França Campos

100000000000
10000000000
1000000000
100000000
10000000
1000000
100000
10000
1000
100
10
1
01
001
0001
00001
000001
0000001
00000001
000000001
0000000001
00000000001

didática da aritmética

J. OZON + EDITOR

I. de FRANÇA CAMPOS

Engenheiro Civil, Mestre em Artes, Mestre em Educação,
Professor de Matemática no Colégio Bennett
Catedrático de Metodologia do Cálculo, do Instituto de Educação
Professor de Curso Primário

DIDÁTICA DA ARITMÉTICA

J. OZON + EDITOR
Av. Marechal Floriano n.º 22 — Tels. 23-3943 e 43-6064
RIO DE JANEIRO

Êste trabalho são apenas apostilas que costumamos distribuir às alunas com o propósito de facilitar as aulas de Metodologia do Cálculo, ou didática da Aritmética, no Instituto de Educação do Estado da Guanabara.

Com o intuito de contornar dificuldades que o serviço de mimeógrafo acarreta, é que resolvemos imprimí-las até que nos seja possível apresentar, como esperamos, obra mais cuidada e definitiva. É possível, todavia, que os presentes resumos sirvam, mesmo assim, às normalistas e aos professôres de curso primário.

FRANÇA CAMPOS

---

* Master of Arts, Master of Education
George Peabody College for teachers, Nashville, tenn., EE.UU.

OBJETIVOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA NA ESCOLA PRIMÁRIA

a) Desenvolver, na criança, a capacidade de pensar, em qualquer situação. Dar-lhe o poder de abstrair-se, concentrar-se, raciocinar e discernir.

b) Dotar o aluno de conhecimentos e habilidades que o possibilitem a analisar uma situação quantitativa, ou um problema ,de modo que, percebendo as relações existentes entre dados e incógnitas, venha a descobrir ou determinar cada uma destas, por meio de operações efetuadas com segurança e rapidez.

c) Levar o estudante à aquisição de hábitos e atitudes desejáveis, que se transfiram aos demais setores de suas atividades, assim as presentes como as futuras. São hábitos que merecem firmados: o de exatidão, o de ordem e clareza, o de linguagem precisa e correta, o de observação cuidadosa, o de julgamento sôbre bases seguras. São atitudes a desenvolver: a de apreciar o que é precioso e meritório, a de respeitar a verdade, a de ser atento, a de interessar-se pela beleza das formas geométricas e pelo aspecto quantitativo das coisas.

d) Lançar os fundamentos para estudos mais avançados que porventura venha o aluno a fazer.

CONTAGEM

1) Na aprendizagem da Matemática, a experiência fundamental é a contagem. Contar constitui o primeiro passo para adquirir o sentido de número e para compreender a adição e a multiplicação.

2) Nos primeiros estágios da contagem, os nomes dos números, como também êstes, não têm sentido para as crianças, que só se apropriam dêle, e o vão dilatando, gradativamente, através de experiências sucessivas.

3) O processo de contar consiste em fazer corresponder, sucessivamente, um e sòmente um dos nomes dos números, em sua sucessão natural, a um e sòmente um dos objetos ou elementos de um conjunto. É isto a contagem racional. A contagem comum, ou contagem-recitação, consiste simplesmente em enunciar ou recitar os nomes dos números segundo a ordem em que êstes se apresentam na sucessão natural. Embora êste tipo de contagem mereça ser considerado, convém que se ponha ênfase na contagem de objetos ou coisas.

4) Há muito que contar numa sala de aula. Podem contar-se os livros de uma prateleira, ou os livros de histórias, ou os que são necessários a um grupo de leitura. Podem contar-se os cadernos de Desenho, os de Aritmética, os de Português. Podem contar-se os lápis, os apontadores, as borrachas,

as pastas, os armários, as lâmpadas, as janelas, os vasos de flôres, as flôres, os peixes do aquário, as ferramentas, os blocos de madeira, os recortes de revista, os aeroplanos ou automóveis de uma figura, as figuras de um mostrador, os alunos presentes, os meninos, as meninas, os seus brinquedos, os passos de um grupo em marcha, os pontos ganhos ou perdidos num jôgo, etc....

5) Além da contagem-recitação, um, dois, três..., e da contagem dos elementos de um conjunto, é de tôda a conveniência a contagem por grupo: dois, quatro, seis..., três, seis, nove..., quatro, oito, doze..., cinco, dez, quinze..., dez, vinte, trinta..., cem, duzentos, trezentos.... Êsse tipo de contagem constitui apreciável auxílio à adição e à multiplicação. Deve contar-se também segundo a ordem decrescente: dez, nove, oito..., dez, oito, seis... O limite a atingir, quando se conta em ordem crescente, ou o ponto de partida para a contagem em ordem decrescente, depende da capacidade do aluno e da série que esteja cursando. Compete ao professor, todavia, muito mais do que atender ao programa, fazer quanto puder, em benefício da criança.

NUMERAÇÃO

6) O primeiro sentido de número a ser desenvolvido deve ser o de número cardinal. Em fase de experiências semiconcretas, convém, para evitar

confusões, dispor os símbolos numéricos dos números cardinais logo abaixo das respectivas coleções. Assim, por exemplo:

0	00	000	0 0	0 0	
			0 0	0	Etc.
				0 0	
1	2	3	4	5	

7) Na aprendizagem dos números digitos, quase sempre já conhecidos da criança em idade escolar, podem observar-se as seguintes etapas:

a) Apresentação do nome do número e do seu símbolo. (Enquanto a criança não sabe ler nem escrever, a apresentação do nome do número só se faz oralmente).

b) Identificação do número de objetos com o símbolo numérico ou com o nome do número, escrito ou enunciado. (Só enunciado, se a criança ainda não sabe ler).

c) Aumento do número de objetos de um conjunto, a fim de obter-se um conjunto maior, isto é, de número igual ao que está sendo aprendido. Esta etapa não existe, portanto, na aprendizagem do número um.

d) Diminuição do número de objetos de um conjunto, a fim de obter-se um outro conjunto com um número de objetos igual ao que está sendo aprendido.

e) Representação, por escrito, do nome do número cardinal de um conjunto e de seu símbolo (ou só do símbolo se a criança não sabe escrever).

8) O número dez pode ser aprendido do modo como se aprendem os dígitos e em relação com cada um dêles, até o ponto em que os alunos sejam capazes de perceber, claramente, que êle é 9 mais 1, 8 mais 2, 7 mais 3..., 1 mais 9. É necessário, todavia, chamar a atenção para o seguinte: os números representativos das várias coleções de objetos, como também o número representativo de um só objeto, eram escritos com um símbolo único, ou um só algarismo. O número dez, porém, e outros muitos, não podem ser escritos com um só algarismo, senão com dois ou mais.

9) É oportuno mostrar que, se o número dez se escreve com um zero, à direita do algarismo 1, do mesmo modo, os números vinte, trinta, quarenta... noventa, são escritos com um zero à direita dos algarismos 2, 3, 4... 9. O zero à direita indica que o conjunto considerado tem um número exato de dezenas: uma dezena, duas dezenas, três dezenas... nove dezenas.

10) Quando há num conjunto, mais de dez elementos mas não há, exatamente, duas, três, quatro ou mais dezenas dêles, nem chega a haver uma centena, então êsse conjunto deve ser considerado como composto de dois outros. Exemplos:

16 é 10 mais 6
23 é 20 mais 3.

Faça-se comparar 10 com 16, 20 com 23. Em 10 e em 20 há o zero; em 16 e em 23 não há. O símbolo 10 representa um conjunto de dez coisas e sòmente dez. O símbolo 16, porém, representa um conjunto composto de dez mais seis coisas.O símbolo 20 representa um conjunto com sòmente dez mais dez elementos, ou duas dezenas de elementos, ou ainda vinte elementos. O símbolo 23, porém, representa um conjunto com dez mais dez, mais três elementos, ou seja, vinte mais três, ou vinte e três elementos. Tenha-se, pois, em mente que, no sistema de base dez, a idéia de dezena é fundamental.

11) À medida que os alunos se vão adiantando no estudo dos números e da numeração, a idéia fundamental de dezena, se vai também dilatando. Chegam como que a ver, dentro de um número, as dezenas de que é constituido. Assim é que em 130, 275, 4023, por exemplo, podem enxergar, respectivamente, 13, ou 27, ou 402 dezenas. O ábaco, que tanto se presta a tornar compreendido o princípio fundamental da numeração escrita, como também perfeitamente clara a função primordial do zero, presta-se ainda a evidenciar, e de modo nítido, as dezenas de que um número se constitui.

12) O professor deve iniciar o ensino da numeração, servindo-se de um ábaco de areia, de três seções. Nestas, as marcas feitas por crianças da classe, à medida que se lhes conta uma história de como um menino da antiguidade tomava conta dos rebanhos de seu pai, por exemplo, representam unidades, dezenas e centenas, respectivamente. E' razoável, sem dúvida, que nas primeiras experiências se empreguem apenas duas seções do ábaco: as que representam as ordens das unidades e das dezenas.

13) No estudo da numeração, é conveniente fazer representar no ábaco os seguintes números, entre outros: 1, 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

14) O ábaco é o melhor instrumento para levar o aluno a ter bem clara a idéia fundamental de dezena, e a de dezena de dezenas ou centena. E' o mais apropriado recurso com que conduzir a criança a compreender a função primordial do zero no sistema indo-arábico de numeração: a de indicar, no símbolo numérico, a ausência de unidades de uma ou mais ordens. O símbolo 502, por exemplo, é representativo de um conjunto de cinco centenas de unidades simples, mais duas delas. Num ábaco teriamos a indicação:

15) O sistema decimal de numeração é um sistema de posições hierárquicas. E é fácil conduzir o aluno a bem compreender o que é o valor de posição, ou o valor relativo de um algarismo, servindo-se do ábaco.

16) Devem-se pôr, no quadro negro, esquemas de ábacos de três seções, com marcas de unidades,

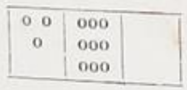
dezenas e centenas; de unidades e centenas; de unidades e dezenas; de dezenas e centenas. Deve-se também, fazer com que os alunos escrevam, cada um no seu caderno, todos os números representados, e que representem, em esquemas ou desenhos de ábacos, outros números que se escrevam no quadro.

17) Vale a pena preparar um conjunto de cartões, de dimensões apropriadas, dividido, cada um dêles, numa face e noutra, em três seções distintamente visíveis. Cada aluno, quando nomeado, após a classe ter visto o cartão apresentado, deverá dizer qual o número que nêle figura. Um só cartão representa quatro ábacos e, portanto, quatro números. Se forem preparados vinte cinco, haverá cem números diferentes para exercícios de interpretação. Exemplo de um cartão:

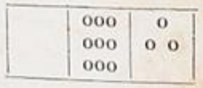
Face *a*: 506

Face *a*: 605

Face *b*: 390



Face *b*: 93



18) Em virtude das classes, do valor relativo dos algarismos e da função primordial do zero, é sempre possível, no sistema indo-arábico de numeração, representar um número inteiro qualquer

com o emprêgo de um símbolo ideal, compacto, expressivo, e do qual não participe nenhum elemento diferente dêstes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

19) Os alunos devem escrever no quadro negro e no caderno de Aritmética números vários, de três, quatro, cinco ou mais algarismos. Escrevendo-os no quadro negro, deverão enunciá-los com ênfase e pausa nas palavras que designam as classes.

20) No sistema decimal indo-arábico, são as classes que permitem nomear, com tão poucos nomes, tão grande número de números. Se um aluno sabe contar e, portanto, dar nome aos números, desde 1 até 999, saberá também, com o só aprender os nomes das três classes seguintes à primeira, nomear todos os números, desde 1 até .... 999999999999. São ainda as classes que facilitam escrever números como êste, por exemplo, ou maiores: quatrocentos e vinte bilhões, sete milhões, trinta e cinco mil e dois (420007035002). Só é fácil, todavia, escrever números assim, quando se tem em mente que tôdas as classes, excluída a mais elevada, apresentam necessàriamente três ordens e, portanto, três algarismos, ainda que seja zero cada um dêles. A classe cujo nome primeiro se enuncia é a única que pode ter um, dois ou três algarismos.

21) As ordens se classificam em 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª, 5.ª, etc., sendo de 1.ª ordem o algarismo das unidades simples. No número 728963, por exemplo, o algarismo de 4.ª ordem é 8. Classificam-se também as ordens em pares e ímpares. Or-

dens pares são as 2.ª, 4.ª, 6.ª etc., e impares as 1.ª, 3.ª, 5.ª etc. No número 728963., são algarismos de ordem par: 6, 8 e7; são algarismos de ordem impar: 3, 9 e 2.

22) Quando os alunos se iniciam na leitura de números cujos algarismos se distribuem por duas ou mais classes, é razoável permitir que usem traços separatrizes que as tornem evidentes e sirvam também para sugerir ou lembrar que enunciem enfàticamente, após os nomes um, dois, três, ... novecentos e noventa e nove, aquêles outros que as designam: mil, milhões, bilhões etc.

23) Vale a pena recorrer ao sistema romano de numeração e estabelecer paralelos que evidenciem a simplicidade do decimal indo-arábico. Vale a pena também fazer perguntas que conduzam o aluno a redescobrir, uma a uma, as razões pelas quais, num sistema, em relação ao outro, os números porventura dados podem ser escritos de modo tão simples. Exemplos: 555, DLV; 1111, MCXI; 333, CCCXXXIII; 761, DCCLXIV.

24) A numeração romana deve ser ensinada, não porque tenha real e encontradiço emprêgo, mas por servir a êstes dois objetivos: evidenciar a simplicidade da numeração indo-arábica e concorrer para um certo desembaraço inicial em cálculos mentais de adição e subtração. Com efeito: se um aluno tiver de escrever, em romanos,

os números dados à esquerda, por exemplo, há de fazer mentalmente as operações à direita.

a) 40 ou XL	a) 50 — 10
b) 300 ou CCC	b) 100 + 100 + 100
c) 589 ou DLXXXIX	c) 500 + (50 + 30) + (10 — 1)
d) 494 ou CDXCIV	d) (500 — 100) + (100 — 10) + (5 — 1)
e) 1768 ou MDCCLXVIII	e) 1000 + (500 + 200) + (50 + 10) + (5 + 3)

25) É fundamental, em numeração romana, que os alunos aprendam a ler e a escrever os seguintes números-somas e números-diferenças, usados como parcelas na composição de outros:

II, III, XX, XXX, CC, CCC, MM, MMM, LX, LXX, LXXX, DC, DCC, DCCC, IV, IX, XL, XC, CD, CM.

26) Quando um número não indica quantos objetos existem num conjunto, ou não lhe caracteriza a cardinalidade, não é possível chamar-lhe cardinal. Muitos pensam que os números cujos símbolos são um ou mais algarismos indo-arábicos como, por exemplo, 2, 25, 301, são necessàriamente cardinais. Quando digo, todavia, que moro num apartamento de número 402, que dou aulas numa sala de número 221, ou que viajo no bonde 12, estou empregando 402, 221 e 12 como números ordinais. Com efeito: 402 indica o 2.º apartamento do 4.º andar; 221, 21ª sala do 2.º andar; o 12, o bonde da 12ª linha. Números ordinais não são, portanto, sòmente êstes: 1.º, 2.º

3.º etc. Quando informo que Maria se levanta às 6 horas, toma café às 7, sai de casa às 8, chega ao colégio às 9, entra na sala 15, guarda seus livros no armário 18 e senta-se à mesa 20, estou empregando como ordinais os números 6, 7, 8, 9, 15, 18 e 20.

27) Quando um número caracteriza a cardinalidade de um conjunto que se pode dividir em dois outros iguais, êsse número é chamado par. A noção dêsse tipo numérico há de ser dada através de experiências concretas e semiconcretas de divisão de um conjunto em dois outros, cada um dos quais com o mesmo número de elementos. E cabe aos alunos descobrir que o símbolo numérico de qualquer conjunto divisível em dois idênticos é tal que o algarismo da 1.ª ordem não pode ser outro senão 0, 2, 4, 6 ou 8. Ninguém pretenda ensinar o que é número par, servindo-se de pares de luvas, brincos, sapatos e meias, ou de jogos de "quem é meu par?". O procedimento é impróprio, por conduzir à falsa idéia de que par é o número cardinal de um conjunto de só dois elementos. Note-se ainda que o número par ou impar, por sua natureza, é necessàriamente cardinal. Se o número de uma sala é 12, por exemplo, ou 13, não chamaria par àquele, nem impar a êste.

ADIÇÕES E SUBTRAÇÕES FUNDAMENTAIS — UNIDADES BÁSICAS

28) Adições fundamentais são adições indicadas de dois números de um só algarismo. Exemplo: $0 + 0$, $4 + 0$, $0 + 2$, $5 + 3$, $9 + 9$. Subtrações

fundamentais são subtrações indicadas cujos têrmos — subtraendo e resto — são números de um só algarismo. Exemplo: $0 - 0$, $5 - 0$, $6 - 6$, $9 - 3$, $18 - 9$.

29) As adições e as subtrações fundamentais dividem-se em fáceis, difíceis e com zero. São fáceis as adições fundamentais de soma igual ou inferior a 10, cujas parcelas são números dígitos; são difíceis as de soma maior que 10. São fáceis as subtrações fundamentais de minuendo igual ou inferior a 10, com subtraendo e resto dígitos; são difíceis as de minuendo maior que 10. Adições ou subtrações fundamentais com zero são as do tipo $0 + 0$, $n + 0$, $0 + n$, ou $0 - 0$, $n - 0$, $n - n$, respectivamente, onde n é dígito. Chamamos dígitos aos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

30) As adições fundamentais, ou as subtrações, assim se distribuem: 45 fáceis, 36 difíceis, 19 com zero.

ADIÇÕES FUNDAMENTAIS FÁCEIS:

1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	8
1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	8	1

1	9	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2	7	2	8
9	1	2	3	2	4	2	5	2	6	2	7	2	8	2

3	3	4	3	5	3	6	3	7	4	4	5	4	6	5
3	4	3	5	3	6	3	7	3	4	5	4	6	4	5

ADIÇÕES FUNDAMENTAIS DIFÍCEIS

2 9 3 8 3 9 4 7 4 8 4 9 5 6 5 7 5 8
9 2 8 3 9 3 7 4 8 4 9 4 6 5 7 5 8 5

5 9 6 6 7 6 8 6 9 7 7 8 7 9 8 8 9 9
9 5 6 7 6 8 6 9 6 7 8 7 9 7 8 9 8 9

ADIÇÕES FUNDAMENTAS COM ZERO:

0 0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7 0 8 0 9
0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7 0 8 0 9 0

SUBTRAÇÕES FUNDAMENTAIS FÁCEIS:

2 3 4 5 6 7 8 9 3 4 5 6	10 10 10
1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2	1 2 3
7 8 9 4 5 6 7 8 9 5 6 7	10 10 10
2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4	4 5 6
8 9 6 7 8 9 7 8 9 8 9 9	10 10 10
4 4 5 5 5 5 6 6 6 7 7 8	7 8 9

SUBTRAÇÕES FUNDAMENTAIS DIFÍCEIS

11 11 11 11 11 11 11 11 12 12 12 12
2 3 4 5 6 7 8 9 3 4 5 6

12 12 12 13 13 13 13 13 13 14 14 14
7 8 9 4 5 6 7 8 9 5 6 7

14 14 15 15 15 15 16 16 16 17 17 18
8 9 6 7 8 9 7 8 9 8 9 9

SUBTRAÇÕES FUNDAMENTAIS COM ZERO:

0 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 7 7 8 8 9 9
0 0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7 0 8 0 9

31) As adições e subtrações fundamentais fáceis devem ser paralelamente estudadas e aprendidas através de unidades básicas, cuja apresentação, em fase inicial, há de ser objetiva. Com lápis de côr, por exemplo, e com desenhos dêles em leques de cartolina, que se tomem dois a dois, é possível representar, uma a uma, as adições e as subtrações de cada unidade. E tôda a classe deve usar, ao traduzir as várias representações, linguagem usual, econômica e apropriada. Ao acompanhar, por exemplo, as operações da unidade à esquerda, o aluno deve empregar linguagem como a que vem à direita:

3 — 1	Três menos um: dois
2 + 1	Dois e um: três
3 — 2	Três menos dois: um
1 + 2	Um e dois: três

Enquanto o professor acompanha inicialmente o aluno, dizendo "Três menos um: dois", retira com uma das mãos um dos lápis que a outra segura e o faz como que desaparecer, levando-o até as costas. Ao devolvê-lo, há de ouvir do aluno, ou dizer com êle: "Dois e um: três". E assim por diante.

32) Há 25 unidades básicas fáceis, de adição e subtração:

2 — 1 = 1	3 — 1 = 2	4 — 1 = 3
1 + 1 = 2	2 + 1 = 3	3 + 1 = 4
—	3 — 2 = 1	4 — 3 = 1
—	1 + 2 = 3	1 + 3 = 4
4 — 2 = 2	5 — 1 = 4	5 — 2 = 3
2 + 2 = 4	4 + 1 = 5	3 + 2 = 5
—	5 — 4 = 1	5 — 3 = 2
—	1 + 4 = 5	2 + 3 = 5
6 — 1 = 5	6 — 2 = 4	6 — 3 = 3
5 + 1 = 6	4 + 2 = 6	3 + 3 = 6
6 — 5 = 1	6 — 4 = 2	—
1 + 5 = 6	2 + 4 = 6	—
7 — 1 = 6	7 — 2 = 5	7 — 3 = 4
6 + 1 = 7	5 + 2 = 7	4 + 3 = 7
7 — 6 = 1	7 — 5 = 2	7 — 4 = 3
1 + 6 = 7	2 + 5 = 7	3 + 4 = 7
8 — 1 = 7	8 — 2 = 6	8 — 3 = 5
7 + 1 = 8	6 + 2 = 8	5 + 3 = 8
8 — 7 = 1	8 — 6 = 2	8 — 5 = 3
1 + 7 = 8	2 + 6 = 8	3 + 5 = 8

8 — 4 = 4	9 — 8 = 1	9 — 2 = 7
4 + 4 = 8	8 + 1 = 9	7 + 2 = 9
—	9 — 8 = 1	9 — 7 = 2
—	1 + 8 = 9	2 + 7 = 9
9 — 3 = 6	9 — 4 = 5	10 — 1 = 9
6 + 3 = 9	5 + 4 = 9	9 + 1 = 10
9 — 6 = 3	9 — 5 = 4	10 — 9 = 1
3 + 6 = 9	4 + 5 = 9	1 + 9 = 10
10 — 2 = 8	10 — 3 = 7	10 — 4 = 6
8 + 2 = 10	7 + 3 = 10	6 + 4 = 10
10 — 8 = 2	10 — 7 = 3	10 — 6 = 4
2 + 8 = 10	3 + 7 = 10	4 + 6 = 10
	10 — 5 = 5	
	5 + 5 = 10	
	—	
	—	
	—	
	—	

33) Passada a fase de objetivação, as 25 diferentes unidades acima podem ser reestudadas com mais cômoda apresentação: com aquela onde se dispõem primeiramente as adições e depois as subtrações. Exemplo: 1 + 2 = 3, 2 + 1 = 3, 3 — 2 = 1, 3 — 1 = 2. Damos, a seguir, a operação inicial de cada unidade a completar:

1) 1 + 1	4) 1 + 4	7) 1 + 7
2) 1 + 2	5) 1 + 5	8) 1 + 8
3) 1 + 3	6) 1 + 6	9) 1 + 9

10) $2 + 2$	12) $2 + 4$	14) $2 + 6$
11) $2 + 3$	13) $2 + 5$	15) $2 + 7$

16) $2 + 8$	21) $3 + 7$
17) $3 + 3$	22) $4 + 4$
18) $3 + 4$	23) $4 + 5$
19) $3 + 5$	24) $4 + 6$
20) $3 + 6$	25) $5 + 5$

34) Independentemente do estudo das 25 unidades básicas de adições e subtrações, convém que se aprendam e se fixem, tão cedo quanto possivel as seguintes relações: $2 + 2 = 4$; $4 - 2 = 2$; $3 + 3 = 6$; $6 - 3 = 3$; $4 + 4 = 8$; $8 - 4 = 4$; $5 + 5 = 10$; $10 - 5 = 5$. Com tais relações, pode-se conduzir o aluno a raciocinios como os seguintes, por exemplo: se $2 + 2 = 4$, então $2 + 3 = 5$, ou $3 + 2 = 5$; se $8 - 4 = 4$, então $8 - 5 = 3$, ou $8 - 3 = 5$.

35) As adições e subtrações fundamentais dificeis, de soma, ou minuendo, maior que 10, respectivamente, devem ser estudadas, como as fáceis, através de unidades básicas, de experiências concretas e semiconcretas, e de raciocinios como os seguintes: Se $2 + 8 = 10$, então $2 + 9 = 11$. Se $3 + 7 = 10$, então $3 + 8 = 11$, ou $8 + 3 = 11$.

36) E' conveniente que, tão cedo quanto possivel, sejam aprendidas e fixadas as seguintes relações: $6 + 6 = 12$; $12 - 6 = 6$; $7 + 7 = 14$; $14 - 7 = 7$; $8 + 8 = 16$; $16 - 8 = 8$; $9 + 9 = 18$; $18 - 9 = 9$. São pontos de apoio para relações como estas: Se $6 + 6 = 12$, então $6 + 7 = 13$, ou $7 + 6 = 13$; se $7 + 7 = 14$, então $7 + 8 = 15$, ou $8 + 7 = 15$, etc.; se $12 - 6 = 6$, então $12 - 5 = 7$, ou $12 - 7 = 5$; se $14 - 7 = 7$, então $14 - 6 = 8$, $14 - 8 = 6$, etc.

37) As 20 unidades que encerram as adições e subtrações fundamentais dificeis são as seguintes:

$2 + 9 = 11$	$3 + 8 = 11$	$3 + 9 = 12$
$9 + 2 = 11$	$8 + 3 = 11$	$9 + 3 = 12$
$11 - 9 = 2$	$11 - 8 = 3$	$12 - 9 = 3$
$11 - 2 = 9$	$11 - 3 = 8$	$12 - 3 = 9$
$4 + 7 = 11$	$4 + 8 = 12$	$4 + 9 = 13$
$7 + 4 = 11$	$8 + 4 = 12$	$9 + 4 = 13$
$11 - 7 = 4$	$12 - 8 = 4$	$13 - 9 = 4$
$11 - 4 = 7$	$12 - 4 = 8$	$13 - 4 = 9$
$5 + 6 = 11$	$5 + 7 = 12$	$5 + 8 = 13$
$6 + 5 = 11$	$7 + 5 = 12$	$8 + 5 = 13$
$11 - 6 = 5$	$12 - 7 = 5$	$13 - 8 = 5$
$11 - 5 = 6$	$12 - 5 = 7$	$13 - 5 = 8$
$5 + 9 = 14$	$6 + 6 = 12$	$6 + 7 = 13$
$9 + 5 = 14$	$12 - 6 = 6$	$7 + 6 = 13$
$14 - 9 = 5$	—	$13 - 7 = 6$
$14 - 5 = 9$	—	$13 - 6 = 7$

6 + 8 = 14	6 + 9 = 15	7 + 7 = 14
8 + 6 = 14	9 + 6 = 15	14 — 7 = 7
14 — 8 = 6	15 — 9 = 6	—
14 — 6 = 8	15 — 6 = 9	—
7 + 8 = 15	7 + 9 = 16	8 + 8 = 16
8 + 7 = 15	9 + 7 = 16	16 — 8 = 8
15 — 8 = 7	16 — 9 = 7	—
15 — 7 = 8	16 — 7 = 9	—
8 + 9 = 17	9 + 9 = 18	
9 + 8 = 17	18 — 9 = 9	
17 — 9 = 8	—	
17 — 8 = 9	—	

38) As adições e subtrações com zero devem ser estudadas em atenção a princípios gerais, e em momento oportuno: quando se considerem adições de números de dois ou mais algarismos, nos quais ocorra o zero, como em 40+23, por exemplo. Os alunos podem aprender, de uma vez, tôdas as adições e subtrações com zero, compreendendo que: a) dados dois números, se um dêles é zero, a soma dos dois é igual ao outro; b) se de um número subtrairmos outro igual, o resultado é zero; c) se de um número subtrairmos zero, o resultado é o número dado.

MULTIPLICAÇÕES E DIVISÕES FUNDAMENTAIS

UNIDADES BÁSICAS

39) A multiplicação deve ser ensinada como um caso particular da adição: uma adição de números

iguais. Exemplos: 2×2 = 2+2; 3×2 = 2+2+2; 4×7 = 7+7+7+7.

40) **Multiplicações fundamentais** são multiplicações indicadas de dois inteiros, ambos inferiores a 10. Dividem-se em fáceis, difíceis e com zero. São fáceis aquelas em que o multiplicando, o multiplicador, ou cada um dos fatôres é 1, 2 ou 5. Exemplos: 4×1, 1×6, 2×7, 9×2, 3×5, 5×8, 2×5, 1×1, 2×2, 5×5. São difíceis aquelas outras que têm, por multiplicando e multiplicador, números dígitos diferentes de 1, 2 e 5. Eexemplos: 3×8, 6×6, 9×4. São multiplicações fundamentais com zero as de produto zero. Exemplos: 0×0, 6×0, 0×9.

41) Divisões fundamentais são divisões indicadas, de quociente e divisor inferiores a 10, não sendo zero o divisor. Exemplos: 8:2, 12:3, 45:9, 7:1, 6:6, 0:4. Dividem-se em fáceis, difíceis e com zero. Fáceis são aquelas cujo divisor ou cujo quociente é 1, 2 ou 5. Exemplos: 6:1, 6:6, 16:2, 16:8, 35:5, 35:7, 10:2, 10:5. Difíceis são aquelas outras nas quais o divisor e o quociente são números dígitos diferentes de 1, 2 e 5. Exemplos: 9:3, 32:4, 56:8. Divisões fundamentais com zero são as de quociente zero. Exemplos: 0:3, 0:5.

42) Note-se que em multiplicação, não é o produto, menor ou maior, que indica ser fácil o elemento de tabuada. Consideremos as multiplicações fundamentais fáceis. As do tipo IXN ou NXI, onde N = 1, 2, 3. . . 9, são fáceis porque o resultado é sempre N. Fáceis são também aquelas nas quais

um fator, pelo menos, é 2 ou 5. Se 2 é o multipli- cando da fundamental, a experiência anterior, de contagem, torna fácil descobrir-lhe o produto. Exemplo: $7\times2 = 2+2+2+2+2+2+2 = 14$. Com efeito, conte-se: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14. Se 2 é o mul- tiplicador, como em $2\times7 = 7+7 = 14$, então a noção elementar de dôbro auxilia a descoberta do resultado. Se o multiplicando é 5, como em $4\times5 = 5+5+5+5 = 20$, intervém ainda a conta- gem: 5, 10, 15, 20. Se o multiplicador é 5, pode notar-se o seguinte: o produto é 10, 20, 30 ou 40, se o multiplicando é par; e é 15, 25, 35, 45, se o multiplicando é impar. De um modo geral, ain- da: é zero (0) ou 5 o algarismo da 1.ª ordem do produto de dois números, se um dêstes, pelo me- nos, multiplicando ou multiplicador, é 5.

43) Consideram-se realmente fáceis, ou difíceis, as di- visões fundamentais assim qualificadas, porque umas e outras se relacionam, respectivamente, com as multiplicações fundamentais fáceis, ou di- fíceis. Exs.: a) $5\times7 = 35$; $7\times5 = 35$; $35:7 = 5$; $35:5 = 7$; b) $8\times9 = 72$; $9\times8 = 72$; $72:9 = 8$; $72:8 = 9$.

MULTIPLICAÇÕES FUNDAMENTAIS FÁCEIS:

1 1 2 1 3 1 4 1 5 1 6 1 7 1 8

1 2 1 3 1 4 1 5 1 6 1 7 1 8 1

1 9 2 2 3 2 4 2 5 2 6 2 7 2 8

9 1 2 3 2 4 2 5 2 6 2 7 2 8 2

2 9 3 5 4 5 5 5 6 5 7 5 8 5 9

9 2 5 3 5 4 5 6 5 7 5 8 5 9 5

DIVISÕES FUNDAMENTAIS FÁCEIS:

1/1	2/1	2/2	3/1	3/3	4/1	4/4
5/1	5/5	6/1	6/6	7/1	7/7	8/1
8/8	9/1	9/9	4/2	6/2	6/3	8/2
8/4	10/2	10/5	12/2	12/6	14/2	14/7
16/2	16/8	18/2	18/9	15/3	15/5	20/4
20/5	25/5	30/5	30/6	35/5	35/7	40/5
40/8	45/5	45/9				

MULTIPLICAÇÕES FUNDAMENTAIS DIFÍCEIS:

3 3 4 3 6 3 7 3 8 3 9 4

3 4 3 6 3 7 3 8 3 9 3 4

4 6 4 7 4 8 4 9 6 6 7 6

6 4 7 4 8 4 9 4 6 7 6 8

8 6 9 7 7 8 7 9 8 8 9 9

6 9 6 7 8 7 9 7 8 9 8 9

DIVISÕES FUNDAMENTAIS DIFÍCEIS:

9/3	12/3	12/4	18/3	18/6	21/3	21/7
24/3	24/8	27/3	27/9	16/4	24/4	24/6
28/4	28/7	32/4	32/8	36/4	36/9	36/6
42/6	42/7	48/6	48/8	54/6	54/9	49/7
56/7	56/8	63/7	63/9	64/8	72/8	72/9
81/9						

DIVISÕES FUNDAMENTAIS COM ZERO:

0/1 0/2 0/3 0/4 0/5 0/6 0/7 0/8 0/9

44) O número de multiplicações fundamentais fáceis, como o de divisões, é 45. Mas êste número baixa a 28, visto que há 17 elementos em cada um dos dois primeiros quadros acima, que podem ser aprendidos, todos de uma vez, em atenção ao seguinte: a) dados dois fatôres, diferentes de zero, se um dêles é 1, o produto é igual ao outro; b) dados dois números, dividendo e divisor, se êste é 1, o quociente é igual ao outro; c) dados dois números iguais, diferentes de zero, dividendo e divisor, o quociente é 1.

45) Cabe aos alunos descobrir os resultados das multiplicações e divisões fundamentais, que devem estudar e aprender através de experiências com as unidades básicas que as encerram.

46) Há 15 unidades básicas, de multiplicações e divisões fundamentais:

$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	$4 \times 2 = 8$
$4 \div 2 = 2$	$2 \times 3 = 6$	$2 \times 4 = 8$
—	$6 \div 2 = 3$	$8 \div 2 = 4$
—	$6 \div 3 = 2$	$8 \div 4 = 2$
$5 \times 2 = 10$	$6 \times 2 = 12$	$7 \times 2 = 14$
$2 \times 5 = 10$	$2 \times 6 = 12$	$2 \times 7 = 14$
$10 \div 2 = 5$	$12 \div 2 = 6$	$14 \div 2 = 7$
$10 \div 5 = 2$	$12 \div 6 = 2$	$14 \div 7 = 2$

$8 \times 2 = 16$	$9 \times 2 = 18$	$3 \times 5 = 15$
$2 \times 8 = 16$	$2 \times 9 = 18$	$5 \times 3 = 15$
$16 \div 2 = 8$	$18 \div 2 = 9$	$15 \div 5 = 3$
$16 \div 8 = 2$	$18 \div 9 = 2$	$15 \div 3 = 5$
$4 \times 5 = 20$	$5 \times 5 = 25$	$6 \times 5 = 30$
$5 \times 4 = 20$	$25 \div 5 = 5$	$5 \times 6 = 30$
$20 \div 5 = 4$	—	$30 \div 5 = 6$
$20 \div 4 = 5$	—	$30 \div 6 = 5$
$7 \times 5 = 35$	$8 \times 5 = 40$	$9 \times 5 = 45$
$5 \times 7 = 35$	$5 \times 8 = 40$	$5 \times 9 = 45$
$35 \div 5 = 7$	$40 \div 5 = 8$	$45 \div 5 = 9$
$35 \div 7 = 5$	$40 \div 8 = 5$	$45 \div 9 = 5$

47) O ponto de partida para o estudo de qualquer das unidades acima é uma adição de parcelas iguais, cuja soma pode ser obtida por meio de simples contagem, ou de contagem por grupos: 2, 4, 6, ... ou 5, 10, 15... Exemplo: 6×5 (leia-se seis vêzes cinco) $= 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$. Contando: 5, 10, 15, 20, 25, 30.

48) É possível ao aluno escrever tôdas as unidades básicas do parágrafo 46, desde que lhe seja dado, para a devida orientação, o primeiro elemento de cada uma delas, sem o produto, é claro, ou sem a soma das parcelas iguais. Há de ter percebido, todavia, não só a comutatividade da multiplicação, mas ainda: que dividindo o produto de dois números, por um dêles, o quociente é o outro. Compete ao professor conduzir de tal modo a introdução ao estudo de tais unidades, que os alunos venham a perceber, por exemplo: que, sendo

$3\times5=15$, então $5\times3=15$; sendo $3\times5 = 5\times3 = 15$, então $15\div3=5$ e $15\div5=3$.

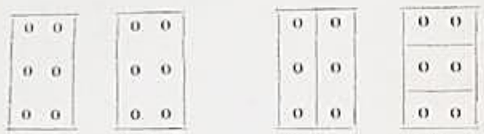
49) Convém esclarecer inicialmente, e sempre que necessário, as relações que caracterizam essas unidades de multiplicação e divisão, servindo-se de objetos ou de figuras. Exemplo:

$3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$ oo+oo+oo=oooooo

$2 \times 3 = 3 + 3 = 6$ ooo+ooo=oooooo

$6 \div 3 = 2$ oo/oo/oo (seis em três partes iguais)

$6 \div 2 = 3$ ooo/ ooo (seis em duas partes iguais)



$2\times3=6$ $3\times2=6$ $6\div2=3$ $6\div3=2$

50) Os alunos devem organizar tábuas como as seguintes, que evidenciam o fato de a multiplicação ser um caso de adição de parcelas iguais:

1×2	2×2	3×2	4×2	5×2	...
2	2	2	2	2	
	2	2	2	2	
	4	2	2	2	
		6	2	2	
			8	2	
				10	

2×1	2×2	2×3	2×4	2×5	...
1	2	3	4	5	
1	2	3	4	5	
2	4	6	8	10	

1×5	2×5	3×5	4×5	5×5	...
5	5	5	5	5	
	5	5	5	5	
	10	5	5	5	
		15	5	5	
			20	5	
				25	

5×1	5×2	5×3	5×4	5×5	...
1	2	3	4	5	
1	2	3	4	5	
1	2	3	4	5	
1	2	3	4	5	
1	2	3	4	5	
5	10	15	20	25	

51) As multiplicações e divisões fundamentais difíceis estudam-se através das 21 unidades básicas seguintes:

$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$	$6 \times 3 = 18$
$9 \div 3 = 3$	$3 \times 4 = 12$	$3 \times 6 = 18$
—	$12 \div 3 = 4$	$18 \div 3 = 6$
—	$12 \div 4 = 3$	$18 \div 6 = 3$

$7 \times 3 = 21$	$8 \times 3 = 24$	$9 \times 3 = 27$
$3 \times 7 = 21$	$3 \times 8 = 24$	$3 \times 9 = 27$
$21 \div 3 = 7$	$24 \div 8 = 3$	$27 \div 9 = 3$
$21 \div 7 = 3$	$24 \div 3 = 8$	$27 \div 3 = 9$
$4 \times 4 = 16$	$6 \times 4 = 24$	$7 \times 4 = 28$
$16 \div 4 = 4$	$4 \times 6 = 24$	$4 \times 7 = 28$
—	$24 \div 4 = 6$	$28 \div 7 = 4$
—	$24 \div 6 = 4$	$28 \div 4 = 7$
$8 \times 4 = 32$	$9 \times 4 = 36$	$6 \times 6 = 36$
$4 \times 8 = 32$	$4 \times 9 = 36$	$36 \div 6 = 6$
$32 \div 4 = 8$	$36 \div 4 = 9$	—
$32 \div 8 = 4$	$36 \div 9 = 4$	—
$7 \times 6 = 42$	$8 \times 6 = 48$	$9 \times 6 = 54$
$6 \times 7 = 42$	$6 \times 8 = 48$	$6 \times 9 = 54$
$42 \div 6 = 7$	$48 \div 6 = 8$	$54 \div 6 = 9$
$42 \div 7 = 6$	$48 \div 8 = 6$	$54 \div 9 = 6$
$7 \times 7 = 49$	$8 \times 7 = 56$	$9 \times 7 = 63$
$49 \div 7 = 7$	$7 \times 8 = 56$	$7 \times 9 = 63$
—	$56 \div 7 = 8$	$63 \div 7 = 9$
—	$56 \div 8 = 7$	$63 \div 9 = 7$
$8 \times 8 = 64$	$9 \times 8 = 72$	$9 \times 9 = 81$
$64 \div 8 = 8$	$8 \times 9 = 72$	$81 \div 9 = 9$
—	$72 \div 8 = 9$	—
—	$72 \div 9 = 8$	—

52) Cada aluno deverá descobrir, por si mesmo, a resposta ao 1.º elemento dado, de cada unidade, cujos restantes componentes escreverá, completando-os com os resultados. Exemplo: O estudante, à vista do que lhe é proposto como em (a), deve apresentar o que se nota em (b).

