

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

Marcelo Marcel Cordova

**TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO NÃO-DIFERENCIÁVEL
PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DO
COMISSIONAMENTO DE UNIDADES GERADORAS
TERMELÉTRICAS**

Florianópolis

2014

Marcelo Marcel Cordova

**TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO NÃO-DIFERENCIÁVEL
PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DO
COMISSIONAMENTO DE UNIDADES GERADORAS
TERMELÉTRICAS**

Dissertação submetida ao Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
para a obtenção do Grau de Mestre
em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Erlon Cristian Fi-
nardi, D. Eng.

Coorientador: Wellington Luis de Oli-
veira, D. Sc.

Florianópolis

2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Cordova, Marcelo Marcel

Técnicas de otimização não-diferenciável para a resolução do problema do comissionamento de unidades geradoras termelétricas / Marcelo Marcel Cordova ; orientador, Erlon Cristian Finardi ; coorientador, Wellington Luis de Oliveira. - Florianópolis, SC, 2014.

153 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Inclui referências

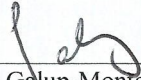
1. Engenharia Elétrica. 2. Otimização não-diferenciável. 3. Métodos de Feixes. 4. Relaxação Lagrangiana. 5. Problema do comissionamento de unidades geradoras termelétricas. I. Finardi, Erlon Cristian. II. Oliveira, Wellington Luis de. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

Marcelo Marcel Cordova

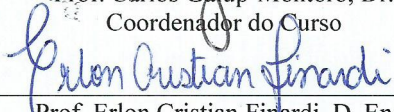
**TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO NÃO-DIFERENCIÁVEL PARA A
RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DO COMISSONAMENTO DE
UNIDADES GERADORAS TERMELÉTRICAS**

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Elétrica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Florianópolis, 04 de setembro de 2014.



Prof. Carlos Galup-Montoro, Dr.
Coordenador do Curso

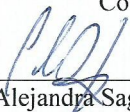


Prof. Erlon Cristian Finardi, D. Eng.
Orientador

Banca Examinadora:



Wellington Luis de Oliveira, D. Sc. – IMPA
Coorientador



Claudia Alejandra Sagastizábal, D. Habil. – IMPA



Prof. Fabrício Yutaka Kuwabata Takigawa, D. Eng. – IFSC



Raphael Eduardo Chagas Gonçalves, D. Eng. – Plan4

Como se esta grande cólera me tivesse limpo do mal, esvaziado da esperança, diante desta noite carregada de sinais e de estrelas, eu abria-me pela primeira vez à terna indiferença do mundo.

Albert Camus

Resumo

Um grande número de problemas relacionados com o planejamento e a operação de sistemas de energia elétrica resultam em modelos de otimização de grande escala, não-lineares, inteiro-mistos e, consequentemente, não-convexos. Devido à presença de diversas restrições que acoplam o problema, a Relaxação Lagrangiana surge como uma abordagem natural como metodologia de solução, pois permite a decomposição do problema em subproblemas menores e independentes entre si. A teoria da dualidade garante que a função dual oferece limites inferiores para o problema primal de minimização. Além disso, a solução do problema dual fornece o melhor limite inferior possível e um bom ponto de partida para a etapa de recuperação primal. Como o problema dual é convexo mas não-diferenciável, algoritmos especializados de otimização precisam ser empregados. Os Métodos de Feixes estão entre os mais eficientes desses algoritmos e são tipicamente utilizados quando a acurácia na solução e confiabilidade são uma preocupação. Nesta dissertação é realizada a análise comparativa de três variantes dos Métodos de Feixes para um problema de comissionamento de unidades geradoras termelétricas composto de 46 barras, 10 geradores e horizontes de planejamento de 24 a 168 horas. Resultados mostram que os Métodos de Feixes têm êxito na obtenção de uma boa solução para o problema dual. **Palavras-chave:** Otimização não-diferenciável. Métodos de Feixes. Relaxação Lagrangiana. Problema do comissionamento de unidades geradoras termelétricas.

Abstract

A large number of problems related to the planning and operation of electrical power systems result in optimization models which are large-scale, nonlinear, mixed-integer, and thus nonconvex. Due to the presence of multiple coupling constraints, Lagrangian Relaxation appears as a natural approach for dealing with this kind of problems: it allows decomposing the problem into smaller and independent subproblems. Duality theory says that the resulting dual optimization problem gives lower bounds for the considered primal minimization problem. Moreover, solving the dual problem provides the best possible lower bound and a good starting point for primal recovery. Since the dual problem is convex but nonsmooth, specialized optimization algorithms need to be employed. Bundle methods are among the most efficient of these methods, and are used when accuracy in the solution and reliability are a concern. We assess the performance of three Bundle Methods variants using a Thermal Unit Commitment problem composed of 46 buses, 10 thermal generating units and planning horizons ranging from 24 to 168 hours. Results show that Bundle Methods succeed in obtaining a good solution for the dual problem.

Keywords: Nonsmooth optimization. Bundle Methods. Lagrangian Relaxation. Thermal unit commitment problem.

Lista de Figuras

Figura 1	Função valor absoluto.....	32
Figura 2	Subdiferencial. Adaptado de [1, p. 128]	35
Figura 3	Método do Subgradiente aplicado ao UC simplificado.	36
Figura 4	Ilustração do Método de Planos Cortantes.....	38
Figura 5	Valor da função dual para o Método de Planos Cortantes.....	40
Figura 6	Convergência do Método de Planos Cortantes.	41
Figura 7	Comparação entre a função dual e a aproximação obtida pelo Método de Planos Cortantes.	41
Figura 8	Função dual nos pontos candidatos (em vermelho) e nos centros de estabilidade (em vermelho) para o Método de Feixes Proximal.	49
Figura 9	Testes de convergência para o Método de Feixes Proximal.....	50
Figura 10	Método de nível.....	63
Figura 11	Iteração Proximal e de Nível.	68
Figura 12	Custo de geração de uma unidade termelétrica típica.	76
Figura 13	Custo de geração linear por partes.	77
Figura 14	Sistema termelétrico.	92
Figura 15	Perfil da demanda.....	93
Figura 16	Função dual para Métodos de Feixes e decomposição com duplicação de variáveis.....	97
Figura 17	Função dual para Método de Planos Cortantes e decomposição com duplicação de variáveis.....	97

