais: conteúdo e forma**. Rio de Janeiro: Ministério da Educação: Universidade Federal do Rio de Janeiro, Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências, 2005.

MEC. **Matemática na escola primária**. Biblioteca da Professora Brasileira. Programa de Emergência. Rio de Janeiro. 1962

PALMER, Thomas. **Arithmetic oral and written practilly applied by means suggestive questions**. Andrews' series of latin school books. Boston: 1854. Disponível em http://books.google.com/books?id=mWQE1_mhbcEC&printsec=frontcover&dq=bibliogroup%3A%22Harvard%20science%20and%20math%20textbooks%20preservation%20microfilm%20project%22&lr&hl=pt-BR&source=gbs_slider_thumb#v=onepage&q&f=false. Acesso em 04/06/2010.

SMITH, Roswell C. **Practical and Mental Arithmetic**. Second Edition. Boston: 1827. Disponívelemhttp://books.google.com/books?id=LbA4AAAAMAAJ&printsec=frontcover&dq=bibliogroup:%22Harvard+science+and+math+textbooks+preservation+microfilm+project%22&lr=&

ei=Z_QITKCHD5iWyAS-jJWlBw&hl=pt-BR&cd=27#v=onepage&q&f=false. Acesso em 04/06/2010.

TOLEDO, Marília. TOLEDO, Mauro. **Didática de matemática: como dois e dois: a construção da matemática**. São Paulo: FTD, 1997.

TRAJANO, Antonio**. Aritmética Primária preparada para os meninos e meninas que começam o tirocínio dos números nas Escolas Primárias**. 118ª edição. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1947.

USISKINJ, Zalman. **Paper-and-Pencil Algorithms in a Calculator-and-Computer Age.** In The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow, pp. 7-20. NCTM, Reston, Virgínia