(a)	(b)
$6 \times 3 =$	$6 \times 3 = 18$
$=$	$3 \times 6 = 18$
$=$	$18 \div 3 = 6$
$=$	$18 \div 6 = 3$

53) Para que seja possível ao aluno descobrir o resultado chave, ou o primeiro resultado, de qualquer uma das 21 unidades básicas de multiplicações e divisões fundamentais difíceis, há de êle conhecer as adições complementares.

54) Chamamos complementares às adições indicadas de dois números, um de dois algarismos, outro digito, devendo êste ser somado àquele. Exemplo: 19 + 3. Adições complementares fáceis, são as que correspondem, como extensões ou prolongamentos, às adições fundamentais fáceis. Exemplo: 13 + 3, 25 + 3, 35 + 3; 12 + 8, 22 + 8, 32 + 8. Difíceis são as complementares correspondentes às fundamentais difíceis. Exemplo: 17 + 6, 27 + + 6, 37 + 6. Adições complementares com zero são as que correspondem, como prolongamentos, às adições do tipo 0 + 1, 0 + 2, 0 + 3 etc. Exemplos: 10 + 4, 20 + 4, 30 + 4. As adições complementares são fàcilmente aprendidas em virtude do fenômeno psicológico conhecido por transferência, o qual ocorre quando há, numa situação, elementos idênticos aos observados em outra. Assim, quem sabe 7 + 6 = 13, saberá logo 17 + + 6 = 23, 27 + 6 = 33, 37 + 6 = 43 etc., em vir-

tude de ocorrerem nas complementares o 7 e o 6 da fundamental 7 + 6.

55) Quem sabe as adições complemenatres, tôdas necessárias na adição de três ou mais números, e 175 delas na multiplicação ,pode descobrir, por adição, o resultado de qualquer elemento da tábua de multiplicar. Exemplo: $6 \times 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48$. Fazendo as adições 16, 24, 32, 40, 48. Nesta adição ocorrem as seguintes complementares: $16 + 8 = 24$; $24 + 8 = 32$; $32 + 8 + 40$; $40 + 8 = 48$. As duas primeiras são adições complementares difíceis; a terceira, adição complementar fácil; e a última, adição complementar com zero.

56) É conveniente que os alunos organizem, já agora, tábuas completas das multiplicações fundamentais, fáceis e difíceis, como já terão organizado as de multiplicações fundamentais fáceis. Exemplo de porções de tábuas:

1×3	2×3	3×3	4×3	5×3	6×3	...
3	3	3	3	3	3	
	3	3	3	3	3	
	6	3	3	3	3	
		9	3	3	3	
			12	3	3	
				15	3	
					18	

3×1	3×2	3×3	3×4	3×5	3×6	...
1	2	3	4	5	6	
1	2	3	4	5	6	
1	2	3	4	5	6	
3	6	9	12	15	18	

TABUADAS EM GERAL

57) Não há caminho suave para o ensino das tabuadas. É necessário, pois, ensiná-las com esfôrço, dedicação, inteligência e entusiasmo, evitando, com imaginação criadora e exercícios interessantes, que venham a transmudar-se, como não poucas vêzes, em horríveis espantalhos.

58) No ensino das tabuadas, convém ter em mente o seguinte:

a) A resposta individual é valiosa, mas a toada coletiva pouco adianta aos que não sabem.

b) A repetição individual de uma tabuada exige do aluno esfôrço por lembrar-se dela; mas a repetição coletiva, nunca de tôda a classe, demonstra simplesmente haver estudantes que a conhecem.

c) As relações entre elementos de tábua não devem passar despercebidas. Além de algumas já apontadas em parágrafos anteriores.

podem apontar-se outras, como estas, por exemplo: Se $2 \times 7 = 14$, então $4 \times 7 = 28$; se $3 \times 8 = 24$, então $6 \times 8 = 48$; se $4 \times 5 = 20$, então $8 \times 5 = 40$; se $10 \times 9 = 90$, então $5 \times 9 = 45$. Se $21 \div 7 = 3$, então $42 \div 7 = 6$; se $16 \div 8 = 2$, então $32 \div 8 = 4$; se $32 \div 8 = 4$, então $64 \div 8 = 8$.

d) Os alunos, hàbilmente conduzidos, devem descobrir certas propriedades que lhes despertem o interêsse. Exemplo: Em $2 \times 9 = 18$, $3 \times 9 = 27$, $4 \times 9 = 36$, $5 \times 9 = 45$, $6 \times 9 = 54$, $7 \times 9 = 63$, $8 \times 9 = 72$, $9 \times 9 = 81$, deve-se notar que, considerado qualquer dos resultados, desde 18 a 81, a soma dos valores absolutos dos dois algarismos é sempre 9.

59) É compensador guiar os alunos na organização sistemática de tôdas as 81 unidades básicas de elementos de tabuadas: 25 de adições e subtrações fundamentais fáceis, 20 de adições e subtrações difíceis, 15 de multiplicações e divisões fundamentais fáceis, 21 de multiplicações e divisões fundamentais difíceis. É razoável exigir que todos tenham um caderno não pautado, em cada uma de cujas páginas devam representar, sob forma abreviada ou compacta, como que em quadros ou molduras, quatro, seis ou oito unidades básicas, cada uma a sugerir ou lembrar as importantes relações entre o minuendo-soma e os subtraendos-parcelas, ou a maneira como se relacionam, com igual importância, o produto-dividendo e o fator-quociente-divisor.

7 +		5
	12 —	
5 +		7

8 ×		6
	48 ÷	
6 ×		8

60) É indispensável, à prática e fixação das tabuadas, que se organizem cartões-relâmpago, cada um dêles para uma das 81 unidades em que se distribuem os elementos das várias tábuas. Êsses cartões devem apresentar-se em quatro côres distintas: segundo encerrem adições e subtrações fáceis (25), adições e subtrações fundamentais difíceis (20), multiplicações e divisões fundamentais fáceis (15) e multiplicações e divisões fundamentais difíceis (21). Cada cartão terá as operações indicadas de uma unidade básica: numa face as adições, e noutra as subtrações; ou numa as multiplicações e noutra as divisões.

61) Convém verificar, de vez em quando, por meio de testes de tempo determinado, os pontos fracos de cada um dos alunos.
Exemplo de um teste que inclui as 36 subtrações fundamentais difíceis:

12 — 7 =	11 — 5 =
14 — 9 =	12 — 9 =
11 — 2 =	13 — 8 =
13 — 5 =	16 — 9 =

15 — 6 =	11 — 3 =
16 — 8 =	11 — 7 =
12 — 3 =	12 — 5 =
14 — 6 =	14 — 8 =
18 — 9 =	11 — 6 =
13 — 7 =	11 — 9 =
14 — 5 =	17 — 8 =
12 — 4 =	15 — 7 =
15 — 8 =	16 — 7 =
17 — 9 =	15 — 9 =
12 — 6 =	11 — 4 =
13 — 9 =	11 — 8 =
13 — 4 =	12 — 8 =
14 — 7 =	13 — 6 =

62) Das 810, ou $9 \times 45 + 9 \times 36 + 9\ (19 - 10)$ adições complementares existentes, 175 podem ocorrer na multiplicação. Com efeito: consideremos umas poucas multiplicações e vejamos quais as complementares, que ocorrem durante a operação que, em cada caso, se efetua. Reparando em como surgem, e qual a sua natureza, é fácil descobrir um meio de obtê-las tôdas.

		Complementares
42	7 vêzes 2... 14 ... vai 1	
7	7 vêzes 4... 28 ... 28 e 1 ... 29	28 + 1
294		
46	7 vêzes 6... 42 ... vão 4	
7	7 vêzes 4... 28 ... 28 e 4 ... 32	28 + 4
322		

49	7 vêzes 9... 63 ... vão 6	
7	7 vêzes 4... 28 ... 28 e 6 ... 34	28 + 6
343		
79	4 vêzes 9... 36 ... vão 3	
4	4 vêzes 7... 28 ... 28 e 3 ... 31	28 + 3
316		

Note-se o seguinte: a) o número de dois algarismos de uma complementar que ocorre em multiplicação é necessàriamente produto de dois dígitos: $28 = 4 \times 7 = 7 \times 4$; b) o maior número dígito de uma complementar que ocorre em multiplicação é igual ao excesso sôbre 1, do maior dos dois fatôres em que se decompõe a 1.ª parcela dessa complementar. O 3.º exemplo de multiplicação acima mostra claramente que 6, ou $7 - 1$, é a maior reserva que se pode somar a 28 visto que à direita do algarismo 4, do número 49, não pode estar nenhum algarismo de maior valor que 9. Convém observar finalmente o seguinte: se multiplicamos 79 por 4 em vez de 49 por 7, pondo o 7 no lugar do 4 e o 4 no lugar do 7, a primeira parcela da complementar que ocorre é ainda 28. Mas se o multiplicador é 4, a maior reserva é 3. Pode parecer assim que em multiplicação, só podem ocorrer, com o número 28, as complementares $28 + 1$, $28 + 2$, $28 + 3$. Dada, pois, a maior parcela de uma complementar capaz de ocorrer, ao multiplicar-se um número por outro, é necessário, não só decompô-lo de modo que um dos seus fatôres dígitos seja o maior possível, senão ainda considerar como provável multiplicador o maior dêsses dígitos. Exemplos: com o número 36, produto de 6 por 6, de 9 por 4 ou de 4 por 9, considerando 9 como o provável multiplicador, temos as seguintes complementares capazes de surgir em multiplicação: 36+1, 36+2, 36+3, 36+4, 36+5, 36+6, 36+7, 36+8.

63) O quadro seguinte encerra, em forma compacta, tôdas as 175 adições complementares necessárias em multiplicação:

Parcela maior	Fatôres	Complementares	Número de complementares
10	2 e 5	10 + 1... 10 + 4	4
12	2 e 6	12 + 1... 12 + 5	5
14	2 e 7	14 + 1... 14 + 6	6
15	3 e 5	15 + 1... 15 + 4	4
16	2 e 8	16 + 1... 16 + 7	7
18	2 e 9	18 + 1... 18 + 8	8
20	4 e 5	20 + 1... 20 + 4	4
21	3 e 7	21 + 1... 21 + 6	6
24	3 e 8	24 + 1... 24 + 7	7
25	5 e 5	25 + 1... 25 + 4	4
27	3 e 9	27 + 1... 27 + 8	8
28	4 e 7	28 + 1... 28 + 6	6
30	5 e 6	30 + 1... 30 + 5	5
32	4 e 8	32 + 1... 32 + 7	7
35	5 e 7	35 + 1... 35 + 6	6
36	4 e 9	36 + 1... 36 + 8	8
40	5 e 8	40 + 1... 40 + 7	7
42	6 e 7	42 + 1... 42 + 6	6
45	5 e 9	45 + 1... 45 + 8	8
48	6 e 8	48 + 1... 48 + 7	7
49	7 e 7	49 + 1... 49 + 6	6

54	6 e 9	54 + 1... 54 + 8	8
56	7 e 8	56 + 1... 56 + 7	7
63	7 e 9	63 + 1... 63 + 8	8
64	8 e 8	64 + 1... 64 + 7	7
72	8 e 9	72 + 1... 72 + 8	8
81	9 e 9	81 + 1... 81 + 8	8
			175

64) Do quadro acima destacamos as 44 adições complementares difíceis, que devem ser apresentadas, de vez em quando, em exercícios orais, a fim de que os alunos, ao estudarem a operação de multiplicação, possam progredir, vindo a multiplicar com desembaraço.

16	16	16	18	18	18	18	18	18	24	27
5	6	7	3	4	5	6	7	8	7	4
27	27	27	27	28	28	28	28	35	36	36
5	6	7	8	3	4	5	6	6	5	6
36	36	45	45	45	48	48	48	48	48	49
7	8	6	7	8	3	4	5	6	7	2
49	49	49	49	54	54	56	56	56	63	64
3	4	5	6	7	8	5	6	7	8	7

ADIÇÕES AUXILIARES FÁCEIS

65) Chamamos adições auxiliares fáceis às adições indicadas de três números dígitos, de soma menor que 10 ou igual a 10. São 120 adições com as

quais se podem organizar oportunamente exercícios de adição de três números de dois ou três algarismos, sem reserva a transportar. Tais adições permitem ainda que se pratiquem em situação nova as fundamentais fáceis. Com efeito: em 2 + 4 + 3, por exemplo, o aluno soma um 4 visível a um 2 também visível, mas soma, por fim, um 3 visível a um 6 invisível. As 120 adições auxiliares fáceis decorrem do quadro que apresentamos a seguir. Basta notar o seguinte: a cada um de seus elementos, de dois números iguais, correspondem três adições auxiliares, enquanto que a qualquer outro de três números diferentes correspondem seis adições auxiliares. Exemplos: ao elemento 1 + 1 + 2, do quadro, correspondem 1 + 1 + 2, 1 + 2 + 1, 2 + 1 + 1; ao elemento 1 + 2 + 3, correspondem 1 + 2 + 3, 2 + 1 + 3, 1 + 3 + 2, 3 + 1 + 2, 2 + 3 + 1, 3 + 2 + 1.

QUADRO-FONTE DAS ADIÇÕES AUXILIARES FÁCEIS

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3
1 2 3 4 5 6 7 8 2 3 4 5 6 7 3 4

1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3
3 3 4 4 2 2 2 2 2 3 3 3 4 3 3
5 6 4 5 2 3 4 5 6 3 4 5 4 3 4

66) A seguinte disposição da tábua de dividir, que encerra as 36 divisões fundamentais difíceis e 36

das 45 fáceis, facilita organizar os vários grupos de exercícios relativos a cada um dos casos de divisão a serem estudados oportunamente. Os dividendos correspondentes às divisões fáceis são apresentados entre parenteses. Não são dados os de tôdas as fáceis porque as divisões de divisor 1 não têm sentido prático.

DIVIDENDOS									DIVISOR
(2)	(4)	(6)	(8)	(10)	(12)	(14)	(16)	(18)	2
(3)	(6)	9	12	(15)	18	21	24	27	3
(4)	(8)	12	16	(20)	24	28	32	36	4
(5)	(10)	(15)	(20)	(25)	(30)	(35)	(40)	(45)	5
(6)	(12)	18	24	(30)	36	42	48	54	6
(7)	(14)	21	28	(35)	42	49	56	63	7
(8)	(16)	24	32	(40)	48	56	64	72	8
(9)	(18)	27	36	(45)	54	63	72	81	9

67) Além da tábua fundamental de dividir, que encerra as divisões fundamentais, existe outra: a de divisões fundamentais inexatas, como 19/2, 28/3, 37/5, etc., em que o divisor e o quociente são números dígitos. Parece que a um bom número de professôres passa despercebida a vantagem de estudar, como elementos de tabuada, as divisões dêsse tipo. Entretanto, não se pode admitir que seja perfeitamente claro aos alunos que em 58/6, por exemplo, o quociente é 9, com resto 4. Êles têm, ao contrário, dificuldades em reconhecer, a princípio, que 58 está compreendido entre 54 e

63. Vale a pena, então, fazer exercícios escritos e orais para a aprendizagem e prática de tôdas as 360 divisões fundamentais inexatas. Sem essa aprendizagem e essa prática, as operações de divisão, a partir de certo ponto, serão feitas morosamente e com dificuldade, como veremos oportunamente. O seguinte quadro apresenta, para cada divisor, o menor e o maior dividendo. Os demais são os números compreendidos entre êstes e não múltiplos do divisor. Exemplos: Os dividendos, para o divisor —2— são: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. Para o divisor —3— temos: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22 23, 25, 26, 28, 29.

DIVISOR	DIVIDENDOS		N.º DE DIVISÕES
	MENOR	MAIOR	
2	1	19	10
3	1	29	20
4	1	39	30
5	1	49	40
6	1	59	50
7	1	69	60
8	1	79	70
9	1	89	80
			360

68) Quando tivermos de tratar do problema da divisão de inteiros, veremos que ninguém pode dividir com desejável rapidez sem que tenha perfeito domínio sôbre as subtrações complementares. Chamamos subtrações complementares às

subtrações que se efetuam mediante o raciocínio "s para m . . . r", onde s, subtraendo, e m, minuendo, são números de dois algarismos, e r = 0, 1, 2, 3 . . . 9. Verifica-se fàcilmente que sendo dígito um divisor *d*, o resto *r*, das complementares que possam ocorrer na divisão, varia de 0 a (d—1). Exemplificando: a) a complementar 54 para 63 só pode ocorrer em divisões de divisor polidígito, pois o maior resto é 8, se o divisor é dígito; b) a complementar 36 para 44 pode aparecer em qualquer divisão, visto que o subtraendo 36 pode ser produto de um quociente parcial 4 por um divisor 9.

69) As subtrações complementares dividem-se em fáceis, difíceis e com zero. São fáceis ou difíceis segundo correspondam às fundamentais fáceis ou difíceis, respectivamente. Exemplos de fáceis: 14 para 18, 36 para 40, 47 para 49. Exemplos de difíceis: 56 para 61, 18 para 25, 64 para 73. Subtrações complementares com zero são aquelas que procedem das fundamentais seguintes: 0—0 ou 0 para 0, 1—1 ou 1 para 1, 2—2 ou 2 para 2 . . . 9—9 ou 9 para 9. Exemplos: 10 para 10, 35 para 35, 29 para 29.

70) No ensino da contagem, da numeração e das tabuadas, convém atender às seguintes diretrizes gerais:

a) Fazer contar sob múltiplas formas, mas insistir, de preferência, em que se contem objetos ou coisas.

b) Tornar claros, quando fôr oportuno, os conceitos de números cardinal e ordinal. A importância do número ordinal nem sempre é percebida pelos pais e professôres, os quais induzem a criança, a compreender sòmente o número cardinal, fazendo-a responder à pergunta "quantos?". Dever-se-ia perguntar também: "qual dêles?" ou "qual delas?", "que página?", "que armário?", "que sala?", "que classe ?". Números ordinais não são apenas êstes: 1.º, 2.º, 3.º etc. Os números 1, 2, 3, etc., podem ser ordinais. Exemplo: Maria levanta-se às 7 horas, sai de casa às 8, chega à escola às 9, dirige-se à sala 4 e senta-se à carteira 12. Aqui, os números 7, 8, 9, 4 e 12 são todos ordinais.

c) Fazer uso do ábaco no estudo da numeração. Um tabuleiro ou uma caixa, com areia, que se divide em três seções, substitui um ábaco melhor e presta-se perfeitamente à representação de números de três algarismos, com suas três ordens: das unidades, das dezenas e das centenas.

d) Prover experiências de composição e decomposição de grupos, de modo que as adições e subtrações fundamentais, assim as fáceis como as difíceis, se estudem e se aprendam simultâneamente, como, por exemplo: $8 - 3 = 5; 5 + 3 = 8; 8 - 5 = 3; 3 + 5 = 8.$

e) Ensinar a fazer bem os algarismos. Apresentar símbolos numéricos bem feitos, para servirem de modelos, mas reparar constantemente em como as crianças o fazem. Ajudá-las, uma de cada vez, e em pequenos grupos. A simples cópia não basta. Um algarismo, como o 6, pode estar bem feito; mas quem o fêz, pode tê-lo feito de baixo para cima.

f) Lembrar-se de que nem todos os alunos de 1.ª série se encontram igualmente preparados para a aprendizagem das adições e subtrações fundamentais, o que vale dizer que não é conveniente tratar a classe como um todo, mas dividi-la em grupos mais ou menos homogêneos.

g) Ter em mente que, tanto quanto possível cabe aos alunos descobrir por si mesmos, os resultados das adições, subtrações, multiplicações e divisões fundamentais.

h) Usar cartões-relâmpago para a prática das tabuadas. Usá-los com tôda a classe, e com pequenos grupos homogêneos.

i) Ensinar a Aritmética como um sistema de relações. Lembrar-se de que, à medida que o aluno progride, o que vai aprendendo são extensões do que já aprendeu. Exemplos: Se $3+2=5$, então $300+200=500$.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ \hline 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 300 \\ 200 \\ \hline 500 \end{array}$$

j) Ensinar a Aritmética como um sistema de dezenas. Mostrar, por meio de objetos que se vão grupando, que podemos pensar nas coleções de menos de dez dêles como coleções ou grupos simples; que, do mesmo modo, podemos considerar os conjuntos maiores, isto é, de mais de dez objetos, como grupos compostos, cujos componentes são constituídos, todos êles, de dezenas, ou de dezenas e unidades. Exemplos: $30 = 10 + 10 + 10$; $34 = 10 + 10 + 10 + 4$.

k) Reconhecer que a Aritmética, é uma parte importante da vida do aluno, dentro e fora da escola. Ela não se confina a um simples currículo, mas auxilia, dá sentido e permeia tôdas as outras disciplinas. Embora seu estudo organizado ou sistemático possa limitar-se às atividades de aulas regulares, ela está presente no desenvolvimento de tôdas as demais atividades que resultam do ensino globalizado.

71) No ensino, em geral, há de convir o professor em que é necessário atentar para outras diretrizes:

a) Apontar relações. A aprendizagem não consiste em juntar peças desgarradas, de experiências; consiste antes, em perceber relações dentro de um todo.

b) Variar as situações-problemas. Se é verdade que aprender é reagir, é também verdade que, quanto mais variadas são as reações, mais fàcilmente se aprende.

c) Reparar constantemente, não só no trabalho escrito, senão também nas operações mentais dos alunos, a fim de poder levá-los à aquisição de bons hábitos e ao abandono dos maus porventura adquiridos.

d) Usar linguagem inteligivel, ao propor uma questão, seja por escrito, seja oralmente.

e) Reconhecer que os indivíduos são diferentes e não exigir da criança nenhum trabalho que esteja acima de sua capacidade.

f) Não ser tão apressado, nem tão abstrato nas explicações, que os alunos não as entendam. Não ser, porém, tão minucioso, que não lhes sobre nenhuma oportunidade para pensar e descobrir.

g) Considerar na oportunidade e conveniência dos exercícios de treino. Estudado algo novo, são abundantes os exercícios imediatos. Pouco a pouco, porém, vai-se tornando menor o número dêles. Os intervalos entre os períodos de prática, curtos a princípio, vão-se tornando cada vez mais longos.

h) Fazer que as dificuldades se acompanhem de situações que despertem o interêsse. Usar o jôgo, o problema, o desafio.

i) Lembrar-se de que há estreita relação entre o interêsse e o esfôrço; que o progresso do aluno depende, por conseguinte, do grau de sua satisfação no trabalho.

j) Apresentar a matéria ciclicamente. As partes mais fáceis de um tópico são estudadas antes das mais difíceis; às vêzes, anos antes.

k) Vigiar as respostas do aluno, as quais são, às vêzes, simples ecos de palavras que se repetem vazias.

l) Lembrar-se de que só se aprende o que se compreende e só retém o que se pratica.

m) Ter em mente, a todo instante, que o só dizer não é ensinar, nem o simples repetir é aprender.

OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS COM INTEIROS
E
PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

72) Na adição e subtração de inteiros, como na multiplicação e divisão, é necessário que as primeiras experiências sejam de natureza concreta. Cabe ao aluno verificar ou descobrir todo o processo operatório. O professor de Metodologia poderá mostrar a maneira de conduzir o estudante a que descubra como fazer uma operação e porque fazê-la de tal ou qual modo.

73) Os tipos de exercicios de adição e subtração, apresentados nesta apostila, não são únicos. Representam sugestões baseadas em experiências de ensino nas várias séries do curso primário.

74) Os vários grupos de exercicios são em geral organizados de maneira que através dêles, os alunos, à medida que vão aprendendo as operações, vão praticando, para fixação, os elementos de tabuadas. Dadas, por exemplo, as adições fundamentais de soma menor que 10, enquanto as vamos riscando, organizamos um grupo de exercicios, justapondo-as duas a duas ou três a três (1.º caso de adição, grupo *a* ou grupo *b*).

75) *Adição de inteiros.* Casos a considerar. A adição de inteiros é a operação pela qual se obtém um

número que encerre tôdas as unidades de dois ou mais outros, e sòmente essas.

76) 1.º *caso*. Adição de dois números de dois ou três algarismos, sem reserva a transportar. Grupos de exercícios:

a) s < 10 (t) Exemplos:

53	5	3	13	1	3	
26	2	6	42	4	2	*18 exercícios*

Observação: Com s < 10 queremos significar que no grupo de 18 exercícios se empregam, para prática e fixação, as adições fundamentais de soma menor que 10. Usaremos também outros símbolos: m < 10, m < 9, s > 10, m > 10, s = 10, m = 10, c/o, a + b + c = 10. Se qualquer dêstes símbolos vem acompanhado de (t), ou de (q), deve entender-se que são empregados todos os elementos indicados, ou quaisquer dêles, respectivamente. Os símbolos s < 10 (t), m=10 (t), c/o (q), a + b + c < 10 (t), por exemplo, indicam, respectivamente: 1) tôdas as adições fundamentais de soma inferior a 10; 2) tôdas as subtrações fundamentais de minuendo igual a 10; 3) quaisquer adições ou subtrações com zeros; 4) tôdas as adições auxiliares fáceis de soma inferior a 10.

b) s < 10 (t) Exemplos:

153	1	5	3	674	6	7	4
426	4	2	6	214	2	1	4

12 exercícios

c) s < 10 (t) c/o (q) Exemplos:

201	2	1	615	6	1
316	3	6	320	3	2

18 exercícios

Observação: Os exercícios dêste grupo c introduzem as adições com zero, não porque sejam praticadas, mas com o fim de o aluno adquirir bons hábitos de somar, no caso de números com ordens vazias. Ao fazer as adições 201 + 316, 615 + 320, por exemplo, deverá pensar ou dizer como em I ou como em II.

I

Um e seis: sete. *Quatro.* Dois e três: cinco 201
Cinco. Um e dois: três. Seis e três: nove 316

II

Um... sete. *Quatro.* Dois... cinco. 615
Cinco. Um.... três. Seis.... nove. 320

Representadas em ábacos estas adições, percebe-se a nenhuma razão de se pensar ou dizer "zero e quatro": "quatro" ou "cinco e zero": "cinco", pois o zero, num e outro caso, nada mais representa que um vazio.

d) s < 10 (t), s = 10 (t) Exemplos:

345	3	4	5	462	4	6	2
721	7	2	1	136	1	3	6

15 exercícios

É fácil perceber que em 9 dos 15 exercícios haverá, na coluna correspondente à ordem das centenas, uma adição fundamental fácil, de soma 10.

77) 2.º *caso*: Adição de três ou mais números de dois ou três algarismos, sem reserva a transportar. Grupos de exercícios.

a) $a + b + c < 10$ (t), $a + b + c = 10$ (t).

Exemplos:

43	4	3		34	3	4
21	2	1		12	1	2
45	4	5		21	2	1

60 exercícios

Observação: Para não haver reserva a transportar, é necessário que, ao se organizarem os exercícios relativos a êste grupo, e ao seguinte, as adições auxiliares de soma 10 sejam dispostos à esquerda.

b) $a + b + c < 10$ (t), $a + b + c = 10$ (t).

Exemplos:

615	6	1	5		323	3	2	3
242	2	4	2		421	4	2	1
232	2	3	2		154	1	5	4

40 exercícios

c) Exercícios organizados à vontade, com emprêgo de zeros. Exemplos:

321	20	102
40	514	20
502	30	201
213	403	410
		63

78) 3.º *caso*: Adição de dois números de dois ou três algarismos, sem reserva a transportar.

Observação: Êste caso é diferente do primeiro cujos exercícios só conduzem à prática de fundamentais fáceis. Daqui por diante pretende-se, sobretudo, o exercício das difíceis. Grupos de exercícios:

a) $s < 10$ (t), $s > 10$ (t) Exemplos:

82	8	2		63	6	3
54	5	4		95	9	5

36 exercícios

b) $s < 10 <$ (t), $s > 10$ (t) c/o (q) Exemplos:

805	8	5		638	6	3
564	5	4		940	9	4

36 exercícios

c) $s < 10$ (t), $s = 10$ (t), $s > 10$ (t), c/o (q)

Exemplos:

85	8	5		43	4	3		94	9	4
74	7	4		62	6	2		30	3	0

45 exercícios, 9 dos quais com zero.

79) 4.° *caso*: Adição de dois números de dois ou mais algarismos, com reserva a transportar. Grupos de exercícios:

a) s > 10 (t), s < 10 (q). Reserva das unidades para as dezenas. Exemplos:

```
 758  7  8        628  6  8
 633  6  3        734  7  4
 ---              ---
```

18 exercícios

b) s > 10 (t), s < 10 (q). Reserva das dezenas para as centenas. Exemplos:

```
 397  4  9        893  9  9
 962  9  6        645  6  4
 ---              ---
```

18 exercícios

c) s > 10 (t). Reservas consecutivas. Exemplos:

```
 819   9  5  9    263  3  7  3
 785   7  8  5    859  8  5  9
 ---              ---
```

12 exercícios

80) 5.° *caso*: Adição de dois inteiros quaisquer. Exemplos:

```
  48   5096   3860   791   49480
 763    807   4035  6358    5300
 ---   ----   ----  ----   -----
```

Observação: Daqui para diante *cessa* a preocupação de organizar exercícios, justapondo-se adições fundamentais. É que a esta altura cabe

admitir que tôdas elas, praticadas tantas vêzes, já tenham sido devidamente fixadas.

81) 6.° *caso ou caso geral*: Adição de três ou mais números quaisquer. Exemplos:

896 + 2079 + 508; 8596 + 791 + 27309 + 86. Note-se que ninguém poderá somar com desembaraço, três ou mais números quaisquer, sem o conhecimento ou o domínio das adições complementares.

82) *Subtração de inteiros.* Casos a considerar. A subtração de inteiros é a operação pela qual, dados dois números, minuendo e subtraendo, obtém-se outro, resto, excesso ou diferença, que, somado ao subtraendo, dá o minuendo.

83) 1.°*caso*: Subtração sem recurso a unidades de ordem superior. Grupos de exercícios:

a) m < 10 (t) Exemplos:

```
 86  8  6         78  7  8
 32  3  2         41  4  1
 --               --
```

18 exercícios

b) m < 10 (t) Exemplos:

```
 745  7  4  5     967  9  6  7
 312  3  1  2     832  8  3  2
 ---              ---
```

12 exercícios

c) m < 10 (t), m = 10 (t). Exemplos:

837	8	3	7		1094	10	9	4
614	6	1	4		863	8	6	3

15 exercícios

d) m < 10 (t), c/o (q). Exemplos:

678	6	7		917	9	7
428	4	2		506	5	6

18 exercícios

e) m < 10 (t), c/o (q). Exemplos:

5789	7	9		6869	8	6
5203	2	3		6149	1	4

18 exercícios

Observação: Exercícios como os do grupo *d* e *e* acima não são organizados para que se pratiquem as subtrações com zero, mas para que o aluno aprenda que, no ato de subtrair, não deve colocar zero à esquerda de um resto, como tende a fazer em 5789 — 5203, e muito menos dizer ou pensar: "oito menos zero: oito", por exemplo.

84) 2.º *caso*: Subtração sem recurso a unidades de ordem superior, mas de natureza tal que exige o conhecimento de tôda a tabuada de subtrair. Grupos de exercícios:

a) m > 10 (t), m < 10 (t). Exemplos:

139	13	9		168	16	8
85	8	5		74	7	4

36 exercícios

b) m > 10 (t), m < 10 (t), c/o (q). Exemplos:

1568	15	8		1178	11	7
865	8	5		240	2	4

36 exercícios

c) m > 10 (t), m = 10 (t), c/o (q). Exemplos:

106	10		134	13
70	7		54	5

45 exercícios

85) 3.º *caso*: Subtração com recurso, uma só vez, a unidades de ordem superior. Grupos de exercícios:

a) m > 10 (t), m < 9 (t). Recurso às dezenas.

Exemplos:

97	8	17		62	5	12
28	2	8		46	4	6

36 exercícios

Observação: Repetem-se 8 subtrações fáceis, porque só existem 28 subtrações de minuendo inferior a 9.

b) m > 10 (t), m = 10 (t), m < 9 (t). Recurso às dezenas. Exemplos:

80	7	10		93	8	13
36	3	6		27	2	7

45 exercícios

Observação: Repetem-se 17 subtrações fáceis.

c) m > 10 (t), m < 10 (q). Recurso às centenas.

Exemplos:

1927	18	12	1319	12	11
963	9	6	485	4	8

18 exercícios

86) 4.º *caso*: Subtração com recurso, duas ou três vêzes consecutivas, a unidades de ordem superior. Grupos de exercícios:

a) m > 10 (t), m < 9 (q), c/o (q). Recurso às dezenas e às centenas. Exemplos:

962	15	12	423	11	13
389	8	9	359	5	9

18 exercícios

b) m > 10 (t). Recurso às dezenas e às centenas de unidades simples, como também às unidades de milhar. Exemplos:

14533	13	14	12	13	13631	12	15	12	11
8967	8	9	6	7	3892	3	8	9	2

9 exercícios

87) 5.º *caso*: Subtração com recurso a unidades cujas ordens são ocupadas por zeros. Exercícios organizados à vontade, isto é, sem preocupação de se empregarem, para prática, estas ou aquelas fundamentais, visto já terem sido, tôdas elas, suficientemente exercitadas.

Exemplos: 805 — 388; 7002 — 6934.

88) 6.º *caso ou caso geral*: Subtração em que o minuendo e o subtraendo são inteiros quaisquer.

Exemplos: 80010 — 7208; 213000 — 83066.

89) Feita uma adição ou uma subtração, convém tirar-lhe a prova. Não se recomenda a dos nove. Na vida prática ninguém a usa: nem mesmo os professôres que a ensinam. O que se faz é isto: soma-se ou subtrai-se de novo. O comum é somar, no mesmo sentido, uma segunda vez. Melhor, porém, é fazer esta segunda adição, de baixo para cima, se a primeira se fêz de cima para baixo. Quanto à subtração, a prova deve consistir em fazer-se a operação inversa, isto é, somar o resto ao subtraendo, ou o subtraendo ao resto, para obter-se o minuendo.

MÉTODOS DE SUBTRAÇÃO

90) Existem quatro métodos principais de subtração: a) de decomposição; b) de compensação; c) aditivo de decomposição; d) austríaco. No método de decomposição, uma unidade de certa ordem do minuendo decompõe-se em dez da ordem imediatamente inferior. Exemplo: Em 736 — 258 diz-se 16 menos 8... 8; 12 menos 5... 7; 6 menos 2... 4. No método de compensação tôdas as vêzes em que se somam ao minuendo dez unidades de uma certa ordem, soma-se também ao subtraendo uma unidade de ordem imediatamente superior. Exemplo: Em 736-258 diz-se 16 menos 8 ... 8; 13 menos 6... 7; 7 menos 3... 4. No método aditivo de decomposição, procura-se em passos isolados

da operação, o número que somado ao subtraendo, dê o minuendo, ou êste diminuido de uma unidade. Exemplo: Em 736 - 258 diz-se: 8 para 16... 8. Procura-se aqui o número que somado ao subtraendo 8 dê o minuendo 16. Continuando: 5 para 12... 7. Procura-se agora o número que somado ao subtraendo 5 dê o minuendo 13-1; ou 12. E finalmente: 2 para 6... 4. Diz-se também: 8 e 8... 16; 5 e 7... 12; 2 e 4... 6. É uma variante do mesmo método. No método austriaco, procura-se, em passos isolados da operação, o número que somado ao subtraendo, ou a êste aumentado de uma unidade, dê o minuendo. Exemplo: Em 736 - 258 diz-se: 8 para 16... 8; depois: 6 para 13... 7, isto é (5+1) para 13... 7; depois ainda: 3 para 7... 4, isto é (2+1) para 7... 4. Diz-se também: 8 e 8... 16; 6 e 7... 13; 3 e 4... 7. Êstes quatro métodos devem ser conhecidos do professor, que, no entanto, não deve exigir que os alunos que tenham aprendido a subtrair por um dêles, aprendam ou empreguem um outro.

91) Diretrizes gerais para o ensino das operações de adição e subtração:

a) Organizar os exercicios relativos aos quatro primeiros casos de adição e subtração de modo que conduzam à prática suficiente de tôdas as adições e subtrações fundamentais.

b) Ensinar, paralelamente, as duas operações, apresentando, a um tempo, exercicios de uma e de outra: os mais fáceis da adição com os mais fáceis da subtração, os mais dificeis de somar com os mais dificeis de subtrair.

c) Introduzir os casos mais dificeis (adição com reservas, e subtração com reçursos a unidades de ordem superior), recordando e objetivando, primeiramente, o princípio fundamental da numeração indo-arábica.

d) Conduzir os alunos à prática das adições complementares dificeis, prolongando, até certo ponto, num estudo de tabuada, cada uma das 36 adições fundamenatis correspondentes. Exemplos: 2 + 9, 12 + 9, 22 + 9, 32 + 9....

e) Evitar os maus hábitos e os métodos de desperdicios. É método de desperdicio, por exemplo, fazer a adição dos números, 8, 9, 4 e 6 do seguinte modo: 8 e 9... 17; 17 e 4... 21; 21 e 6... 27. Melhor é dizer-se ou pensar: 8... 17... 21... 27. É mau hábito por exemplo, o fazer a subtração 532 - 184, com êste murmúrio: "Dois menos quatro, não pode; pede-se emprestado, ficam doze. Doze menos quatro, oito. Três empresta um, ficam dois. Dois menos oito, não pode"...

f) Insistir em que os alunos adquiram bons hábitos, como êstes; o de dispor bem os números, o de escrevê-los com algarismos bem feitos, o de calcular em silêncio, o de fazer os deveres com ordem e asseio, o de tirar a prova.

g) Prover exercicios como os dos tipos sugeridos para o 2.º caso de adição. No exercicio 23 + 42 + 34, por exemplo, ter-se-á de somar (coluna das unidades) um 3 visivel com um 2 também visivel, mas um 5 invisivel (resultado de $3 + 2$), com um 4 visivel. A adição fundamental $5 + 4$ é praticada em situação nova, que exige, portanto, reação nova. Aprender é reagir.

92) Multiplicação. Casos a considerar. 1.º *caso*: Multiplicação sem transporte de reservas; multiplicador digito. Exemplos:

43	4	3	52	5	2	51	5	1
2	2	2	4	4	4	6	6	6

Assim como nos casos de adição e subtração, os exercicios são organizados diretamente com os elementos da tabuada de multiplicar.

93) *2.º) caso:* Multiplicação com transporte de reserva; multiplicador digito. Exemplos:

28	8	2	83	3	8	649	6	4	9
2	2	2	7	7	7	9	9	9	9

94) *3.º caso:* Multiplicação com zeros no multiplicando; multiplicador digito. Exemplos:

420	4	2	6300	6	3	701	7	4
6	6	6	4	4	4	8	8	8

ou

420	ou	6300	6008	6	8
6		4	7	7	7

95) Antes de serem apresentados os primeiros exercicios relativos ao 3.º caso, convém insistir em que fique perfeitamente entendido que o produto de dois fatôres é zero, se um dêles é zero. Exemplos: $6 \times 0 = 0$, $0 \times 3 = 0$, $8 \times 0 = 0$, $0 \times 15 = 0$. Organizam-se os exercicios com os elementos da tabuada, os quais, sempre que possivel, devem ser todos utilizados, para a necessária fixação. As multiplicações com zero, como 0×2, como 6×0, e tôdas as outras, compõem os exercicios, mas não são primordialmente usadas com o fim de serem sujeitas à prática. Por isso, ao organizar-se, por exemplo, um grupo de exercicios do tipo 3004×8 ,ou 3400×8, ou 304×8, ou ainda 340×8, consideram-se apenas as multiflicações fundamentais em que não figura zero. Tais exercicios são necessários, como todos os outros, para que os alunos aprendam a operação de multiplicação, com bons hábitos de calcular. Assim, ao multiplicar 3400 por 8, não deverá dizer ou pensar: "oito vêzes zero ... zero, oito vêzes zero ... zero", mas colocar os dois zeros e continuar: "oito vêzes quatro ... trinta e dois, oito vêzes três ... vinte e quatro, e três: vinte e sete". Se os zeros estão pelo meio do multiplicando, como em 3004×8, deverá proceder assim, por exemplo: "oito vêzes quatro ... trinta e dois". E coloca a reserva 3, à esquerda de 2, sem dizer: "vão três", "três e zero três". E continua: "oito vêzes três, vinte e quatro", escrevendo, antes, o zero correspondente ao novo 8×0, sem dizer, todavia: "oito vêzes zero ... zero". Cabe ao professor estar vigilante para não permitir que se faça

uma operação com vícios que entravem o processo de calcular.