Figura 18	Brecha de dualidade para decomposição com duplicação de variáveis.	98
Figura 19	Função dual para Métodos de Feixes com relaxação das restrições de atendimento das barras com geração.	100
Figura 20	Função dual para Método de Planos Cortantes com relaxação ds restrições de atendimento das barras com geração. .	101
Figura 21	Perfis de desempenho para exemplo ilustrativo.	105
Figura 22	Perfis de desempenho com horizonte de 24 horas e custos lineares por partes.	107
Figura 23	Perfis de desempenho com horizonte de 24 horas e custos quadráticos.	107
Figura 24	Perfis de desempenho com horizonte de 168 horas e custos lineares por partes.	108
Figura 25	Valor da função dual para diferentes tamanhos máximos do feixe.	109
Figura 26	Número de linearizações ativas do feixe para o caso com $NP_{\max} = 500$	110
Figura 27	Tempo computacional da determinação do próximo iterado do MFDE com $NP_{\max} = 2000$	111
Figura 28	Tempo computacional da determinação do próximo iterado do MFDE com $NP_{\max} = 2000$ – primeiras 900 iterações.	112
Figura 29	Análise do ponto inicial para o MFDE.	113
Figura 30	Análise do limite inferior para o MFDE.	115
Figura 31	Análise do limite inferior para o Método de Nível.	116
Figura A.1	Valor da função dual para o problema do comissionamento de unidades termelétricas com modelagem simplificada. . .	144

Lista de Tabelas

Tabela 1	Funções lineares por partes.	96
Tabela 2	Desempenho dos métodos para decomposição com duplicação de variáveis.	99
Tabela 3	Desempenho dos métodos para decomposição com relaxação das restrições de atendimento das barras com geração.	103
Tabela 4	Exemplo ilustrativo para perfis de desempenho.	105
Tabela 5	Tempo total (em minutos) para resolução dos casos com variações nas demandas.	108
Tabela 6	Comparação do número de iterações entre o caso base e com ponto de partida definido pelo problema convexificado.	114
Tabela 7	Limite inferior para o Método de Feixes Duplamente Estabilizado.	116
Tabela 8	Teste de parada para o Método de Feixes Proximal.	117
Tabela 9	Teste de parada para o Método de Nível.	118
Tabela 10	Teste de parada para o MFDE.	118
Tabela 11	Número de linearizações da função de custo.	119
Tabela 12	Representação do custo de geração.	120
Tabela 13	Comparação do número de iterações e dos tempos computacionais para diferentes modelagens dos custos de geração.	121
Tabela A.1	Características das unidades geradoras.	143
Tabela A.2	Solução do problema do comissionamento de unidades termelétricas com modelagem simplificada.	144
Tabela B.1	Características das unidades geradoras.	149
Tabela B.2	Características das linhas de transmissão.	150

Tabela B.2	Características das linhas de transmissão.....	151
Tabela B.2	Características das linhas de transmissão.....	152
Tabela B.3	Fatores multiplicadores das demandas das barras.....	153

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CUG	Comissionamento de unidades geradoras	19
RL	Relaxação Lagrangiana.....	20
ONS	Operador Nacional do Sistema Elétrico.....	24
LP	Problema de Programação Linear	38
QP	Problema de programação quadrática	44
MFDE	Método de Feixes Duplamente Estabilizado.....	67
MIQP	Problema de programação quadrática inteira-mista	87
MILP	Problema de programação linear inteira-mista	87

Sumário

1 INTRODUÇÃO	19
1.1 RELAXAÇÃO LAGRANGIANA, DECOMPONIBILIDADE E NÃO-DIFERENCIABILIDADE	20
1.2 PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA	23
1.2.1 Revisão bibliográfica	25
1.3 CONTRIBUIÇÕES E OBJETIVOS	27
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO	28
2 TÓPICOS INTRODUTÓRIOS EM OTIMIZAÇÃO NÃO- DIFERENCIÁVEL	31
2.1 MÉTODO DO SUBGRADIENTE	34
2.2 MÉTODO DE PLANOS CORTANTES	37
2.3 MÉTODOS DE FEIXES	42
2.4 CONCLUSÕES	50
3 VARIANTES DO MÉTODO DE FEIXES UTILIZA- DAS NO TRABALHO	51
3.1 MÉTODO DE FEIXES PROXIMAL	51
3.1.1 Formulação dual	55
3.1.2 Teste de parada	59
3.2 MÉTODO DE NÍVEL	61
3.2.1 Formulação dual	67
3.3 MÉTODO DE FEIXES DUPLAMENTE ESTABILIZADO .	67
3.3.1 Formulação dual	70
3.4 CONCLUSÕES	71
4 COMISSIONAMENTO DE UNIDADES TERMELÉ- TRICAS	73
4.1 REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA TERMELÉTRICO ...	73
4.1.1 Rede de transmissão	73
4.1.2 Atendimento à demanda	74
4.1.3 Limites operativos	75

4.2 UNIDADES TERMELÉTRICAS	76
4.2.1 Custo de geração	76
4.2.2 Custo de partida	80
4.2.3 Rampas de incremento/decremento de geração.....	80
4.2.4 Tempos mínimos de permanência em/fora de operação	81
4.2.5 Limites operativos	82
4.3 MODELAGEM DO PROBLEMA DO COMISSIONAMENTO DE UNIDADES TERMELÉTRICAS	82
4.4 RELAXAÇÃO LAGRANGIANA APLICADA AO PROBLEMA DO COMISSIONAMENTO DE UNIDADES TERMELÉTRICAS	84
4.4.1 Duplicação de variáveis	85
4.4.2 Relaxação das restrições de atendimento à demanda das barras com geração	88
4.5 CONCLUSÕES.....	89
5 RESULTADOS COMPUTACIONAIS	91
5.1 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	91
5.2 SISTEMA TESTE	92
5.3 CALIBRAÇÃO DOS MÉTODOS	93
5.4 ESQUEMAS DE DECOMPOSIÇÃO	95
5.4.1 Duplicação de variáveis	96
5.4.2 Relaxação das restrições de atendimento à demanda das barras com geração	98
5.5 PERFIS DE DESEMPENHO	102
5.6 GERENCIAMENTO DO FEIXE	109
5.7 DETERMINAÇÃO DO PRÓXIMO ITERADO	110
5.8 PONTO INICIAL.....	112
5.9 LIMITE INFERIOR	114
5.10 TOLERÂNCIA PARA OS TESTES DE PARADA – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	117
5.11 CUSTOS DE GERAÇÃO	118
6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRA- BALHOS FUTUROS	123
6.1 DIREÇÕES FUTURAS	126

REFERÊNCIAS	129
APÊNDICE A – Comissionamento de Unidades Termelétricas	
– Modelagem Simplificada	141
APÊNDICE B – Dados do sistema teste	150

1 INTRODUÇÃO

O comissionamento de unidades geradoras (CUG) é uma tarefa crucial para companhias geradoras de energia e operadores de um sistema de energia elétrica. Este problema tem como objetivo determinar, para um dado conjunto de unidades geradoras (que podem ser termelétricas, hidrelétricas, nucleares, eólicas, entre outras), quais serão utilizadas para satisfazer o atendimento à demanda do sistema com mínimo custo e confiabilidade ao longo de um horizonte de tempo [2], [3].