96) É conveniente, senão necessário, recordar, de quando em quando, que a multiplicação constitui um caso particular da adição: uma adição de parcelas iguais. $473 \times 4 = 473 + 473 + 473 + 473$. Sem êste fato em mente, não é possível tornar claro o transporte de reservas. Os primeiros e mais simples exercícios devem ser ensinados assim, e até objetivados. Exemplos: 36×2.

Coloquem-se, sôbre a mesa, dois conjuntos de objetos, cada um dos quais com três dezenas e e mais seis dêles. Ao formar-se um grupo único, fica evidente que os seis objetos de um conjunto e os seis do outro, permitem obter uma nova dezena dêles, e mais dois. Temos depois: três dezenas com três dezenas são seis dezenas, as seis dezenas mais uma dezena são sete dezenas. À medida que se vai objetivando a adição das duas parcelas iguais a 36, vai-se também justificando, com a operação no quadro negro, o processo de multiplicar.

97) *4 caso:* O multiplicador é um número de dois algarismos. Exemplos: 89×47; 254×38.

Multiplicações fundamentais praticadas.

89	8	9	8	9		
47	4	4	7	7		

254	2	2	5	5	4	4
38	3	8	3	8	3	8

É conveniente, senão necessário, que antes de apresentarmos os primeiros exercícios relativos a êste caso, levemos o aluno a descobrir ou verificar, por exemplo, que 7×10, ou 10×7, é 70, que 23×10, ou 10×23, é 230. É oportuno lembrarmos também, que há uma razão pela qual para multiplicar-se um número qualquer por 10, basta colocar um zero à sua direita: é o princípio do valor relativo. Em seguida, é de tôda a vantagem que façamos o aluno descobrir e compreender que para multiplicarmos um númreo qualquer por 20, ou 30 ou 40, podemos multiplicá-lo primeiro por 2 ou 3 ou 4 e,em seguida, multiplicar por 10 o resultado obtido, ou colocar zero à sua direita. É cousa fácil de conseguir, e vale a pena. Teremos, assim, recursos para tornar perfeitamente entendido êste 4.º caso de multiplicação. Com efeito: Seja multiplicar 54 por 23. Fazer esta multiplicação é procurar a soma de vinte e três parcelas iguais a 54, as quais podemos grupar de modo a termos dois conjuntos, um com vinte parcelas, outro com 3. Mas vinte parcelas iguais a 54 é o mesmo que 54×20 ou 1080; e três parcelas iguais 54 é o mesmo que 54×3 ou 162. Temos então: $54 \times 23 = 1080 + 162$. Pràticamente, procedemos assim: colocamos o multiplicador sob o multiplicando. Multiplicamos 54 por 3 e achamos 162. Multiplicamos, em seguida, 54 por 2, em vez de 20, e achamos 108 em vez de 1080. Mas somar 108 na posição em que aparece, é o

$$\begin{array}{r} 54 \\ 23 \\ \hline 162 \\ 108 \\ \hline 1242 \end{array}$$

mesmo que somar 1080.

98) *5.° caso:* O multiplicador é um número de três algarismos, sendo zero o das dezenas. Exemplos: 2647 × 308.

Assim como se mostrou que 54 × 23 é igual a 54 × 20 + 54 × 3 ou 1080 + 162, pode-se também mostrar que 2647 vêzes 308 é igual a 2647 × 300 + + 2647 × 8, ou 794100 + 21176. Na prática, multiplicamos primeiramente 2647 por 8, e depois por 3; mas o segundo produto parcial é disposto de maneira a permitir que o resultado da multiplicação seja, de fato, a soma de 3617×8 com 3617 × × 300. Daqui para diante, pode cessar a preocupação de se organizarem sistemàticamente os exercícios, pois é de supor que, através daqueles relativos aos casos precedentes, as várias multiplicações fundamentais já tenham sido devidamente praticadas e fixadas. É conveniente, contudo, que uma ou outra vez, se recorde tôda a tabuada.

$$\begin{array}{r} 2647 \\ 308 \\ \hline 21176 \\ 7941 \\ \hline 815276 \end{array}$$

99) *6.° caso:* O multiplicando e o multiplicador são números quaisquer. Exemplos: 5401 × 530; 70800 × 6800. Multiplicar 5401 por 530 é multi-

plicar 5401 por 53 e, em seguida, multiplicar por 10 o produto obtido. Temos, pois:

$$\begin{array}{r} 5401 \\ 530 \\ \hline 16203 \\ 27005 \\ \hline 2862530 \end{array}$$

100) Das adições complementares existentes, relativas às adições fundamentais, desde 0 + 0 até 9 + 9, 175 delas, 131 fáceis e 44 difíceis, podem ocorrer na multiplicação. É, pois, de tôda a vantagem que sejam exercitadas oralmente, ao menos estas últimas. Consulte-se o disposto no parágrafo 64 destas apostilas.

101) *Divisão*. A divisão de inteiros é a operação pela qual chegamos a saber quantas vêzes um número, chamado divisor, está contido em outro, a que chamamos dividendo. O resultado da divisão é um terceiro número, cujo nome é quociente. Exemplo: 20 ÷ 4 = 5. Nesta divisão, o dividendo é 20, o divisor 4 e o quociente 5. O número 4 está contido 5 vêzes no número 20. Com efeito: 20 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4. A divisão de inteiros apresenta, às vêzes, um quarto número, que é o resto. Exemplo: Ao dividirmos 23 por 4, encontramos um quociente 5 e um resto 3. Significa isto que o número 23 é maior que a soma de 5 parcelas iguais a 4 não sendo, todavia, igual à soma de 6 parcelas. 5 é, pois, o quociente, e o excesso, 3, de 23 sôbre 4 × 5, ou 20, é o resto da

divisão. A divisão por zero é impossível; e a divisão por 1 não tem sentido prático.

102) Estudada a primeira parte da tabuada, isto é, as divisões fundamentais fáceis, podem ser apresentados alguns dos exercícios relativos ao 1.º caso de divisão e também um primeiro grupo dos que são relativos ao 2.º caso. Consulte-se, entre outros, os §§ 41, 46, 49, 51 e 66, destas apostilas.

103) *Casos de divisão*: *1.º caso*: Divisão exata, sem reservas; divisor digito contido em cada um dos números representados pelos valores absolutos dos algarismos do dividendo. Exemplos: 36/3; 486/2; 844/4; 66/6.

104) *2.º caso*: Divisão exata, sem reservas; divisor digito, contido no número formado pelos dois algarismos de ordem mais elevada, do dividendo, e nos números simbolizados pelos valores absolutos dos demais algarismos. Exemplos: 357/7; 156/3; 408/8; 305/5. Exercícios, como êstes, são organizados da seguinte maneira, tendo em vista a tabuada de dividir. Para cada divisor, deve colocar-se, à direita de um dividendo de dois algarismos, um outro de um só algarismo. Os exercícios devem ser tais que, por meio dêles, sejam praticadas tôdas as divisões fundamentais porventura já estudadas.

105) *3.º caso*: Divisão exata; divisor digito; reserva da primeira para a segunda divisão. Exemplos: 84/6; 172/4; 370/5; 512/8; os dividendos dos exercícios relativos a êste caso, podemos prepará-los

assim: Dada uma linha de dividendos da tabuada fundamental (parágrafo 66), e considerado o respectivo divisor, multiplicamos êste por um número qualquer de 1 a 9, e somamos ao produto o número representado pelo algarismo das dezenas do dividendo da fundamental a usar. À direita da soma obtida, colocamos, então, o algarismo das unidades dêsse dividendo. No último dos exemplos dados, 512/8, o número 512 foi obtido desta maneira: Multiplicando o divisor 8 por 6. Ao produto 48 somamos 3 (do dividendo 32, a ser usado). À direita da soma, 51, colocamos 2. Devem organizar-se exercícios de modo que todos os dividendos da tabuada sejam usados, cada um com o seu respectivo divisor.

106) Neste terceiro caso de divisão, como em outros a estudar, ocorrem divisões fundamentais não familiares a quem inicia o estudo desta operação. São elementos de uma segunda tabuada de dividir, ou seja, de uma tabuada em que nenhuma divisão é exata. Chamamos a êsses elementos divisões fundamentais inexatas.

107) *4.º caso de divisão*: Divisão exata; divisor digito; reserva da primeira para a segunda divisão, ou da segunda para a terceira. Exemplos: 1968/4; 6328/8; 4272/6; 7296/8. Exercícios como os que constituem os dois primeiros exemplos, podem ser organizados do mesmo modo que os correspondentes ao 3.º caso. Obtidos, porém, os dividendos, acrescenta-se à direita de cada um dêles mais um algarismo, que tem de ser, necessàriamente, igual ao divisor, se êste é 5 ou maior que 5. Quan-

to aos exercícios do tipo dos que apresentamos como os dois últimos exemplos, são preparados da seguinte maneira: Considerado um divisor d, colocamos, à direita de cada um dos dividendos, um algarismo tal que o número por êle representado deixe resto quando dividido por d. Ora, como êsse resto deve representar as dezenas do último dividendo parcial, o algarismo das unidades é escolhido de modo que a última divisão se faça exatamente. Exemplificando: O dividendo do exercício 7296/8 foi achado assim: Ao lado de 72 colocamos 9. Ora, o resto de 9 por 8 é 1; portanto, para ser exata a última divisão, tivemos de pôr 6 à direita de 9. Chamamos a atenção para o seguinte: Não é possível organizar exercícios dêste tipo para o divisor 9, pois devendo ser exata a primeira divisão parcial, e devendo haver reserva da segunda para a terceira divisão, o segundo dividendo parcial deve ser maior que o divisor 9. Mas êsse segundo dividendo tem de ser, também, um número de um só algarismo. Ora, número de um só algarismo, maior que 9, não existe. Convém reparar ainda, voltando ao exemplo 7296/8, em que não poderíamos colocar, à direita de 72, nenhum algarismo de valor absoluto, menor que 8, ou igual a 8, pois no primeiro caso a segunda divisão só seria possível (sob o ponto de vista de divisão de inteiros), obrigando a um zero no quociente (8.º caso de divisão), e no segundo, não haveria reserva, nem da primeira para a segunda divisão, nem desta para a última.

108) *5.º caso*: Divisão exata, divisor dígito; reservas consecutivas. Exemplos: 1548/4; 4781/7; 471/3;

37928/8; 30879/9. O dividendo 1548 foi preparado dêste modo. Tomamos um número qualquer (15) de dois algarismos, não múltiplo de 4. É evidente que, sendo 3 o resto de 15 por 4, e devendo a segunda divisão parcial ser também inexata, colocamos, à direita de 15, um algarismo tal (4, no exemplo), que, baixado para ficar à direita do 3, formasse com êste um segundo dividendo não múltiplo do divisor. Ora, como o resto de 34 por 4 é 2, e como a última divisão devia ser exata, é claro que o algarismo a ser tomado como o das unidades do dividendo tinha de ser 4 ou 8. Quanto aos exercícios que constituem os dois últimos exemplos, nada há de novo, a não ser que, preparados os dividendos, como acima indicado, pusemos à direita dêles (3792 e 3087) um 5.º algarismo, obtendo, então, os números 37928 e 30879.

109) *6.º caso*: Divisão com resto e com reservas; divisor dígito. Exemplos: 3757/5; 4945/6; 8792/9; 4016/7. É fácil, já agora, descobrir como são preparados exercícios como êstes. São de tal natureza que conduzem, principalmente, à prática das divisões fundamentais inexatas. Aliás, as divisões fundamentais pròpriamente ditas, ou divisões fundamentais exatas, como 35/7, 64/8, 45/5, por exemplo, não são praticadas, a não ser nas operações de divisão em que ocorrem dividendos parciais múltiplos do divisor. E esta é a razão pela qual a maioria dos casos de divisão, até agora considerados, são casos de divisão exata. O que se pretende, aliás, com os vários grupos de exercícios relativos aos casos de divisão, não é apenas

a prática do processo de dividir, mas ainda a fixação das divisões fundamentais.

110) *7.º caso*: Divisão com um zero no fim do quociente; divisor digito. Exemplos: 3926/7; 6485/8; 24571/3. Para que o algarismo das unidades do quociente seja zero, basta que seja exata a penúltima divisão parcial e que o número representado pelo algarismo, das unidades do dividendo seja inferior ao divisor. Não há, pois, dificuldade em preparar exercícios relativos a êste caso.

111) *8.º caso*: Divisão com um zero pelo meio do quociente: divisor digito. Exemplos: 5127/9; 4836/6; 35438/5; 32490/8. É fácil de perceber que, para haver um zero pelo meio do quociente, é necessário, apenas, que, no decorrer da divisão, um dos dividendos parciais, do segundo ao penúltimo, seja um número menor que o divisor.

112) *9.º caso*: Divisão com zeros sucessivos, ou, pelo meio do quociente, ou no fim; divisor digito. Exemplos: 49063/7; 36084/9; 57602/6; 32803/4. Percebe-se fàcilmente como se organizam exercícios como êstes. Para que ocorram dois zeros sucessivos pelo meio do quociente, é necessário que, após um dividendo parcial múltiplo do divisor, haja um zero a ser baixado, e em seguida a êste um algarismo que represente, em valor absoluto, um número menor que o divisor. E para haver dois zeros consecutivos no fim do quociente, é necessário que os dois últimos dividendos parciais sejam, respectivamente, zero, e um número menor que o divisor.

113) A divisão de inteiros é a operação mais difícil de ensinar e de aprender. Daí a necessidade de não precipitar o seu ensino, mas conduzi-lo de modo que os alunos vão vencendo as dificuldades, uma de cada vez, através de exercícios relativos aos diferentes casos que a operação apresenta. É necessário, também, que os alunos não memorizem, apenas, o processo de operação, mas o entendam. Cabe ao professor, portanto, mostrar *como é* e *por quê*.

114) Consideremos alguns exercícios de divisão, correspondentes a casos bem distintos, dentre os já estudados, e vejamos como explicar, objetivando, se necessário, a operação de dividir.

Do 1.º caso: 46 ÷ 2 ou (40 + 6) ÷ 2, ou (4 dezenas + 6 unidades) ÷ 2 = 2 dezenas + 3 unidades = 23.

Fácil é objetivar o que está aqui indicado. É bastante que se disponha de um bom número de objetos, como, por exemplo, pequenos blocos de madeira, alguns dos quais reunidos em dezenas.

Do 2.º caso: 123 ÷ 3 ou (120 + 3) ÷ 3 ou (12 dezenas + 3 unidades) ÷ 3 = 4 dezenas + 1 unidades = 41.

Do 3.º caso: 68 ÷ 4 ou (60 + 8) ÷ 4 ou (6 dezenas + 8 unidades) ÷ 4 ou (4 dezenas + 2 dezenas + 8 unidades) ÷ 4 = 1 dezena + (28 unidades ÷ 4) = 1 dezena + 7 unidades = 17.

OBJETIVANDO:

§ § § | | | | Cada traço representa um objeto, e cada sinal de parágrafo, uma dezena dêles.
§ § § | | | |

Tentada a divisão das dezenas em 4 partes iguais (de dezenas) verifica-se que cada parte tem uma só dezena.

68 | 4
2 1

Resta dividir:

§ |||| |||||||||| ||||
ou
§ |||| |||||||||| ||||

Feita a divisão destas dez mais dez mais oito coisas, ou 28, temos 7 por quociente. Com efeito, 28 | 4 → 7. Ou, continuando:

68 | 4
28 17

É fácil, pois, explicar porque se divide, primeiro, 6 por 4; e por que se baixa o algarismo 8, colocando-o à direita de 2, que representa 2 dezenas ou 20. É que $20 + 8 = 28$.

4.° caso: $3786 \div 6$ ou (37 centenas + 8 dezenas + 6 unidades) $\div$ 6, ou 6 centenas, de 37 centenas por 6 + (1 centena + + 8 dezenas + 6 unidades) $\div$ 6, OU

6 centenas + (18 dezenas + 6 unidades) $\div$ 6, OU

6 centenas + 3 dezenas, de 18 dezenas por 6, + (6 unidades $\div$ 6), OU

6 centenas + 3 dezenas + 1 unidade, ou, finalmente: 631.

A explicação acompanha, paralelamente, o processo, nas suas várias etapas:

3786	6	3786	6	3786	6	3786	6
1	6	18	6	18	63	18	631
				0		06	

b) $1264 \div 4$, ou (12 centenas + 6 dezenas + 4 unidades) $\div$ 4, OU

3 centenas, de 12 centenas por 4, + (6 dezenas + 4 unidades) $\div$ 4, OU

3 centenas, + 1 dezena, de 6 por 4, + (2 dezenas + 4 unidades) $\div$ 4, OU

3 centenas + 1 dezena + (24 unidades $\div$ 4), OU

3 centenas + 1 dezena + 6 unidades, ou finalmente: 316.

Paralelamente:

1261 / 4	1261 / 4	1261 / 4
0 3	06 31	06 316
	2	21
		0

Qualquer exercício relativo a êste 4.º caso de divisão, ou aos demais, é difícil de ser objetivado. Seria necessário, para tal fim, um número muito grande de objetos. Dever-se-á, todavia, usar uma semi-objetivação, com figuras ou desenhos no quadro negro, se necessário, apelando-se sobretudo, a conhecimentos de numeração.

5.º *caso*:

1518 / 4	15 c + 4 d + 8 u / 4
31 387	3 c + 8 d + 7 u
28	3 c = 30 d
0	31 d
	2 d = 20 u
	28 u
	0

6.º *caso*: Explicação semelhante à do caso anterior.

7.º *caso*:

6185 / 8	61 c + 8 d + 5 u / 8
08 810	0 c 8 d 8 c + 1 d
05	5 u

Sob o ponto de vista da divisão de inteiros, o quociente de 5 por 8 (última parcial) é zero,

sendo o resto o próprio dividendo 5. Verifica-se também que o quociente de tôda a divisão é 8 c + 1 d ou 81 d ou ainda 810.

8.º *caso*:

2148 / 6	21 c + 4 d + 8 u / 6
048 408	0 c 4 d = 40 u 4 c + 8 u
0	48 u
	0 u

Neste caso, depois de dividir-se 21 c por 6, ter-se-ia de dividir 4 d por 6. Divide-se porém, por 6, 4 d + 8 u ou 48 unidades, obtendo-se, por quociente parcial, 8 unidades. Ora, se o quociente de tôda a divisão é 4 c + 8 u ou 408, verifica-se que é necessário colocar-se um zero após o quociente parcial, 4, quando se divide segundo o processo usual.

9.º *caso*:

a)	43206 / 9	43m + 2c + 0d + 6u / 9
	72 4800	7m = 70c 4m+8c
	006	72c
		0 0d 6u

Sendo 4m + 8c ou 4800 o quociente de tôda a divisão, percebe-se a necessidade de se colocarem dois zeros consecutivos após os quocientes parciais 4 e 8; um como quociente da divisão de 0d por 9, e outro como quociente da divisão de 6u por 9. Convém ter em mente que, sob o ponto de vista da divisão de inteiros, o quociente da divisão de dois números é zero, se o dividendo é menor que o divisor.

b) 49063 / 7 — 49m + 0c + 6d + 3u / 7

```
49063 / 7          49m + 0c + 6d + 3u / 7
0063   7009        0m    0c   6d=60u   7m+9u
   0                          ——
                              63u
                               0u
```

O quociente de tôda a divisão é 7m + 9u ou 7009. Os dois zeros entre os quocientes parciais 7 e 9 são, pois, necessários. Ocorrem, um após outro: o primeiro, quando se baixa o algarismo zero, das centenas de 49063, e o segundo ao baixar-se o algarismo 6, das dezenas.

115) O emprêgo das subtrações complementares, na divisão, embora recomendável, por conduzir à rapidez, não é necessário ou indispensável. Pode dividir-se, ainda mesmo as ignorando. Basta que, em cada divisão parcial, colocado sob o dividendo o produto do divisor pelo respectivo quociente parcial, se faça a subtração pelos métodos comuns. Exemplos:

Não usando subtrações complementares.

```
4539 / 7          617 / 28
42     648        56    23
—                 —
 33                87
 28                84
 —                 —
  59                3
  56
  —
   3
```


Usando subtrações complementares.

```
4539 / 7          617 / 28
 33    648         87   23
  59                3
   3
```

É interessante observar, para explicação aos alunos, a maneira como se obtém, por meio das subtrações complementares, a diferença entre um dividendo parcial e o produto do divisor pelo respectivo quociente. Voltemos ao exemplo 647/28 (647/28). O resto 8, entre o primeiro dividendo parcial 64 e o produto 56, é achado assim:

```
Primeiro: 2 vêzes 8 .......... 16
                               16 para 24.... 8
Depois: 2 vêzes 2 ............ 4
                               4 para 4 ...zero
Ou 4 e 2 ..................... 6
                               6 para 6...zero
```

O que se passa é equivalente ao seguinte:

```
64 d     ou     6 c e  4 d     ou     4 c e 24 d
-56 d           4 c e 16 d            4 c e 16 d
———             ————————              ——————————
                                             8 d
```

Como se vê, subtraímos, primeiro, das 24 dezenas do minuendo, as 16 dezenas do subtraendo. E, numa segunda operação, subtraímos as 4 centenas do subtraendo. Se, ao subtrairmos segunda vez, não dizemos ou pensamos "4 para 4", mas sim "6 para 6", é porque estamos subtraindo segundo o método austriaco (parágrafo 90). Neste caso, quando dizemos "16 para 24", as duas centenas, de 24, não provêm das centenas de 64. São duas centenas somadas ao minuendo parcial 64. Ora, para que uma diferença não se altere, é necessário que, somando-se certo número ao minuendo, se some também, ao subtraendo, o mesmo número. Com efeito: $8 - 3 = 5$, $(8 + 4) - (3 + 4) = 5$. Se ao minuendo 6c + 4d, somamos 20 dezenas, ou 2 centenas, é necessário que, ao subtraendo 56d, ou 40d + 16d, ou ainda 4c + 16d, somemos também 2 centenas. Temos, pois, designando por m o minuendo, e por s o subtraendo:

$$\begin{array}{r} 64\,d \\ -\,56\,d \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} (6\,c + 4\,d) \\ -\,(4\,c + 16\,d) \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} (6\,c + 24\,d) \\ -\,(6\,c + 16\,d) \\ \hline \end{array}$$

Note-se que $m - s = (m + 20\,d) - (s + 2\,c)$

116) Trataremos, agora, dos casos de divisão em que o divisor é número de mais de um algarismo. 10.º *caso de divisão*: Divisão sem nenhum zero no quociente; dividendo e divisor maiores que 10 e múltiplos de 10; divisor de dois algarismos. Exemplos: 4560/60; 73280/30. Ao fazermos divisões como estas, não devemos de início, e sem nenhuma explicação, cortar o zero do dividendo e o do divisor. Melhor é dividirmos, primeiramente, mantendo o zero; e depois mostrarmos que, embora cortando-os, o quociente da divisão é absolutamente o mesmo. Mas não basta isso. Devemos considerar duas divisões, uma exata e outra

com resto, e levar os alunos a compreenderem que o resto fica alterado (dividido por 10), quando fazemos a divisão sem levar em conta os referidos zeros, ou melhor: quando primeiro dividimos por 10 o dividendo e o divisor.

Exemplos:

$$\begin{array}{l|l} 3740 & 70 \\ \hline 21 & 53 \\ \;\;30 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 53 \times 70 + \;\;3 = 3710 + \;\;3 = 3713 \\ 53 \times 70 + 30 = 3710 + 30 = \underline{3740} \end{array}$$

117) 11.º *caso*: Divisão inexata, sem nenhum zero no quociente; divisor de dois algarismos, múltiplo de 10 e maior que 10. Exemplos: 967/30; 4752/20. Os casos anteriores de divisão já devem ter concorrido, não só para fixação das tabuadas de dividir, como também para que ficassem os alunos bem familiarizados com o complexo mecanismo que esta operação envolve; determinação dos quocientes parciais, multiplicação, subtração e baixa de algarismos do dividendo. Neste caso, porém, e muito mais nos seguintes, surgem novas dificuldades, sendo evidente que entre tôdas se destaca a que diz respeito à estimativa do quociente em cada divisão parcial. Quanto aos exercícios correspondentes a êste caso, ao anterior, e aos seguintes, é certo que podem ser preparados com os elementos das tabuadas. O prepará-los assim, porém, exige, além de grande atenção, uma série de cuidados especiais. Aconselhamos, por isso, e para evitar descrever o processo em cada caso, que sejam organizados indiretamente, isto é, multiplicando-se o divisor pelo quociente desejado.

Nos casos em que deva haver resto, basta somar ao produto um número menor que o divisor. Seja organizar um exercício relativo a êste 11.º caso. O quociente pode ser 68, o divisor 40, e o resto 16, por exemplo. Temos $68 \times 40 + 16 = 2720 + 16 = 2736$. O exercício é então, o seguinte 2736/40. Façamos agora, esta divisão, explicando o processo de dividir.

$$\begin{array}{l|l} 2736 & 40 \\ \hline 33 & 6 \end{array}$$

ou (273 dezenas + 6 nidades) ÷ 40

O primeiro dividendo parcial é 273, ou melhor: 273 dezenas, pois não é possível obter-se um número inteiro de centenas (inteiro diferente de zero), dividindo-se 27 centenas por 40 ou em quarenta partes iguais. Dividindo-se, porém, 273 dezenas por 40, ou em quarenta partes iguais, tôdas com um número inteiro de dezenas, cada uma dessas partes terá 6 dezenas; pois 6 dezenas x 40 = 240 dezenas, enquanto que 7 dezenas $\times$ 40 = = 280 dezenas.

$$\begin{array}{l|l} 2736 & 40 \\ \hline 336 & 68 \\ \;\;16 & \end{array}$$

As 33 dezenas que sobraram, feita a 1.ª divisão, são equivalentes a 330 unidades. Ora, se a essas 330 unidades são somadas as 6 outras do número 2736 (pois 2736 = 273 dezenos e 6 unidades), temos, ainda, para dividir por 40, a soma 330 + 6 unidades, ou o número 336.

Na prática, dada a disposição, ou arrumação, do dividendo, do divisor e do resto, ao baixarmos o algarismo 6, colocando-o à direita de 33, obtemos imediatamente o número 336 ou 330 + 6. Dividindo, finalmente, por 40 as 336 unidades, temos 8 delas por quociente, e ainda um resto constituído de 16 outras.

118) Uma das maiores dificuldades, com que se esbarra, ao dividir, é a estimativa dos quocientes relativos aos dividendos parciais. Alunos há, em grande número, até mesmo em curso secundário, os quais, ao dividirem, fazem duas ou mais "continhas" subsidiárias até acertarem com o quociente, algarismo por algarismo. E não se pode negar que essa falha da parte dêles é, muitas vêzes, conseqüência de os seus professôres não lhes terem indicado um caminho menos árduo para a descoberta de cada um dos símbolos indo-arábicos que representam os resultados das divisões parciais que vão fazendo. Lembremo-nos do seguinte: o quociente da divisão de dois inteiros, a e b, é o mesmo que se obtém quando se dividem, um pelo outro, os resultados prèviamente obtidos com a divisão de a e b por um mesmo divisor.

Com efeito:

$$\begin{array}{ll} 60 \div 30 = 2 & 6 \div 3 = 2 \\ 350 \div 70 = 5 & 35 \div 7 = 5 \\ 4800 \div 800 = 6 & 48 \div 8 = 6 \end{array}$$

Consideremos, agora, as seguintes divisões, que podemos supor parciais e, portanto, ocorrentes em operações de dividir: 78/31; 92/26; 524/78. O quociente de 78 por 31 tem de ser 2, porque $31 \times 2 = 62$, enquanto que $31 \times 3 = 93$. Mas o quociente de 80 (número próximo de 78) por 30 (número próximo de 31) o qual é o mesmo quociente de 8 por 3, é também 2. Então, é melhor dividir, não 78 por 31, mas 80 por 30, ou 8 por 3. Melhor é também dividir 90 por 30, ou 9 por 3, em vez de 92 por 26; 500 por 80, ou 50 por 8, em vez de 524 por 78. Assim, para acharmos os quocientes das divisões de 78 por 31, 92 por 26, 524 por 78, os quais são 2, 3 e 6, respectivamente:

não dividimos 78 por 31, mas 80 por 30, ou 8 por 3, preferivelmente.

não dividimos 92 por 26, mas 90 por 30, ou 9 por 3, preferivelmente.

não dividimos 524 por 78, mas 500 por 80, ou 50 por 8, preferivelmente.

Êsse recurso com que estimarmos o quociente, em cada divisão parcial, é o melhor que existe, embora pareça enganoso, uma ou outra vez. Na divisão de 3596 por 52, por exemplo, ao dividirmos 360 por 50, ou 36 por 5, em vez de 359 por 52, achamos 7, que não é o quociente convinhável. Com a prática, chegamos a perceber, num golpe de vista, ou de cálculo, a razão pela qual um certo quociente não é o número n, e sim o número $n + 1$ ou $n - 1$. Neste exemplo, verifica-se que

7 é "forte", porque, do produto de 2, do divisor 52, por 7, provém uma dezena, que é somada às outras trinta e cinco, do produto de 5 por 7.

119) Continuemos com os casos de divisão. 12.° *caso*: Divisão sem nenhum zero no quociente; divisor de dois algarismos, sendo 1 ou 2 o das unidades. Exemplos 2016 / 32; 4792 / 81; 19291 / 51; 44186 / 72. Os exercícios são organizados da maneira sugerida no parágrafo 117. Assim é que, para obtermos o dividendo de 44186 / 72, multiplicamos 613 (quociente sem nenhum zero) por 72 e somamos 50, que será o resto da divisão.

120) 13.° *caso*: Divisão sem nenhum zero no quociente; divisor de dois algarismos, sendo 8 ou 9 o das unidades. Exemplos: 2429/29; 10800/48; 2304/39; 3717/58.

121) 14.° *caso*: Divisão sem nenhum zero no quociente; divisor de dois algarismos, sendo, 3, 4, 5, 6 ou 7 o das unidades. Exemplos: 3866/57; 20348/73; 6538/14; 1782/36; 987/25.

122) 15.° *caso*: Divisão com um zero no fim do quociente; divisor de dois algarismos. Exemplos: 53024/57; 60863/78; 26058/42; 23217/61. Já mostramos, no caso de o divisor ser número de um só algarismo, como é fácil explicar êsse zero no quociente. E a explicação é igualmente fácil, se o divisor é número de dois ou mais algarismos:

$$\begin{array}{r|l} 26058 & 42 \\ \cline{2-2} 8 & 62 \end{array}$$

Dividindo-se 260 por 42, achamos 6 centenas por quociente, e ainda um resto constituído de 8 centenas.

26058 / 42
 85   62
  1

8 centenas são 80 dezenas. Ora, 80 dezenas mais 5 dezenas são 85 dezenas. Dividindo-se 85 dezenas por 42, achamos 2 dezenas por quociente, e 1 dezena por resto.

26058 / 42
 85   62
  18

1 dezena é igual a 10 unidades. Mas 10 unidades mais 8 unidades são dezoito (18) unidades e não podem ser divididas em 42 partes iguais, sob o ponto de vista de divisão exata. O quociente pois, de 26058 por 42, é constituído de 6 centenas e 2 dezenas, ou 62 dezenas ou 620 unidades.

26058 / 42
 85   620
  18

O último dividendo parcial, 18, é também o resto da divisão.

123) *16.° caso*: Divisão com um zero pelo meio do quociente; divisor de dois algarismos. Exemplos:

17622/29; 40348/67; 8688/42; 31476/78. Expliquemos o zero pelo meio do quociente. Seja a divisão de 31476/78.

31476 / 78
 2   4 centenas

Dividindo-se por 78 as 314 centenas do dividendo, achamos o quociente 4 centenas, e o resto 2. (duas centenas) .

31476 / 78
 27   4 centenas

Ao baixarmos o algarismo 7, colocando-o à direita de 2, formamos o número 27. São 27 dezenas, ou seja: a soma de 2 centenas, com 7 dezenas. Temos de dividir, agora, 27 dezenas por 78, ou em 78 partes iguais, o que não é possível, a não ser fracionando as dezenas. Fazemos, então o seguinte: somamos a essas 27 dezenas ou 270 unidades as 6 outras do número 31476, e temos um novo dividendo parcial, de 276 unidades. Dividindo, finalmente, por 78, essas unidades, achamos um quociente de 3 unidades e um resto de 42 unidades.

31476 / 78
 276   4 centenas e 3 unidades
  42

Se o quociente é constituído de 4 centenas e 3 unidades, o número que o representa é 403. O zero é, pois, necessário. Colocamo-lo no lugar conveniente, no momento em que ocorre um dividendo parcial que, em valor absoluto, seja menor que o divisor. No exemplo considerado, o zero é escrito ao ocorrer o dividendo 27.

```
31476 / 78
  276   403
   42
```

124) *17.º caso*: Divisão com zeros consecutivos pelo meio do quociente, ou no fim; divisor de dois algarismos. Exemplos: 115079/23; 343098/49; 210634/78 167740/43. A ocorrência dos zeros, ou a razão por que colocá-los entre os demais algarismos do quociente, é explicada do modo como o fizemos com um dos exemplos do caso anterior.

125) *18.º caso*: Divisão em que o dividendo e o divisor são números quaisquer. É o caso geral. Vencidas, etapa por etapa, segundo os casos anteriores, as várias dificuldades que a operação de dividir apresenta, julgamos estarem os alunos capacitados a dividir dois números inteiros quaisquer, um pelo outro. E' claro que êsses números não serão iguais: e nem será o dividendo menor que o divisor. O razoável é apresentar exercícios em que o divisor seja número de mais de dois algarismos.

Exemplos: 240731/517; 1240126/6080; 70083/384; 681700/8029.

126) *Caso especial de divisão*: Divisão em que o divisor é 10, 100, 1000, etc. Exemplos: 348/10;

50683/100, 29665/1000. Nestes exemplos, os quocientes, sob o ponto de vista da divisão de inteiros, são 34, 506, e 29, respectivamente, pois o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente, mais o resto. E temos, realmente:

$$348 = 10 \times 34 + 8$$

$$50683 = 100 \times 506 + 83$$

$$29665 = 1000 \times 29 + 665$$

127) ***Prova das operações de multiplicação e divisão***: Após multiplicarmos ou dividirmos, tiramos a prova. No caso da multiplicação, a prova mais comum consiste simplesmente em repetir a operação. Tiramos prova também, e muito boa prova, quando fazemos uma segunda multiplicação, tendo antes trocado o multiplicando pelo multiplicador. Nem sempre, todavia, convém esta prova, pois, às vêzes, a troca de um fator pelo outro, acarreta, numa segunda multiplicação, um número muito maior de produtos parciais. Um terceiro meio de tirarmos a prova da multiplicação consiste em dividirmos o produto pelo multiplicador e termos, por quociente, o multiplicando. A melhor prova da operação de divisão é, sem dúvida, a multiplicação. Multiplicamos o quociente pelo divisor, ou o divisor pelo quociente, e ao produto somamos o resto, se o houver. O resultado deve ser o dividendo. O que comumente fazemos, no entanto, é dividirmos segunda vez. Não recomendamos a prova dos nove.

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

128) I) Propriedade comutativa: a ordem das parcelas não altera a soma. Exemplo: 20 + + 18 + 30 = 30 + 20 + 18.

II) Propriedade associativa: a soma de várias parcelas não se altera quando se substituem duas ou mais delas por outra que tenha tantas unidades quantas a soma das parcelas substituidas. Exemplo: 14 + + 26 + 50 = 40 + 50.

III) Propriedade dissociativa: dadas várias parcelas a somar, pode-se substituir uma delas por duas ou mais outras cuja soma tenha tantas unidades quantas a parcela substituída. Exemplo: 50 + 80 = 50 + + 50 + 30.

Observações

1.ª) Cabe aos alunos descobrir e enunciar não só estas propriedades, mas tôdas as outras. É bastante, para isso, que o professor os desafie e os oriente. Por exemplo, dada a soma indicada 20 + 18 + 30, o professor fará um aluno escrever no quadro negro:

20 + 18 + 30 = 68

18 + 20 + 30 = 68

20 + 30 + 18 = 68

30 + 20 + 18 = 68

18 + 30 + 20 = 68

30 + 18 + 20 = 68

"Que descobriu você?", perguntará. A resposta não será bem enunciada, mas será provàvelmente certa. O bom enunciado virá, aos poucos, dos próprios alunos, através de um oportuno exercício de redação oral.

2.ª) Estudar as propriedades só por estudá-las não vale a pena. É imprescindível que haja oportunidades para a sua utilização. Assim, por exemplo, a adição de 280 + 700 + 320 deve fazer-se mentalmente, associando-se primeiro 280 e 320.

3.ª) Há propriedades que são muito importantes pela frequência com que podem ser empregadas no cálculo. E é só destas que tratamos.

PROPRIEDADES DA SUBTRAÇÃO

129) I) O resto aumenta ou diminui do número somado ou subtraido ao minuendo Exemplos:

50 — 30 = 20	50 — 30 = 20
55 — 30 = 25	40 — 30 = 10

II) O resto diminui ou aumenta do número somado ou subtraido ao subtraendo. Exemplos:

80 — 60 = 20   80 — 60 = 20

80 — 70 = 10   80 — 50 = 30

III) O resto não se altera, se um mesmo número é somado ou subtraido ao minuendo e ao subtraendo. Exemplos:

60 — 40 = 20   60 — 40 = 20

65 — 45 = 20   50 — 30 = 20

IV) Para subtrairmos de um número uma soma indicada de várias parcelas, podemos subtrair dêsse número a primeira delas; do resultado obtido, a segunda; do novo resultado, a terceira; e assim prosseguirmos até que tenhamos subtraido a última parcela. Exemplos:

40 — (12 + 8 + 5) = 40 — 12 — 8 — 5

V) Para subtrairmos de um número uma diferença indicada, podemos somar a êsse número o subtraendo, e da soma obtida subtrair o minuendo. Exemplo:

20 — (30 — 18) = (20 + 18) — 30

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

130) I) Propriedade comutativa: a ordem dos fatôres não altera o produto. Exemplo:

2 × 3 × 4 = 24   4 × 2 × 3 = 24

3 × 2 × 4 = 24   3 × 4 × 2 = 24

2 × 4 × 3 = 24   4 × 3 × 2 = 24

II) Propriedade associativa: o produto de vários fatôres não se altera quando se substituem dois ou mais dêles por um outro que tenha tantas unidades quantas o produto dos fatôres substituidos. Exemplo:

4 × 25 × 36 = 100 × 36

III) Propriedade dissociativa: o produto de vários fatôres não se altera quando se substitui um dêles por dois ou mais outros cujo produto tenha tantas unidades quantas o fator substituído. Exemplo:

36 × 25 = 9 × 4 × 25

IV) Propriedade distributiva em relação à adição: para multiplicarmos por um número uma soma indicada de várias parcelas, podemos multiplicar por êsse número cada parcela da soma e fazer a adição dos resultados. Exemplo:

(8 + 10 + 6) × 9 = 72 + 90 + 54 = 216.