Matematicamente, o problema do CUG pode ser representado, de forma genérica, como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{p \in \mathfrak{R}^m} \sum_i c_i(p_i) \\ \text{s.a:} \quad \sum_i h_i(p_i) = d \\ p_i \in P^i \subseteq \mathfrak{R}^{m_i} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Utilizando i como índice para as unidades geradoras, o custo de geração da unidade i é $c_i(p_i)$, em que as variáveis de decisão p_i representam as potências de geração das unidades. A restrição $\sum_i h_i(p_i) = d$ representa o acoplamento entre as variáveis de decisão (e.g. atendimento à demanda, equações de balanço hídrico, requerimento de reserva, entre outros [3]).

Para sistemas reais, este problema é de grande porte, não-linear e inteiro misto. Devido a essas características, resolvê-lo pode demandar muito tempo e esforço computacional. No entanto, estratégias de decomposição podem ser empregadas para facilitar sua resolução. Como será detalhado adiante, no problema do comissionamento de unidades geradoras uma das abordagens de maior sucesso emprega a Relaxação Lagrangiana (RL) [4], [5], [6], em são relaxadas as restrições que acoplam o problema. Na RL, a resolução do problema (1.1), chamado de problema primal, é substituída pela resolução de seu problema dual, que pode ser

escrito como:

$$\min_{x \in \mathfrak{R}^n} f(x), \quad (1.2)$$

em que $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, é uma função contínua, convexa mas tipicamente não-diferenciável. A função f é conhecida como função dual do problema (1.1) multiplicada por (-1) . Na Seção 1.1 são apresentados maiores detalhes sobre essa estratégia.

O foco deste trabalho consiste em resolver o problema do comissionamento de unidades geradoras termelétricas através de sua formulação dual (1.2) utilizando métodos de otimização não-diferenciável, com ênfase em Métodos de Feixes.

A aplicação da RL ao problema (1.1) será apresentada na Seção 1.1, assim como uma ideia introdutória sobre otimização não-diferenciável. O planejamento da operação de sistemas de energia será abordado na Seção 1.2, em que será incluída uma revisão bibliográfica. Por fim, as contribuições e a estrutura do trabalho serão apresentadas nas Seções 1.3 e 1.4, respectivamente.

Será utilizada a seguinte notação ao longo deste trabalho: para dois vetores $x, y \in \mathfrak{R}^n$, $\langle x, y \rangle$ é o produto interno usual e $|\cdot|$ é a norma euclidiana, ou seja, $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

1.1 RELAXAÇÃO LAGRANGIANA, DECOMPONIBILIDADE E NÃO-DIFERENCIABILIDADE

Uma estratégia interessante para decompor o problema (1.1) consiste em dualizar as restrições $\sum_i h_i(p_i) - d = 0$, as quais acoplam o problema. Desta forma se obtém um conjunto de subproblemas de menor porte e independentes. Para tal fim, considere a função lagrangiana associada a (1.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p, x) &= \sum_i c_i(p_i) + \langle x, \sum_i h_i(p_i) - d \rangle \\ &= \sum_i [c_i(p_i) + \langle x, \sum_i h_i(p_i) \rangle] - \langle x, d \rangle. \end{aligned}$$

A função dual $\Theta(x)$, então, é dada por:

$$\begin{aligned}
 \Theta(x) &= \min_{p \in P} \mathcal{L}(p, x) \\
 &= \min_{p \in P} \sum_i [c_i(p_i) + \langle x, \sum_i h_i(p_i) \rangle] - \langle x, d \rangle \\
 &= \sum_i \min_{p_i \in P_i} [c_i(p_i) + \langle x, \sum_i h_i(p_i) \rangle] - \langle x, d \rangle \\
 &= \sum_i \theta_i(x) - \langle x, d \rangle. \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

Na representação acima, $\theta_i(x)$ corresponde ao subproblema relacionado à unidade geradora i^1 . Esses subproblemas podem ter características diferentes entre si. Além disso, a função dual é côncava, independente dos subproblemas, e o máximo da função dual $\Theta(x)$ sobre $x \in \mathfrak{R}^n$ fornece um limite inferior para o valor ótimo do problema primal, (1.1), [7].

O problema dual é, então, definido como:

$$\max_{x \in \mathfrak{R}^n} \Theta(x), \quad \text{com } \Theta(x) \text{ dado por (1.3)}. \tag{1.4}$$

Fazendo $f(x) = -\Theta(x)$ se obtém o problema dual na forma apresentada em (1.2).

É importante frisar que a solução proveniente do problema dual geralmente não é viável para o problema primal. Isto ocorre devido à relaxação das restrições. Uma etapa de Recuperação Primal, [8], [9], pode ser aplicada em seguida, de forma a obter uma solução viável. Essa etapa é tipicamente baseada em heurísticas e não será abordada neste trabalho.

O problema dual apresenta algumas características importantes. Como a função objetivo f do problema (1.2) é dada por $f(x) = -\Theta(x)$, a decomponibilidade fica evidenciada em (1.3). Já a convexidade decorre do fato que a função dual é composta pelo máximo de um conjunto de

¹No caso de usinas hidrelétricas, ao se relaxar apenas as restrições de atendimento à demanda e de reserva girante, a decomposição seria por usina, e não por unidade geradora.

funções afins, [7], e se utilizará $-\Theta(x)$. Por fim, a não-diferenciabilidade aparece quando, para um dado valor da função dual estão associadas múltiplas soluções primais. De maneira sucinta, a não-diferenciabilidade estará garantidamente ausente se cada subproblema possui uma única solução. Isto ocorrerá se a função objetivo do problema primal for estritamente convexa e as restrições formarem um conjunto convexo, [10].

Algoritmos especializados em problemas de otimização diferenciável tipicamente utilizam tanto informações de primeira ordem (dadas pelo gradiente da função objetivo e, caso haja restrições, pela matriz jacobiana) quanto informações de segunda ordem (dadas pela matriz hessiana, ou alguma aproximação). Para problemas de otimização não-diferenciável, a quantidade de informações disponíveis sobre a função tipicamente é menor, devido ao fato de que a função não tem derivadas de primeira ordem, o que normalmente se reflete na taxa de convergência.