V) Propriedade distributiva em relação à subtração: para multiplicarmos por um número uma diferença indicada, podemos multiplicar por êsse número o minuendo e o subtraendo e do primeiro produto subtrair o segundo. Exemplo:

$(42 - 30) \times 5 = 210 - 150 = 60.$

VI) O produto de dois fatôres fica aumentado ou diminuído do produto de um dêles pelo número somado ou subtraído ao outro. Exemplos:

$8 \times 4 = 32$ $\qquad$ $15 \times 6 = 90$

$12 = 4 \times 3$ $\qquad$ $30 = 6 \times 5$

$11 \times 4 = 44$ $\qquad$ $10 \times 6 = 60$

VII) Para multiplicarmos por um número um produto indicado, multiplicamos por êsse número um só fator do produto. Exemplo:

a) $(2 \times 3 \times 7) \times 10 =$
$= 20 \times 3 \times 7 = 420$

b) $(2 \times 3 \times 7) \times 10 =$
$= 2 \times 30 \times 7 = 420$

c) $(2 \times 3 \times 7) \times 10 =$
$= 2 \times 3 \times 70 = 420$

PROPRIEDADES DA DIVISÃO

130) I) O quociente varia na razão direta do dividendo. Exemplos:

21 / 6 = 4	$21 \times 3 = 72$
72 / 6 = 12	$4 \times 3 = 12$
42 / 7 = 6	$42 \div 2 = 21$
21 / 7 = 3	$6 \div 2 = 3$

II) O quociente varia na razão inversa do divisor. Exemplos:

48 / 2 = 24	$2 \times 4 = 8$
48 / 8 = 6	$24 \div 4 = 6$
54 / 9 = 6	$9 \div 3 = 3$
54 / 3 = 18	$6 \times 3 = 18$

III) Propriedade distributiva da divisão exata em relação à adição: para dividirmos por um número uma soma indicada de várias parcelas, podemos dividir por êsse número cada parcela da soma e efetuar a adição dos quocientes. Exemplos:

$$(12 + 8 + 20) \div 4 = 3 + 2 + 5,$$

ou

$$\frac{12 + 8 + 20}{4} = 3 + 2 + 5.$$

IV) Propriedade distributiva da divisão exata em relação à subtração: para dividirmos por um número uma diferença indicada, podemos dividir por êsse número o minuendo e o subtraendo, e do primeiro quociente subtrair o segundo. Exemplo:

$$(48 - 18) \div 6 = 8 - 3 = 5,$$

ou

$$\frac{48 - 18}{6} = 8 - 3 = 5.$$

V) Para dividirmos por um número um produto indicado, basta dividirmos por êsse número um dos fatôres do produto, o que

será possível, se um dêles, pelo menos, fôr múltiplo do número divisor. Exemplo:

a) $(8 \times 10 \times 7) \div 5 =$
$$= 8 \times 2 \times 7 = 112$$

b) $(20 \times 8 \times 12) \div 4 =$
$$= 5 \times 8 \times 12 = 480$$

c) $(20 \times 8 \times 12) \div 4 =$
$$= 20 \times 2 \times 12 = 480$$

d) $(20 \times 8 \times 12) \div 4 =$
$$= 20 \times 8 \times 3 = 480$$

132) Diretrizes gerais para o ensino das operações de multiplicação e divisão de inteiros. Diretrizes gerais de ensino.

+ 6ai

I — Insistir em que se tornem claros os conceitos de multiplicação e divisão.

II — Organizar tècnicamente os exercícios de multiplicação e divisão, de maneira que, por meio dêles, não sòmente se fixem os processos de multiplicar e dividir, mas se pratiquem, para a fixação desejável, todos os elementos das respectivas tabuadas, e principalmente os mais difíceis.

III — Pôr reparo nas dificuldades que estas duas operações apresentam, notadamente a de divisão, e conduzir o ensino de modo que os alunos tenham de vencer um só obstáculo de cada vez. Apresentar os casos de multiplicação e divisão, e os exercícios correspondentes, segundo a ordem sugerida.

IV — Explicar, objetivando se necessário, o motivo de se transportarem reservas, na multiplicação. Explicar, também, e analiticamente, o processo de dividir, em cada um dos casos de divisão, e principalmente nos mais difíceis.

V — Reconhecer, ao ensinar um novo tópico, ou um novo processo, a necessidade de o aluno mover-se, gradativamente, de um estágio de experiências concretas para um outro, intermediário, em que se apresentem os números por meios semi-concretos, e dêste para um derradeiro, em que se empreguem símbolos abstratos.

VI — Convir em que é necessário estudar e praticar as 41 adições complementares difíceis (parágrafo 64), como 36 + 7, 45 + 8, 28 + 5, por exemplo, as quais, além de ocorrerem na adição de três ou mais números, como tôdas as outras, são ainda ocorrentes na multiplicação. Reparar em que não é possível adiantar-se em multiplicação, ou multiplicar com desembaraço, sem conhecê-las e empregá-las.

VII — Ter em mente que as duas principais causas de os alunos dividirem com demora lastimável são: o não fazerem, sem dificuldade, a estimativa do quociente em cada divisão parcial e não dominarem as subtrações complementares a fim de obterem, por meio delas, a diferença entre um dividendo parcial e o produto do divisor pelo quociente estimado. Apresentar, pois, os meios com que façam melhormente essa estimativa; e prover *exercícios orais*, para que pratiquem as subtrações complementares.

VIII — Prover exercícios para a prática das 369 divisões fundamentais inexatas, contidas no quadro do parágrafo 67. Apresentá-las por escrito, e oralmente. Exemplos: 23/6, 61/9, 33/4, ou 23 por 6? 61 por 9? 33 por 4?

IX — Usar o jôgo como recurso com que praticar para a fixação. Verificar, porém, se êle apresenta êste mínimo de qualidade: ser agradável ou interessante, conduzir ao fim em vista e dar ensejo a que participem dêle, ativamente, o maior número possível de alunos da classe.

X — Reparar em que, comparada com a rapidez nos cálculos, a exatidão é mais importante. Lembrar-se ainda de que a rapidez e a exatidão podem ser aumentadas pela utilização de processos mais simples e mais inteligíveis.

XI — Pretender, a cada passo, a compreensão, que se pode assegurar, com menor esfôrço, focalizando poucos conhecimentos de cada vez.

XII — Ensinar a Aritmética como um sistema inteligível, de idéias, princípios e processos. Não dividí-la em unidades estanques, independentes, ou não relacionadas. Saber que o ideal não é apenas calcular, mas generalizar, transferir e aplicar.

XIII — Conter o desejo de ensinar um novo tópico, ou um novo processo, se os alunos, no momento, não se acham intelectualmente preparados para compreendê-los.

XIV — Sentir que a Matemática, em qualquer de seus ramos, reclama uma sequência lógica, que não se poderia observar sem aulas pràviamente planejadas. Reparar, então, na impossibilidade de ensiná-la incidentalmente, ou apenas através de projetos, centros de interêsse, ou outros métodos de globalização. Servir-se, todavia, das experiências da criança, não só como meios de motivá-la, mas ainda como recursos com que enriquecer-lhe a idéia de número.

XV — Provocar reações. Aprender é reagir. O sentido real, ou a significação de um fato ou processo, depende de reações. Quanto mais variadas forem estas, tanto mais profunda será a penetração, e mais segura a compreensão.

XVI — Empregar não apenas métodos dogmáticos, ou de exposição, pretendendo transmitir conhecimentos a crianças passivas. Usar, porém, os métodos eurísticos, ou de investigação, estimulando-lhes o interêsse e a iniciativa, a fim de que realizem, por si mesmas, a aprendizagem real.

XVII — Ter em mente que um conhecimento é adquirido com maior rapidez quando a atividade que a êle conduz é motivada pelo interêsse. Lembrar-se, todavia, de que um objeto nunca é interessante por si mesmo; que o interêsse por êle depende da disposição psico-fisiológica de quem o considera. Lembrar-se também de que o interêsse é dinâmico, e não estático. Muda com as experiências, com a idade, com a cultura e com o meio social.

XIX — Conduzir o ensino com a convicção de que o ideal não é acumular conhecimentos, mas desenvolver capacidade. Fazer da criança, "não um armazém, porém, uma fábrica; não um depósito para encher, mas sim um mecanismo, bem lubrificado, pronto para funcionar e funcionar bem".

XX — Pôr empenho em criar um meio propício ao estudo e à aprendizagem, arrumando de tal modo a sala de aula, que possa apresentar, além de atrativos, confôrto razoável e recursos didáticos indispensáveis.

XXI — Concorrer para a disciplina da classe, planejando devidamente cada uma das aulas.

XXII — Medir, com padrões adequados, a capacidade da criança. Não irritar-se com o fato de lhe ser, às vêzes, tão difícil o que parece tão fácil. Não usar expressões como estas, que podem causar uma invencível inibição: "Você não aprende mesmo", "faz tudo errado".

XXIII — Procurar educar-se para educar, lembrando-se de que a criança elabora espontâneamente a sua conduta, em conformidade com exemplos e modelos que observa, e não segundo o que lhe é indicado ou imposto. Usar de delicadeza, se pretende delicados os alunos. Ser pontual, se os quer pontuais. Usar boa linguagem, se deseja que falem bem.

XXIV — Atentar para o fato de que o fenômeno educativo, que é também um fenômeno biológico, está condicionado por êstes três fatôres: contingente hereditário, meio ambiente e comportamento individual, constituído de ações e reações.

XXV — Promover, para os alunos, uma vida escolar aprazível, fazendo da escola não um lugar onde apenas se preparem para a vida, mas uma comunidade onde cada um dêles conviva feliz, servindo e cooperando para o bem de si mesmo e de todo o grupo.

NÚMEROS PRIMOS — DIVISIBILIDADE — FRAÇÕES ORDINÁRIAS — NÚMEROS DECIMAIS — PROBLEMAS

133) *Número primo e número composto. Números primos entre si.* Chamamos primo ao número inteiro, maior que zero, só divisível por outro que lhe seja igual, e por 1. O número não primo é chamado composto. Aos divisores de um número composto N, menores que N e maiores que 1, chamamos divisores próprios de N. O número 12, por exemplo, tem os divisores próprios 2, 3, 4, e 6. Dois ou mais inteiros, diferentes de zero, são números primos entre si, quando o único divisor comum dêles é 1. Os números 8, 12, 27 e 35, por exemplo, são primos entre si. Se dois números são primos entre si, um dêles e primo com o outro. Considerando-se os números 8 e 9, por exemplo, pode dizer-se que 8 é primo com 9, ou que 9 é primo com 8. Três ou mais números são primos entre si, dois a dois, se cada um dêles é primo com qualquer dos outros. E' o caso dos números 8, 9, 25 e 49. Decorre, das definições acima, o seguinte: três ou mais números primos são primos entre si, e primos entre si dois a dois. Veremos, mais adiante, algumas aplicações de números primos, e números primos entre si.

134) *Divisibilidade.* Não é difícil ao aluno aprender a divisibilidade, desde que atendamos ao critério

de dirigir a sua aprendizagem de modo que em tôdas as etapas haja compreensão de princípios e não regras que apenas se decorem. Façamos, em primeiro lugar, que nossos alunos compreendam que a condição necessária e suficiente para que um número composto seja divisível por um número primo ou não primo, é que êste seja um de seus fatôres. Assim, o número 30 é divisível por 2, por ser o produto de 2 por 15, ou uma soma de 15 parcelas iguais a 2; é divisível por 5, por ser 30 igual a 5 multiplicado por 6; é divisível por 3, porque é também o produto de 3 por 10; é ainda divisível por 6, por 10 e por 15, por serem êstes números fatôres de 30. E', finalmente, divisível por 30 e por 1. Mostremos, em seguida, que, dada uma soma indicada, de várias parcelas, se um número qualquer dividir cada uma delas, dividirá também a soma. Com efeito: seja uma soma de várias parcelas, tôdas divisíveis por 6: $18 + 21 + 12 \ldots + 36$. Ora, dividir 18, 21, 12... 36 por 6 é achar quantas vêzes o número 6 está contido em cada um dêsses números.

Temos então:

$$18 = 6 + 6 + 6$$
$$21 = 6 + 6 + 6 + 6$$
$$12 = 6 + 6$$

....

....

....

$$36 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$$

É fácil concluir que a soma dos números dados, qualquer que seja ela, conterá 6 um número exato de vêzes. Logo, é divisível por 6. Lembramos aos senhores professôres que não se pretende aqui nenhum rigor lógico, nem mesmo referência a qualquer teorema, pois o curso é primário, mas alguma coisa mais do que o simples dizer que, dividindo um número tôdas as parcelas de uma soma, também divide a soma. Chamamos a atenção dos alunos para o seguinte: vamos fazer de conta, ou supor, que tôdas as parcelas não aparentes, da soma acima, compreendidas entre 12 e 36, sejam divisíveis por 6, menos uma, cujo resto por 6 é 4. Façamos, depois, esta pergunta: "Será que a soma é, agora, divisível por 6?". E' quase certo que um bom número de alunos terá percebido, não só o fato de ela não ser exatamente divisível por 6, mas ainda o de deixar, na sua divisão, o mesmo resto 4, da parcela não divisível. E se, porventura, não o tiverem percebido todos, poderá o professor fazê-los perceber, tornando evidentes, no quadro negro, êsses dois fatos. Antes de prosseguir, é de tôda a vantagem que verifiquem estas mesmas verdades, considerando o caso particular de uma soma de duas parcelas. E' principalmente importante que fique claramente compreendido: 1.º) que se um número dividir só uma das parcelas, não dividirá a soma: 2.º) que o resto da divisão da soma será o mesmo resto da parcela não divisível. Prosseguindo, convém mostrar que, se um número divide outro, divide os múltiplos dêsse outro. E' necessário, antes fazer que fique perfeitamente claro o conceito de múltiplo de um número. Poder-se-á, depois, considerar um número natural qualquer, e um dos seus múltiplos. Seja, por exemplo, o número dividendo 12 e o divisor 4. Seja também um múltiplo de 12, como 12×6 ou $12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12$. Temos:

$$12 = 4 + 4 + 4$$

$$12 = 4 + 4 + 4$$

$$12 = 4 + 4 + 4$$

$$12 = 4 + 4 + 4$$

$$12 = 4 + 4 + 4$$

$$12 = 4 + 4 + 4$$

Vê-se, fàcilmente, que, sendo 12 divisível por 4, o seu múltiplo 12×6 é também divisível por 4, pois contém 4 um número exato de vêzes, ou seja 18 vêzes. E não é difícil compreender que, se o múltiplo considerado tivesse sido 12×7, 12×8, 12×9, ou qualquer outro, o quadro mostraria, à direita, 21, 24, 27 ou mais vêzes o número 4. Assim, qualquer múltiplo de 12 será sempre divisível por 4, por conter 4 um número exato de vêzes. Cabe aqui ao professor, como em tôdas as situações semelhantes, conduzir de tal modo o ensino, que os alunos, por si mesmos, cheguem a generalizar, sempre que possível. Vamos agora, para prosseguirmos, supor que êles tenham já aprendido o seguinte:

a) Múltiplo de um número é o produto dêsse número por um inteiro qualquer.

b) Uma soma de duas ou mais parcelas, tôdas iguais a um número, é um múltiplo dêsse número.

c) A condição necessária e suficiente para que um número seja divisível por outro, é que contenha êsse outro como fator.

d) O número que divide tôdas as parcelas de uma soma, divide a soma.

e) O número que divide tôdas as parcelas de uma soma, menos uma, não divide a soma; e o resto da divisão da soma é igual ao da parcela não divisível.

f) Dada uma soma de duas parcelas, se um número divide só uma delas, não divide a soma; e o resto da divisão da soma é o mesmo resto da parcela não divisível.

g) O número que divide outro, divide os múltiplos dêsse outro.

135) *Caracteres de divisibilidade. Divisibilidade por 2, por 5 e por 10.* Obtém-se o resto da divisão, de um número por 2, 5 ou 10, dividindo-se por 2, 5 ou 10 o valor do algarismo da 1.ª ordem. Com efeito: consideremos um número qualquer, de dois ou mais algarismos. Seja o número 6457. E' evidente que 6457 pode representar a soma de duas parcelas: $6450 + 7$ ou $645 \times 10 + 7$. Os números 2, 5 ou 10 dividem a parcela 6450, que é um número múltiplo de 10, e como não dividem 7, não dividem 6457. Além disso, o resto da divisão de 6457, por 2, 5 ou 10 é o mesmo resto da

divisão de 7 por 2, 5 ou 10. Imaginemos que em vez de 6157, tivéssemos 6150, 6152, 6154, 6156 ou 6158. Poderíamos escrever:

$$6150 = 6150 + 0$$
$$6152 = 6150 + 2$$
$$6154 = 6150 + 4$$
$$6155 = 6150 + 5$$
$$6156 = 6150 + 6$$
$$6158 = 6150 + 8$$

Parece-nos que não seria difícil, à vista destas igualdades, chegar às seguintes conclusões: a) um número é divisível por 2, se o algarismo de sua 1.ª ordem é 0, 2, 4, 6, ou 8; b) é divisível por 5, se o algarismo de sua 1.ª ordem é 0 (zero) ou 5; é divisível por 10, se o algarismo de sua 1.ª ordem é (zero). Lembramos o seguinte: um número não é divisível por 2 quando é par; muito ao contrário: um número é par quando é divisível por 2.

Divisibilidade por 4, por 25 e por 100; por 8, por 125 e por 1000. Assim como se evidenciaram os caracteres de divisibilidade por 2, por 5 e por 10, evidenciam-se os relativos aos divisores 4, 25 e 100, como também os que dizem respeito aos divisores 8, 125 e 1000. Lembramos apenas o caminho, sugerindo um exemplo: $5748 = 5700 + 48 = 57 \times (4 \times 25) + 48$; $5748 = 5000 + 748 = 5 \times (8 \times 125) + 748$.

Divisibilidade por 3 e por 9. Dizer aos alunos que um número é divisível por 3 e por 9, quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é um número divisível por 3 e por 9, respectivamente, é muito cômodo, mas não é ensinar. Temos de ter paciência, e mostrar-lhes o porquê da afirmativa. Consideremos alguns números, como 60, 100, 300, 7000, 90, etc. Temos: $60 = 54 + 6$; $100 = 99 + 1$; $300 = 297 + 3$; $7000 = 6993 + 7$; $90 = 81 + 9$. Os alunos poderão verificar diretamente, pela divisão, que as parcelas 54, 99, 297, 6993, 81 e outras, de outros exemplos, são divisíveis, tanto por 3 quanto por 9. Ganharão, assim, uma espécie de fé em que, de fato, qualquer número de dois ou mais algarismos representa uma soma de duas parcelas, uma das quais divisível por 3 e por 9. Consideremos, agora, o número 6340. Temos: $6340 = 6000 + 300 + 40$. Temos também:

$$\begin{aligned} 6000 &= 5994 + 6 \\ 300 &= 297 + 3 \\ 40 &= 36 + 4 \\ \hline 6340 &= 5994 + 297 + 36 + (6 + 3 + 4) \end{aligned}$$

O número 6340 representa, pois, uma soma de quatro parcelas, três das quais divisíveis por 3 e por 9. Mas o número que divide tôdas as parcelas de uma soma, menos uma, não divide a soma; e o resto da divisão da soma é igual ao resto da parcela não divisível. Então, o resto da divisão de

6310 por 3 e por 9 é igual, respectivamente, ao resto da divisão de 13, ou $(6 + 3 + 4)$ por 3 e por 9. Afirmamos, como acima já o fizemos, que não pretendemos seja isto uma demonstração pròpriamente dita, mas algo mais do que simplesmente enunciar uma regrinha. *Divisibilidade por 11.* Não recomendamos seu ensino no curso primário. Se o professor, no entanto, quiser ensiná-la, ou se algum aluno desejar aprendê-la, convém que se chegue ao seu enunciado da maneira pela qual se chegou ao da divisibilidade por 9.

136) *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum*
Ensinar a pesquisa do máximo divisor comum, na escola primária, é perder tempo. Não tem êle nenhuma utilidade. E não se diga que é usado para simplificar frações, porque geralmente as simplificamos por divisões sucessivas. Quando muito, poder-se-á mostrar que dois ou mais números podem admitir vários divisores comuns, ao maior dos quais chamamos máximo divisor comum. Quanto ao mínimo múltiplo comum de vários números, vale a pena aprendermos a descobri-lo; pois se não é necessário, quando temos de somar ou subtrair frações, é, tôdavia, muito conveniente. Há vários casos a considerar.

1.º *caso*: Dados dois números, se o maior é divisível pelo menor o maior é o mínimo múltiplo comum dos dois.

2.º *caso*: Dados três ou mais números, se o maior dêles é divisível por todos os outros, o maior é o mínimo múltiplo comum dos números dados.

3.º *caso*: Dados dois ou mais números diferentes, cada um dos quais primo, o mínimo múltiplo comum é o produto dêles. Êstes três casos podem ser fàcilmente explicados à luz da seguinte verdade, já estudada: a condição necessária e suficiente para que um número seja divisível por outro, é que contenha êsse outro como fator.

4.º *caso*: Dados vários números, como 3, 12, 15 e 20, por exemplo, e tais que o maior não seja múltiplo dos outros, o m.m.c. dêles é o número que se obtém multiplicando-se os diferentes fatôres primos dos números dados, tomando-se, porém, cada um dêsses fatôres com o maior expoente, no caso em que seja comum a dois ou mais números. Para compreender êste 4.º caso é necessário que o aluno entenda, primeiro, que a condição necessária e suficiente para que um número seja divisível por outro, é que contenha todos os fatôres primos dêsse outro, e com expoentes, respectivamente, iguais ao dêsse outro, ou maiores. Exemplo: 504 é divisível por 36, porque 504 contém os fatôres primos de 36 (2 e 3), com expoentes iguais ou maiores. Com efeito: em 504 os fatôres primos 2 e 3 têm expoentes 3 e 2, respectivamente, ao passo que os expoentes dos fatôres primos 2 e 3, de 36, são 2 e 2, respectivamente. Não é fácil levar os alunos a tal compreensão, mas não é impossível. Na prática, dados dois ou mais números, decompomos em fatôres primos, um por um, ou simultâneamente, os não primos e os não contidos em qualquer dos outros, dividindo-os sempre pelo menor de seus divisores, pois o menor divisor de um número não primo é número primo. (Fato interessante que o aluno pode verificar). Quando se trata de frações ordinárias, isto é, de frações realmente comuns, cujos denominadores são números relativamente pequenos, sem que nenhum dêles seja o seu m.m.c., um bom meio de achar êsse m.m.c. é tomar o maior denominador e multiplicá-lo por 2, por 3, por 4, etc. Exemplo: dados os números 12, 15 e 20, multiplicamos 20 por 2, achamos 40; multiplicamos por 3 e achamos 60, m.m.c.

137) *Fração ordinária.* Chamamos fração ordinária ao número da forma a/b, em que *a* e *b* são inteiros, sendo *b* diferente de zero e de 10^{n+1}, para n inteiro. Se *b* é número de forma 10^{n+1}, sendo n inteiro, a fração é decimal. A fração ordinária, como a decimal, é também:

a) Uma ou mais das partes iguais em que se divide um todo unitário, ou seja a unidade. Exemplo: dividimos em três partes iguais uma só coisa ou uma unidade de coisa. Se tomamos uma dessas partes, temos 1/3; se duas, 2/3.

b) Uma ou mais das partes iguais em que se divide um conjunto de unidades. Exemplo dividimos em três partes iguais um conjunto de unidades ou coisas. Se tomamos uma só dessas partes, temos 1/3 do que foi dividido, se duas, 2/3.

c) Um quociente: o da divisão do numerador pelo denominador. A fração 2/3 significa um têrço de dois ou a têrça parte de dois ou o quociente da divisão de 2 por 3. Exemplo: podem dividir-se duas coisas distintas ou duas unidades de coisa em três partes iguais, dividindo-se em três partes iguais *cada uma delas.* Se a cada um dos três têrços, obtidos com a divisão da primeira unidade, se junta um têrço dos que foram obtidos ao dividir-se a segunda, ter-se-á um grupo de três porções, cada uma das quais com dois terços (2/3). Ora, cada porção representa o quociente da divisão de duas unidades, ou coisas, por três.

d) Uma razão: a razão dos dois números que representam, respectivamente, o numerador e o denominador. Exemplo: um aluno, a quem foram propostos dez exercícios, acertou quatro dêles, e errou seis. Ora, o grupo dos exercícios certos está para o grupo dos que foram dados, como 4 está para 10. A razão dos certos para os propostos é 4/10 ou 2/5; a dos certos para os errados, 4/6 ou 2/3; a dos errado para o certo, 6/4 ou 3/2. Êste conceito de razão é fundamental em porcentagem. Quando dizemos que oitenta por cento (80%) dos candidatos a vagas numa escola foram reprovados, significamos que, em cada grupo de cem dêles, um grupo de oitenta foi reprovado. Um número decimal, uma fração decimal, ou uma fração ordinária, pode indicar essa porcentagem:

80/100 ou 0,80 ou 8/10 ou 4/5.

Dos conceitos acima, os três primeiros devem ser dominados, cada um dêles em oportunidade própria, por todos os alunos que cheguem ao fim do curso primário.

138) *Frações decimais e números decimais.* Chamamos decimal à fração, própria ou imprópria, cujo denominador é número da forma 10^n, sendo n inteiro diferente de 0. Exemplos: 1/100; 47/1000; 101/100; 41/10; 239/100.

Temos:

1/100 = 1/100

47/1000 = 40/1000 + 7/1000 = 4/100 + 7/1000

101/100 = 100/100 + 1/100 = 1 + 1/100

41/10 = 40/10 + 1/10 = 4 + 1/10

239/100 = 200/100 + 30/100 + 9/100 = 2 + 3/10 + 9/100.

Verifica-se que a fração decimal pode representar: 1.º) uma parte decimal da unidade; 2.º) uma soma de várias partes decimais da unidade (sendo menor que dez o número de partes de cada ordem decimal); 3.º) um conjunto que encerre uma ou mais unidades, com uma ou mais partes da unidade. Estendendo-se às partes decimais da unidade a aplicação do princípio do valor relati-

vo, é possível representar qualquer fração decimal, sem escrever-lhe o denominador. A fração 239/100, por exemplo, que é igual, como vimos, à soma 2 + 3/10 + 9/100, pode ser escrita da seguinte maneira: 2,39. Com efeito: o algarismo três, na posição em que está, à direita da vírgula que o separa da parte inteira 2, representa unidades dez vêzes menores do que representaria se estivesse no lugar dêsse 2. Ora, 2 representa unidades simples: portanto, 3 representa décimos da unidade. Mas se 3 representa décimos, 9 representa décimos de décimos, ou centésimos. 2,39 é, pois, uma representação decimal de 2 + 3/10 + + 9/100, ou da fração 239/100. É uma dízima, ou um número decimal. Na dízima, distinguimos duas partes: a inteira, que fica à esquerda da vírgula, e que pode ser igual a zero; e a decimal, que fica à direita da vírgula, e cujos algarismos são chamados algarismos decimais. Pode definir-se o número decimal, ou a dízima como o número da forma $a, b_1 b_2 b_3 \ldots\ldots\ldots\ldots b_n \ldots\ldots\ldots\ldots$ em que *a* é inteiro, e $b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots\ldots b_n \ldots\ldots\ldots$ algarismos quaisquer. Se o número de algarismos decimais (os algarismos à direita da vírgula) é finito, o número decimal é finito, ou a dízima é finita. Se o número de algarismos decimais é infinito, não sendo todos iguais a zero, a partir de n não finito, o número decimal é infinito, ou a dízima é infinita. Se os algarismos decimais de uma dízima infinita são todos iguais, ao menos a partir de um dêles, ou se formam, ao menos a partir de um dêles, conjuntos sucessivos, ou períodos, constituídos de dois ou mais dêles, igualmente dispostos, uns em relação aos outros, então a dizima é periódica: simples, se o período começa imediatamente depois da vírgula, e composta se entre esta e o primeiro período existe uma parte não periódica ou um anteperiodo. A dizima finita, como a infinita periódica, é número racional: pode escrever-se sob a forma p/q, em que p e q são inteiros, e q diferente de zero. A dizima infinita não periódica é número irracional.

139) *Frações ordinárias. Fases de aprendizagem.* O estudo e compreensão das frações deve começar com experiências concretas(objetos que se dividem, fôlhas que se dobram ou se recortam, partes que se comparam), passando-se depois à fase de experiências semi-concretas (desenhos de objetos e figuras geométricas), e finalmente à fase de abstração. Nas primeiras experiências a criança há de ver a fração, pegá-la e senti-la. Verá o que é um meio, um têrço, um quarto, um sexto, um oitavo, etc. Aprenderá a representação simbólica dessas frações. Fará a adição de meios, têrços, quartos, sextos, oitavos e outras partes. Verá que 1/2 +1/2 = 2/2, 1/3 +1/3 = 2/3, 1/3 + 2/3 = 3/3, 1/4 + 1/4 = 2/4, 1/4 + 2/4 = = 3/4, etc. Descobrirá que 2/2 = 1, 3/3 = 1, 4/4 = 1, 6/6 = 1, 8/8 = 1, 12/12 = 1. Verificará que 2/3 — 1/3 = 1/3, 3/4 — 1/4 = 2/4, 2/4 — — 1/4 = 1/4, 5/6 — 1/6 = 4/6, 4/6 — 1/6 = 3/6, 5/6 — 2/6 = 3/6, etc. Nessa fase inicial, quando as adições e as subtrações de pequenas frações homogêneas são apoiadas em objetivação, não se pretende ainda a simplificação dos resultados. Assim, as somas e as diferenças obtidas podem

ser frações redutíveis ou irredutíveis e conservarem-se como tais. As somas, em alguns casos, podem ser também frações impróprias iguais à unidade. Nas vêzes em que essas somas ocorram, convém todavia, fazê-las iguais a 1. Exemplo: 1/2 + 1/2 = 2/2 = 1, 2/3 + 1/3 = 3/3 = 1, 5/8 + + 3/8 = 8/8 = 1, 3/12 + 9/12 = 12/12 = 1.

140) *Adição de frações.* Para bem conduzir o ensino da adição, após a fase inicial, convém admitir alguns casos.

1.º caso. Adição de frações homogêneas, cuja soma é fração própria irredutível ou fração imprópria igual a 1. Exemplos:

1/3 + 1/3,	1/4 + 2/4,	2/4 + 1/4,
1/5 + 1/5,	1/5 + 2/5,	2/5 + 1/5,
1/5 + 3/5,	3/5 + 1/5,	1/6 + 4/6,
4/6 + 1/6,	2/6 + 3/6,	3/6 + 2/6,
1/8 + 2/8,	2/8 + 1/8,	1/8 + 4/8,
4/8 + 1/8,	1/8 + 6/8,	6/8 + 1/8,
2/8 + 3/8,	3/8 + 2/8,	2/8 + 5/8,
5/8 + 2/8,	1/12 + 4/12,	4/12 + 1/12,
3/12 + 4/12,	4/12 + 3/12,	5/12 + 6/12,

6/12 + 5/12.

1/2 + 1/2,	1/3 + 2/3,	2/3 + 1/3,
1/4 + 3/4,	3/4 + 1/4,	2/4 + 2/4,
1/5 + 4/5,	4/5 + 1/5,	2/5 + 3/5,
3/5 + 2/5,	1/6 + 5/6,	5/6 + 1/6,
2/6 + 4/6,	4/6 + 2/6,	3/6 + 3/6,
1/8 + 7/8,	7/8 + 1/8,	2/8 + 6/8,
3/8 + 5/8,	5/8 + 3/8,	4/8 + 4/8,
1/12 + 11/12,	2/12 + 10/12,	10/12 + 2/12,
3/12 + 9/12,	9/12 + 3/12,	4/12 + 8/12,
8/12 + 4/12,	5/12 + 7/12,	7/12 + 5/i2,
6/12 + 6/12.		

Frações ordináriass simplificações: Nenhum aluno poderá prosseguir na aprendizagem da adição de frações, sem que tenha recursos com que simplificar uma fração redutível. É, pois, necessário que descubra, através de experiências concretas e semiconcretas, que dois quartos é igual a um meio, que quatro oitavos é igual a dois quartos, que dois sextos é igual a um têrço, que quatro doze avos é igual a dois sextos, etc. O diagrama deve ser introduzido nessa fase, pois o alu-

no pode já entendê-lo, visto saber, de experiências anteriores, que 1 = 2/2 = 3/3 = 4/4, etc. Com o auxílio do professor, a classe pode, então, concluir, do que vê nos gráficos, a seguinte propriedade: quando multiplicamos ou dividimos, por um mesmo número, os dois têrmos de uma fração, obtemos uma outra que lhe é equivalente. Nessa oportunidade são propostos exercícios, em apreciável número, de simplificação de frações. Exemplos:

2/4,	2/6,	2/8,	2/12,	2/16,	2/18,
3/6,	3/9,	3/12,	3/15,	3/18,	3/21,
3/24,	3/27,	4/6,	4/8,	4/12,	4/14,
4/16,	4/18,	4/20,	4/24,	4/28,	4/32,
4/36,	5/15,	5/20,	5/30,	5/35,	6/24,
6/8,	8/12,	16/20,	14/21,	28/36.	18/45,
12/32,	16/24,	20/40,	27/36,	28/42,	56/63,
72/81,	40/64,	36/45,	64/72,	25/45,	etc.

141) *2.º caso*: Adição de frações homogêneas, cuja soma é fração própria redutível. Exemplo:

1/4 + 1/4, 1/8 + 3/8, 2/12 +7/12, 3/16 + 5/16.

142) *Frações ordinárias*: *transformações em geral; diagramas*. Quando as frações não são, a princípio, representadas objetivamente, nem sempre é fácil

comprá-las. Dadas as frações 3/4 e 5/8, por exemplo, é relativamente difícil, a quem apenas começou o estudo dêsse tipo numérico, dizer qual é a maior. Talvez afirme que 5/8. Entretanto, se dividir ou dobrar duas fôlhas iguais, de papel, uma em quatro partes, outra em oito, não só verá que 3/4 é maior que 5/8, mas que é igual a 6/8. A comparação pode começar com frações unitárias, usando-se, para êsse fim, qualquer diagrama conveniente. Assim, traçando-se no quadro negro oito círculos iguais, podemos representar as seguintes frações, uma só em cada um dêles: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7 1/8 1/9. Isto é importantíssimo, pois leva os alunos a perceberem que, tornando-se maior o denominador de uma fração, esta se torna menor, e vice versa. Um círculo, ou um retângulo, dividido em oito partes iguais, permite comparar as frações 1/8, 2/8, 3/8 ...... 8/8, e ainda compreender que, enquanto o denominador nos informa da cousa que se compara, o numerador nos revela quantas delas se comparam. É também aconselhável que, para a comparação de frações homogêneas, se expressem numèricamente os numeradores, e verbalmente os denominadores, como 1 oitavo, 2 oitavos, 3 oitavos, etc. Com tal procedimento, salienta-se o fato de que, sendo iguais os denominadores, comparam-se, em verdade, os numeradores. As várias modalidades de comparação conduzem os alunos, eventualmente, à descoberta dos princípios que presidem à simplificação de frações e à sua substituição por outras equivalentes e de mesmo denominador. Apresentamos aqui alguns diagramas, deixando

aos senhores professôres, o privilégio de preparar outros.

DIAGRAMA 1

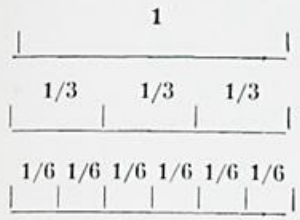


DIAGRAMA 2

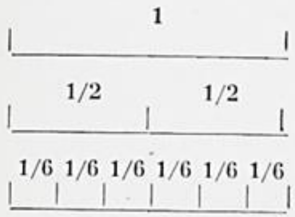
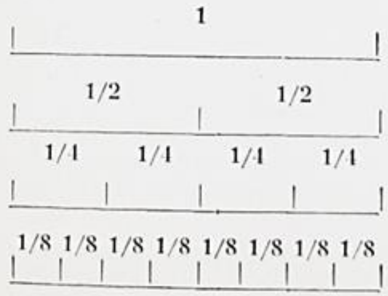


DIAGRAMA 3



Em fase de experiências semi-concretas os diagramas permitem ao professor mostrar como e por que:

1) Simplificar frações
2) Passar de frações heterogêneas a frações homogêneas equivalentes
3) Transformar uma fração imprópria em número misto
4) Transformar um número misto em fração imprópria
5) Multiplicar uma fração por um inteiro, ou um inteiro por uma fração
6) Dividir uma fração por um inteiro, ou um inteiro por uma fração
7) Multiplicar uma fração por outra
8) Dividir uma fração por outra

Os três diagramas apresentados acima, como exemplos, mostram claramente o seguinte:

O primeiro: $2/6 = 1/3$; $4/6 = 2/3$ $1/3 \div 2 = 1/6$; $1/6 \times 2 = 1/3$; $4/6 \div 2 = 2/6 = 1/3$.

O segundo: $3/6 = 1/2$; $1/2 \div 3 = 1/6$; $1/6 \times 3 = 1/2$.

O terceiro: $1/2 \div 2 = 1/4$; $1/2 \div 4 = 1/8$; $3/4 \div 2 = 3/8$; $1/8 \times 2 = 1/4$;

O terceiro: $2/4 = 1/2$; $2/8 = 1/4$; $4/8 = 2/4 = 1/2$; $6/8 = 3/4$; $1/4 \div 2 = 1/8$;

O terceiro: $1/4 \times 2 = 1/2$; $1/8 \times 4 = 1/2$; $3/8 \times 2 = 3/4$;

Todos: $1 = 2/2 = 3/3 = 4/4 = 6/6 = 8/8$.

É evidente que o professor não se vai servir de diagramas, para ensinar, num só dia, tudo o que permitem. Ensinará uma só cousa, cada vez, e no momento oportuno. O ensino se faz por etapas.

143) Ensinar o que é fração, cuidando de não defini-la inicialmente, posto que, conceitos são substitutos de experiências já vividas. Em meio às experiências concretas, cabe ensinar a representação simbólica das frações: 1/2, 2/3, 4/5, etc. Noutra oportunidade, convém ensinar os têrmos da fração, definindo-os e apontando o aspecto quantitativo do numerador (2 terços, 4 quintos, etc). e o aspecto qualitativo do denominador (2 *têrços*, 4 *quintos*, etc). Mais adiante (quando nas adições se vão obtendo, como resultados, 2/2, 3/3, 4/4, etc.), é oportuno distinguir a fração própria da fração imprópria. Em etapas subseqüentes haverá ensejo para definir fração ordinária, em geral, e em particular, a fração redutível, a irredutível, a própria, a imprópria igual a 1, a imprópria maior que 1, as frações homogêneas, as heterogêneas, e o número misto. Lembre-se o professor de que mais vale saber o que é uma fração, dêste ou daquele tipo, do que defini-la. A definição não introduz um conceito: substitui-o. Se êste está formado, ela tem sentido; caso contrário, é vazia.

144) *3.º caso*: adição de frações homogêneas, cuja soma é fração imprópria, maior que 1, redutível ou irredutível. Exemplos:

2/3 + 2/3,	4/5 + 2/5,	5/6 + 3/6,
3/4 + 2/4,	2/6 + 5/6,	5/6 + 4/6,
2/8 + 7/8,	5/8 + 7/8,	7/8 + 6/8,
3/8 + 6/8,	7/12 + 8/12,	8/12 + 5/12,
5/12 + 11/12,	9/12 + 7/12,	6/12 + 11/12,
3/12 + 11/12,	15/16 + 9/16,	15/16 + 2/16,
11/16 + 7/16,	7/16 + 12/16.	

1/6 + 1/6 + 5/6,	2/5 + 3/5 + 1/5,
1/4 + 3/4 + 2/4,	1/3 + 2/3 + 1/3,
3/8 + 1/8 + 5/8,	1/8 + 5/8 + 7/8,
5/12 + 1/12 + 7/12,	5/16 + 7/16 + 6/16,
3/16 + 7/16 + 9/16.	

Observação: Passada a fase de experiências concretas, pode estabelecer-se uma analogia entre a adição de objetos ou coisas e a adição de frações homogêneas. Exemplos:

1 lápis + 2 lápis = 3 lápis
1 livro + 2 livros = 3 livros
1 sexto + 2 sextos = 3 sextos.

1/6 + 2/6 = 3/6
1 oitavo + 2 oitavos = 3 oitavos
1/8 + 2/8 = 3/8.

145) E' vantajoso que o 3.º caso de adição seja precedido do ensino sôbre como transformar o número misto em fração imprópria, e a fração imprópria em número misto. Seja o número misto:

$$2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 1 + 1 + \frac{1}{3}$$

Temos:

$$\underbrace{|\!-\!-\!|}_{1/3}\underbrace{-\!-\!|}_{1/3}\underbrace{-\!-\!|}_{1/3} + \underbrace{|\!-\!-\!|}_{1/3}\underbrace{-\!-\!|}_{1/3}\underbrace{-\!-\!|}_{1/3} + \underbrace{|\!-\!-\!|}_{1/3} \text{ ou } 7/3$$

Ou então:

3 terços + 3 terços + 1 terço = 7 terços.

Ou ainda:

3 terços × 2 + 1 terço = 2 × 3 terços + 1 terço = (2×3) terços + 1 terço.

Convém se entenda a razão porque o inteiro do número misto é multiplicado pelo denominador de sua parte fracionária. Há quem transforme o número misto em fração imprópria sem, contudo, ser capaz de explicar o fundamento do que faz. Consideremos, agora, uma fração imprópria, a ser transformada em número misto. Refere-se a êste fato, dizendo-se, comumente, que se vão "extrair" os inteiros da fração. Seja a fração imprópria 11/4. Temos:

$$\frac{11}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + 1 + \frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$$

Se 4 quartos valem 1 inteiro, o problema consiste em verificar quantos grupos de 4 quartos há em 11 quartos. É, pois, um problema de divisão. O quociente 2, de 11 por 4, mostra que em 11 quartos existem 2 grupos de 4 quartos, ou 2 inteiros.

146) Exercícios para transformação de números mistos em frações impróprias, e frações impróprias em números mistos. Dispensam-se exemplos nesta apostila.

147) 4.º *caso de adição*: Adição de números mistos; de números mistos e frações próprias; de números mistos, números inteiros e frações próprias. Denominadores iguais. Exemplos:

$$3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{5}; \quad 6\frac{3}{4} + \frac{3}{4}; \quad \frac{7}{16} + 19\frac{1}{16} + \frac{15}{16};$$

$$9\frac{1}{24} + 10 + \frac{5}{24}$$

Observação: Neste caso de adição, não se deve permitir, e muito menos ensinar que os números mistos sejam transformados, prèviamente, em frações impróprias. Seria isto dificultar o cálculo. Deve-se, ao contrário fazer a adição dos inteiros dos números mistos com os demais inteiros, se os houver, e adicionar, ao resultado, a soma obtida com a adição das frações. Exemplos:

$$28\frac{7}{12} + 5\frac{11}{12} = 33 + \frac{18}{12} = 33 + \frac{3}{2} =$$

$$= 33 + 1\frac{1}{2} = 34\frac{1}{2}$$

Sugerimos que, uma ou outra vez, se disponham as parcelas em colunas, principalmente quando há, entre elas, dois ou mais números mistos. A disposição em coluna como que sugere o processo de somar recomendado acima.

148) 5.º *caso de adição*: Adição de frações heterogêneas cujo mínimo múltiplo comum é dado com os denominadores. Exemplos:

$$1/2 + 1/4, \quad 3/8 + 1/2, \quad 1/3 + 1/6,$$
$$1/2 + 5/6, \quad 2/3 + 5/12,$$

$$5\frac{1}{2} + 3\frac{5}{8}, \; 6\frac{2}{3} + 8\frac{5}{12}, \; 2\frac{1}{4} + 5\frac{3}{16}, \; 10\frac{3}{5} + 9\frac{11}{15},$$

$$\begin{array}{ccccc} 5\frac{3}{4} & 18\frac{2}{3} & 5\frac{3}{8} & 16\frac{1}{4} & 13\frac{2}{5} \\ 7\frac{1}{12} & 10\frac{1}{6} & 12\frac{1}{16} & 9\frac{5}{8} & 6\frac{1}{15} \\ \hline \end{array}$$

Observação:

1) Daqui para o diante, usaremos a palavra fração como um têrmo genérico, que signifique fração própria, fração imprópria ou número misto.

2) A partir do caso anterior (4.º caso de adição), a maioria dos exercícios deve conter números mistos, os quais ocorrem, na vida cotidiana, com mais freqüência que as frações próprias ou impróprias.

3) Os exercícios relativos a êste (quinto) 5.º caso devem ser feitos como os seguintes:

a) A princípio:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{6}{8}+\frac{4}{8}+\frac{5}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$$

Depois:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{6+4+5}{8}=\frac{15}{8}=1\,\frac{7}{8}$$

b) $$6\,\frac{2}{3}+8\,\frac{5}{12}=14+\frac{8+5}{12}+=14+\frac{13}{12}=$$

$$=14+1\frac{1}{12}=15\,\frac{1}{12}$$

149) 6.º *caso de adição*: Adição de frações heterogêneas, cujos denominadores distintos são números primos entre si. Exemplos:

$2/3 + 3/4$; $3/4 + 4/5$; $1/3 + 2/5$;
$5/8 + 2/3$; $2/5 + 3/8$

$$6\frac{1}{2}+8\frac{1}{3};\quad 5\frac{1}{3}+3\frac{3}{5};\quad 15\frac{4}{5}+10\frac{2}{3};$$

$$7\frac{1}{2}+6\frac{2}{3}+12\frac{1}{2}+6\frac{2}{5}+5\frac{1}{2};$$

$$8\frac{1}{3}+16\frac{3}{4}+4\frac{1}{3};$$

Observação: o mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações acima deve ser achado mentamente. Exemplos: o de 3 e 4 é 12; o de 4 e 5 é 20; o de 3 e 5 é 15; o de 2, 5 e 2 é 10; o de 8, 3, 3 e 2, é 24; o de 4, 5, 8 e 4 é 40. Alunos há que chegam ao fim do curso primário com o vício de procurar o m. m. c. de números como 4, 5, 8 e 4, fazendo isto:

4,	5,	8,	4,	2
2,	5,	4,	2,	2
1,	5,	2,	1,	2
1,	5,	1,	1,	5
1,	1,	1,	1,	

O professor que permite tal cousa desmerece a profissão.

O menor número divisível por 5 e por 8 é 40. Mas, 40, sendo divisível por 8, é também divisível por 4. Assim, dados vários números primos entre si, se alguns dêles são iguais, ou se uns são divisores de outros, o mínimo múltiplo comum dêles é o m.m.c. dos números distintos, entre os quais não se encontre nenhum daqueles divisores.

150) 7.º *caso de adição*: adição de frações heterogêneas cujos denominadores não são números primos entre si e cujo mínimo múltiplo comum não é dado. Exemplos:

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6};\quad \frac{5}{8}+4\frac{5}{6};\quad 8\frac{1}{6}+4\frac{5}{9};$$

$$4\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+7\frac{1}{6};$$

Observação: nos exercícios relativos a êste caso, o mínimo múltiplo comum dos denominadores, ou é obtido por simples inspeção e cálculo mental, ou multiplicando-se, o maior dêles, por 2, 3, 4... Exemplos:

O m.m.c. de 6 e 9 é 18, ou 9×2

O m.m.c. de 8, 12 e 16 é 48, ou 16×3

O m.m.c. de 6 e 8 é 24, ou 8×3

O m.m.c. de 8, 12 e 18 é 72, ou 18×4.

A pesquisa do mínimo múltiplo comum pelos processos de decomposição dos números dados em fatôres primos só se justifica quando êsses números são tais, que tornam difíceis os meios já sugeridos. Para obter-se, por exemplo, o mínimo múltiplo comum dos números 48, 32, 54, pode proceder-se como usualmente:

$$\begin{array}{rrr|r} 48, & 32, & 54 & 2 \\ 24, & 16, & 27 & 2 \\ 12, & 8, & 27 & 2 \\ 6, & 8, & 27 & 2 \\ 3, & 2, & 27 & 2 \\ 3, & 1, & 27 & 3 \\ 1, & 1, & 9 & 3 \\ 1, & 1, & 3 & 3 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

$$\text{m.m.c. } (48; 32; 54) = 2^5 \times 3^3 = 32 \times 27 = 864.$$

Apontaremos, em ocasião oportuna, como mostrar a razão porque o m.m.c. de dois ou mais números se pode obter como usualmente.

151) *8.º caso de adição, ou caso geral*: adição de frações ordinárias quaisquer, ou de frações e inteiros. Exemplos:

$$5\frac{1}{18} + 4\frac{3}{8} + 9; \qquad \frac{4}{15} + 3\frac{5}{6} + \frac{3}{4};$$

$$8 + 15\frac{7}{8} + 6\frac{5}{12};$$

152) *Subtração de frações ordinárias*: *1.º caso*: subtração de frações homogêneas, possível sem recurso à parte inteira do minuendo, se êste é número misto.

Exemplos:

3/4 — 1/4; 5/8 — 3/8; 2/3 — 1/3; 5/6 — 1/6; 11/12 — 7/12; 8/15 — 2/15;

$$8\frac{7}{8} - \frac{3}{8}; \qquad 10\frac{11}{16} - \frac{5}{16}; \qquad 7\frac{3}{5} - 2\frac{1}{5};$$

$$14\frac{19}{24} - 8\frac{15}{24};$$

Não é necessário que se estudem todos os casos de adição, para começar-se o estudo da subtração. Estudado o primeiro caso de adição de frações homogêneas, deve-se iniciar a aprendizagem da subtração, apresentando, daí para o diante, e paralelamente, exercícios de adição e subtração.

153) *2.º caso*: frações heterogêneas tais, que o maior dos denominadores é o mínimo múltiplo comum

dêles, sendo possivel a subtração sem recurso à parte inteira do minuendo, se êste é número misto. Exemplos:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2};\ \frac{5}{6} - \frac{1}{2};\ \frac{7}{8} - \frac{3}{4};\ \frac{11}{12} - \frac{2}{3};\ \frac{7}{12} - \frac{1}{6};$$

$$9\frac{3}{4} - 2\frac{5}{8};\ 5\frac{3}{4} - 4\frac{3}{8};\ 8\frac{5}{6} - 5\frac{2}{3};\ 15\ \frac{1}{2} - 6\frac{1}{8};$$

$$20\frac{14}{15} - 9\frac{3}{5};\ 11\frac{13}{18} - 7\frac{2}{3};\ 25\frac{3}{4} - 4\frac{5}{12};\ 45\frac{7}{8} - 20\frac{33}{56};$$

O número misto não deve ser transformado em fração imprópria em nenhum dos casos de adição ou subtração. Seja o último dos exercícios dados como exemplo. Deve proceder-se assim:

$$45\frac{7}{8} - 20\frac{33}{56} = 45\frac{49}{56} - 20\frac{33}{56} = 25\frac{16}{56} = 25\frac{2}{7}$$

Ou, preferivelmente:

$$45\frac{7}{8} - 20\frac{33}{56} = 25 + \frac{49 - 33}{56} = 25\frac{16}{56} = 25\frac{2}{7}$$

154) 3.º *caso*: Frações heterogêneas com denominadores cujo minimo múltiplo comum é o produto dêles, sendo possivel a subtração sem recurso à

parte inteira do minuendo, se êste é número misto. Exemplos:

3/4 — 5/7; 1/2 — 1/3; 4/5 — 2/3; 7/8 — 3/5; 3/4 — 2/15.

$$4\frac{1}{2} - \frac{1}{3};\ 7\frac{1}{3} - 4\frac{1}{8};\ 10\frac{1}{3} - 6\frac{1}{5};\ 6\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

135) 4.º *caso*: Frações heterogêneas com denominadores cujo minimo múltiplo comum não é o maior dêles, nem o seu produto, sendo possivel a subtração sem recurso à parte inteira do minuendo, se êste é número misto. Exemplos:

5/6 - 3/4; 7/8 - 5/6; 5/8 - 7/12; 3/4 - 11/18; 5/6 - 4/9

$$4\frac{15}{24} - \frac{3}{16};\ 12\frac{5}{6} - \frac{1}{4};\ 18\frac{5}{6} - 13\frac{1}{8};\ 25\frac{7}{8} - \frac{5}{6}$$

Consideremos três exemplos. Temos:

a) 5/6 - 3/4 = 10/12 - 9/12 = 1/12

Ou: $5/6 - 3/4 = \dfrac{10 - 9}{12} = 1/12$

b) $10\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = 10\frac{21}{24} - \frac{10}{24} = 10\frac{11}{24}$

Ou: $10\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = 10 + \dfrac{21 - 10}{24} = 10\frac{11}{24}$

c) $42\frac{5}{8} - 28\frac{11}{20} = 42\frac{25}{40} - 28\frac{22}{40} = 14\,\frac{3}{40}$

Ou: $42\frac{5}{8} - 28\frac{11}{20} = 14 + \frac{25 - 22}{40} = 14\frac{3}{40}$

Observação: Os três últimos casos de subtração de frações (2.°, 3.° e 4.°) devem ser, tanto quanto possível, estudados paralelamente com os casos de adição, correspondentes: 6.°, 7.° e 8.°.

156) 5.° *caso*: Subtração em que o minuendo é inteiro, e o subtraendo fração própria ou número misto. Exemplos:

8 - 2/3; 6 - 5/8; 14 - 11/36; 23 - 8/15; 9 - 13/24

$36 - 5\frac{3}{16};\ 10 - 3\frac{2}{15};\ 42 - 19\frac{7}{18};\ 28 - 15\frac{9}{16};\ 7 - 4\frac{19}{20}$

157) 6.° *caso*: Frações homogêneas ou heterogêneas, em que o minuendo é número misto e o subtraendo fração própria ou número misto, devendo fazer-se a subtração, *com recurso à parte inteira do minuendo*. Exemplos:

$16\frac{1}{3} - 5\frac{2}{3};\ 8\frac{1}{4} - 5\frac{3}{4};\ 25\frac{3}{8} - 12\frac{7}{8};\ 10\frac{3}{16} - 8\frac{5}{16}$

$9\frac{1}{2} - \frac{5}{8};\ 38\frac{2}{3} - \frac{3}{4};\ 17\frac{3}{8} - \frac{7}{12};\ 6\frac{2}{3} - \frac{4}{5};\ 15\frac{1}{6} - \frac{5}{6}$

O modo porque comumente se fazem os exercícios relativos a êstes dois últimos casos de subtra-

ção, além de exigir mais tempo e trabalho conduz, com maior freqüência, a erros de cálculo, uma vez que implica em transformar os números mistos em frações impróprias, muitas das quais, não raramente, com numeradores maiores que 100, ou 1000. Seja o exercício:

$$46\frac{11}{20} - 6\frac{5}{8},$$

e comparem-se êstes dois processos de calcular.

Processo não recomendável:

$$48\frac{11}{20} - 6\frac{5}{8} = \frac{960 + 11}{20} - \frac{48 + 5}{8} = \frac{971}{20} - \frac{53}{8} =$$

$$= \frac{1942}{40} - \frac{265}{40} = \frac{1677}{40} = 41\frac{37}{40}$$

É certo que um bom número de alunos, em meio ao processo, teria de recorrer a "continhas" subsidiárias, como estas:

48	971	53	1942	1677	/ 40
20	2	5	265	77	41
960	1942	265	1677	37	

Processo recomendável:

$$48\frac{11}{20} - 6\frac{5}{8} = 48\frac{22}{40} - 6\frac{25}{40} = 47 + \frac{62}{40} - 6\frac{25}{40} = 41\frac{37}{40}$$

Façamos outros exercícios da maneira recomendável:

a) $23 - \frac{8}{15} = 22 + \frac{15}{15} - \frac{8}{15} = 22\frac{7}{15}$

b) $28 - 15\frac{9}{16} = 27 + \frac{16}{16} - 15\frac{9}{16} = 12\frac{7}{16}$

c) $15\frac{1}{6} - \frac{5}{6} = 14 + \frac{7}{6} - \frac{5}{6} = 14\frac{2}{6} = 14\frac{1}{3}$

d) $38\frac{2}{3} - \frac{3}{4} = 38\frac{8}{12} - \frac{9}{12} = 37 + \frac{20}{12} - \frac{9}{12} = 37\frac{11}{12}$

É melhor ainda proceder-se assim:

1) $48\frac{11}{20} - 6\frac{5}{8} = 42 + \frac{22 - 25}{40} = 41 + \frac{62 - 25}{40} =$

$$= 41 + \frac{37}{40} = 41\frac{37}{40}$$

2) $23 - \frac{8}{15} = 22\frac{7}{15}$ (resposta imediata)

3) $28 - 15\frac{9}{16} = 13 - \frac{9}{16} = 12\frac{7}{16}$

É também interessante a disposição em coluna:

$$\begin{array}{rcrcr} 52\frac{5}{12} & = & 52\frac{10}{21} & = & 51\frac{31}{21} \\[2ex] 28\frac{7}{8} & = & 28\frac{21}{21} & = & 28\frac{21}{21} \\ \hline & & & & 23\frac{13}{21} \end{array}$$

158) *Multiplicação de frações ordinárias*: A multiplicação de frações é mais fácil que a adição e a subtração, mas oferece, pelo menos, três casos a considerar: 1.º) multiplicação de fração por inteiro, ou de inteiro por fração; 2.º) multiplicação de fração por fração; 3.º) multiplicação de três ou mais frações, ou de frações e inteiros. O têrmo fração, aqui, deve ser tomado genèricamente, com o sentido de fração própria, fração imprópria, ou número misto.

1.º *caso*: multiplicação de fração por inteiro, ou de inteiro por fração.

Exemplos:

$1/4 \times 3$; $5 \times 7/8$ $6\frac{2}{3} \times 3$; $2 \times 4\frac{5}{8}$

Uma das maneiras de ensinar a multiplicação, no caso dos dois primeiros exemplos:

1 quarto × 3 = 3 quartos
1 livro × 3 = 3 livros

$$\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$$

5 × 7 lápis = 35 lápis
5 × 7 oitavos = 35 oitavos

$$5 \times \frac{7}{8} = \frac{35}{8}$$

Outra maneira é mostrar, com diagramas, que, tornando-se o numerador de uma fração, duas, três ou mais vêzes maior, a fração se torna duas, três ou mais vêzes maior, isto é, fica multiplicada por 2, ou por 3 etc. O mau ensino é responsável, não só pelo MÊDO que muitos têm de frações, mas ainda pelo fracasso em aprendê-las. Dizer, por exemplo, que:

$$5 \times \frac{7}{8} \text{ é } \frac{5}{1} \times \frac{7}{8}, \text{ ou } \frac{5 \times 7}{1 \times 8},$$

baseando-se numa regra ditada *a priori*, e não deduzida, ou descoberta, pelo próprio aluno, é ser extremamente infeliz. Êsse 5 sôbre 1, além de horroroso e estúpido, é contribuição para um cálculo mecanizado, sem nenhum sentido. O que tem de ficar bem claro é o modo pelo qual a variação dos têrmos de uma fração modifica o seu valor: se o numerador cresce ou o denominador decresce, a fração se torna maior; se o numerador decresce ou o denominador cresce, a fração se torna menor. Se, por exemplo, o numerador se torna duas

vêzes maior, ou o denominador duas vêzes menor, a fração se torna, igualmente, duas vêzes maior; se o numerador se torna duas vêzes menor, ou o denominador duas vêzes maior, a fração se torna, igualmente, duas vêzes menor. Isto é coisa que os diagramas deixam ver; e *é necessário que se veja*. Consideremos, agora, os exercícios que constituem os dois últimos exemplos, e vejamos como efetuar a operação:

$$6\frac{2}{3} \times 3 = 18 + 2 = 20$$

$$2 \times 4\frac{5}{6} = 8 + \frac{5}{3} = 8 + 1\frac{2}{3} = 9\frac{2}{3}$$

Seja êste outro exemplo, que evidencia melhormente a vantagem do processo:

$$53\frac{11}{18} \times 6 = 318 + \frac{11}{3} = 318 + 3\frac{2}{3} = 321\frac{2}{3}$$

Será difícil ensinar e explicar êste processo? A prática de ensino em escola primária autoriza-nos a dizer que não; e mais: que os alunos o preferem, por evitar cálculos trabalhosos e, muitas vêzes, conducentes a erros. Recordando a multiplicação de inteiros e insistindo em que é um caso particular da adição, temos, por exemplo:

$$(4 + 3) \times 2 = (4 + 3) + (4 + 3) = 4 + 4 +$$

$$+ 3 + 3 = 4 \times 2 + 3 \times 2$$

Ora:

$$6\frac{2}{3} \times 3 = (6 + \frac{2}{3}) \times 3 = 6 \times 3 +$$

$$+ \frac{2}{3} \times 3 = 18 + 2 = 20.$$

Convém, durante o estudo dêste primeiro caso de multiplicação, ensinar o cancelamento, *explicando o que significa cancelar.*

159) *Cancelamento.* Cancelar significa simplificar uma fração tal, que apresente, no numerador, no denominador, ou nos dois têrmos, um produto indicado de dois ou mais fatôres. Significa também simplificar uma fração que resultasse de um produto efetuado, de dois ou mais fatôres. E significa ainda simplificar uma fração em que haja no numerador, ou no denominador, ou nos dois têrmos, duas ou mais parcelas a somar. Tôda a extensão do cancelamento não é aprendida de uma vez. Sua parte mais difícil é deixada para as séries superiores do curso, quando os alunos já fazem, com desembaraço, os cancelamentos mais simples. Exemplos de cancelamento:

a) $$\frac{3 \times 5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3 \times 5 \times 2}{2 \times 3} = 5$$

b) $$\frac{2}{3} \times 3 = \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

Com efeito:

$$\frac{2 \times 3}{3} = \frac{6}{3} = \frac{6 \div 3}{3 \div 3} = \frac{2}{1} = 2$$

6

c) $$3 \times \frac{1}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{8}{15} =$$

$$= \quad 3 \times \frac{1}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{8}{15} = \frac{1}{6}$$

Em verdade:

$$3 \times \frac{1}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{8}{15} = \frac{120}{720} = \frac{120 \div 3}{720 \div 3} =$$

$$= \frac{40}{240} = \frac{40 \div 5}{240 \div 5} = \frac{8}{48} = \frac{8 \div 8}{48 \div 8} = \frac{1}{6}$$

d) $$\frac{6 \times 5 + 15}{30 + 35 \times 3} = \frac{\overset{2}{6} \times 5 + \overset{\overset{1}{5}}{15}}{\underset{\underset{2}{10}}{30} + \underset{7}{35} \times 3} =$$

$$= \frac{2 + 1}{2 + 7} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

A fim de tornar compreendido êste tipo de cancelamento, é conveniente, senão necessário, estudar, ou recordar, o seguinte:

1) Para dividir-se, por um número, uma soma indicada, pode dividir-se, por êsse número, cada parcela da soma e somarem-se os quocientes obtidos.

2) Para dividir-se, por um número, um produto indicado, basta dividir-se, por êsse número, um dos fatôres do produto.

1) Seja, por exemplo, dividir a soma $9 + 15 + 6$ por 3. Temos:

$(9 + 15 + 6) \div 3 = 3 + 5 + 2 = 10$

Ora, a soma $9 + 15 + 6$ é igual a 30; e $30 \div 3 = 10$.

Pode-se explicar, de outro modo, esta propriedade: $3 + 5 + 2$, ou 10, é de fato o quociente, pois o produto da soma $3 + 5 + 2$ pelo divisor 3 é igual ao dividendo $9 + 15 + 6$.

De fato:

$(3 + 5 + 2) \times 3 = 9 + 15 + 3$ (parágrafo 130, IV).

2) Seja dividir o produto $2 \times 4 \times 6$ por 2. Temos:

$(2 \times 4 \times 6) \div 2 = 1 \times 4 \times 6 = 24$

ou

$(2 \times 4 \times 6) \div 2 = 2 \times 2 \times 6 = 24$

ou ainda

$(2 \times 4 \times 6) \div 2 = 2 \times 4 \times 3 = 24$

Com efeito

$2 \times 4 \times 6 = 48$; e $48 \div 2 = 24$

Não se pretende aqui nenhuma demonstração. Pretende-se, todavia, que os alunos descubram, do exame de vários exemplos, as verdades acima, *e enunciem-nas êles mesmos.*

Voltando ao último exemplo de cancelamento: na fração proposta, o numerador é uma soma indicada de duas parcelas, 6×5 e 15, ambas divisíveis por 3 e por 5. O denominador, por sua vez, é também uma soma indicada de duas parcelas, 30 e 35×3, ambas divisíveis por 3 e por 5. Dividindo-se, então, por 3 e 5, as duas parcelas que constituem o numerador, e as duas outras que formam o denominador, simplifica-se a fração. Dividem-se as parcelas que são produtos indicados, dividindo-se um só de seus fatôres. Assim é que, ao dividir-se por 3, a soma $6 \times 5 + 15$, divide-se, da parcela 6×5, só o fator 6, obtendo-se, como resultado $2 \times 5 + 5$.

160) *2.º caso*: multiplicação de fração por fração. Exemplos:

$$\frac{3}{4} \times \frac{6}{8} = \frac{9}{16}; \qquad \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{1}{6}$$

$$3\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{7}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}$$

$$\frac{3}{8} \times 4\frac{2}{3} = \frac{3}{8} \times \frac{14}{3} = \frac{3}{\underset{4}{8}} \times \frac{\overset{7}{14}}{3} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$

$$2\frac{3}{5} \times 3\frac{1}{3} = \frac{13}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{13}{5} \times \frac{\overset{2}{10}}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

Para o ensino inteligente do 2.º caso de multiplicação de frações, é necessário atender às seguintes fases preparatórias:

1.ª) Fase em que os alunos vêem, por meio de diagramas, que 1/2 de 12, 1/3 de 12, 1/4 de 12, por exemplo, significam, respectivamente, a metade, a têrça parte e a quarta parte de 12, ou 6, 4 e 3. Mas:

1/2 × 12 = 12/2 = 6. Portanto:

1/2 de 12 = 1/2 × 12 = 12 × 1/2

1/3 × 12 = 12/3 = 4. Portanto:

1/3 de 12 = 1/3 × 12 = 12 × 1/3

1/4 × 12 = 12/4 = 3. Portanto:

1/4 de 12 = 1/4 × 12 = 12 × 1/4

2.ª) Fase em que verificam, também por diagramas, que 3/4 de 12, 2/3 de 9, 5/6 de 18, por exemplo, vêm a ser 9, 6 e 15, respectivamente. Mas:

Se 3/4 de 12 = 9; e se 3/4 × 12 = 9,

Então: 3/4 de 12 = 3/4 × 12 = 12 × 3/4;

Se 2/3 de 9 = 6; e se 2/3 × 9 = 6,

Então: 2/3 de 9 = 2/3 × 9 = 9 × 2/3;

Se 5/6 de 18 = 15; e se 5/6 × 18 = 15,

Então: 5/6 de 18 = 5/6 × 18 = 18 × 5/6;

3.ª) Fase em que observam, ainda por diagramas, que 1/2 de 1/4, 1/2 de 3/4, 1/5 de 2/3, por exemplo, representam, respectivamente, a metade de 1/4, a metade de 3/4, a quinta parte de 2/3, ou: 1/8, 3/8 e 2/15. Mas já sabem (1.ª fase) que tomar a metade, ou a têrça parte, ou a quarta parte, de um certo número de cousas (inteiros, quartos, têrços, lápis, cadernos, etc.), é multiplicar 1/2, ou 1/3, 1/4, por êsse número.

Assim:

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \frac{1 \times 1}{2 \times 4}$$

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4}$$

$$\frac{1}{5} \text{ de } \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15} = \frac{1 \times 2}{5 \times 3}$$

Estabelecida, assim, essa como que equivalência (que, em verdade, não existe) entre o sinal de multiplicação e a partícula *de* (que, sugere realmente uma divisão); é fácil chegar à regra para multiplicar-se uma fração por outra. Seja multiplicar 2/3 por 4/5. Temos: $2/3 \times 4/5 = 2/3$ de $4/5$. Ora, considerando, por exemplo, o número 18, sabemos que:

$$\frac{1}{3} \text{ de } 18 = \frac{1}{3} \times 18 = 6$$

$$\frac{2}{3} \text{ de } 18 = \frac{2}{3} \times 18 = 6 \times 2$$

Anàlogamente:

$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{4}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15} = \frac{1 \times 4}{3 \times 5}$$

Mas se $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{5} = \frac{4}{15}$,

Então: $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, isto é:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}$$

Conclusão:

Multiplicam-se duas frações, uma por outra, multiplicando-se, um pelo outro, os numeradores e, um pelo outro, os denominadores, tomando-se os produtos como numerador e denominador, respectivamente, da fração resultante. Por meio de um diagrama, poder-se-ia chegar a esta regra. Êle dificultaria, porém, o trabalho datilográfico.

161) *3.º caso*: multiplicação de três ou mais frações, ou de frações e inteiros. Exemplos:

$$\frac{3}{8} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{\underset{2}{8}} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

$$4 \times \frac{2}{3} \times 6 \times 2\,\frac{5}{8} = 4 \times \frac{2}{3} \times 6 \times \frac{21}{8} =$$

$$= 4 \times \frac{2}{3} \times \overset{2}{6} \times \frac{21}{\underset{2}{8}} = 42$$

Observação: Na prática não se repetem as frações. Aqui o fazemos para que se possam ver, sem os riscos ou cortes, os exercícios apresentados como exemplos.

162) *Divisão de frações*. A divisão de frações sugere, pelo menos, quatro casos a considerar: divisão de fração por inteiro; divisão de inteiro por fração;

divisão de fração por fração; e divisões sucessivas de três ou mais frações, ou de frações e inteiros. Chamamos a atenção para o seguinte: aqui também, o têrmo fração pode significar, indistintamente, fração própria, fração imprópria ou número misto..

1.º caso: divisão de fração por inteiro. Exemplos:

$$\frac{4}{5} \div 2 = \frac{2}{5}; \qquad \frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8};$$

$$36\,\frac{8}{15} \div 4 = 9\,\frac{2}{15}; \qquad 25\,\frac{3}{4} \div 5 = 5\,\frac{3}{20};$$

$$37\,\frac{5}{9} \div 9 = 4\,\frac{14}{81}$$

Explicação:

a) $\frac{4}{5} \div 2 = \frac{2}{5}$

1/5 1/5 1/5 1/5 1/5

4 livros ÷ 2 = livros $\qquad \frac{5}{5} = 1$

4 quintos ÷ 2 = 2 quintos ....

1/5 1/5 1/5 1/5

Prova:

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \qquad \frac{4}{5} \div 2 = \frac{2}{5}$$

1/5 1/5

b) $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$

1/4 1/4 1/4 1/4

1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 $\qquad \frac{4}{4} = \frac{8}{8} = 1$

1/4 1/4 1/4 $\qquad \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

1/8 1/8 1/8 $\qquad \frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$

Prova:

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Observações:

1) Melhor é fazer diagramas retangulares. Não o fazemos aqui, para não dificultar o trabalho datilográfico.

2) Com exercícios, como os dois acima explicados, o resultado é imediato, a não ser que os têrmos da fração sejam números que não se possam dividir ou multiplicar mentalmente. Mas nesse caso, a fração não é ordinária ou comum; é "extraordinária". A regra corrente, "inverter e multiplicar", não tem cabi-

mento aqui. Não se permita, pois, que se faça isto:

$$\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

c) $36\frac{8}{15} \div 4 = 9\frac{2}{15}$ O resultado é imediato

$$36\frac{8}{15} \div 4 = (36 + \frac{8}{15}) \div 4 = 9 + \frac{2}{15} = 9\frac{2}{15}$$

. . . .

d) $25\frac{3}{4} \div 5 = 5\frac{3}{20}$ O resultado é imediato

$$25\frac{3}{4} \div 5 = (25 + \frac{3}{4}) \div 5 = 5 + \frac{3}{20}$$

. . . .

e) $37\frac{5}{9} \div 9 = 4\frac{14}{81}$ O resultado é imediato

$$37\frac{5}{9} \div 9 = (37 + \frac{5}{9}) \div 9 =$$

$$= (36 + 1\frac{5}{9}) \div 9 = (36 + \frac{14}{9}) \div 9 =$$

$$= 4 + \frac{14}{81} = 4\frac{14}{81}$$

Com êste exercício procede-se assim: divide-se 37 por 9. O quociente é 4, e o resto 1. Êste resto 1, ou 9/9, é somado, mentalmente, a $\frac{5}{9}$. A soma $\frac{14}{9}$ é, então, dividida por 9.

2.° *caso*:

DIVISÃO DE INTEIRO POR FRAÇÃO:

Exemplos:

$$2 \div \frac{1}{3} = 2 \times 3 = 6;\ 6 \div \frac{3}{4} = \overset{2}{6} \times \frac{4}{3} = 8$$

$$3 \div 4\frac{1}{2} = 3 \div \frac{9}{2} = 3 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$$

Explicação:

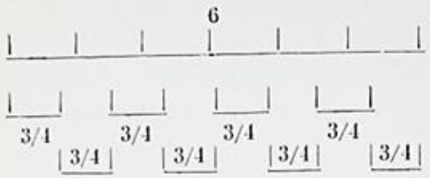
1/3 1/3 1/3 $\quad \frac{18\ /\ 3}{6} \quad$ 1/3 1/3 1/3

Dividir 18 por 3 é achar quantas vêzes o número 3 está contido em 18. Do mesmo modo, dividir 2 por 1/3 é achar quantas vêzes 1/3 está contido em 2 inteiros. O quociente é 6, pois temos: 2 = 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 + + 1/3 + 1/3.

Verifica-se, então, que o quociente 6 é o produto de 2 pelo inverso de 1/3.

. . . .

b) $6 \div \frac{3}{4} = \overset{2}{6} \times \frac{4}{3} = 8$



$\frac{24}{4}$ ou 6

O quociente da divisão de 6 por 3/4 é 8, pois 3/4 está contido 8 vêzes no dividendo 6. À vista de exemplos como êstes dois, e de outros mais, poderá a classe, hàbilmente manejada pelo professor, ***descobrir e enunciar, ela mesma,*** a regra: para dividir-se um número por uma fração, multipica-se êsse número pelo inverso da fração.

c) $2 \div 3\frac{1}{4} = 2 \div \frac{13}{4} = 2 \times \frac{4}{13} = \frac{8}{13}$

Êste exemplo não se presta a uma explicação gráfica, pois é difícil conceber que um número esteja contido em outro 8/13 de vêzes. Melhor é generalizar de exemplos como os dois precedentes ou servir-se de analogia. Poder-se-á, por exemplo, proceder assim:

8 inteiros $\div$ 13 inteiros $= \frac{8}{13}$

8 quartos $\div$ 13 quartos $= \frac{8}{13}$

$\frac{8}{4} \div \frac{13}{4} = \frac{8}{13}$ OU $2 \div \frac{13}{4} = \frac{8}{13} = 2 \times \frac{4}{13}$

163) 3.º *caso*: Divisão de fração por fração.

Exemplos:

$\frac{5}{7} \div \frac{3}{4}$; $6\frac{2}{3} \div \frac{8}{9}$; $\frac{3}{5} \div 2\frac{1}{4}$; $7\frac{3}{4} \div 3\frac{4}{9}$

Explicação:

a) $\frac{5}{7} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{21}$

Com efeito: o quociente é o número que, multiplicado pelo divisor, dá o dividendo. Assim, o quociente de 12 por 3 é 4, porque $4 \times 3 = 12$. Do mesmo modo, o quociente de $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$ é $\frac{5}{7} \times \frac{4}{3}$, porque $\frac{20}{21}$, ou $\frac{5}{7} \times \frac{4}{3}$, multiplicado pelo divisor 3/4, dá o dividendo 5/7.

$$\frac{5}{7} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{7}$$

Conclusão: Divide-se uma fração por outra, multiplicando-se a primeira pelo inverso da segunda.

b) $6\frac{2}{3} \div \frac{8}{9} = \frac{\overset{5}{20}}{3} \times \frac{\overset{3}{9}}{\underset{2}{8}} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{5} \div 2\frac{1}{4} = \frac{3}{5} \div \frac{9}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{\underset{3}{9}} = \frac{4}{15}$

d) $7\frac{3}{4} \div 3\frac{4}{9} = \frac{31}{4} \div \frac{31}{9} = \frac{31}{4} \times \frac{9}{31} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

164) 4.° *caso*: Divisões sucessivas de três ou mais frações, ou de frações e inteiros. Exemplos:

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{8} \div \frac{2}{15}; \qquad \frac{4}{5} \div 3 \div 2\frac{1}{2}$$

Explicação:

a) $\frac{3}{4} \div \frac{5}{8} \div \frac{2}{15} = \frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{5} \times \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{2} = 9$

Com efeito:

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{8} \div \frac{2}{15} = (\frac{3}{4} \times \frac{8}{5}) \div \frac{2}{15} =$$

$$= (\frac{3}{4} \times \frac{8}{5}) \times \frac{15}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5} \times \frac{15}{2}$$

b) $\frac{4}{5} \div 3 \div 2\frac{1}{2} = \frac{4}{5} \div 3 \div \frac{5}{2} =$

$$= \frac{4}{15} \times \frac{2}{5} = \frac{16}{75}$$

Observação: os exercícios que apresentamos, relativos às quatro operações com frações, e segundo os diferentes casos, são insuficientes para a prática e fixação dos processos de calcular. Queira o professor preparar outros mais.

165) *Expressões fracionárias.* As expressões fracionárias devem ser simples. Não há nada que justifique o carroção ou o amontoado de frações, umas sôbre outras.

166) *Mínimo múltiplo comum difícil de achar mentalmente.* Quando é necessário somar ou subtrair frações cujos denominadores não permitam, ou dificultem, o cálculo do mínimo múltiplo comum dêles, pelos meios já apontados, o recurso é fazer o produto dos números primos diferentes que ocorram na decomposição dêsses denominadores, tomando-se com o seu maior expoente, cada um dos fatôres primos, assim os comuns como os não comuns. Suponhamos que 60, 72 e 96 sejam os denominadores de três frações que se devam somar. Decompondo-se cada um dêles em fatôres primos, tem-se:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5; \quad 72 = 2^3 \times 3^2; \quad 96 = 2^5 \times 3;$$

Os números podem ser decompostos, um cada vez, ou todos simultâneamente. Na decomposição simultânea, os fatôres primos comuns já são obtidos com os maiores expoentes. Com efeito: depois de dividirmos por 2 os números 60, 72 e 96, dados por exemplo, tornamos a dividir por 2 os três quocientes obtidos. Os novos quocientes são, 15, 18 e 24. Dois dêstes, 18 e 24, divididos também por 2, dão 9 e 12. Finalmente, 12 é dividido por 2, e ainda o quociente 6, da divisão de 12 por 2 No caso de que tratamos, prosseguimos, fazendo divisões por 3 e, por último, uma divisão por 5 Ora, cada vez que fazemos uma divisão, simultânea ou não, colocamos o fator primo divisor à direita do traço separativo dos números dados. Há de ocorrer, por isso mesmo, tantos fatôres primos iguais a 2, ou a 3, ou a 5, ou a outro qualquer, quantos existam, de cada um dêstes, no número que o contém com o maior expoente. Mas, como explicar que o m.m.c. de dois ou mais números é o produto dos fatôres primos diferentes, em que se decompõem, considerando, cada um, com o seu maior expoente? Assim: sejam, por exemplo, os números 60, 72 e 96. Temos:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5; \quad 72 = 2^3 \times 3^2; \quad 96 = 2^5 \times 3;$$

O número 1440, ou o produto $2^5 \times 3^2 \times 5$, é múltiplo de 60, 72 e 96. E' um múltiplo comum. Com efeito:

$$\frac{1440}{60} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 3 \times 5} =$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$$

$$\frac{1440}{96} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3} =$$
$$= 3 \times 5 = 15$$

$$\frac{1440}{72} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} =$$
$$= 2 \times 2 \times 5 = 20$$

O número 1440, porém, não é apenas um múltiplo comum de 60, 72 e 96. É o menor múltiplo. E de

fato: considerando-se os fatôres primos de 1440, nas expressões acima, é fácil concluir que nenhum dêles pode faltar, nem ter o seu expoente diminuido. Um número que não contivesse fator 5, não seria divisível por 60. Não haveria como cancelar o 5 do denominador da 1.ª expressão. Um outro, com um só fator 3, não seria divisível por 72. E, finalmente, um terceiro cujo expoente do fator primo 2 fôsse inferior a 5, não seria divisível por 96.