Neste trabalho considera-se que somente informações de primeira ordem (dadas pelo valor funcional e subgradiente) estarão disponíveis sobre a função f . O conjunto dessas informações será chamado daqui em diante de feixe. No Capítulo 2 serão apresentadas três famílias de métodos de otimização que se baseiam nesse feixe: Método do Subgradiente, Método de Planos Cortantes e Métodos de Feixes. Enquanto o Método do Subgradiente utiliza um feixe com tamanho 1 (ou seja, somente as informações da iteração anterior) e o Método de Planos Cortantes considera todas as informações coletadas ao longo das iterações, o Método de Feixes permite maior flexibilidade nas informações a serem utilizadas.

O Método de Feixes é atualmente considerado o estado da arte para problemas de otimização não-diferenciável e conta com duas variantes bem conhecidas: o Método de Feixes Proximal, [11] e o Método de Nível, [12]. No Capítulo 3 serão detalhadas essas duas variantes, além do Método de Feixes Duplamente estabilizado, [13], que combina as duas variantes citadas.

1.2 PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA

O planejamento da operação energética de um sistema de energia elétrica é, usualmente, uma tarefa de grande complexidade. Devido ao porte do problema, é necessário dividi-lo em diferentes etapas, cada uma com características distintas de modelagem e de horizonte de planejamento, [14]. No Brasil, essa divisão é feita, basicamente, de acordo com o horizonte de planejamento:

1. planejamento de médio prazo, [15], [16]. Esta etapa, cujo horizonte é de cinco anos, com base mensal, tem como principais resultados as decisões energéticas dos subsistemas equivalentes [17] e a função de custo futuro, utilizada como dado de entrada no planejamento de curto prazo. A ferramenta computacional oficialmente utilizada é o modelo NEWAVE, [18]. Nesta etapa, a principal característica a ser modelada é a incerteza nas vazões afluentes;
2. planejamento de curto prazo, [19], [20]. Com horizonte de dois meses e discretização semanal no primeiro mês, conta com uma representação individualizada das usinas hidrelétricas do sistema. Tem como principais saídas os intercâmbios entre sistemas e os níveis de geração das usinas. A ferramenta utilizada oficialmente no setor é o modelo DECOMP, [21];
3. programação diária da operação eletroenergética, [22], [23], [24]. Com horizonte de uma semana, e discretização de trinta minutos para o dia que antecede a operação em tempo real, tem como objetivo calcular o despacho de geração para cada unidade do sistema a fim de garantir a otimização dos recursos energéticos e a segurança operacional do sistema. Esta etapa ainda não conta com um modelo de otimização consolidado no setor, sendo que o Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) elabora alguns estudos baseados em diretrizes

energéticas fornecidas pelo modelo DECOMP, tais como volumes meta ao final de uma semana, geração termelétrica e intercâmbios entre subsistemas.

Dentre as etapas descritas, é na programação diária onde é realizado o comissionamento das unidades geradoras, em que se decide, para cada estágio de tempo do dia seguinte, se a unidade estará em operação e, em caso positivo, quanto deverá gerar. Para que tal tarefa possa ser posta em prática, é necessária uma detalhada modelagem dos componentes do sistema. Nos estudos referentes ao planejamento de mais longo prazo, parte desse detalhamento tem que ser deixado de lado para que outras características, como a incerteza de alguns dados de entrada, possam ser modeladas de maneira adequada.

Com relação aos elementos do sistema, a modelagem de comportamentos acoplados no tempo (e.g. máximo incremento/decremento de potência, mínimos tempos em operação e fora de operação, entre outros) e no espaço (e.g. representação de cascatas de usinas hidrelétricas, intercâmbios entre subsistemas) são essenciais, assim como formas de quantificar custos de operação – combustível de unidades termelétricas (geralmente representados através de funções não-lineares), custo de partida, entre outros, [25].

Dada a necessidade desse alto detalhamento na modelagem do sistema, tem-se como resultado um problema de otimização não-linear, combinatório e de grande porte. O problema é combinatório devido à inclusão de variáveis binárias para estabelecer o estado de cada unidade geradora: 0 se desligada, 1 se ligada.

Dependendo do tamanho do sistema (e.g. número de barras do sistema de transmissão, número de geradores) e do horizonte de tempo, resolver esse problema pode ser uma tarefa computacionalmente muito complexa. Logo, a RL pode ser utilizada, como apresentado na Seção 1.1.

Na próxima seção uma revisão bibliográfica será apresentada sobre métodos de otimização não-diferencial aplicados ao problema do comissionamento de unidades geradoras, além de um breve resumo sobre

outras abordagens para esse problema.

1.2.1 Revisão bibliográfica

Uma das primeiras aplicações da RL no comissionamento de unidades termelétricas aparece em [26]. Os autores empregam uma modelagem simplificada do problema, contendo apenas restrições de atendimento à demanda e reserva girante (potência adicional disponível no sistema através do aumento da potência de saída dos geradores conectados ao mesmo), e custos lineares por partes. Os subproblemas das unidades geradoras são resolvidos através de programação dinâmica. O Método do Subgradiente é utilizado para resolver o problema dual. Em seguida é utilizado um algoritmo de Branch-and-bound, [27], para a obtenção de uma solução primal viável.

Em [28] os autores propõem uma abordagem para o problema do CUG baseada em três etapas: na primeira resolve-se o problema dual utilizando o Método do Subgradiente, na segunda encontra-se uma solução que atenda à restrição de reserva girante, e na terceira é realizado um despacho econômico. A modelagem empregada considera custos quadráticos e restrições de mínimos tempos em operação e fora de operação.

A estratégia de solução baseada em RL é válida também para sistemas hidrotérmicos. Em [29], Redondo e Conejo utilizam essa metodologia, em que o problema dual é resolvido através do Método de Planos Cortantes.

Nas últimas duas décadas, grande parte das abordagens utilizando RL utilizam algum Método de Feixes para encontrar a solução do problema dual, [3], [30].

Lemaréchal et al [30] empregam o Método de Feixes Proximal em um problema de comissionamento de um parque hidrotérmico utilizando dois esquemas de decomposição: espacial e espaço-temporal. Nesse trabalho não são feitas considerações sobre a obtenção de uma solução viável para o problema primal.

Bacaud et al [31] resolvem um problema similar, mas consideram incerteza na demanda e estendem o horizonte de tempo em até um mês, e comparam diferentes estratégias de desagregação do feixe. A ideia da desagregação consiste em incluir mais informações vindas dos subproblemas (1.3), com o intuito de acelerar a convergência do Método de Feixes. Os autores também propõem um condicionador para o problema dual.

Borghetti et al [32] também empregam um Método de Feixes Desagregado, e combinam uma estratégia de partida quente que reduz drasticamente o número de iterações.

Belloni et al [8] aplicam RL em um sistema hidrotérmico, utilizando duplicação de variáveis. O problema dual é resolvido através do Método de Feixes Proximal. A etapa de recuperação primal é realizada com a estratégia do Lagrangiano Aumentado Inexato [33].

Mezger e de Almeida [34] utilizam RL em um problema comissionamento de um parque hidrotérmico com presença de transações bilaterais em um mercado de energia elétrica. O Lagrangiano Aumentado [35] é utilizado na definição do problema dual, que é linearizado a fim de manter a separabilidade do problema. O Método de Feixes Proximal é utilizado para resolver o problema dual.

Em [36], Takigawa et al utilizam RL e Lagrangiano Aumentado no problema do comissionamento de um parque hidrotérmico. A modelagem das usinas hidrelétricas contém não-linearidades e são incluídas restrições para a rede. O problema dual é resolvido utilizando o Método de Feixes Proximal. Na sequência é aplicada uma recuperação primal utilizando o Princípio do Problema Auxiliar.

Em [37], Zaourar e Malick utilizam um oráculo inexato para a resolução dos subproblemas resultantes da decomposição por RL, obtendo uma solução inexata para o problema dual. Dada a dimensão do problema original, da ordem de 10^6 variáveis e 10^6 restrições, não é possível resolver os subproblemas de forma exata em um tempo aceitável.

Finardi e Scuzziato [38] utilizam o Método de Feixes Proximal no comissionamento de um parque puramente hidrelétrico e empregam duas

estratégias na definição do problema dual. Uma etapa de recuperação primal baseada na Lagrangeana Aumentada é aplicada na sequência.

Apesar do foco deste trabalho ser a utilização da RL no problema do comissionamento de unidades geradoras, diversas outras metodologias têm sido desenvolvidas para resolver esse problema. Entre as principais, encontram-se: Enumeração exaustiva, [2], [39], [40], Lista de prioridade, [41], [42], [43], [44], Busca tabu, [45], [46], [47], [48], *Branch-and-bound*, [49], [50], [51], Sistemas *fuzzy*, [52], [53], [54], Redes neurais artificiais, [55], [56], [57], Algoritmos genéticos, [58], [59] e Programação dinâmica, [60], [61], [62], [63].

1.3 CONTRIBUIÇÕES E OBJETIVOS

A RL como técnica de decomposição é largamente utilizada em diversos ramos, apesar da ênfase na revisão bibliográfica ter sido no problema do CUG. Como se pôde observar na seção anterior, quando o Método de Feixes é escolhido, a variante Proximal parece ser a favorita. No entanto, outras variantes desse método existem. Este trabalho, portanto, tem como foco a utilização de três variantes do Método de Feixes – Método de Feixes Proximal, Método de Nível e Método de Feixes Duplamente Estabilizado, – além do Método de Planos Cortantes, na resolução do problema citado.

Devido à complexidade dos métodos acima, diversos parâmetros precisam ser definidos, e sabe-se que uma escolha adequada pode contribuir drasticamente para o bom desempenho do algoritmo. Desta forma, este trabalho tem como principal contribuição uma análise comparativa entre diferentes variantes do Método de Feixes e do Método de Planos Cortantes, assim como comparações entre os parâmetros dos métodos.

Para esse fim, os objetivos específicos do trabalho são:

- implementação computacional dos seguintes métodos de otimização não-diferenciável: Método do Subgradiente, Método de Planos Cortantes, Método de Feixes Proximal, Método de Nível e Método de Feixes Duplamente Estabilizado;

- análise e comparação do desempenho computacional para diferentes escolhas dos parâmetros dos métodos de otimização não-diferenciável utilizados;
- implementação de dois esquemas de decomposição para a modelagem do problema do comissionamento de unidades geradoras termelétricas: uma abordagem utilizando a duplicação de variáveis e outra com a relaxação das restrições de atendimento à demanda das barras com geração.

Com relação ao primeiro item, a implementação é realizada de maneira genérica, ou seja, apesar de os métodos serem utilizados para a resolução do problema do CUG, os códigos-fonte desenvolvidos podem ser utilizados para qualquer problema de otimização não-diferenciável irrestrito, desde que um oráculo esteja disponível.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 são apresentados conceitos introdutórios de otimização não-diferenciável, como o subgradiente e os métodos de otimização citados anteriormente: Método do Subgradiente, Método de Planos Cortantes e Método de Feixes. Também é apresentado como exemplo uma modelagem simplificada do comissionamento de unidades termelétricas.

O Capítulo 3 tem como foco as variantes do Método de Feixes utilizadas neste trabalho. Nesse capítulo são apresentados detalhes de cada uma das três variantes escolhidas, assim como o desenvolvimento de suas formulações duais, cujas vantagens são descritas.

A modelagem completa do problema do comissionamento de unidades geradoras utilizada neste trabalho é apresentada no Capítulo 4. Com essa modelagem, é apresentado o modelo matemático completo do problema a ser resolvido e, em seguida, são detalhados dois esquemas de decomposição do problema baseados na RL.

O Capítulo 5 contém, primeiramente, o sistema-teste utilizado

neste trabalho e uma seção sobre calibração dos Métodos de Feixes. Em seguida é apresentado o caso base e, então, são feitas comparações variando os métodos de otimização, os esquemas de decomposição, a representação das funções de custo das unidades geradoras, entre outros. Casos com horizontes de planejamento mais longos são analisados na sequência, assim como uma bateria de casos com variações na demanda.

Conclusões e recomendações para trabalhos futuros são apresentados no Capítulo 6.

2 TÓPICOS INTRODUTÓRIOS EM OTIMIZAÇÃO NÃO-DIFERENCIÁVEL

Conforme citado na Seção 1.1, ao utilizar a estratégia da RL na solução de um problema de otimização, frequentemente obtemos um problema dual não-diferenciável. Este capítulo, portanto, tem como objetivo abordar alguns tópicos em otimização não-diferenciável. Primeiramente as ideias serão apresentadas de forma genérica, tais como os conceitos de subdiferencial e subgradiente, bem como alguns métodos de otimização. Um problema teste baseado em uma modelagem simplificada do problema do comissionamento de unidades termelétricas, detalhado no Apêndice A, será utilizado como exemplo numérico para ilustrar os métodos de otimização.

Como apresentado no capítulo introdutório, o problema de interesse deste trabalho assume a forma:

$$\min_{x \in \mathfrak{R}^n} f(x), \quad (2.1)$$

em que $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ é contínua, convexa mas não-diferenciável.