167) *Máximo divisor comum.* O máximo divisor comum é a inutilidade máxima com que se perde tempo na escola primária. Enquanto, todavia, êsse frustrado pertencer ao currículo, e o professor tiver de impingi-lo, que o faça melhor que usualmente. Leve seus alunos a descobrirem que êle é o produto dos fatôres primos comuns, dentre os que ocorrem na decomposição de dois ou mais números, tomado, cada um dêsses fatôres, com o seu menor expoente. Proceda-se como no caso do m.m.c. Se a pesquisa deve ser feita, por meio do *algoritmo* de Euclides, então o problema é mais sério, porque, não poucas vêzes, nem mesmo o professor, que a "ensina", ou pretende que a ensina, conhece a razão pela qual, após sucessivas divisões inexatas, faz-se uma última, sem resto, cujo divisor é também o máximo divisor comum dos números dados. Para o ensino consciencioso dêsse metediço, por meio do referido algoritmo, há de o professor conhecer e, prèviamente, ensinar o seguinte:

a) O número que divide outro, divide os múltiplos dêsse outro;

b) O número que divide as duas parcelas de uma soma, divide a soma;

c) O número que divide dois outros, divide-lhes a diferença;

d) O número que divide o dividendo e o divisor, de uma divisão, divide o resto, se o houver;

e) O número que divide o divisor e o resto, de uma divisão, divide o dividendo.

168) *Adição e subtração de números decimais, ou dízimas.* Mostremos, de início, aos nossos alunos, que o valor de uma dizima não se altera quando acrescentamos um ou mais zeros à direita de sua parte decimal. Com efeito:

$528/100 = 5280/1000 = 52800/10000 = \ldots\ldots\ldots$

Mas

$528/100 = 5{,}28$; $5280/1000 = 5{,}280$;
$52800/10000 = 5{,}2800$

Então: $5{,}28 = 5{,}280 = 5{,}2800 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Adição. Raciocínio: dez unidades de uma ordem valem uma da ordem imediatamente superior. Dez milésimos valem um centésimo, dez centésimos valem um décimo, dez décimos valem uma unidade.

Adição e subtração .

Exemplos:

4,36	
6,238	43,740
15,904	28,068
26,502	15,672

Subtração. Raciocínio: um centésimo vale dez milésimos; portanto: 10 menos 8. Um décimo vale dez centésimos; portanto 13 menos 6, etc.

Quando temos várias dizimas, umas para somar, outras para subtrair, fazemos a adição das que devem ser somadas, somamos também as que devem ser subtraídas, e da primeira soma subtraimos a segunda.
Exemplos:

$45{,}36 - 18{,}734 + 5{,}4 - 3{,}065 - 7{,}8 = (45{,}36 +$
$+ 5{,}4) - (18{,}734 + 3{,}065 + 7{,}8) = 50{,}76 -$
$- 29{,}599 = 21{,}161$

É conveniente distinguir, a princípio, três casos de adição e três de subtração: 1.º) dizimas com o mesmo número de algarismos decimais; 2.º) dizimas com números diferentes de algarismos decimais; 3.º) dizimas e inteiros.

Adição. Exemplos:

10,43	8,546	14,359	42
6,02	3,97	5	6,46
16,45	12,516	19,359	48,46

Subtração. Exemplos:

0,489	9,360	5,603	26,58	48,000
0,057	0,863	2,45	4	23,349
0,432	8,497	3,153	22,58	24,651

169) ***Multiplicação de números decimais ou dízimas.*** Para obtermos o produto de duas ou mais dízimas, fazemos a multiplicação como se os fatôres fôssem números inteiros; e, no resultado, separamos, por uma vírgula, da direita para a esquerda, um número de algarismos decimais igual à soma de quantos são os dos fatôres. Se entre êstes, houver um ou mais inteiros, fazemos, ainda, a multiplicação, como se todos o fôssem, contando, depois, para determinarmos o número de algarismos decimais do produto, os algarismos decimais das dízimas. Exs.: $26{,}31 \times 0{,}08 = 2{,}1072$; $5{,}6 \times 12 \times 0{,}4 = 26{,}88$.
Com efeito:

$$26{,}31 \times 0{,}08 = 2631/100 \times 8/100 = 21072/10000 = 2{,}1072$$

$$5{,}6 \times 12 \times 0{,}4 = 56/10 \times 12 \times 4/10 = 2688/100 = 26{,}88$$

Embora seja fácil a multiplicação de números decimais, convém observar, no seu ensino, dois casos, pelo menos: 1.º) número decimal por inteiro, ou inteiro por número decimal; 2.º) número decimal por número decimal. Deve-se, pois, começar com exemplos como êstes:

$$0{,}08 \times 3 = 8/100 \times 3 = 24/100 = 0{,}24$$
$$4 \times 0{,}9 = 4 \times 9/10 = 36/10 = 3{,}6$$

ANALOGIA:

8 cadernos $\times$ 3 = 24 cadernos; 8 centésimos $\times$ 3 = 24 centésimos; $0{,}08 \times 3 = 0{,}24$.

No caso particular de ser o fator inteiro uma potência de 10, a multiplicação se reduz, pràticamente, a uma mudança da posição da vírgula. É necessário que esta particularidade fique bem compreendida à luz do princípio do valor relativo: todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades dez vêzes maiores do que representaria no lugar dêsse outro.

170) ***Divisão de números decimais. 1.º caso:*** divisão de um número decimal por um inteiro diferente de 10, 100, 10000, etc. Exemplos: $0{,}48 \div 3$; $47{,}359 \div 22$.

```
0,48 / 3          0,48 / 3
 18   16           18   0,16
  0                 0

47,359 / 22       47,359 / 22
 3 3    2152       3 3    2,152
 1 15              1 15
    59                59
    15             0,015
```

Faz-se a divisão, como se o dividendo fôsse inteiro e coloca-se *depois*, a vírgula decimal, de modo que o quociente tenha o mesmo número de algarismos decimais do dividendo. Se a divisão é inexata, o resto deve apresentar-se, também, com igual número de algarismos decimais. Explicações:

a) Por analogia:
48 botões $\div$ 3 = 16 botões

48 centésimos ÷ 3 = 16 centésimos
0,48 ÷ 3 = 0,16

b) Por multiplicação:
Se 0,16 × 3 = 0,48
Então: 0,48 ÷ 3 = 0,16

Se 2,152 × 22 + 0,015 = 47,359
Então: dividindo-se 47,359 por 22, o quociente será 2,152, e o resto 0,015.

171) 2.º *caso*: divisão de dois números, um pelo outro: inteiro por inteiro, decimal por inteiro, inteiro por decimal, decimal por decimal. Ex.: 124 ÷ 81; 3,7 ÷ 49; 56 ÷ 9,3; 63,397 ÷ 5,8; 3,09 ÷ 5,29; 8,4 ÷ 0,23.

Observação: êste segundo caso inclui o primeiro em seu aspecto geral. Consideremos os exemplos apresentados e calculemos, com dois algarismos decimais, com três, e com quatro, respectivamente, os quocientes das duas primeiras divisões, das duas seguintes, e das duas últimas:

```
124,00 / 81           3,70 / 49
 43 0     1,53        0,27    0,07
  2 50
  0,07

56,0000 / 9,3         63,3970 / 5,8
  200     6,021        5 39     10,930
   140                  177
  0,0047                0,0030
```



```
3,090000 / 5,29       8,400000 / 0,23
 4150     0,5841       1 50       36,5217
  2180                  120
   640                   50
0,000111                  40
                         170
                      0,000009
```

O professor hábil, antes de tratar dêste caso de divisão, conduzirá de tal modo a classe, que os alunos descubram o seguinte: no quociente deve haver tantos algarismos decimais quantos tem o dividendo mais que o divisor. Isto é fácil de evidenciar. Com efeito: se temos, por exemplo, 0,012 × 0,4 = 0,0048, temos também: 0,0048 ÷ ÷ 0,4 = 0,012. Qualquer que seja, pois, a divisão a fazer-se *o dividendo deve ser preparado a priori* segundo o número de algarismos decimais do divisor e a aproximação em mente. Isto reduz as várias regras a uma só e não permite confusão quanto ao lugar onde colocar a vírgula decimal. Se o quociente de 8,4 por 0,23, deve ser calculado com quatro algarismos decimais, substitua-se o dividendo 8,4 por outro equivalente, com seis algarismos decimais, uma vez que o divisor tem dois dêstes algarismos. Foi o que fizemos acima.

Observação: Quando dividimos dois números quaisquer, um pelo outro, o que pretendemos, se a divisão não é exata, ou se o quociente exato tem muitos algarismos decimais, é um quociente aproximado. A aproximação conveniente, maior ou menor, depende do problema que nos leva a dividir. Ora, crianças de curso primário não podem, senão raramente, acertar com a aproximação razoável. Impende, por isso mesmo, que o professor, em cada caso, aponte a aproximação com que devam calcular um quociente.

172) *3.º caso*: divisão de um número decimal por 10, 100, 10000, etc. Exemplos: 1,45 ÷ 100 = 0,0145; 34,79 ÷ 10 = 3,479. Divisões como estas devem ser explicadas à luz do princípio do valor relativo, ou por meio da multiplicação, da seguinte maneira: se 0,0148 × 100 = 148/10000 × 100 = = 148/100 = 1,48; então 1,48 ÷ 100 = 0,0148.

173) *Conversão*. Temos necessidade, muitas vêzes, de converter uma fração ordinária em dízima. Já vimos que uma fração representa o quociente da divisão do numerador pelo denominador. Se a fração é imprópria e o numerador é um múltiplo do denominador, o quociente é um número inteiro. Se o numerador não é múltiplo do denominador, a divisão inexata, daquele têrmo por êste, pode ser prolongada, transformando-se, para êsse fim, o primeiro, o segundo, o terceiro, e os demais restos, em décimos, centésimos, milésimos, etc. Exemplos:

```
6 / 5          60 / 7              50 / 6
10  1,2        40  0,857142        20  0,8333
 0              50                  20
                 10                  20
                  30                  2
                   20
                    6
```


DIVISÕES EQUIVALENTES:

```
6,0 / 5        6,000000 / 7         5,0000 / 6
10  1,2        40     0,857142      20   0,8333
 0              50                   20
                 10                   20
                  30                 0,0002
                   20
               0,000006
```

No segundo e terceiro exemplos, por mais que se prolongue a divisão, não se encontra resto zero. E quando um qualquer dos restos já encontrados, reaparece (como o resto 6, do segundo exemplo), e a divisão é continuada, os algarismos do quociente vão reaparecendo também, uns após outros, na mesma ordem em que antes surgiram. Diz-se, neste caso, que a fração ordinária produz ou gera uma dízima periódica. As sucessões iguais, de algarismos das dízimas, chamam-se períodos. Uma dízima periódica é simples, quando o período começa imediatamente depois da vírgula; e é composta, quando entre a vírgula e o período há uma parte, que não se repete, constituída de um ou mais algarismos. A parte periódica, por sua vez, pode também constituir-se de um só algarismo, como se vê no terceiro exemplo, acima. Uma dízima periódica pode ser representada de dois modos diferentes:

1.º)	0,424242...	0,8333...	5,424242...	6,8333...
2.º)	0, (42)	0,8(3)	5, (42)	6,8(3)

dízimas em frações ordinárias. Se a dízima não

Assim como precisamos converter frações ordinárias em dízimas, temos às vêzes, de converter é periódica, ou infinita a conversão é simples. Exemplos: 0,12 = 12/100 = 3/25; 0,125 = = 125/1000 = 25/200 = 5/40 = 1/8. Se a dízima é periódica, a conversão embora fácil de fazer, é difícil de explicar em curso primário; difícil, mas não impossível. Seja a dízima 0,424242... Representemos por n e d, respectivamente, o numerador e o denominador da fração ordinária geratriz. Temos:

$$0{,}424242\ldots = n/d.$$

Temos também sucessivamente:

$$0{,}42{,}424242\ldots = n/d$$
$$42 + 0{,}424242\ldots = 100n/d$$
$$42 + n/d = 100n/d$$
$$42 = 99\,n/d$$
$$42/99 = n/d$$

O primeiro passo é êste: fazermos que os alunos entendam o raciocínio implícito nas sucessivas igualdades, em exemplos, como êste, de dízimas periódicas simples com parte inteira zero. Feito isto, mostremos que, não sendo zero a parte inteira da dízima, a geratriz é um número misto: Exemplo: 5,424242... = 5 + 42/99. Deixemos os alunos trabalhar com vários exemplos, pedindo-lhes, por fim, que enunciem a regra para a conversão de uma dízima periódica simples em fração ordinária. Passemos, depois, a considerar na dízima periódica composta. Sejam os exemplos 0,7222...; 0,321444...; 0,008222... Multiplicando

estas dízimas por 10, 100 e 1000, respectivamente, temos:

7,222... = 7 + 2/9 = 65/9 = (72- 7)/9
Portanto: 0,7222... . ... = (72- 7)/90
32,444... = 32 + 4/9 = 292/9 = (324-32)/9.
Portanto: 0,32444... . ... = (324-32)/900
8,222... = 8 + 2/9 = 74/9 = (82- 8)/9.
Portanto: 0,008222.. . ... = (82- 8)/9000

Reparando em que 65 é 72-7; em que 292 é 324-32; em que 74 é 82-8; e reparando também, não só na constituição dos numeradores de outros exemplos, como ainda nos denominadores 90, 900, 9000, etc...., podem os alunos deduzir, por si mesmos, a regra para a determinação da geratriz de uma dízima periódica composta. Não será isto uma demonstração, mas há de ser muito mais do que seguir o enunciado de uma regra, porventura, impingida. E' evidente que, se a parte inteira da dízima não é zero, a geratriz é um número misto.

Ex.: $8{,}7222\ldots = 8 + (72\text{-}7)/90 = 8\frac{65}{90} = 8\frac{13}{18}$.

174) *Problemas e sua resolução.* Um problema é uma dificuldade. Nêle não estão indicadas as operações a efetuar. Quem se dispõe a resolvê-lo é que procura descobrir que operações são essas e sôbre que números ou quantidades deve operar a fim de obter o resultado, ou conhecer suas incógnitas. O que muitas vêzes se apresenta como problema, não é senão um exercício.

def.

175) *O conteúdo dos problemas.* O conteúdo dos problemas tem de ser essencialmente dinâmico, cor-

respondendo, portanto, às necessidades e interêsses humanos, os quais são variáveis com o tempo e o espaço, em conseqüência das constantes mudanças que caracterizam as diferentes civilizações.

176) *Tipos de problemas.* Os problemas podem ser práticos, teóricos, recreativos e sem números. Problemas práticos são os que têm origem em situações reais da vida. Exemplo: a aluna Maria Lúcia sofreu um acidente e está internada na Casa de Saúde S. José. Uma de suas colegas de turma propôs às outras de sua classe fazerem-lhe uma visita, levando-lhe flôres e frutas. À medida que discutiam a proposta, várias perguntas foram feitas: que espécie de flôres e frutas devemos comprar? que quantidade? qual será o custo dessas flôres e frutas? quem vai comprar as flôres? e as frutas? quem vai à Casa de Saúde? que condução deve ser tomada? automóvel? quanto pagaremos de automóvel? Calculada tôda a despesa, que quantia cada uma deve pagar? Os problemas práticos são de todos os dias e datam da antiguidade. A construção de uma reprêsa é problema prático que os Egípcios dos tempos dos faraós tiveram de resolver, pois precisaram represar as águas do Nilo. Os problemas teóricos não cabem em curso primário. São problemas cuja resolução depende de um raciocínio lógico, por excelência. Os problemas recreativos despertam, quase sempre, o interêsse dos alunos, para os quais constituem um desafio. Prestam-se muito mais para o desenvolvimento da capacidade de pensar, do que certos problemas obsoletos. Os problemas sem número constituem também um

ótimo meio de desenvolver o raciocínio. Para resolvê-los é necessário centralizar a atenção nas várias relações implícitas nas suas afirmativas. Exemplo: sabendo você qual é o lucro que dá a um pequeno jornaleiro cada jornal que êle vende; sabendo ainda o preço por que vende cada jornal; como pode descobrir quantos jornais deve êle vender a fim de lhe ser possível comprar uma patinete cujo preço é uma quantia determinada?

177) *Fatôres a levar em conta na apresentação de problemas.* Os fatôres a considerar na apresentação de problemas são os seguintes: a) a experiência social dos alunos; b) o vocabulário dos alunos e dos problemas; c) as diferenças individuais que a classe apresenta; d) o tempo para a resolução.

I) *Qualidades de um bom problema.* Um problema prático deve satisfazer às seguintes condições: ser genuíno; ser importante; ser real. Um problema é genuíno, se alguém, em algum lugar, pode precisar resolvê-lo, presentemente; é importante, se ocorre frequentemente na vida prática; é real, se desafia o estudante, despertando-lhe o interêsse.

II) *Fatôres de que depende a capacidade de resolver problemas.* A capacidade de resolver problemas depende essencialmente: 1.º) da inteligência; 2.º) da compreensão da leitura; 3.º) da prática e domínio das operações fundamentais.

III) *Fases da resolução de um problema.* A resolução de um problema apresenta as seguintes fases: a) leitura e compreensão; b) percepção de relações e plano de ataque; c) solução segundo o plano em mente; d) revisão e discussão.

IV) *Métodos de resolução.* Há vários métodos de resolução de problemas, os quais, todavia, podem ser reduzidos a êstes três: método formal de análise; método das analogias; e método gráfico. O primeiro método consiste no seguinte: diante de um problema que pretendemos resolver, fazemos as seguintes perguntas, às quais procuramos dar respostas: que devemos achar? quais são os dados de que dispomos? que relações há entre os dados e as incógnitas? que devemos fazer com os dados? Êste método tem a vantagem de exigir uma leitura verdadeiramente crítica do problema, isto é, uma leitura constantemente acompanhada de raciocínio ou pensamento seletivo. Oferece, no entanto, a desvantagem de tornar muito difícil a visão, por assim dizer, de todo o conjunto de relações entre os dados e as incógnitas, quando êsse conjunto é relativamente apreciável. O segundo método consiste em estabelecer uma analogia entre o problema escrito e um outro semelhante, fácil e oral. Descoberto como resolver êsse outro, fica conhecido o caminho que conduz à resolução do problema

dado. O terceiro método é aquêle pelo qual o problema é analisado por meio de um diagrama. É um método que tem a vantagem de permitir que as relações, que se vão descobrindo, entre os dados e as incógnitas, não escapem à mente. De fato: vão ficando à vista, representadas gràficamente.

178) *Meios de o professor ajudar o aluno na aquisição da técnica de resolver problemas.* Um dos meios de o professor ajudar os seus alunos a adquirirem uma técnica de resolver problemas é fazer aos alunos as perguntas que desejaria fizessem a êles próprios: qual é a incógnita? quais são as incógnitas? que procuramos saber? que devemos descobrir? O objetivo de tais perguntas é despertar a atenção para a incógnica ou as incógnitas. Outro meio, de que dispõe o professor, é o de fazer sugestões: leiam outra vez o problema; atenção aos dados; vejam bem quais as relações entre os dados e as incógnitas etc.
Um terceiro recurso é usar a analogia, pois os alunos, com o tempo, recorrerão a ela, por si mesmos. Outra forma de ajudar é fazer no quadro negro, um mesmo problema por diferentes métodos, apontando as vantagens de cada um. Os alunos estarão, em breve, empregando um ou outro dêles, conforme a natureza do problema. Finalmente, pode o professor auxiliar os alunos no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, insistindo na observância das quatro fases, a última das quais (revisão e discussão) é quase sempre esquecida. Resolvido um problema e feita a

revisão do raciocínio e dos cálculos, é ainda conveniente discuti-lo. A discussão consiste em verificar se o resultado obtido convém ao problema, ou se constitui um absurdo.

179) *Diretrizes gerais para o ensino das frações ordinárias e dos números decimais.*

I) Preparar de tal modo as primeiras experiências, que os alunos *vejam* as frações; venham, de fato, a conhecê-las, para só depois trabalhar com elas. Usar objetos e diagramas.

II) Usar sempre, ou mais vêzes, frações realmente ordinárias, ou comuns. Muitas das frações de muitos livros de texto só têm o nome de ordinárias. No comércio, na indústria, nos laboratórios e nos demais setores da vida, as frações ordinárias apresentam, na sua grande maioria, os denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 15 e 16.

III) Tornar bem claros, por meio de objetos e diagramas, o aspecto quantitativo do numerador e o aspecto qualitativo do denominador. Salientar constantemente a influência da variação dêsses dois têrmos sôbre o valor da fração.

IV) Ensinar, por meio de objetos e diagramas, a equivalência e a comparação de frações.

V) Insistir em que os alunos simplifiquem as frações, sempre que possível, e com os recursos dos caracteres de divisibilidade.

VI) Mostrar, e lembrar de vez em quando, que na multiplicação de dois números, o produto pode ser menor que qualquer um dêles; e que na divisão, o quociente pode ser maior que o dividendo.

VII) Usar, de preferência, números mistos, pois êstes ocorrem, na vida prática, com muito maior frequência que as frações próprias.

VIII) Atentar constantemente nas causas dos erros mais comuns e eliminá-las. São erros comuns: 1) fazer uma operação em vez de outra; 2) errar nos cálculos; 3) trocar numerador pelo denominador, nos produtos em que aparece o número 1, como 6 por 1/6, ou 1/4 por 4; 4) somar ou subtrair numeradores e denominadores entre si; 5) multiplicar, sem tomar o inverso da fração divisora; ou tomar o do dividendo e não o do divisor.

IX) Insistir em fazer compreender que a dízima, ou representação decimal da fração decimal, só se tornou possível com a aplicação, às partes decimais da unidade, do princípio do valor relativo, que preside à representação decimal dos números inteiros.

X) Tornar claro que um número inteiro qualquer pode ser considerado uma dízima. Exmeplo: 57 = 57,0 = 57,00 = ...

XI) Lembrar, de vez em quando, a propriedade fundamental; multiplicando-se ou dividindo-se, por uma potência de 10, os têrmos de uma fração decimal, o valor da fração não se altera;

XII) Apontar as consequências do principio acima. Exemplos: 0,08 = 0,080 = 0,0800 = 0,080 = 0,08; 6,7 é maior que 6,578, pois 6,7 é igual a 6,700.

XIII) Deixar entendido que, em consequência do principio do valor relativo, o eliminar a vírgula de uma dízima, ou o mudar a sua posição, equivale a multiplicar ou a dividir a dízima por uma potência de 10.

XIV) Fazer que os alunos compreendam que dividir um número inteiro por 10, 100, 1000, etc., separando, por uma vírgula, um, dois, três ou mais algarismos à direita, é também aplicar o principio do valor relativo.

XV) Levar os alunos a fazer, constantemente, divisões inexatas de inteiros, com aproximação de décimos, centésimos, milésimos, etc.

XVI) Exigir disposição correta das dízimas. Na adição e na subtração, fazer que as vírgulas se correspondam numa mesma coluna.

XVII) Recorrer à analogia. Exemplos: 3 lápis × 2 = 6 lápis; 3 centésimos × 2 = 6 centésimos; 0,03 × 2 = 0,06.
54 cadernos ÷ 18 = 3 cadernos; 54 milésimos ÷ 18 = 3 milésimos; 0,054 ÷ 18 = = 0,003.

XVIII) Chamar a atenção para o fato de a dízima periódica 0,9... não ter geratriz.

NOÇÕES DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

LEITURAS

LEITURA I

Importância da História da Matemática na formação do professor primário

Desde o principio do mundo até os nossos dias, tem sido propósito da Matemática contribuir para uma vida melhor. O progresso no dominio das ciências fisicas, e em biologia, medicina, agricultura, sociologia, educação, psicologia, etc., só tem sido possivel através da Matemática, que constitui também os fundamentos da arte, da música e da poesia. Esta "rainha das ciências" é um método de pensamento e tem ainda a virtude de contribuir para a formação do caráter e a consolidação do sentimento religioso.

Conhecendo a história da matéria que ensina, tem o professor de Matemática, não só recursos mais amplos para a motivação da aprendizagem, senão também aquêles motivos de apreciação e entusiasmo, que intensificam e dilatam no estudante o gôsto e o interêsse, porventura despertados.

Fonte de informações preciosas, que facilitam a compreensão de fatos e processos, a história da Matemática tem ainda o lado humano, que aguça a curiosidade, educa o sentimento, aponta estimulo e lança desafios.

E finalmente: fixando o fato fundamental de que o conteúdo da "ciência divina" está sujeito a mudanças, convence-nos, todavia, a sua história de que ela é, na sua essência, uma espécie de "casa construida sôbre a rocha". Pois bem. Enquanto essa fortaleza multimilenária é a única segurança tangível da civilização que desfrutamos, — permanece o NÚMERO, fôrça vital e criadora, como a chave mestra, que nos abre, dia a dia, os pórticos misteriosos do universo.

LEITURA II

Número e Contagem (1)

A origem do número é desconhecida. Deve êle ter nascido nas idades pre-históricas. Foi extremamente modesto no seu comêço. Desenvolveu-se, todavia, extraordinàriamente, com o ter o homem procurado remediar sua tão limitada percepção quantitativa por meio do artificio de contar. Contando é que o homem transformou, gradativamente, a noção concreta e heterogênea da pluralidade no conceito homogêneo de número abstrato.

O homem primitivo não via nada numérico, mas podia notar mudanças que se impusessem a pequenas coleções. Distinguia grupos maiores e menores, com mais objetos ou com menos. E deve ter tido a idéia de número cardinal no dia em que porventura observou que um conjunto de três guerreiros, por exemplo, apresentava algo em comum com um conjunto de três árvores, ou três pássaros, ou três outras coisas quaisquer.

Os números representam criações da mente humana. São individualidades artificiais, ou grupos distintos, ou ainda coleções-modêlo. Cada número é uma individualidade — a individualidade do agregado total; é uma unidade artificial, — a unidade constituída do todo.

Todos os tipos de sociedade humana, ainda mesmo os de mais rudimentar cultura, adquiriram, através dos tempos, um conceito de número e engendraram, de alguma maneira, um processo de contar.

A arte de contar e a representação simbólica do número devem ter sido imaginadas no dia em que o homem sentiu o desejo ou a necessidade de guardar uma relação dos seus bens.

De importância vital para o homem primitivo era saber que tribo dispunha de mais guerreiros, ou que exército tinha mais soldados. Assim, a necessidade de se compararem, umas às outras, as grandezas discretas, contribuiu também, e talvez, decisivamente, para o aparecimento do processo de contar.

Quando o homem não sabia contar e não podia, por isso mesmo, dispor de registro simbólico-numérico de seus bens, zelava dêles com o auxílio da correspondência, biunívoca ou não, que verificava existir entre os elementos de dois conjuntos. Descobria, assim, se o número cardinal de ambos era, ou não, o mesmo. Se a cada elemento de um conjunto A correspondesse um, e sòmente um, dos elementos de um conjunto B, e reciprocamente, concluía terem o mesmo número. Se isto não se desse, ficava sabendo qual dos dois era o menor, qual o maior. Com êsse recurso, o pastor de ovelhas, por exemplo, podia atinar com a falta de qualquer delas. Com efeito: A cada uma que deixasse sair a pastar, pela manhã, fazia corresponder uma pedrinha, que colocava num alforje. Assim, deixada sair a última ovelha, e posta no alforje a pedrinha respectiva, dispunha de

meio com que verificar, à tarde, por nova correspondência, se todo o rebanho tinha voltado ao redil. Não só pedrinhas foram usadas para êsse tipo de correspondência, mas várias outras coisas, entre as quais estrias num tronco de árvore, ranhuras numa pedra, marcas em areia, nós em cordões e sulcos em varetas.

Leitura III

Número e contagem (2)

O homem aprendeu, muito cedo, a servir-se de conjuntos conhecidos, ou grupos modelos, para comparar a êles os que não eram familiares. Os olhos de um selvagem ou as asas de um pássaro podiam simbolizar o número dois; as fôlhas do trevo, três; as pernas de um quadrúpede, quatro; os dedos de uma das mãos, cinco; os de ambas, dez. Em épocas posteriores, êsses grupos e outros mais, foram cedendo lugar a expressões ou nomes, e a símbolos numéricos.

Enquanto o homem não conseguiu, pela contagem, remediar sua limitada percepção quantitativa, o número, cuja origem se desconhece, permaneceu extremamente modesto. Inventado, porém, o artifício de contar, foi possível contrapor à noção concreta e heterogênea da pluralidade, o conceito homogêneo de número abstrato. Daí para o diante não cessou o seu desenvolvimento.

Para o processo de contar é necessário um sistema em que os conjuntos modelos, representados por seus respectivos nomes, ou símbolos, se arranjem em ordem crescente, uns após outros. E quando contamos, estamos fazendo corresponder os elementos de um conjunto desconhecido aos elementos dêsse sistema: um, dois, três, etc. Com efeito: Imaginemos que, conhecida até certo ponto, a sucessão dos números naturais, queiramos contar os objetos de um conjunto. Procedemos assim: Apartamos um dos objetos (ou apontamos para êle, ou simplesmente o fitamos), e dizemos: *um*. Fazemos o mesmo com relação a um outro e dizemos: *dois*. E prosseguimos assim até que sejam considerados todos os objetos. Se o último nome enunciado tiver sido *vinte*, por exemplo, concluimos que há vinte objetos no conjunto dado, isto é, que seu número cardinal é vinte.

A contagem pode ser mais, ou menos, limitada. O grau de limitação depende da maior ou menor capacidade de conceber conjuntos modelos e nomeá-los com economia de nomes distintos e, conseqüentemente, freqüência de nomes iguais. A economia de nomes liga-se diretamente a conjuntos fundamentais de unidades, cujos números constituem as bases dos sistemas em que se conta, ou caracterizam as modalidades de numeração: binária, decimal, vigesimal, etc.

Leitura IV

Numeração falada, escrita e mímica

A numeração pode ser falada, escrita ou mímica. O homem aprendeu a nomear uns poucos números, antes de imaginar como escrevê-los. E os nomes dêsses números estão entre aquêles que primeiro pronunciamos, quando aprendemos a falar. Vários dêles, de origem comum, indiana, mudaram relativamente pouco em milhares de anos. Considerem-se, por exemplo, os nomes dos números 1, 2, 3, 7 e 8,em português, francês, inglês, espanhol, italiano, latim, alemão, grego, russo, sânscrito:

um	un	one	uno	uno	unus	eins	oinos	odyn	eka
dois	deux	two	dos	due	duo	zwei	duo	dva	dva
três	trois	three	tres	tre	tres	drei	treis	tri	tri
....	....	....	....	....	.....	....	....	....	.....
....	....	....	....	....	.....	....	....	....	.....
....	....	....	....	....	.....	....	....	....	.....
sete	sept	seven	siete	sete	septem	sieben	hepta	sem	saptam
oito	huit	eight	ocho	oto	octo	acht	okto	vosem	asta

Por que seriam tão semelhantes essas palavras em linguas tão diferentes? Outrora, o povo que habitava a Índia falava uma lingua conhecida por Sânscrito. Tal povo viajou para o norte e oeste, foi à Grécia, estêve na Itália, andou por outras terras. A sua lingua sofreu modificações: surgiu o Grego, o Latim, o Alemão, o Inglês, o Francês, etc., linguas hoje conhecidas como indo-européias.

A numeração escrita é provàvelmente tão antiga quanto a propriedade particular. Quando o homem sentiu necessidade de guardar uma relação dos seus bens, ìmaginou os primeiros símbolos: estrias num tronco de árvore ou ranhuras numa pedra. Foram isso os prenúncios da numeração escrita.

Na numeração mímica os números são indicados por diferentes posições dos dedos e das mãos. Sua origem, provàvelmente oriental, é mal conhecida. Foi usada, até a Idade Média, por Gregos, Romanos, Árabes e Hindus, que sabiam, em geral, representar mìmicamente qualquer número inferior a 10000. Com os dedos faziam também adição, subtração, e até multiplicação de números de dois algarismos. Algumas personalidades, em antigos quadros e esculturas, são apresentadas de modo que suas mãos, ou seus dedos, indiquem ou lembrem certos números. Afirma-se, por exemplo, que os dedos das mãos de Janus, cuja estátua está no Forum, em Roma, representam o número 365. No Oriente, a numeração mimica ainda é usada. Ela facilita aos negociantes, compradores e vendedores, de linguas diferentes, efetuarem seus negócios, nos bazares. E acontece, às vêzes, que, em represália a olhares indiscretos, nos mercados públicos, escondem suas mãos sob um pano.

A numeração falada, e possivelmente a numeração mimica, precedeu a numeração escrita, que só aparece, como um legitimo sistema, entre Egipcios e Sumerianos, de três mil e quinhentos anos antes de Cristo. Sumerianos eram antigos habitantes das regiões montanhosas do Iran, de onde emigraram, há cinco mil e quinhentos anos, para a antiga Mesopotâmia, no vale entre os rios Tigre e Enfrates, onde fica hoje o Iraq. A civilização a que atingiram é considerada como de alto grau. Mil e quinhentos anos mais tarde, isto é, nos dias de Abraão, o patriarca hebreu, os Babilônios tomaram o poder aos Sumerianos, cujos simbolos cuneiformes passaram a adotar. Chamamos Babilônios aos povos dos antigos impérios caldeu, assírio e babilônico.

Leitura V

A numeração entre homens primitivos e tribus selvagens

Parece ter predominado, entre os homens primitivos, como predomina hoje entre os selvagens, o sistema de numeração em que o conjunto fundamental ou básico é de cinco elementos. Êste conjunto tem sido encontrado, muitas vêzes, em relação com outro maior, de vinte elementos. A freqüência de grupos quinários, todavia, maior que a de grupos de vintenas, leva à convicção de que é realmente de base cinco o sistema mais usado, e ainda em uso, entre o elemento humano não civilizado. Grande número de historiadores afirma que é o mais antigo. As expressões seguintes são mostras evidentes do emprêgo do sistema quinário: mão inteira (5), um da outra mão (6), duas mãos (10), minhas mãos e dois (12), um do outro pé (16), homem inteiro (20), quatro mãos (20), um homem e duas mãos (30), um pé do segundo homem (35). Há tribos no Brasil, como em tôdas as partes do mundo, que empregam, para os números 6, 7, 8 e 9, expressões que significam dedos da outra mão, ou da segunda mão.

O sistema decimal, usado também pelo homem primitivo, e por tribos selvagens de nossos dias, predominou, no passado, entre os povos cultos, e é hoje o sistema do mundo civilizado. Trataremos dêle oportunamente.

Há evidências de o número 12 ter sido usado como base de sistema de numeração: 12 pontos valem 1 linha, 12 linhas 1 polegada, 12 polegadas 1 pé. 12 dinheiros valem 1 shilling, 12 unidades, 1 dúzia, 12 dúzias 1 groza.

A numeração dos Maias, como a dos antigos Astecas (cujo dia tinha 20 horas), era vigesimal. Uma divisão do exército asteca compunha-se de 8000 homens: $20 \times 20 \times 20$. Nas linguas inglêsa e francesa encontram-se vestigios de um sistema de base vinte: score (20), two-score (40), three-score (60). Vingt (20), quatre-vingt (80), onze-vingt (220), quinze-vingt (300). Onze-vingt é o nome de uma corporação de 220 sargentos de polícia; e quinze-vingt, o de um hospital. Nas ilhas Kurilas, do Japão, usa-se, ainda hoje, um sistema vigesimal.

As tribos mais primitivas da Austrália e da África usam um sistema binário. Contam assim: um, dois; dois e um; dois e dois, dois e dois e um; dois e dois e dois.

Se há mais de seis coisas, então há muitas. Nem sempre existe pròpriamente um sistema. Há tribos tão atrasadas, que só contam: um, dois, muitos.

Além do sistema binário, encontradiço também no Brasil, entre os Botocudos, por exemplo, pode apontar-se o ternário, na África, e o quartenário, na América do Norte, onde os Yuki, da Califórnia, contam pelos espaços interdigitais de cada mão.

LEITURA VI

Numeração dos Babilônios (1)

Os antigos Sumerianos, como também os Babilônios de 3500 anos antes de Cristo, usaram um sistema decimal de numeração, substituído depois, por um outro, o sexagesimal. A razão de os Babilônios usarem tal sistema é desconhecida. O fato, porém, de dividirem o ano em 360 dias, deve tê-los levado a dividir também o círculo em 360 graus, cada grau representando a porção diária da suposta revolução anual do sol em derredor da terra. Sabiam provàvelmente que, num círculo, uma corda de comprimento igual ao raio subentende um arco igual à sexta parte da circunferência. Êsse fato pode bem ter-lhes sugerido o número 60, como uma unidade conveniente de arco, que se dividiu em 60 outras de ordem inferior (minutos), que, por sua vez, foram divididas em 60 unidades de ordem ainda inferior (segundos). Foram também os Babilônios que dividiram o dia em 24 horas, a hora em 60 minutos, e o minuto em 60 segundos.

Na sua numeração escrita, os Babilônios usavam apenas símbolos cuneiformes, dados a conhecer, não por algum livro ou manuscrito, mas por textos que são, na sua maioria, simples ladrilhos ou tijolos de barro cozido, preservados durante séculos pelo sêco sol da Mesopotâmia.

Os mais antigos datam do 3.º milênio pré-cristão; outros, do tempo de Hamurábi (1950 a.C.); e ainda outros, do período compreendido entre o 6.º pré-século e o ano 300. Até hoje já foram descobertos, decifrados e catalogados cêrca de 80.000 dêsses textos cuneiformes, que têm revelado a cultura dos Babilônios. São notáveis os que foram achados em Nipur, em fins do século passado (1889) por uma expedição cientifica organizada pela Universidade de Pennsylvania. Os de maior interêsse matemático, todavia, são os que o geólogo W. K. Loftus descobriu em Senkeret, em 1854. Parecem ter pertencido à Biblioteca de Sardanápalo (9.º séc. a. C.). O conjunto de todos êsses documentos (ladrilhos, tijolos ou cilindros, de barro cozido, e tábuas metálicas) revela, quanto à numeração dos Babilônios, o seguinte:

a) Que o símbolo dos números 1 e 60 é o mesmo:

b) Que os símbolos dos números 10, 100, 600 e 1000 são os seguintes, respectivamente:

c) Que, no sistema decimal, os números inferiores a 100 são escritos em conformidade com um princípio aditivo; e os demais segundo princípios aditivo e multiplicativo.

d) Que os números maiores que 60 são escritos, quase sempre, segundo um sistema sexagesimal.

e) Que nesse sistema, um símbolo escrito à esquerda de outro representa um número 60 vêzes maior do que representaria no lugar dêsse outro.

f) Que raramente é usado um símbolo correspondente ao zero, parecendo que só fôra concebido muito tarde.

g) Que, no sistema sexagesimal não ocorrem os símbolos dos números 100 e 1000, dados no item "b".

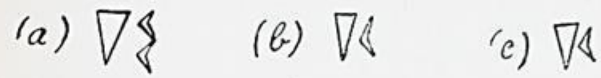
h) Que era raramente empregado um princípio subtrativo.

Leitura VII

Numeração dos Babilônios (2)

A falta de um símbolo capaz de indicar, sem confusão, a carência de unidades de uma certa ordem de um número, representa grave defeito da numeração sexagesimal dos Babilônios; pois o espaço vazio, maior ou menor, ou o sinal, que, às vêzes, ocorre, correspondente ao nosso zero, mas constituído de tipos cuneiformes como os demais, não permite, em muitos casos, que se tenha a idéia de qual seja, em verdade, êste ou aquêle núme-

ro, a não ser que se considere o sentido do conteúdo de que faz parte. Com efeito: Consideremos os seguintes conjuntos simbólicos, os quais, para referência, designaremos por (a), (b) e (c).

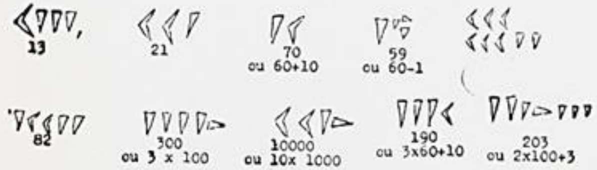


Será o número (a) $60 + 20$, ou $1 \times 60^2 + 0 \times$ $\times 60 + 20$?

Será o número (b) $1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 10$, ou $60 + 10$?

Será o número (c) $60 + 10$, ou 600?