Uma função é convexa se a seguinte condição é atendida: [1, p. 25]

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \text{ para todo } x, y, \text{ e } \alpha \in (0, 1).$$

Com relação à diferenciabilidade, uma função f é não-diferenciável quando o gradiente, $\nabla f(x)$, não está definido em todo o seu domínio. Um exemplo simples é $f(x) = |x|$, cujo gráfico é apresentado na Figura 1.

O gradiente desta função é dado por:

$$\nabla f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \\ \text{não definido,} & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

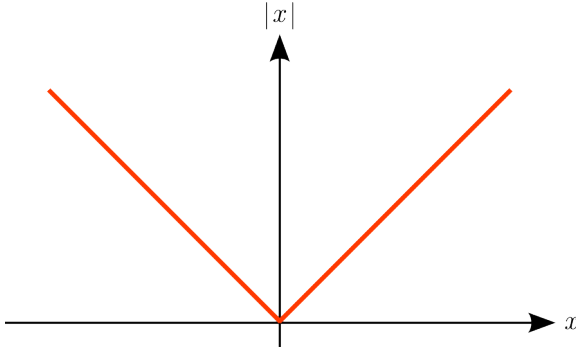


Figura 1 – Função valor absoluto.

Métodos de otimização especializados para funções diferenciáveis (e.g. Gradiente, Newton, Quasi-Newton, Gradiente Conjugado) geralmente utilizam o gradiente e, quando possível, a matriz hessiana para obter uma nova direção de busca e, principalmente, para verificar se o ponto atual é um candidato à mínimo, [64]. Pela condição de otimalidade de primeira ordem, um ponto x^* é estacionário se

$$\nabla f(x^*) = [0 \cdots 0]^\top. \quad (2.3)$$

Conforme pode ser visto na Figura 1, para a função $f(x) = |x|$ o gradiente não está definido em seu (único) ponto estacionário, que é seu mínimo. Logo, mesmo conhecendo seu gradiente em todo o domínio, exceto em 0, não se pode garantir a condição (2.3). Ou seja, este tipo de informação não pode ser utilizada como critério de parada, conforme é usualmente feito no caso diferenciável. Ainda mais importante, tipicamente o ponto ótimo de funções não-diferenciáveis não tem gradiente definido, [1].

Para contornar tal dificuldade e propor métodos computacionais implementáveis que possam ser utilizados com tais funções convexas, é necessário introduzir o conceito de subdiferencial de uma função convexa

[65]:

$$\partial f(x) := \{g \in \mathfrak{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle g, y - x \rangle \text{ para todo } y \in \mathfrak{R}^n\}, \quad (2.4)$$

em que cada elemento $g \in \partial f(x)$ é conhecido como um subgradiente de f .

Para uma função diferenciável, $\partial f(x)$ reduz-se ao seu gradiente, ou seja, g é único e igual a $\nabla f(x)$.

Para a função $f(x) = |x|$, o subdiferencial em $x = 0$ pode ser obtido de forma explícita:

$$\partial f(0) = [-1, 1]. \quad (2.5)$$

Uma condição necessária e suficiente para que um ponto x^* seja solução de um problema de otimização convexa irrestrito é $0 \in \partial f(x^*)$. No entanto, do ponto de vista prático, raramente tem-se conhecimento de todo o subdiferencial da função. Usualmente só está disponível um único subgradiente $g \in \partial f(x)$. Portanto, utilizar o subgradiente em um ponto como critério de parada não funciona na prática. Diferentes critérios de convergência devem ser adotados, como será mostrado nas próximas seções.

Neste trabalho será considerado que há um oráculo, ou caixa-preta, que fornece, para um dado ponto x , o valor da função $f(x)$ e um subgradiente $g \in \partial f(x)$, ambos de forma exata.

De forma genérica, tais métodos de otimização se encaixam na estrutura apresentada no Algoritmo 1.

De forma simplificada, os métodos a serem apresentados neste trabalho diferem entre si na forma de definir o próximo iterado, passo 6 e no teste de parada, passo 7. Nas próximas seções serão apresentadas as três principais classes de algoritmos para otimização não-diferenciável, de modo a detalhar o Algoritmo 1.

Algoritmo 1 Pseudocódigo para métodos de otimização não-diferenciável

- 1: Parâmetros: Número máximo de iterações k_{max} .
 - 2: Entrada: Ponto inicial x_0 .
 - 3: Faça $k \leftarrow 1$, $x_k \leftarrow x_0$.
 - 4: **Enquanto** $k < k_{max}$,
 - 5: Chame o oráculo para obter $f(x_k)$ e $g_k \in \partial f(x_k)$;
 - 6: Defina o próximo iterado, x_{k+1} ;
 - 7: Aplique algum teste de parada;
 - 8: **Se** o teste de parada foi satisfeito **então**
 - 9: Pare com o candidato a solução x_k .
 - 10: **Senão**
 - 11: Faça $k \leftarrow k + 1$ e retorne para o passo 4.
-

2.1 MÉTODO DO SUBGRADIENTE

Um método de otimização não-diferenciável clássico é o Método do Subgradiente, [66]. Como o nome sugere, é baseado no Método do Gradiente, [1].

Neste método, o próximo iterado é dado por:

$$x_{k+1} = x_k - t_k \frac{g_k}{|g_k|}, \quad (2.6)$$

em que $t_k > 0$ é um tamanho de passo.

Alguns pontos merecem destaque com relação ao Método do Subgradiente:

- enquanto no Método do Gradiente $-\nabla f(x_k)$ corresponde à direção de máxima descida no ponto x_k , para uma função não-diferenciável a direção $-g_k$ não garante ser uma direção de descida para o método, i.e., pode não existir $t_k > 0$ tal que $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. Como exemplo, na Figura 2 são apresentadas as curvas de nível da função $f(x) = |x_1| + 2|x_2|$ e o subdiferencial no ponto x_k . A direção escolhida g_k é tal que $-g_k \in \partial f(x)$ mas não é de descida. Neste caso, para garantir que uma direção seja de descida é necessário que esta forme

um ângulo obtuso com todo o subdiferencial, [1]. Ou seja, conhecendo-se apenas um subgradiente não é possível garantir tal propriedade;

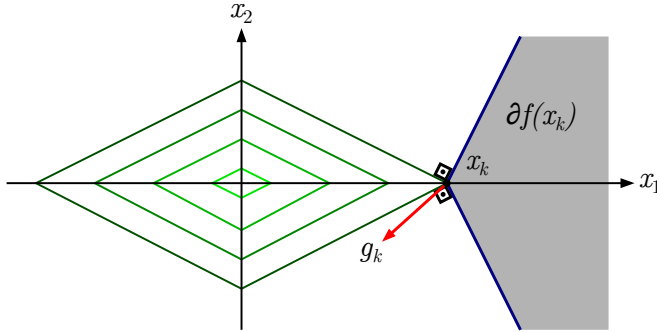


Figura 2 – Subdiferencial. Adaptado de [1, p. 128]

- algumas escolhas de tamanho de passo garantem a convergência teórica para o mínimo da função. O exemplo mais simples é $t_k = \alpha/k$, com $\alpha > 0$;
- critérios de parada são uma dificuldade deste método. Dada a pequena quantidade de informação sobre a função, não é possível garantir que um dado ponto seja um minimizador da função. Na prática, pode-se parar o método com base no número máximo de iterações ou utilizando algum critério de estabilização do valor da função objetivo, por exemplo.