Damos, a seguir, exemplos de vários números, alguns escritos segundo o sistema decimal, e outros conforme ao sistema sexagesimal:

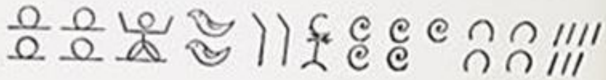


308393
ou (3 x 100 +8) x 1000 + 3x100 + 90 + 3

Leitura VIII

Numeração dos antigos Egípcios

Os Egípcios, em sua numeração decimal hieroglífica, que data do 4.º milênio pré-cristão, representavam o número um por um traço vertical, o dez por uma ferradura, o cem por uma fôlha de palmeira enrolada em espiral, o mil por uma flor de lotus, o dez mil por um dedo indicador, o cem mil por um embrião de rã, o milhão por um homem cheio de pasmo, e o número dez milhões por um traço horizontal encimado por uma circunferência. O sistema tinha um princípio aditivo. Ao escrever-se um número, podiam tomar-se até nove símbolos de um mesmo valor, se necessário, dispondo-se uns sôbre os outros, ou em seguida aos outros. O número 41.221.517, por exemplo, seria escrito assim:

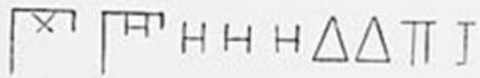


Leitura IX

Numeração dos antigos Gregos

Os Gregos tiveram três sistemas de numeração. O mais antigo, muito simples, mas paupérrimo, compunha-se das 24 letras do alfabeto em uso, às quais eram atribuídos valores numéricos. O valor prático de tal sistema era quase nenhum. Seu emprêgo ocorre, todavia, na Ilíada e na Odisséia. O segundo sistema, chamado herodiânico, tinha por símbolos as letras I, π, Δ, H, X e M, que, ex-

ceção feita de I, são as iniciais das palavras gregas para cinco, dez, cem, mil e dez mil. O sistema era quinário e se regia por princípios aditivo e multiplicativo. A letra π não era repetida; mas as outras podiam ser tomadas até quatro vêzes. O valor numérico de Δ, H, X ou M ficava multiplicado por 5, se uma dessas letras era colocada sob a letra π, junto ao traço horizontal. Nessa numeração, usada por Tales e Pitágoras, o número 5826, por exemplo, era escrito da seguinte maneira:



Foi Herodiano, gramático e historiador grego do 2.º século da era vulgar, quem reconstruiu e expôs êsse sistema de numeração, cujos símbolos aparecem também numa placa de mármore, ou ábaco, que Alfred Nagl encontrou em Salamina, em 1846.

Foi no 3.º século anterior a Cristo, e em virtude do exemplo dos Hebreus e Fenícios, que os Gregos voltaram a empregar, como símbolos numéricos, as 24 letras de seu alfabeto, às quais juntaram 3 outras, arcaicas, de origem semítica: o *stigma* depois do *zeta*, o *kappa* depois do *pi*, e o *sampi* depois do *ômega*. Criaram, então, um novo sistema, não quinário, mas decimal, com princípios aditivo e multiplicativo. Êsse sistema de numeração, chamado greco-alexandrino, foi usado por Arquimedes, Euclides, Eratóstenes e todos os autores clássicos da 1.ª Escola de Alexandria. Apareceu nas moedas mandadas cunhar por Ptolomeu Filadelfo e estêve em voga, por muitos séculos, ao longo do Adriático; em verdade, até o século 15, quando se findou o Império Bizantino com a queda de Constantinopla em 1453. Das 27 letras, tomadas em ordem, as nove primeiras representavam, respectivamente, os nove primeiros números naturais; as nove seguintes, as dezenas, as nove últimas, as centenas. Considerando o nosso antigo alfabeto, acrescido de um símbolo qualquer, e não o atual, que encerra digramas, em substituição ao grego, cujas letras dificultariam êste trabalho, temos:

a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	2	3	4	5	6	7	8	9
j	k	l	m	n	o	p	q	r
10	20	30	40	50	60	70	80	90
s	t	u	v	w	x	y	z	$
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Uma letra empregada como símbolo numérico era, em geral, acentuada Exemplos: v' (400), p' (70), c' (3). Se um conjunto literal representava um número, as letras eram tôdas acentuadas, ou encimadas por um traço único. O número 142 seria, então, s'm'b', ou $\overline{\text{smb}}$. Podia-se também permutar as letras: m'b's' é o mesmo numero 142. O valor numérico de uma letra tornava-se mil vêzes maior, quando se colocava, junto ao seu pé, à esquerda, um sinal semelhante à cedilha. Exemplos: a (1000); n (50000); v (400000). Em casos como êstes não se acentuavam as letras. A maiúscula M, colocada em meio a minúsculas, ou depois destas, tornava dez mil vêzes maior o valor numérico do símbolo literal que a prece-

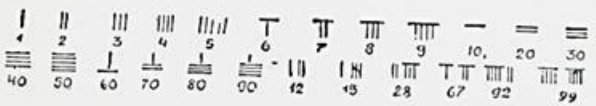
dia. Tal símbolo desempenhava, assim, a função de coeficiente de M. O número 43478, por exemplo, seria escrito da seguinte maneira: dMçvph (4 × 10000 + 3478). Em alguns casos, o coeficiente era colocado acima de M, ou sôbre M. Exemplos:

b	i	c
M	M	Mdwki
20000	90000	34529

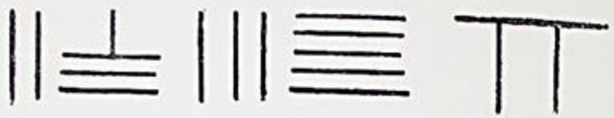
Leitura X

Numeração antiga de Chineses e Japonêses

Os antigos Chineses usavam uma numeração lineográfica, posicional, de base 10:

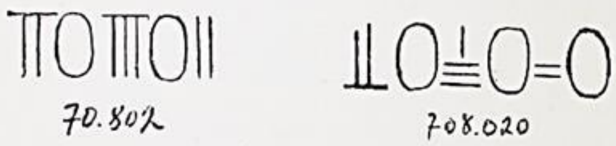


Mais tarde, o sistema se aperfeiçoou: os símbolos que ocupassem as posições correspondentes às ordens ímpares do que usamos (indo-arábico) teriam traços verticais; e os que ocupassem as outras posições seriam representados por traços horizontais. Esta regra, ligada ao cálculo executado com varetas, o qual já era costumado desde séculos antes de Cristo, aparece na Aritmética de Sun-Tsu, do 3.º século cristão. O número 28357, por exemplo, seria escrito assim, segundo a regra de SunTsu:



O modesto instrumento de cálculo dos antigos Chineses, um conjunto portátil de varetas, estendeu-se à Coréia e ao Japão. Os Coreanos, aliás, usavam, não raras vêzes, varetas de ossos, conhecidas como "ossos coreanos".

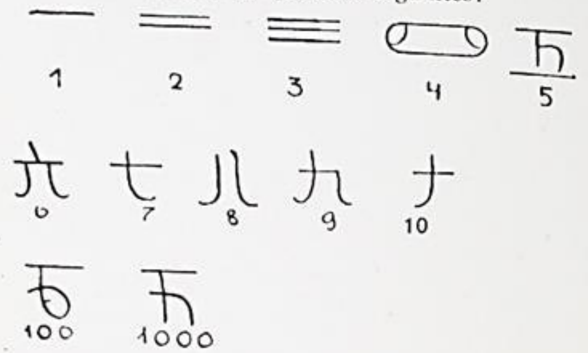
Quando a China e o Japão conheceram e adotaram o zero dos Hindus, puderam representar gràficamente os números, sem nenhum embaraço. No livro de Chin Chiu Shao, *Nove Secções de Matemática*, escrito em 1247, já aparece o zero. Os números 70802 e 708020, seriam, então, escritos assim:

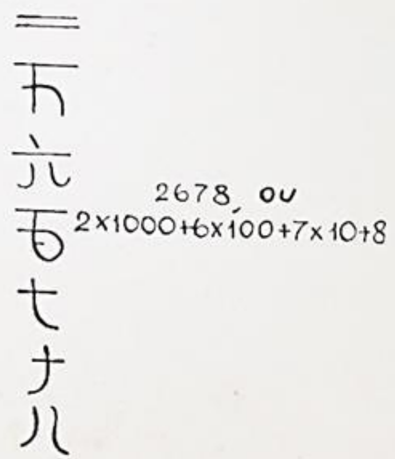


O aparecimento do zero, na China, coincide com o advento do *swanpan*, que, pouco a pouco, foi substituindo as varetas de calcular. O swanpan, ábaco que os Chineses vêm usando desde o século 12, foi introduzido no Japão, no século 16, e transmudado, anos depois, em um melhor instrumento, o soroban, ábaco atual dos Japonêses.

A China faz-nos voltar ao sistema binário, tão do gôsto de Gottfried Wilhelm von Leibniz, matemático alemão do século 17, que escreveu o primeiro trabalho que se publicou sôbre tal sistema, em 1703. Foi Leibniz que decifrou uns símbolos semi-místicos encontrados em antigo documento chinês, atribuído ao filósofo e legislador Fo-Hi. Concluiu que eram números escritos em um sistema binário de numeração. Os símbolos numéricos eram apenas dois; um traço contínuo, que correspondia ao nosso algarismo 1 e dois traços menores, colineares, que desempenhavam a função do zero. O número 37, por exemplo, escrito no sistema binário, em algarismos indo-arábicos, apresenta-se assim: 100101. Êste mesmo número, porém, escrito com os símbolos do documento de Fo-Hi, apresentar-se-ia da seguinte maneira:

Hoje, na China e no Japão, usam-se, em larga escala, os algarismos indo-arábicos. Empregam-se, porém, paralelamente, não só os símbolos lineográficos, senão também outros, entre os quais os seguintes:



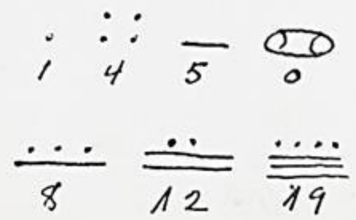


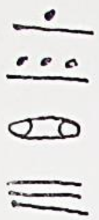
Leitura XI

Numeração dos antigos Maias

Os Maias de Yucatan, cuja escrita hieroglífica atingiu apreciável desenvolvimento, apresentavam-se com alto nível de civilização, no período compreendido entre a segunda metade do quinto século e o comêço do sétimo. Tical, em Guatemala, onde ergueram uma famosa pirâmide com 175 pés de altura, foi um dos principais centros de sua cultura. Criaram um sistema de numeração que se pode apontar como dos mais avançados. Tal sistema, com um princípio de valor de posição, tinha três símbolos apenas, um dos quais para indicar a carência de unidades de uma ou outra ordem de um número. Quanto à base, não era coerente, embora fôsse, em essência, vigesimal: O valor numérico de um símbolo que ocupasse a segunda ordem era 20 vêzes maior do que seria se estivesse na ordem das unidades simples; mas se êsse símbolo ocupasse a terceira, ou a quarta, ou uma outra das ordens subseqüentes, o seu valor, com relação ao que tivesse na primeira ordem, não era 400 vêzes maior (20^2), nem 8000 vêzes (20^3), nem outro número de vêzes representado por potência inteira de 20, mas sim, respectivamente, (18×20) vêzes, (18×20^2) vêzes, etc. E' que o sistema ligava-se, de certo modo, ao fato de o ano dos Maias ter 18 meses de 20 dias, mais 5 dias complementares. Os símbolos numéricos eram êstes: o ponto (1), que se podia tomar até quatro vêzes; o traço horizontal (5), que se tomava uma, duas ou três vêzes; e o sinal para o zero.

Exemplos numéricos:





6 x (18 x 20^2)	ou	43.200
8 x (18 x 20)	ou	2.880
		0
		15
		46.095

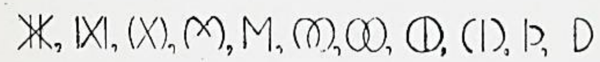
Leitura XII

Numeração romana

Os princípios que hoje norteiam a numeração romana datam de poucos séculos. Na Coluna Rostrata, em Roma, comemorativa da vitória dos Romanos sôbre os Cartagineses, em 260 antes de Cristo, encontra-se uma inscrição em que o número 2.300.000 é escrito com o símbolo de cem mil, tomado 23 vêzes. E' que durante um longo período os Romanos não dispunham de símbolos para representar números superiores a 100.000. O número 1 foi, a princípio representado por um traço vertical, mais tarde substituído pela letra I. Os oito números seguintes eram representados também por traços: | | (2), | | | (3), ... | | | | | | | | | (9).

Convencionou-se, depois, que, cortando-se um ou mais dêstes por um outro, o valor numérico primeiramente simbolizado tornar-se-ia dez vêzes maior. Assim, X, que lembra a letra X, por que foi substituído, era 1 × 10, ou 10; XX||| era 23. Cortado, por seu turno, o símbolo X , obteve-se ou 10 × 10. Êste símbolo de cem transmudou-se, com o tempo, em

em e em , que cedeu lugar à letra C. Mil se representava, cortando-se duas vêzes o símbolo de dez. Era como que multiplicar 10 por 100, ou por 10 × × 10. O novo símbolo foi-se também transformando até assemelhar-se, no todo, com M, e em parte com D. Com efeito:



O símbolo do número mil foi, longo tempo, ; o de dez mil, ; e o de cem mil . O símbolo de quintenhos era, indistintamente, ou , isto é, a metade do de mil. Qualquer metade de X (V ou Λ) podia representar o número 5. Prevaleceu a da parte superior, V, que coincidia, em aparência, com a letra V. Segundo a regra dominante, para ter-se o símbolo de 50 era suficiente cortar V por um traço. E foi assim que se obteve primeiramente , e em épocas sucessivas.

Quem se inicia em numeração romana tem a tendência a afastar-se das regras em vigor. E não é de estranhar. Os Romanos mesmos se afastaram ou desdenharam delas, não raras vêzes. Recentemente, em 1949, um sêlo postal emitido em homenagem ao físico Volta, trazia as datas 1799 e 1949 assim: MDCCIC e MCMIL. Damos aqui alguns exemplos, dentre muitos que temos colhido, os quais evidenciam a diversidade de modos de escrever, em numeração romana:

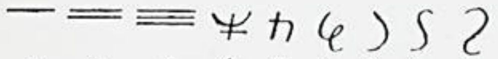
4	IIII	6000	VIM
40	XXXX	1999	$\bar{I}$IM
400	CCCC	80, ou 4X20	IIII××
83	XXCIII	1690	IXIDCXC
8	IIX	1180600	$\overline{\text{IXI}}\,\overline{\text{CLXXX}}$DC

Leitura XIII

Numeração decimal indo-arábica (1)

Os símbolos numéricos indianos, 1, 2, 3, ... 9, aos quais chamaremos algarismos indo-arábicos, datam, provàvelmente, do 3.° século antes de Cristo. Quanto ao zero, investigações recentes pretendem concluir que procede do 2.° pré-século. Os eruditos em filologia sânscrita, todavia, fazem datar do 5.° século de nossa era a primeira exposição do sistema decimal indiano, com o uso metódico do zero. Revelam também que os Hinduz, que se compraziam em conceber grandes números, chegavam a afirmar que a casa de Brahma se alegrava com a presença de cem milhões de filhos e que o céu era habitado por 24 milhões de milhões de deuses. Em eras mais remotas, os Hindus, à maneira dos Gregos e Hebreus, davam valor numérico às letras de seu alfabeto. Empregavam consoantes para exprimir os algarismos de 1 a 9; e depois, pela justaposição de uma vogal a cada consoante, obtinham os simbolos das diferentes unidades decimais. Com as letras do nosso alfa-

beto, seriam êstes os exemplos: ga (3), gi (30), gu (3000). O seu alfabeto se chamava dêvanâgari, que significava escritura dos deuses. E' esta a razão por que, às vêzes, os algarismos indo-arábicos são imprópriamente chamados cifras dêvanâgari. Os Árabes também, anteriores a Maomé, representavam os números com as letras de seu alfabeto. No primeiro século pré-cristão, os algarismos, que hoje usamos, se apresentavam assim:



1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nos manuscritos da Idade Média, os algarismos indo-arábicos se escreviam, como é natural, com acentuada diversidade de formas. Depois da imprensa (1442), porém, cada um dêles assume sua feição definida e definitiva Chamamos-lhes indo-arábicos porque são de origem indiana e foram divulgados principalmente pelos Árabes. Sua primeira aparição no Ocidente, todavia, parece ter-se dado por intermédio de Boécio (Anício Mânlio Severino Boécio), romano ilustre, neo-pitagórico, versado em literatura e ciência dos Gregos. A invenção do sistema decimal indiano teria sido comunicada aos sábios gregos da Escola de Alexandria, na época em que existiram intensas relações comerciais entre a Índia e o Egito. Dos manuscritos de Boécio (475-526) aprenderam outros mestres, inclusive Gerberto, eleito Papa, em 999, sob o nome de Silvestre II.

Dantzig faz considerações interessantes sôbre como poderia ter ocorrido, pela primeira vez, entre os Hindus, o símbolo zero. Imagina êle que a ocorrência poderia ter-se dado assim: Um Hindu desconhecido, ao retratar gràficamente um certo número representado pelas marcas no seu tabuleiro de areia ou pó, teria tido a genial idéia de indicar, de alguma maneira, a coluna que se apresentava vazia, evitando, assim, qualquer dúvida sôbre qual seria o número escrito. Se a coluna das unidades tivesse duas marcas (a suposição é nossa), ou dois sulcos, se a das centenas, três, e se as demais se apresentassem vazias de qualquer sinal, o número a representar por escrito devia ser 302. O vazio da coluna das dezenas talvez tivesse sido, então, indicado por algo que retratasse essa coluna: ⊓ , ou ⊔ ou □ . Êsse retrato de coluna ter-se-ia transmudado no zero.

Leitura XIV

Numeração decimal indo-arábica (2)

E' possível que os antigos Hindus, em caravanas até Babilônia, tenham encontrado ali, não só o germe do sistema posicional, senão também o do símbolo das ordens vazias. E' certo, no entanto, que o zero se tornou com êles, e só com êles, no mais importante protagonista da numeração. Diz Hogben que "em tôda a história da Matemática, nada foi mais revolucionário do que a invenção do zero". Quanto ao sistema que usamos, é a melhor conquista dos Hindus e uma das mais felizes da inteligência humana. Lembra Laplace que ela "escapou ao gênio de Arquimedes e Apolônio, dois dos maiores homens produzidos pela antiguidade". E é fato incontestável que a numeração indiana facilitou de tal modo os cálculos, que permitiu à Matemática um surto assombroso de progresso. A venerável ciência tornou-se em principal instrumento de análise e predição. O homem, feito profeta, vaticinou eclipses, descobriu planetas, previu

elementos químicos, profetisou acontecimentos, e abriu os pórticos misteriosos do Universo. A probabilidade de chegar aos cinqüenta anos quem hoje tem quarenta, como também a da ocorrência de um ciclone, ou de um incêndio, ou de um naufrágio, é determinada matemàticamente, e não apenas enunciada de modo vago. Importante para os exércitos de invasão do general Eisenhower, era que êle soubesse, tão precisamente quanto possível, qual era de fato, qual era exatamente, a probabilidade de ser o tempo bom ou ruim, em tal ou qual período do ano, no Mar da Mancha ou do Norte, em terra firme ou no ar. Jóias, peças de arte, mercadorias e utilidades de todo gênero, ou tipo, provindas do Oriente, da Europa, das Américas, ou de qualquer parte, podem ter nomes diferentes, fácil ou dificilmente pronunciáveis. Os números, porém, com que lhes marcam a indústria e o comércio, são escritos com os mesmos símbolos, hoje universais.

A simplicidade de um sistema de numeração é condicionada por vários fatores: a) poucos símbolos para representar os números; b) poucas palavras para nomeá-los; densidade que torne fácil a percepção dos valores numéricos; e d) notação que facilite o cálculo. Nenhum sistema satisfaz, como o decimal indo-arábico, a estas quatro condições. Com efeito:

1) Com um ou mais símbolos ou algarismos, dentre dez apenas, tomado qualquer dêles, ou cada um dêles, uma ou mais vêzes, é possível representar todos os inteiros.

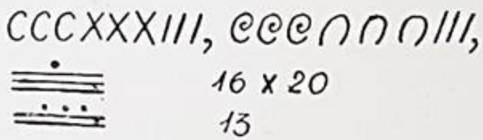
2) Com os mesmos dez algarismos e uns poucos sinais gráficos, representam-se as frações, os números decimais, os negativos, os irracionais e os imaginários.

3) Dada a freqüência de nomes iguais e a conseqüente economia de nomes distintos, é possível nomear

com poucas palavras, um considerável número de números diferentes.

4) A distribuição dos algarismos segundo ordens, como a constituição de classes, formadas de grupos de ordens, não só permite a economia de nomes e símbolos diferentes, mas facilita a leitura dos números e torna possível ter-se a idéia imediata do valor de qualquer dêles.

5) O fato de o sistema ser decimal, posicional, e apresentar-se com símbolos próprios, independentes, para cada um dos nove primeiros números naturais, permite escrever econômicamente os números que representam, quase sempre, somas de produtos dos inteiros 1, 2, 3, ... 9, por potências de 10. Exemplo: 300 + + 30 + 3, ou 333. Esta soma, os Romanos, os Egípcios, ou os Maias apresentariam assim, respectivamente:



6) O símbolo zero (0), que indica a ausência de unidades em uma ou mais ordens, permite o cálculo gráfico-analítico, que se efetua diretamente sôbre números representados por algarismos, não sendo, portanto, necessário, nenhum instrumento mecânico de calcular.

E' comum apresentar-se, como princípio fundamental da numeração falada, a seguinte proposição: "Dez unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior". Ora, não é êste um princípio que caracterize nenhuma numeração falada, mas sim um

princípio básico de qualquer sistema decimal de numeração. Princípio de numeração falada, como o apresenta o sistema indo-arábico, seria aquêle segundo o qual as várias ordens de unidades de um número se dividem em classes, constituída cada uma de três ordens: das unidades, das dezenas, das centenas. São, em verdade, as classes que permitem nomear tão fàcilmente os números, isto é, com o emprêgo de tão poucos nomes.

Leitura XV

Numeração decimal indo-arábica (3)

O sistema decimal indo-arábico, tão simples, fácil e elegante não teve, de início, a aceitação que era de esperar. Travou-se, em verdade, árdua luta entre algoristas e abacistas, a qual se prolongou desde o século 13 até 1826, muito embora, e felizmente ,a partir do 16.º século já fôssem bem poucos os campos onde ainda se combatia. Foi realmente difícil vencer a rotina dos que habituados aos sistemas romano e grego, principalmente o romano, não divisavam, na nova numeração, as vantagens com que se apresentava. E havia até, como quase sempre, o interêsse pessoal. A simplicidade do sistema dos algoristas constituía, de certo modo, um risco capaz de destruir o monopólio dos calculadores profissionais, receosos, sem dúvida, de perder os seus emprêgos. Entre os muitos fatos que assinalam o longo período em que o sistema romano lutou desesperadamente, perdendo, por fim, a batalha, apesar do poder de Roma, suas leis, sua religião e sua língua, citamos os seguintes:

a) Nos Estatutos da Arte de Câmbio, de 1299, os banqueiros de Florença foram proibidos de usar os algarismos indo-arábicos, chamados, então, "infiéis".

b) Nos arquivos italianos do século 13 encontraram-se indícios evidentes de que o uso dos algarismos foi também proibido aos mercadores, que os empregavam, no entanto, como que à maneira de códigos secretos.

c) No oriente, no 14.º século, a numeração indo-arábica encontrava-se mesclada dos sistemas romano e grego.

d) A diretoria da Universidade de Pádua ordenou, em 1348, que não se adquirisse, para a biblioteca, nenhum livro cujo preço estivesse marcado em "cifras".

e) Nicolau Copérnico, em sua obra sôbre o sistema solar, escrita em 1520, *De revolucionibus orbium coelestium*, empregou uma estranha mistura de símbolos romanos e indo-arábicos.

f) No século 16 foram escritos, na Europa, principalmente na Áustria e na Alemanha, vários compêndios de Aritmética, nos quais se teimava em ensinar o cálculo por meio do ábaco.

g) Na França, o Tribunal de Contas, ou Cour de Comptes, não abandonou, senão no século 18, os símbolos romanos, usados até a Revolução (1789), na contabilidade pública oficial. Em Paris, publicou-se, em 3.ª edição, em 1781, uma Aritmética (L'Arithmétique en sa perfection), cujo autor, F. le Gendre, recomendava o uso do ábaco, dizendo, entre outras coisas, ser possível, com êle, efetuarem-se todos os cálculos necessários em negócios. Dizia também que era usado, com enorme sucesso, não só no Tesouro, mas em tôdas as repartições do Govêrno.

h) Na Inglaterra, no Reinado de Elizabeth I (1558-1603), ainda se usava oficialmente a numeração romana, como revelam, por exemplo, registros relativos à Armada de Espanha. Nesse mesmo país, o Departamento do Tesouro empregou, até princípios do século 19, o sistema de réguas dentadas. Essas réguas não eram mais que ripas, não uniformes, cujos dentes, cortes ou talhas, menores e maiores, representavam pence, shillings e diferentes unidades de libras. Tais ripas, que serviam em contratos, eram feitas em duplicatas, cabendo uma delas a cada contratante. Abolidas em 1826, no reinado de George IV, e mandadas guardar em Westminster, foram transferidas, mais tarde, para a Casa dos Lords, onde sofreram finalmente, o golpe fatal, em 1834, com o incêndio das Casas do Parlamento (Senado ou Casa dos Lords e Câmara dos Comuns). Poucos anos depois, Charles Dickens descrevia sarcàsticamente o episódio e estranhava que a rotina oficial, desdenhando lápis, tinta e papel, tivesse mantido, até àquela época, "como se fôssem pilares da Constituição", aquêles velhos e sujos sarrafos que o govêrno, há muito tempo, devia ter dado aos pobres, para servirem de lenha.

Leitura XVI

Zero e o verbo decifrar

A palavra zero vem de *zephirum*, como cifra vem de *sifr*. *Sifr* é a versão árabe da palavra indiana *sunya*, que significa vazio ou vazia. Sunya é, assim, a origem do zero. Recordava aos Hindus a coluna vazia do seu tabuleiro de pó, ou instrumento de calcular. Na Europa, porém, o têrmo cifra, ou qualquer dos vocábulos cipher, ziffer, e chiffre, significou, durante longo tempo, um número escrito segundo a numeração indo-arábica. Cifras, plural de cifra, serviu, por sua vez, para designar, não apenas números em símbolos indo-arábicos, mas êstes mesmos símbolos. A gente do povo não compreendia, a princípio, os cálculos em que eram usados os "algarismos" ou "cifras". Era preciso, então, interpretá-los ou decifrá-los. Dêste estado de coisas, e do fato de os algarismos serem usados, não raras vêzes, às escondidas, em meio a lutas e proibições, é que nos vem o verbo *decifrar*, que permanece, como afirma Dantzig, qual um monumento a recordar os dias em que algoristas e abacistas se empenhavam, porfiando, uns e outros, por defenderem os seus meios de calcular. Algoristas eram os que calculavam direta e analìticamente sôbre os números escritos com os algarismos; e abacistas, os que empregavam o ábaco ou instrumento mecânico de calcular. O arranjo ou a disposição dos números para o cálculo, entre os algoristas, era chamado algorismo (hoje algoritmo).

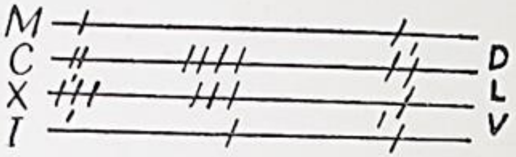
LEITURA *XVII*

Ábacos (1)

O ábaco é formado, em geral, de um quadro, ou de uma moldura, com vários fios paralelos em que deslisam botões, anéis, ou bolas móveis. Sua origem é desconhecida e remonta à antiguidade. Observava Herodotus, no 5.º século pré-cristão, que os Gregos, ao usarem-no

em seus cálculos moviam a mão da esquerda para a direita. Existiram, e ainda existem, vários tipos de ábacos. Os primitivos eram simples tabuleiros de areia, divididos em secções correspondentes às várias ordens de unidades de um número. Foram usados na Índia, pelos Hindus, que empregavam também pranchetas cobertas de pó e pequenos quadros negros onde escreviam com tinta branca fácil de apagar. À medida que faziam os cálculos, apagavam os símbolos numéricos de que se iam servindo, deixando finalmente só o resultado. Rever os cálculos era-lhes, então, pràticamente impossível. Usavam por isso, e talvez só por isso, a prova dos nove. No tabuleiro de areia, faziam-se, com os dedos, as marcas que representavam as unidades de diferentes ordens de um número. Na prancheta, as marcas eram feitas com estilete próprio. Entre os Romanos antigos, estêve muito em voga o ábaco de pó. Usavam também quadros retangulares, de madeira, mármore ou metal, divididos em secções onde se colocavam pedrinhas ou botões, em sulcos apropriados. Os ábacos foram-se aperfeiçoando. Surgiram os que eram formados por fios paralelos e verticais, de madeira ou metal, firmados sôbre um suporte. Nesses fios corriam conchas furadas, ou anéis de diferentes substâncias. Apareceram finalmente o *swanpan* dos Chineses, o *soroban* dos Japoneses, e outros ábacos, usados, ainda hoje, por Russos, Turcos e Persas. São quadros ou molduras com fios paralelos em que deslisam botões móveis.

Na Europa Medieval usou-se muito o ábaco romano, de linhas ou pautas horizontais, traçadas em papel, pano, madeira, mármore ou metal, as quais correspondiam, de baixo para cima, aos valores numéricos 1, 10, 100, 1000, 10000. Os espaços entre as pautas, por sua vez, davam para indicar os números 5, 50, 500, 5000. Com êsse tipo de ábaco, substituiam-se, às vêzes, por sinais gráficos, os seixos, os botões, ou quaisquer outros marcadores. No seguinte ábaco, acham-se gràficamente representados os números 1285 e 431, como também o resultado (1716) obtido com a adição de ambos.



Os Hindus e os Árabes faziam a adição e a subtração, operando da esquerda para a direita, processo que continuou parcialmente em uso até cêrca de 1600. Atribui-se ao inglês Garth o método que usamos. A multiplicação, considerada laboriosa, efetuavam-na,, quase sempre, com o recurso de ábacos. Quanto à divisão, era tida como tão difícil, que só os matemáticos experimentados poderiam fazê-la. Remediavam a dificuldade, com o emprêgo de tábuas de cálculo, de simples entrada. Os resultados das três primeiras operações eram verificados pela prova dos nove, de origem indiana, segundo Avicena, árabe ilustre, e apresentada por al-Khwarizmi, em sua famosa Aritmética. Os Hindus faziam, em geral, a subtração pelo método de decomposição, ou "de pedir emprestado"; mas empregavam também o método de compensação. Neste método, tôdas as vêzes em que se somam ao minuendo dez unidades de uma certa ordem, soma-se também ao subtraendo uma unidade de ordem imediatamente superior. Exemplo: Em 736 — 258 diz-se: 16 menos 8... 8; 13 menos 6... 7; 7 menos 3... 4. Damos, em seguida, exemplos de adi-

ção, subtração e multiplicação, efetuadas à maneira dos Hindus e dos Árabes:

		0
		10 90
254	821	9795
+ 663	— 348	8600
817	583	23
9	47	435

As emendas, que aqui aparecem, não apareciam no ábaco; pois, à medida que iam calculando, novos algarismos substituiam os que se apagavam. No final, aparecia sòmente o resultado:

254	821	10005
+663	—348	23
917	473	435

Leitura XVIII

Ábacos (2)

O povo grego, em geral, servia-se do ábaco para as quatro primeiras operações elementares. Empregavam também, não raras vêzes, tábuas de cálculo, uma para adição e subtração, outra para multiplicação e divisão. Os processos que usavam, de somar e subtrair, eram, em essência, iguais aos nossos. Os mais capazes, quando operavam sôbre símbolos numéricos, faziam a multiplicação, dispondo o multiplicador sob o multiplicando, e operando da esquerda para a direita. Exemplo:

578 × 47. A operação conduzia aos três produtos parciais seguintes, que, somados, davam o produto total.

$$
\begin{array}{rcl}
500 \times 40 + 500 \times 7 = 20000 + 3500 = & 23500 \\
70 \times 40 + 70 \times 7 = 2800 + 490 = & 3290 \\
8 \times 40 + 8 \times 7 = 320 + 56 = & 376 \\
\hline
& 27166
\end{array}
$$

Os Babilônios empregavam o ábaco para a adição e a subtração. Para a multiplicação e a divisão, porém, empregavam tábuas prèviamente preparadas. Podiam obter prontamente vários quocientes, inclusive o da divisão de 12960000 por 81.

Os Egípcios usavam, para a adição e a subtração, ou ábacos, ou tábuas de cálculo. Obtinham o produto de dois números por meio de duplicações sucessivas do multiplicando. Quanto à divisão, obtinham os quocientes com o recurso de produtos, considerando que os atos de multiplicar e dividir representavam operações inversas, uma da outra. Damos a seguir, exemplos que evidenciam os processos pelos quais obtinham os produtos e os quocientes. Seja obter o produto de 103 por 49, e o quociente de 657 por 34.

1	103	1	103	$103 \times 49 = 5047$
2	206	16	1648	
4	412	32	3296	
8	824	49	5047	
16	1648			
32	3296			

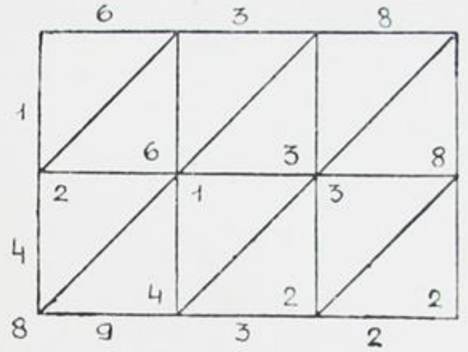
1	34
2	68
4	136
8	272
16	544

$$
\begin{array}{l}
657 \\
-544, \text{ ou } 34 \times 16 \\
\hline
113 \\
-68, \text{ ou } 34 \times 2 \\
\hline
45 \\
-34, \text{ ou } 34 \times 1 \\
\hline
11
\end{array}
$$

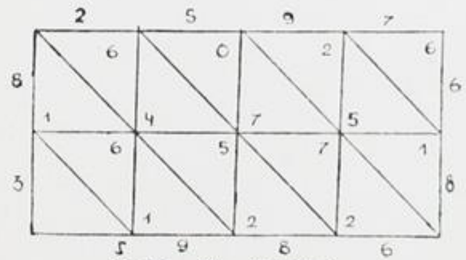
$657 = 34\ (16 + 2 + 1) + 11 = 34 \times 19 + 11$

Conclusão: quociente 19; resto 11

Os Hindus e os Árabes conheciam outro processo de multiplicar, *pergelosia*, empregado na Idade Média, pelos europeus, principalmente os Italianos. Damos dois exemplos do processo, deixando aos leitores descobri-lo:



638 x 14 = 8932



2597 x 38 = 98686

Foi provàvelmente em Florença que se usou, pela primeira vez, o corrente método de multiplicação. E foi na Itália, em princípios do século 14, que se começou a fazer a divisão da maneira como a fazemos hoje. O método surgiu tarde. Mas não é de estranhar; pois a divisão ainda é hoje a operação mais difícil de ensinar e de aprender.

Leitura XIX

A Universidade e Biblioteca de Alexandria

Quase três séculos depois de Tales, Alexandre Magno, filho de Filipe da Macedônia, dominava o mundo conhecido, em que o pensamento grego se tornava universal. Fundou, então, Alexandria, no Egito, formosa cidade, cuja construção confiou a Dinócrates, arquiteto do templo de Diana, em Éfeso, considerado uma das sete maravilhas. Na capital do vale do Nilo, Ptolomeu I, um dos generais de Alexandre, feito rei do Egito, fundou a Universidade, fadada a desempenhar, como de fato desempenhou, o mais importante papel na civilização helênica. A Universidade e sua Biblioteca foram o núcleo onde se desenvolveu uma escola de Filosofia e Matemática, conhecida, segundo dois períodos distintos em que floresceu, como 1.ª e 2.ª Escolas de Alexandria. Pertenceram à 1.ª Escola, cujo maior brilho foi o da época greco-alexandrina, que findou em 146 A.C. com a queda das nações gregas, os seguintes matemáticos, entre outros: Arquimedes, o maior gênio de todos os tempos; Apolônio, que estudou profundamente as secções cônicas; Hiparco, eminente astrônomo e criador da trigonometria; Eratóstenes, sábio enciclopedista, professor e bibliotecário; e Euclides, o autor dos *Elementos*, que são o livro de texto (Geometria) mais divulgado em todo o mundo, e a obra mais difundida, depois da Bíblia.

Eratóstenes era também atleta e campeão dos cinco jogos olímpicos. Dominada a Grécia, continuou independente o Egito, por favor de Roma. Mas Otávio, o imperador, não pôde, finalmente, tolerar a desorganização a que chegara o Estado do Nilo no tempo de Cleópatra. Subjugou, então, o Egito, que foi anexado ao império romano. Paralisados os estudos, durante a agitação política mais intensa, reabrem-se as portas da Universidade e tem início, no ano 30 A.C., o período que marca a existência da 2.ª Escola de Alexandria, em que durante seis séculos estudaram os mais eminentes cientistas, filósofos e literatos, não só de Grécia e Roma, mas de todo o mundo civilizado. Invadida, porém, a África, a Biblioteca foi incendiada pelos Árabes, que inicialmente manifestaram acentuado desprêzo pelos estudos. Era chegado o fim. Deviam apagar-se, para sempre, as luzes do mais altaneiro farol: aquêle que tinha iluminado, durante nove séculos, o roteiro laborioso e magnífico dos ilustrados mestres e distintos discípulos das 1.ª e 2.ª Escolas de Alexandria.

Leitura XX

Os Árabes e sua guerra "santa"

Pouco antes da morte de Maomé, em Medina, no ano 632, começaram os Árabes a desempenhar um papel que se tornou decisivo e notável no drama da civilização. Unidos pelo entusiasmo religioso, tornaram-se em prodigiosa fôrça e conquistaram, em menos de cem anos, a Síria, a Mesopotâmia, a Índia, a Pérsia, o Egito e grande parte da Espanha. Sob o domínio muçulmano passou a ficar, portanto, grande parte do mundo civilizado.

Ao invadirem o Egito, em 641, sob o comando do califa Omar, os Árabes atearam fogo à célebre Biblioteca da Universidade de Alexandria, a qual já tinha sofrido dois incêndios, um no tempo de Júlio César, e outro em 389, provocado pelos cristãos. Os manuscritos que escaparam ao fogo, e as cópias e traduções anteriormente feitas, reconstruíram, em grande parte, a civilização helênica. Dominado o Egito, os sábios e estudiosos de Alexandria emigraram para Constantinopla, que se tornou e permaneceu, durante 800 anos, o centro do ensino grego no Oriente. A Biblioteca incendiada parece que ressurgia em outras academias, notadamente nas de Atioquia e Edessa, para onde os sábios muçulmanos foram atraídos desde 762 quando, na Pérsia e na Mesopotâmia foi restabelecida a paz pelo califa al-Mansur, que se dedicou, como os outros que o sucederam, principalmente al-Mamum, a proteger a Ciência, a Filosofia e as Letras. Sabe-se que uma das condições de paz que al-Mamum impôs a Miguel III, imperador bizantino, foi a entrega de todos os manuscritos dos sábios gregos.

Terminadas as conquistas bélicas, e cessada a campanha político-religiosa, seguiu-se um período de florescimento cultural, que perdurou até o século 13. Em tão vasto império, porém, tornava-se fatal a divisão política, em virtude, não só, de problemas de sucessão, mas do fato de constituir a religião o único vínculo com que se pretendia unir tão grande número de súditos. E foi assim que, no ano 750, Abul-Abbas destronava Abderrame que, refugiado em Espanha, fundou, em 756, o califado de Córdova. Pouco depois, o califado do Oriente, com sede em Damasco, transferia-se para Bagdad, que

al-Mansur, cujo govêrno foi de 754 a 775, fundara com as ruinas de Babilônia. Destruída a formosa cidade pelos Mongóis, em 1258, o govêrno transportou-se para o Egito, que já tinha servido de sede, de 909 a 1171, a um dos dois califados em que se desdobrara o do Oriente, em virtude de lutas partidárias.

De Bagdad, para onde al-Mansur transferira de Damasco a sede do califado, a cultura se estendeu por todo o império muçulmano. Cairo, Damasco, Alexandria, Sicília, Granada, Sevilha, Toledo, Salamanca e outras cidades tornaram-se em grandes centros intelectuais. Na Espanha, os Árabes acenderam, em verdade, o facho da civilização, que não sòmente iluminou tôda a Europa, na Idade Média, mas abriu-lhe o caminho para a renovação científica, que se inicia no século 12. Com efeito: estabeleceu-se, na Península Ibérica, um verdadeiro e inexcedível intercâmbio científico, filosófico e literário. Traduziram-se os manuscritos clássicos dos Gregos e as obras notáveis dos Hindus, dos Árabes, dos Persas e de outros povos. No secundo 13, porém, com a divisão do império, a invasão mongólica e as cruzadas, apagava-se o brilho do mundo muçulmano. Nesse mesmo século, todavia, os sábios europeus, principalmente os da Itália, os da Universidade de Paris, fundada em 1200, os da Universidade de Oxford, de 1214, e os da Universidade de Salamanca, do reinado de Afonso IX (1188-1239), dão início a um novo surto cultural, cujo nível, anos depois, com a invenção da imprensa em 1442, e daí para diante, supera o das escolas árabes. O império muçulmano, reduzido no século 13 ao reino de Granada, cai, finalmente, em 1492. Neste mesmo ano Colombo desembarca no Mundo Novo e tem princípio a Idade Moderna.

Leitura XXI

A Aritmética de al-Khwarizmi

Entre as obras indianas, que se traduziram na Espanha Muçulmana, destacamos a Aritmética que al-Khwarizmi escreveu em 820, depois de ter voltado da Índia aonde fôra por ordem do califa al-Mamum, de quem era amigo e bibliotecário. Abu Abd Allah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, natural da Pérsia, homem culto, astrônomo e geógrafo, escreveu também, em 825, uma notável álgebra, *Hisab al-jabr wal muqabala* (transposição e remoção de têrmos numa equação), considerada, 700 anos mais tarde, e até Viéte, o livro básico nesse ramo da Matemática. Em sua Aritmética, cujo original se perdeu, al-Khwarizmi expõe e usa a numeração indiana, seus símbolos numéricos, e a maneira de calcular dos Hindus. Foi traduzida, na Espanha, no século 12, primeiro, ao que parece, por Athelard of Bath, e depois, por Juan de Sevilla. A primeira tradução acha-se na biblioteca da Universidade de Cambridge e tem o seguinte título: *Algoritmi de numero Indorum*. Suas primeiras palavras são estas: *Dixit Algoritmi* (Disse al-Khwarizmi). A tradução de Sevilla traz o título *Liber algorismi de practica arithmetica*. Os nomes algarismo e algoritmo, que usamos, são corrupções do nome al-Khwarizmi, tornado, assim, imortal. A palavra álgebra, por sua vez, se deriva de uma parte do título de sua obra sôbre o assunto. Da leitura de vários historiadores fica-nos dúvida sôbre de quem teria sido, em verdade, a tradução da Aritmética de al-Khwarizmi, que se acha na Universidade de Cambridge; pois afirmam alguns que Aben-Deuth, rabino convertido ao

Catolicismo, som o nome de João de Luna, é quem a traduziu e lhe deu o título *Algoritmi de numero Indorum*. Athelard of Bath, nesse caso, teria feito uma tradução a que dera o nome *Liber Ysagogarum Alchoarismi*. Não importa tanto o tradutor, a nosso ver, mas a obra que al-Khwarizmi escreveu em árabe. Parece, finalmente, ter havido uma outra tradução, que se afirma ter sido feita por Robert of Chester.

Outros livros, ou manuscritos, contribuiram para difundir a numeração indiana: o de John of Halifax, *Algorismus Vulgaris;* o de Alexandre de Ville Dieu, *Carmen de Algorismo* (em versos); o de Jordanus Nemorarius. *Demonstratio Jordani in Algorismo;* e o de Leonardo de Pisa, ou Fibonacci, *Liber Abaci*, em que o autor recomenda, com todo o entusiasmo, o cálculo à moda indiana (*modi indorum*), que aprendeu com professôres árabes, no norte da África, onde estêve longo tempo. Êsses quatro livros foram escritos no século 13. Outros mais foram aparecendo, em hebraico, inglês, italiano, francês, e em outras línguas. Não sòmente êsses manuscritos, mas também o comércio, interior e exterior, os viajantes, os mercadores, as folhinhas e os almanaques contribuiram para a difusão dos "algarismos"..

Leitura XXII

Padrões de medida (1)

Foi o corpo humano que forneceu os primeiros padrões de medida. O cúbito, a mais antiga medida de comprimento, usada pelos Egípcios e Babilônios de centenas de anos antes de Cristo, era o comprimento do antebraço, desde o cotovêlo até a extremidade do dedo médio. Usado por vários outros povos durante vários séculos, não representava, entretanto, para todos êles, uma mesma extensão. Os Hebreus, que lhe chamavam mãe de tôdas as medidas, admitiam dois cúbitos diferentes, um sagrado, outro profano, sendo êste a metade daquele. O átrio do tabernáculo, segundo descrição bíblica (Êxodo — 27,18), tinha apenas 5 cúbitos de altura, o que parece justificar a existência de um cúbito maior que o comum, que media apenas 45 cm.

O cúbito árabe não era o mesmo que o romano, que por sua vez diferia do egípcio, êste maior que o grego. Segundo Belaiew, metrologista russo, a área do quadrado do cúbito olímpico seria igual à área de um círculo cujo diâmetro fôsse o cúbito egípcio.

O dígito e o palmo foram também unidades usuais de comprimento. A primeira era a largura de um dedo; a segunda, a distância entre as extremidades dos dedos polegar e mínimo, supondo-se a mão aberta ao máximo. A extensão do palmo parece ter sido originàriamente a da largura da mão aberta, tomada, porém, a medida na linha da base dos dedos de três falanges, os quais deveriam estar bem unidos. Aliás, o cúbito egípcio, suposto o mais antigo, dividia-se em 7 palmos ou 28 dedos.

Uma outra unidade sugerida pelo corpo humano é o pé, medida tão usual entre os povos de língua inglêsa. Tem havido muitos pés, uns mais compridos, outros menos. O pé de Carlos Magno, por exemplo, a quem a História aponta como o primeiro imperador a preocupar-se com a unificação das medidas, já serviu de unidade de comprimento. O pé já foi também a média aritmética de 16 pés de 16 pessoas que, por fôrça de um decreto-lei de certo monarca, foram apanhadas ao acaso, quando deixavam a igreja certo domingo de manhã.

E foi ainda a têrça parte das duas seguintes distâncias: primeira, a do umbigo de um adulto à extremidade de seu dedo médio, supondo-se estendido um dos braços (decreto de um dos monarcas normandos); segunda, a do nariz de Henrique I da Inglaterra à extremidade de seu dedo polegar. Hoje, o pé representa a têrça parte da jarda de Troughton, jarda oficial inglêsa, de 36 polegadas, adotada também pelos Estados Unidos.

Leitura XXIII

Padrões de medida (2)

Desde os gregos antigos, a polegada tem representado 1/12 do pé. Mas Eduardo II da Inglaterra decretou, em 1321, que a polegada seria o comprimento de 3 grãos de cevada tirados do centro de uma espiga e dispostos um em seguida ao outro.

A milha representou, a princípio, a distância de 1000 passos, parecendo estar a sua origem ligada aos corredores oficiais, que agiam como mensageiros no mundo antigo, como, por exemplo, nos dias de Alexandre ,o Grande, cujo império percorriam de extremo a extremo, capacitando-se para fornecer informações preciosas, inclusive as que diziam respeito às distâncias que separavam as cidades.

Outras unidades interessantes têm sido usadas para a medida da grandeza comprimento: "tiro de pedra", "tiro de fuzil", "tiro de canhão", "jornada de um dia", "jornada de um dia de sábado", etc...

É fácil imaginar que, antes do sistema métrico, as medidas apresentavam uma variedade embaraçosa. Encontravam-se, não raras vêzes, no conjunto de unidades de um país, certas medidas cujos nomes não indicavam a mesma coisa no sistema adotado por um outro. Entre nós já foram correntes as seguintes medidas de comprimento, algumas das quais indicavam, por um mesmo nome, extensões desiguais nos sistemas brasileiro e inglês: braça, vara, palmo, toesa, pé, polegada, ponto, linha, passo, côvado, jarda, légua postal, légua de sesmaria, légua marítima, légua geométrica, milha brasileira, milha geométrica, milha marítima. As unidades de superfície e volume eram respectivamente os quadrados e os cubos das lineares não itinerárias. Entre as medidas agrárias havia estas de nomes tão exóticos: jeira, tarefa, quarta de terra, prato de terra, sesmaria de campo, sesmaria de mato, sorte de campo. Entre as de capacidade, notavam-se o martelo, o quartilho, a canada, o pote, a pipa, o tonel, a quarta, o alqueire, a fanga, o almude, o celamim e o moio. Entre as de pêso figuravam a tonelada, o quintal, a arrôba, a libra, o marco, a onça, a oitava, o escrópulo, o quilate e o grão. A esquisitice dêsses nomes seria o menos grave; o pior era não saber se o almude de um lugar era o mesmo de outro; ou esquecer, por exemplo, que o moio tinha 15 fangas, a fanga 2 almudes, o almude 2 alqueires, o alqueire 6 canadas ou 4 quartas, a canada 4 quartilhos, o quartilho 2/3 do celamim, o celamim 1/4 da quarta.

Leitura XXIV*

Padrões de medida (3). Dinheiro

As medidas monetárias nem sempre foram moedas metálicas. Desde os tempos antigos até hoje, a mercadoria chamada dinheiro, ou seja, o artigo que facilita

a troca ou o comércio, por servir de têrmo de comparação entre as diferentes coisas, tem-se apresentado sob múltiplos aspectos, alguns dos quais estranhos, em substâncias e naturezas diversas; umas vêzes como um tipo vegetal, outras como um representante animal, e muitas mais como um espécime mineral.

Dinheiro já tem sido, por exemplo, o fumo, o trigo, o algodão, a cevada, a farinha, o azeite, o chá, a tâmara, o côco, o milho, a pele, o boi, a ovelha, o homem (escravo), o sal, a concha, o dente de baleia, a pena colorida, a pedra de machado, o ferro, o cobre, o estanho, o chumbo, a prata, o níquel, o ouro e a platina.

Supõe-se ter sido a pele de caça o dinheiro mais antigo, havendo provas bastantes de que, nas mais afastadas épocas e regiões, foi o gado a forma principal de dinheiro entre todos os povos de vida pastoril e agrícola.

Em Roma e em tôda a Itália, o boi e o carneiro representaram outrora a pecúnia por excelência. E hoje, quando os metais dominam como tipos comparativos, em virtude de seu valor intrínseco, permanece — como que em homenagem aos que tanto serviram — a palavra latina *pecunia,* derivada de "pecus", que quer dizer gado.

As moedas, que são hoje circulares, já tiveram formas e tamanhos diferentes. Já foram retangulares, cilíndricas, hexagonais, octogonais, quadrangulares, cúbicas e do feitio de anel. Existiram tão pequenas como tachas, e também tão grandes como ladrilhos.

Os metais e as ligas metálicas têm servido para o fabrico de dinheiro, desde os tempos mais remotos. Na Antiguidade dominaram o ferro e o cobre; na Idade Média prevaleceu a prata; e nos tempos modernos distinguiu-se o ouro. Todos êstes porém, e porventura outros, coexistiram através dos séculos. Os Hebreus, cujo dinheiro era principalmente de cobre, tinham também os "talentos" de prata e de ouro. E os Egípcios primitivos, como os Gregos, os Chineses e os Babilônios, tiveram, igualmente, moedas de prata e de ouro.

Não se conhece a origem da arte de cunhar. Sabe-se, porém, que da Grécia foi transmitida à Itália, onde o templo de Juno Moneta foi para os romanos e primeira Casa da Moeda. E' de *Moneta* que se derivou *moeda*.

As moedas romanas, começadas a cunhar desde muitos anos antes de Cristo, constituem, pelo que representam o verso e o reverso de cada uma, um verdadeiro arquivo oficial da história do império. E o dinheiro grego, que é outro orgulho da numismática, desperta, pela beleza de sua cunhagem, quase sempre inspirada nas obras de arte, não só uma verdadeira admiração, mas um grande e vivo interêsse.

Leitura XXV

Medida do tempo (1). Relógio

A grandeza que hoje medimos por segundo, minuto, hora, dia, mês, ano, etc., foi medida outrora por unidades que não mais se usam. Nem tinham os antigos, que mal podiam determinar as horas por processos rudimentares, nenhum instrumento de relativa precisão, que lhes marcasse as pequenas frações do tempo.

O relógio (*) primitivo foi uma só peça: uma simples estaca, cuja sombra, mais ou menos longa, dava

(*) Aqui chamamos relógio a qualquer coisa que sirva ou tenha servido para determinar o tempo.

uma idéia do tempo. Apareceram depois o quadrante solar e a clepsidra, relógios de sol e de água, conhecidos na antiguidade pelos Egípcios e Babilônios, e provàvelmente por outros povos. O primeiro consistia de uma parte plana marcada com sinais horários, sôbre um dos quais se projetava, na hora correspondente, a sombra de uma haste; e o segundo era um reservatório graduado de tal maneira que a água nêle contida, a qual escapava continuamente por um pequeno orifício, fazia que, no fim de cada período regular de tempo, o nível de sua superfície livre coincidisse com uma das graduações. A clepsidra era também um vaso devidamente marcado, o qual se enchia por si mesmo, através de reduzida abertura, tôdas as vêzes que deixado vazio sôbre as águas tranqüilas de um depósito.

Além dêsses relógios, surgiram outros, como o de areia (ou ampulheta), o de cordão e o de vela. O tempo que a areia leva para cair de uma ampola na outra é sempre o mesmo e serve, por conseguinte, como unidade de medida. Do mesmo modo, é constante o tempo em que arde uma certa parte de um cordão, ou uma determinada porção de uma vela. Na Coréia, é costume marcar as horas por meio de uma corda de cânhamo cujas partes, compreendidas entre vários nós igualmente distanciados uns dos outros, ardem sempre no mesmo intervalo de tempo.

Não se conhece a origem dos relógios pròpriamente ditos. Sabe-se, porém, que apareceram no século XV, quando funcionavam muito mal. Hoje são fabricados com muita precisão, alguns tão pequenos que fazem parte de anéis, e outros tão grandes que pesam toneladas.

LEITURA XXVI

Medida do tempo (2). Dias da semana

Os dias, as semanas, os meses e os anos são espaços de tempo determinados pelos calendários em geral e pelas folhinhas em particular. Deve-se aos Babilônios o dia de 24 horas, a hora de 60 minutos e o minuto de 60 segundos. E' um modo de dividir o tempo, que tem predominado desde milênios, muito embora umas poucas nações tenham tido uma divisão diferente. Os próprios Babilônios que nos legaram a divisão atual do dia, dividiram-no também em 12 períodos: seis do amanhecer ao pôr do sol e seis do pôr do sol ao amanhecer. Os Astecas dividiram-no em 20; e os Judeus, como os Romanos, em 12 horas e 4 vigílias. Hoje, começamos o dia a partir da meia noite, como era costume entre os antigos Egípcios. Outros povos, porém, começavam-no com o ocaso e ainda outros, como os Caldeus, com o nascer do sol.

A semana é um período artificial de tempo, que existe desde épocas remotas. Os Babilônios deram aos seus sete dias os nomes dos sete astros que lhes eram visíveis na faixa do zodíaco. O nome sábado, do primeiro dia da semana dos Egípcios e do último da semana dos Judeus, é o único nome de dia encontrado no Velho Testamento. Era o dia do descanso, segundo os mandamentos de Deus (Êxodo, 20), o qual foi substituído pelo dia do sol, chamado pelos cristãos o dia do Senhor, ou domingo, em homenagem a Nosso Senhor Jesus Cristo, que ressuscitou no primeiro dia da semana. Os outros nomes foram mudados no tempo de Constantino, quando passaram a chamar-se *feria secunda, feria tercia, feria quarta,* etc.

O mês, que representa cêrca de um doze avos do ano solar, era dividido pelos Gregos e Egípcios em três períodos de 10 dias, ou décadas, prática que os Franceses da Revolução quiseram adotar, propondo um novo calendário, que não foi aceito. Os Egípcios, cujos meses eram todos de 30 dias, completavam o ano com 5 dias intercalados; e porque não tinham o bissexto, o começo do ano natural, com relação ao civil, atrasava-se de um dia em cada 4 anos. Assim, a cheia do Nilo que determinava o dia de Ano Novo era também um acontecimento de data variável. O ano natural era dividido em três estações: a das sementeiras, a das colheitas e a das inundações.

LEITURA XXVII

Medida do tempo (3). Os meses

Diz-se que Rômulo dividiu o ano em 10 meses, dos quais os quatro últimos eram setembro (de septem), outubro (de octo), novembro (de novem), e dezembro (de decem). No reinado de Numa, introduziram-se dois outros, o de janeiro, antes de março que era o primeiro mês, e o de fevereiro, depois de dezembro. Os decênviros, porém, em 452 antes de Cristo, colocaram fevereiro entre janeiro e março.

Júlio César, cujo calendário começou a vigorar em 46 antes de Cristo, determinou que tivessem 31 dias os meses de ordem impar (1.º, 3.º, etc.), e 30 os de ordem par (2.º, 4.º, etc.), com exceção de fevereiro, que devia ter 30 ou 29, segundo o ano fôsse bissexto ou não. Era uma distribuição inteligente. O imperador Augusto, porém, não pôde suportá-la; pois o mês de agôsto, que assim se chamava em homenagem a êle, não devia ser menor que o de Júlio César, ou julho. Foi, então, que a vaidade diminuiu de um dia o pobre fevereiro, para fazer inchar o pretensioso agôsto. E a fim de evitar que três meses consecutivos (julho, agôsto e setembro) ficassem com a mesma extensão, os de setembro e novembro, como os de outubro e dezembro mudaram o número de seus dias, ficando aquêles com 30 e êstes com 31.

Janeiro, do latim *Januarius*, era consagrado a Jano, o deus romano das duas faces, uma pacífica e outra guerreira. Fevereiro, de *februarius*, era a época das mortificações, que precedia o início do ano romano (1.º de Março). Março era consagrado a Marte, deus da guerra. Abril, de *aperire*, que significa abrir (pois nesse mês os vegetais brotavam), era dedicado a Afrodite. Maio constituía uma homenagem à deusa Maia, do mesmo modo que Junho era uma consagração à Juno, espôsa de Júpiter.

Leitura XXVIII

O sistema métrico decimal

A guarda dos padrões de medida

Foi a queda da Bastilha que deu origem ao sistema métrico. Os sucessos políticos que asseguraram plenos poderes aos membros da Constituinte, deram novo ânimo àqueles que se vinham batendo, desde muitos anos, pelo estabelecimento de novos padrões de medida. Assim foi que Talleyrand, em 1790, submeteu à consideração da Assembléia o mesmo palpitante assun-

to porque já se tinham interessado Picard, Huygens, Mouton, Lacondamine e outros. Os constituintes julgaram razoável a proposta que lhes fôra submetida e incumbiram dos necessários estudos uma comissão idônea, formada de membros da Academia de Ciências de Paris. Entre os que compunham a comissão, estavam Monge e Condorcet, que foram, entretanto, substituídos, o primeiro por ter sido chamado a dirigir o fabrico de canhões, e o segundo por se ter suicidado para escapar ao patíbulo a que fôra condenado como um dos chefes do partido girondino. Integrada a comissão, ficou constituída de Borda, Lagrange, Laplace, Brisson, Prony e Berthollet. Resolvido que se tomasse por base do novo sistema uma porção do comprimento do meridiano terrestre, Mechain e Delambre mediram o arco do círculo máximo que passa por Paris, entre Dunquerque e Barcelona, deduzindo dos resultados a medida do quadrante (5130740 toezas), a cuja décima milionésima parte foi dado o nome *metro*, sugerido por Borda. Trabalhos ulteriores vieram revelar que o comprimento determinado por Mechain e Delambre não era exatamente o do quadrante, motivo pelo qual se modificou a definição original do metro.

O sistema métrico, assim chamado por se derivarem do metro suas diferentes unidades, sobrepuja e sobranceia a todos; pois apresenta uma nomenclatura metódica e facilita extraordinàriamente os cálculos, como decimal que é.

De acôrdo com a lei de 10 de dezembro de 1799, que fixou definitivamente o valor do metro e estabeleceu as demais medidas, foi mandada cunhar pelo govêrno francês, com o fim de comemorar o importante acontecimento, uma medalha cujos dizeres no verso e reverso são respectivamente os seguintes: "A todos os tempos, a todos os povos"; "República Francesa, Ano VIII".

Na França, o sistema métrico tornou-se obrigatório a partir de 1.º de janeiro de 1840 e no Brasil, desde 1.º de janeiro de 1871.

Houve em todos os tempos um grande interêsse em conservar os padrões de medida. Os Gregos mantinham-nos sob guarda; os Romanos, no capitólio; os Hebreus, no templo em Jerusalém. Os templos foram muitas vêzes escolhidos para depósitos de pesos e medidas. O de Hércules como o de Castor e Pollux guardavam medidas romanas; e a abadia de Westminster preserva, desde 950 A.D. os standards saxões. Certas medidas são também conservadas em construções memorativas. Assim, na base da estátua de Vespasiano, em Roma, está gravada uma das medidas romanas de comprimento; e no pedestal do monumento a Nelson, em Londres, está esculpida a jarda inglêsa. Os vários padrões do sistema métrico estão depositados no Departamento Internacional de Pesos e Medidas, na França.

Leitura XXIX

Os sinais das operações

Os sinais de adição e subtração, divulgados a partir do século 17, foram impressos pela primeira vez em 1489, quando Johann Widman os empregou na sua Aritmética Comercial com a mesma função que o comércio já lhes vinha atribuindo: a de indicar excesso o sinal +, e deficiência o sinal —. Supõe-se que em cálculos não mercantis, êles tenham sido primeiramente usados pelo geômetra Rudolff, em princípios do séc. XVI

quando ainda se costumavam as letras *p* e *m*, de plus e minus. Supõe-se também seja o sinal de adição uma corrupção do latim et, cuja abreviatura teria dado o atual +.

Revela-nos o papiro de Ahmés (de 1650 anos antes de Cristo), que os antigos egípcios empregavam um par de pernas de quem marcha, como sinal de adição, e outro de quem recua, como sinal de subtração.

O sinal de multiplicação, ×, foi introduzido pelo matemático inglês William Oughtred, em princípios do século XVII, quando Thomaz Harriot, seu contemporâneo e patrício, empregava o ponto, que Gottfried Leibnitz usaria poucos anos mais tarde.

No século XVII apareceram também os sinais de divisão : e ÷, atribuídos, o primeiro a Oughtred, e o segundo ao suíço John Rahn, cuja álgebra, John Pell, a quem alguns atribuem a invenção do sinal ÷, ajudou a traduzir e publicar. E' possível também que tenha sido Leibnitz o primeiro a empregar a notação : .

O sinal de igualdade foi usado pela primeira vez em 1557 pelo inglês Robert Recorde, que justificava o seu emprêgo com as seguintes palavras: "Não há nada que sugira melhor a igualdade do que duas retas paralelas".

O de resultado, ou parênteses, data do séc. 16, quando apareceu numa das obras do matemático italiano Nicolo Tartaglia. Só no século XVII, porém, é que começou a ser mais usado, principalmente a partir dos dias de Viète (ou Vieta) que o empregou sistematicamente.

LEITURA XXX

A fração ordinária entre povos da antiguidade (1)

A fração ordinária, considerada algumas vêzes como o primeiro número artificial em oposição ao inteiro e positivo, a que chamamos natural, já era conhecida pelos povos mais antigos, a que apresentava sérias dificuldades.

O Papiro de Ahmés, intitulado "Instruções para o conhecimento de tôdas as cousas secretas", apresentava uma tábua para a decomposição de algumas frações da forma $\frac{2}{2n-1}$ em outras de numerador 1. Exemplo:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}; \quad \frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}.$$

Não eram só as frações de numerador 2 e denominador ímpar, que se podiam decompor numa soma de frações unitárias, mas também outras.

Assim, 7/8 seria a 1/2 + 1/4 + 1/8. Na verdade, duas únicas frações de numerador diferente de 1 não sofriam necessàriamente a decomposição: eram 2/3 e 3/4. Quanto ao processo de desdobramento, sabe-se apenas do caso particular da fração 2/15, conforme explicado por Ahmés, que diz: "como 2/3 é a soma de 1/2 com 1/6, 2/3 de 1/5 representa a metade de 1/5 mais a sua sexta parte.

O fato de os Egípcios se restringirem pràticamente às frações da forma 1/n, revela-nos que as concebiam como partes alíquotas da unidade. Foi êste, aliás, o

primitivo conceito entre os demais povos, que recusaram longo tempo chamar número às frações, como hoje fazemos.

Não foram só os antigos Egípcios que se limitaram às frações de numerador 1. Afirma-se que vários outros povos. Aliás, num documento russo de uns trezentos anos passados, encontrou-se a seguinte expressão, que significa 1/96: "meio—meio—meio—meio—meio—têrço". $(1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/3)$.

LEITURA XXXI

A fração ordinária entre povos da antiguidade (2)

Os Babilônios estenderam o uso da base sexagesimal às frações ordinárias, cujos denominadores eram potências de 60. Aplicavam também a êsses números "artificiais" o seu princípio de posição ou de valor relativo. Digamos: os símbolos cuneiformes representativos do número 3 e dos denominadores 7 e 22, poderiam significar $3 + 1/60 + 22/60^2$ se estivessem dispostos assim: 3 7 22 . O espaço entre o 7 e o 22 seria o da fração cujo denominador fôsse a segunda potência de 60. As frações dos babilônios, chamadas, às vêzes, frações físicas ou astronômicas, foram introduzidas por Hipparchus (do 2.º século pré-cristão) na astronomia dos Gregos.

Os Gregos representavam as frações unitárias, escrevendo ùnicamente o denominador, que era uma letra com um duplo acento agudo. Exemplo: c", 1/3. No caso de outras frações, escreviam, com um acento, a letra do numerador, e com dois a do denominador, que comumente repetiam. Assim, a fração 2/5 seria representada por b' e" ou por b' e" e". É como se usássemos 4" em vez de 1/4 e 5 7" 7", em vez 5/7.

Os antigos Romanos usavam um sistema duodecimal de frações, que lhes era vantajoso, pois o de pesos e medidas e o monetário tinham também por base o número 12.

Deve-se provàvelmente ao Hindus o modo por que hoje representamos as frações. Sabe-se, porém, que não empregavam o traço separativo dos têrmos, o qual foi introduzido pelos Árabes. Os Hindus representariam a fração 3/4 e o número misto 3 e 2/5, das seguintes maneiras, respectivamente:

3	3
4	2
	5

Acredita-se terem sido os Hindus os primeiros a reduzir frações ao mesmo denominador, embora Euclides (do 3.º século pré-crist.o) já tivesse deduzido uma regra para determinar-se o mínimo múltiplo comum.

Leitura XXXII

O aparecimento dos números decimais

O número decimal data do século 16, quando Simon Stevin, inspetor dos diques, aprovisionador geral da armada e ministro da fazenda da Holanda, submeteu à consideração dos homens de negócio, e aos matemáticos e cientistas da época, o primeiro tratado sistemático sôbre a forma decimal de expressar o número não inteiro.

Antes do tratado de Stevin, publicado em 1585, em Flamengo e em Francês, com os títulos *La Thiende* e *La Disme*, já no século 14 Johannis de Muris apresentava como raiz quadrada de 2 o valor 1.4.1.4, declarando representar unidade o primeiro 1, décimos o primeiro 4, décimos de décimos o segundo 1, e décimos de décimos o segundo 4.

Um dos primeiros passos no caminho que levou à descoberta e representação das dízimas, foi dado também por Adam Riese, que em princípios do século 16 determinou, com aproximação de milésimos, as raízes quadradas de vários números, obtendo-as primeiramente mil vêzes maiores e dividindo-as depois por mil.

Sabe-se também que o alemão Christian Rudolff publicou em 1540, uma Aritmética em que já apareciam alguns números decimais. Em vez da vírgula, ou do ponto decimal, que só se tornou costumado depois de 1616, quando John Napier, inventor dos logaritmos, o empregou nos seus trabalhos, o autor usava um traço vertical para separar as partes inteira e fracionária. Escrevia 3|25 para significar 3.25 ou 3,25. Supõe-se tenha sido êsse traço a origem da vírgula decimal, que hoje usamos.

Stevin não foi feliz na notação que escolheu. E' bastante pensar em que representaria da seguinte maneira o número 4,275: 4(0)2(1)7(2)5(3); François Viète, porém, seu contemporâneo, restabeleceu o traço vertical e ainda distinguiu as unidades inteiras das fracionárias escrevendo aquelas em tipos maiores.

E' possível que a causa do aparecimento tardio dos números decimais tenha sido o trabalho científico dos sábios europeus e árabes, que o calcavam essencialmente na histórica divisão sexagesimal do ângulo, perpetuda nas tábuas trigonométricas que tanto usavam. De fato: quem tinha mais possibilidades e recursos para descobri-los eram êles, os matemáticos, que se contentavam, entretanto, com o empregar nas suas investigações o sistema babilônico de numeração, que servia aos seus propósitos.

Leitura XXXIII

A Matemática através dos tempos

A produtividade matemática através dos tempos é prova de que as idéias fundamentais da "venerável ciência" são tão profundas e grandes que têm sobrevivido a tôdas as espécies de fanatismo, de impérios e govêrnos, de guerras e expedientes, de propósitos e ambições. Na história dos séculos, é a Matemática que reflete a marcha do pensamento. Tôdas as suas criações, grandes e pequenas, expostas em linguagem universalmente inteligível, formam, sem dúvida, uma literatura multimilenária e popular: multimilenária, porque os anos não a extinguem, ao contrário, evidenciam-na; popular, de todos os povos e para todos êles, porque independente de gôsto ou preferência nacional. Suas páginas, tão ricas de coloridos circunstanciais, são espelhos fiéis de gerações que não morrem. Contam lutas, referem oposições, mostram heroísmo, assinalam crença, distinguem fé, apontam vitória. Fundamento tão necessário a todos os tipos de progresso, quanto a luz do sol a tôdas as formas de vida, traz consigo a Matemática, rainha das ciências e sua mão direita, algo intangível, misterioso e inexplicável, que não sòmente exalta e engrandece as expressões vitoriosas da realidade científica, senão também eleva, dignifica e honra àqueles por cujos corações e cérebros, esforços e labores, não cessa para a humanidade a corrente das grandes descobertas.

Leitura XXXIV

A Matemática a serviço do homem (1)

Imaginemos que ao despertarmos amanhã estejamos num mundo do qual se tenham varrido todos os números e tôdas as fórmulas. Que terá restado? Difícil é dizer.

Estarão apagados os mostradores dos relógios. Terão apenas nomes os catálogos de telefone. Estará extremamente complicado o mais simples dos endereços.

Os operários estarão, muito cedo, de volta de suas fábricas. Não haverá trabalho. Tôdas as máquinas estarão paradas. Por que? Porque a máquina não conhece senão números: o seu próprio, os que indicam as peças que a compõem, e os que marcam, uma por uma, as partes que se juntam no fabrico de um produto.

E o comércio? E os bancos? Abrirão suas portas? Não. Sem máquinas de calcular, sem fórmulas e sem tábuas numéricas, nenhuma escrituração seria possível.

Estará morta a engenharia; pois a construção de arranha-céus, estradas, pontes, navios, automóveis, aviões, e tudo o mais... depende primordialmente do cálculo, isto é, do número e da fórmula.

Considerai nos demais setores da civilização e suspende-os sem números. Vereis, por certo, que serão como os restos de uma tremenda catástrofe. Quanto a nós, preferimos pensar neste nosso mundo, achando-o sempre quantitativo e numérico. Queremos bem ao número e o desejamos em tôda a parte: no rádio, — que nos traz notícias, informações e música; no tungstênio da lâmpada, —que transforma a noite em dia; nos refrigeradores, — que mudam o verão em primavera; e nas máquinas que voam, encurtando distâncias e aproximando povos, — movidas à gasolina, lubrificadas com óleo, mas alimentadas de expoentes, de números, de equações e de fórmulas.

É o número, ou a medida, que nos põe ao corrente de como age a natureza. Mas é a fórmula, inteligente e dadivosa, que nos ensina a controlar suas fôrças, dirigindo-as em favor do homem.

Com a medida do sol e da lua, de sua posição, sua massa e seu movimento, prediz o homem o comportamento dos mares, a que o comércio confia as suas embarcações. Nós, por igual, viajando por terra, ou sôbre as ondas, ou entre nuvens, estamos sempre tranqüilos, constantemente informados, por instrumentos de medida, da altitude que temos alcançado, da velocidade que temos atingido, da posição a que temos chegado.

Leitura XXXV

A Matemática a serviço do homem (2)

A medida é um meio de descoberta, de profecia e de contrôle. Kepler determinara o curso de Uranus. Êste, porém, não parecia obediente. Só havia uma explicação: algum planeta perturbava, por certo, a sua marcha. E êsse intruso, que ninguém antes tinha visto, existia de fato e foi descoberto. Mas como? Na Inglaterra e na França, Adams e Le Verrier acharam-no através do

cálculo; acharam-no, mas não o viam. Fizeram saber ao Dr. Galle, na Alemanha, a posição do novo planeta, que seria, naquela época, visível de Berlim. E no dia, no momento e na posição que a Matemática determinara, lá estava realmente o novíssimo planeta. Eis a história de Netuno.

As funções das medidas nas pesquisas e práticas médicas formariam uma fascinante literatura. Mede-se a área de um ferimento por tiro, e determina-se o dia em que a cura se completa; mede-se o defeito de uma visão, e logo é reparado por lentes que o cálculo determina; medem-se de mil modos o coelho e o rato branco, e descobrem-se os recursos com que a vida se prolonga. A arte de medir é a arte dos laboratórios. Medindo, a cirurgia é segura; medindo, a farmácia é útil; medindo, é milagrosa a prótese.

A Química não prescinde dos números; sua linguagem-fórmula é uma espécie de Álgebra. A Matemática, que transformou em ciência a velha alquimia, fornece-lhe hoje o instrumento e o método com que estudar os seus múltiplos fenômenos.

Quanto à Física, é tão predominantemente matemática, que a pausa de progresso, que acontece, às vêzes, existir nos seus domínios, reflete quase sempre a necessidade que tem a sua "mão direita", de que tanto depende, de descobrir novos recursos, — progredindo também.

O método estatístico, essencialmente matemático, é o principal instrumento de análise e predição de tôdas as ciências sociais. É a Estatística que preside aos estudos da mortalidade, aos cálculos de seguros de vida e às determinações de vários números índices. A probabilidade de chegar aos cinqüenta anos quem hoje tem quarenta, como também a da ocorrência de um ciclone, ou de um incêndio, ou de um naufrágio, é sempre determinada matemàticamente, e não apenas enunciada de modo vago. "Parece que vai chover" ou "talvez tenhamos chuva", ou "provàvelmente choverá amanhã", são sentenças sem nenhuma precisão. Bastam nos dias comuns, mas não servem às épocas decisivas.

Quando nos dizem os cientistas da era eletrônica, que em cada segundo de tempo passam pelo filamento de uma lâmpada nada menos de seis milhões de trilhões de eletrons; e quando nos pomos a pensar em que a distância X que nos separa da mais próxima das estrêlas conhecidas, é mais de um quarto de milhão de vêzes a que nos afasta do sol; e quando ainda nos informam os astrônomos que nem ao menos vinte estrêlas se conhecem cuja distância é menor que 3x, enchemo-nos de admiração e pasmo, diante da audácia com que a inteligência finita do homem explora os infinitos de Deus. E concluímos, então, com quase um paradoxo: não são isto milagres da mente, senão recursos da Matemática.

BIBLIOGRAFIA PARCIAL

1 — Archibald, Raymond Clare. **Outline of the History of Mathematics.** Oberlin, Ohio; Mathematical Association of America, 1936.

2 — Bakst, Aaron, **Mathematics, Its Magic and Mastery.** Toronto: D. Van Nostrand Company, Inc., 1952.

3 — Bell, E. T. **The Development of Mathematics,** New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940.

4 — Boyer, Lee Emerson. **An Introduction to Mathematics for Teachers.** New York, Henry Holt and Company, 1945.

5 — Brueckner, Leo J. e Grossnickle, Foster. **How to Make Arithmetic Meaningful.** Philadelphia: The John C. Winston Company, 1947.

6 — Cajori, Florian. **A History of Elementary Mathematics.** London: Macmillan and Co., Ltd., 1930.

7 — **A History of Mathematics.** New York: The Macmillan Company, 1950.

8 — Colerus, Egmont. **De Pythagore a Hilbert.** Paris. Flammarion, 1937.

9 — Conant, Levi Leonard. **The Number Concept.** New York: Macmillan and Company, 1931.

10 — Court, Nathan Altshiller, "Mathematics in the History of Civilization", **The Mathematics Teacher,** XLI (1948). 104-111. Washington, D.C.: The Nacional Council of Teachers of Mathematics.

Nota — Daqui para diante, designaremos esta revista pelas iniciais M.T.

11 — Covey, E. Baker. "Outgrowth of a Philosophical Approach to the Teaching o Mathmatics", M. T., XLII (1949), 133-142.

12 — Dantzig, Tobias. **Number, the Language of Science.** New York: The Macmillan Company, 1937.

13 — Hogben, Lancelot. **Mathematics for the Million.** New York: W. W. Norton and Company, Inc, 1937.

14 — Jones, Phillip S. "Large Roman Numerals", M.T., XLVII (1954), 194-195.

15 — "The Binary System", M.T., XLVI (1935), 575-577.

16 — Karpinski, Louis Charles: **The History of Arithmetic.** Chicago: Rand McNally and Company, 1925.

17 — Keith, Alexander e Robertson, James. **The Principles of Arithmetic.** London: Blackie and Son Limited, 1951.
18 — Kramer, Edna E. **The Main Stream of Mathematics.** New York: Oxford University Press, 1951.
19 — Loria, Gino. Historia Sucinta ed la Matemática. Buenos Aires: Ibero-Americana, 1948.
20 — Ore, Oystein. **Number Theory and its History.** New York: Mac-Graw-Hil Book Company, Inc., 1948.
21 — Pastor, J. Rey e Babini, **J. Historia de la Matemática.** Buenos Aires: Esposa — Calpe Argentina S.A., 1951.
22 — Perez, José Augusto Sanchez. **La Aritmmetica en Babilonia y Egito.** Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, 1943.
23 — **La Aritmetica en Roma, en India y en Arabia. Madrid:** 1949.
24 — **La Aritmetica en Grecia.** Madrid: 1946.
25 — Sanford, Vera. **A Short History of Mathematics.** Boston: — Houghton Miffin Company, 1930.
26 — "Notes on the History of Mathematics", M. T., XLIV (1951), 29-30; 135-137; XLIII (1950), 368-370.
27 — "Roman Numerals", M.T., XLIV (1951), 403-404.
28 — Smith, David Eugene. **The Wonderfull Wonders of One-Two-Three.** New York: McFarlane, 1937.
29 — Smith, David Eugene e Gingburg, Jekuthiol. **Numbers and Numerals.** New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1937.
30 — Spitzer, Herbert F. **The Teaching of Arithmetic.** Boston, Houghton Mifflin Company, 1948.
31 — Struik, Dirk **A Concise History of Mathematics.** New York: Dover Publications, Inc., 1948.
32 — Taton, René. **Histoire du Calcul.** Paris: Presses Universitaires de France, 1948.
33 — Vasconcellos, Fernando de Almeida. **História das Matemáticas na Antiguidade.** Paris-Lisboa: Aillaud e eBrtrand, 1925.
34 — Vera, Francisco. **Breve Historia de la Matemática.** Buenos Aires: Editorial Losada S.A., 1946.
35 — **La Matemática de los Musulmanos Espanoles.** Buenos Aires: Editorial Nova, 1947.
36 — Wheat, Harry Grove. **How to Teach Arithmetic.** Evanston, Illinois: Row, Peterson and Company, 1951.
37 — Wieleitner, H. **Historia de las Matemáticas.** Barcelona-Buenos Aires: Editorial Labor, S.A., 1932.

ÍNDICE

de Estudos Pedagógicos, como também do SENAC Nacional, vem oferecendo com grande êxito cursos de aperfeiçoamento a professôres primários e secundários.

Esta obra será muito útil às normalistas, bem como às professôras de curso primário, pois, encerra um grande cabedal de didática do notável mestre que é França Campos. Esperamos com êste lançamento ter contribuído de forma positiva para o enriquecimento da nossa cultura.

BRASIL
IOZON · EDITOR
IOZON · EDITOR
RIO

BRASIL
JOZON + EDITOR
JOZON + EDITOR
RIO