Considerando os pontos mencionados, o Algoritmo 1 pode ser apresentado em uma forma implementável para o Método do Subgradiente, conforme mostrado no Algoritmo 2, a seguir.

Apesar da simplicidade de implementação e do baixo custo por iteração deste método, a convergência (quando ocorre) é muito lenta.

Para o problema-teste apresentado no Apêndice A os seguintes parâmetros são utilizados: $\alpha = 5$, $k_{max} = 500$ e $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^2$. O valor da função dual ao longo das iterações é apresentado na Figura 3. Sem

Algoritmo 2 Método do Subgradiente

-
- 1: Parâmetros: k_{max} , α
 - 2: Faça $k \leftarrow 1$, $x_k \leftarrow x_0$.
 - 3: **Enquanto** $k < k_{max}$,
 - 4: Chame o oráculo para obter $f(x_k)$ e $g_k \in \partial f(x_k)$;
 - 5: Defina uma direção: $d_k = \frac{g_k}{|g_k|}$;
 - 6: Defina o próximo iterado: $x_{k+1} = x_k - (\alpha/k)d_k$;
 - 7: Aplique alguma heurística para o teste de convergência. Por exemplo, analisando a estabilidade do valor de $f(x)$ nas últimas iterações;
 - 8: **Se** convergiu **então**
 - 9: Pare com o candidato a solução x_k .
 - 10: **Senão**
 - 11: Faça $k \leftarrow k + 1$ e retorne para o passo 3.
-

um critério de parada implementado, o algoritmo foi executado até atingir o número máximo de iterações.

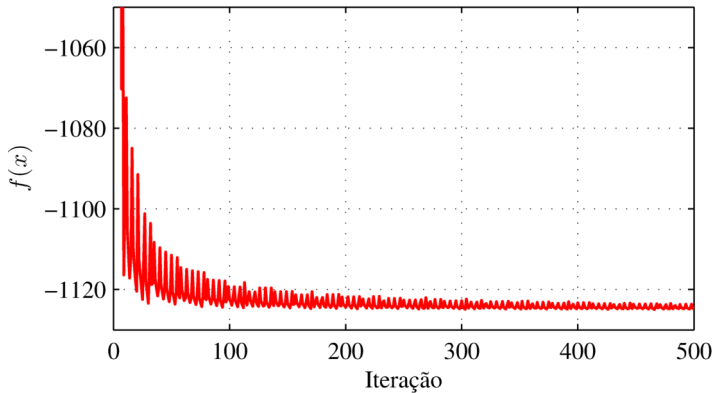


Figura 3 – Método do Subgradiente aplicado ao UC simplificado.

Observa-se que, apesar de a solução estar convergindo para o ponto ótimo $f(x^*) = -1125$, o efeito zigzag aparece ao longo de todas as iterações e o ponto ótimo não é alcançado ao final do processo iterativo.

2.2 MÉTODO DE PLANOS CORTANTES

No Método de Planos Cortantes, [67],[68], se constrói, ao longo das iterações, um modelo \check{f}_k convexo que aproxima inferiormente a função objetivo f . Ou seja, é um método com “memória”, pois utiliza informações passadas na construção do modelo. A ideia geral deste método consiste em obter uma linearização da função objetivo em cada ponto visitado pelo método. Para um dado ponto x_k , com a informação fornecida pelo oráculo, a linearização é dada por:

$$\bar{f}_k(x) = f(x_k) + \langle g_k, x - x_k \rangle. \quad (2.7)$$

Considerando que f é convexa, tem-se que

$$\bar{f}_k(x) \leq f(x) \text{ para todo } x \in \mathfrak{R}^n. \quad (2.8)$$

Utilizando as informações acumuladas ao longo das iterações, o modelo de planos cortantes de f , definido por um conjunto de linearizações $J_k = \{1, \dots, k\}$, é dado por:

$$\check{f}_k(x) = \max_{j \in J_k} \{ \bar{f}_j(x) \} \quad (2.9)$$

Dada a propriedade (2.8), verifica-se que \check{f}_k aproxima f inferiormente.

Na Figura 4 é apresentado como exemplo uma função e seu modelo de planos cortantes, composto por duas linearizações. Também são incluídos o próximo iterado, x_3 , e o decréscimo predito δ_3 , definido como a diferença entre o valor da função e o modelo nesse novo ponto.

O próximo iterado para o Método de Planos Cortantes é dado por:

$$x_{k+1} = \arg \min \left\{ \check{f}_k(x) : x \in \mathfrak{R}^n \right\} \quad (2.10)$$

Utilizando uma variável auxiliar r , o próximo iterado pode ser determinado através da resolução do seguinte problema de programação

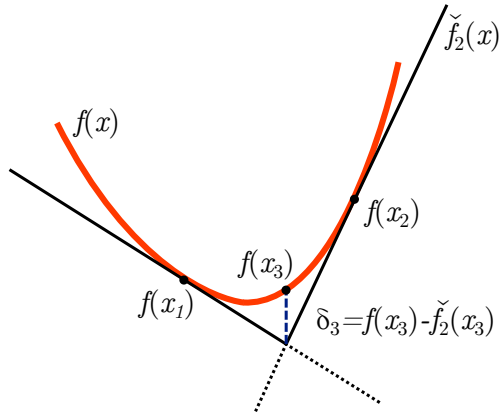


Figura 4 – Ilustração do Método de Planos Cortantes.

linear (LP):

$$\begin{cases} \min_{x,r} & r \\ \text{s.a.} & f(x_j) + \langle g_j, x - x_j \rangle \leq r, \quad j \in \{1, \dots, k\} \\ & x \in X, r \in \mathfrak{R}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Seguem alguns comentários sobre o Método de Planos Cortantes:

- assim como no Método do Subgradiente, não se garante que $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, ou seja, este método não é de descida, [1]. Por exemplo, na Figura 4, $f(x_2) > f(x_1)$;
- o Método de Planos Cortantes só pode ser utilizado se o conjunto viável X for compacto. Por exemplo, se $X = \mathfrak{R}^n$, na primeira iteração o próximo iterado irá para ∞ (ou $-\infty$, dependendo de g_1). Na RL, o conjunto viável do problema dual não é compacto. Logo, é necessário utilizar limites inferiores e superiores artificiais ou sortear alguns pontos de antemão para formar um modelo \tilde{f} que não seja ilimitado inferiormente, [69, p. 358];
- este método tem um custo computacional por iteração mais

elevado que o Método do Subgradiente, visto que é necessário resolver um LP a cada iteração;

- além disso, o custo computacional aumenta ao longo das iterações, pois uma nova restrição é acrescentada após cada chamada ao oráculo;
- ao contrário do Método do Subgradiente, este método dispõe de um critério de parada implementável, dado por $\delta_{k+1} = f(x_{k+1}) - \check{f}_k(x_{k+1})$. Dado que f é convexa, δ_{k+1} será sempre não-negativo.

Utilizando a formulação (2.11) para o próximo iterado e as considerações anteriores, pode-se aprimorar o Algoritmo 1 para o Método de Planos Cortantes, conforme detalhado no Algoritmo 3.

Algoritmo 3 Método de Planos Cortantes

- 1: Parâmetros: k_{max} , tol
 - 2: Entrada: x_0
 - 3: Faça $k \leftarrow 1$, $x_k \leftarrow x_0$.
 - 4: **Enquanto** $k < k_{max}$,
 - 5: Chame o oráculo para obter $f(x_k)$ e $g_k \in \partial f(x_k)$;
 - 6: Inclua a linearização $\bar{f}_k(x)$ ao modelo de planos cortantes;
 - 7: Defina o próximo iterado, x_{k+1} , resolvendo o LP (2.11);
 - 8: Calcule a diferença entre a função e o modelo no ponto x_{k+1} , dada por $\delta_k = f(x_k) - \check{f}_{k-1}(x_k)$;
 - 9: **Se** $\delta_k \leq tol$ **então**
 - 10: Pare com a solução x_k .
 - 11: **Senão**
 - 12: Faça $k \leftarrow k + 1$ e retorne para o passo 4.
-

O desempenho deste método é tipicamente muito superior ao Método do Subgradiente. No entanto, o acúmulo de restrições no subproblema (2.11) pode causar problemas numéricos, bem como a convergência poder ser lenta. Isto acontece especialmente em problemas

de grande porte. Algumas variações foram propostas, tais como o Método de Planos Cortantes com Centros Analíticos, [10], [70], [71], o Método da Maior Esfera Contida, [72] e o Método de Planos Cortantes Proximal [10], [73].

Para o problema teste do Apêndice A, no Método de Planos Cortantes utilizou-se o mesmo ponto inicial $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^2$ e tolerância 10^{-5} . Como dito anteriormente, este método necessita de um conjunto compacto para a variável x , o que não é o caso para a RL. Para utilizar o método foram definidos limites inferiores e superiores: $0 \leq x_i \leq 50$, $i = 1, 2$.

O valor da função dual ao longo das iterações é apresentado na Figura 5, e o parâmetro δ_k , que representa a diferença entre a função e o modelo, encontra-se na Figura 6.

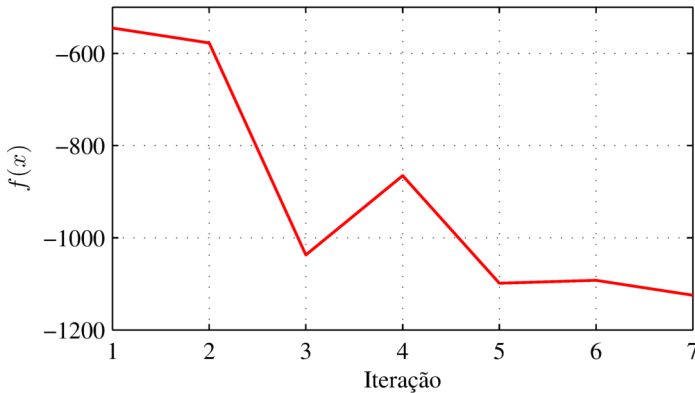


Figura 5 – Valor da função dual para o Método de Planos Cortantes.

Como explicado anteriormente, o Método de Planos Cortantes aproxima a função f inferiormente, através de linearizações. A Figura 7 apresenta as curvas de nível da função dual (à esquerda) e do modelo de planos cortantes (à direita).

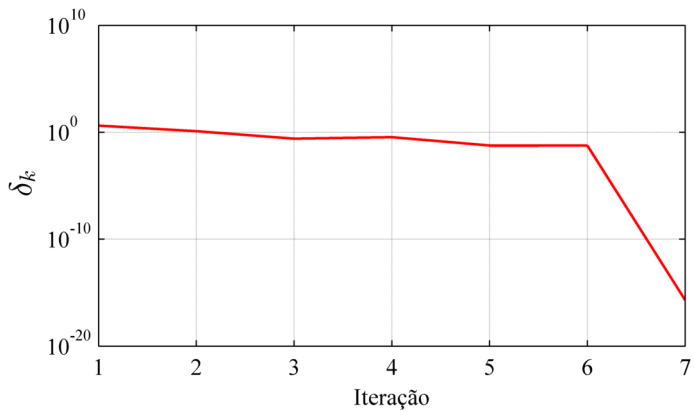


Figura 6 – Convergência do Método de Planos Cortantes.

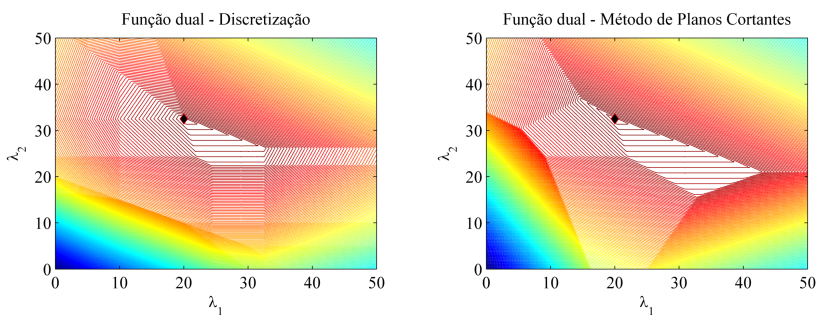


Figura 7 – Comparação entre a função dual e a aproximação obtida pelo Método de Planos Cortantes.

2.3 MÉTODOS DE FEIXES

Duas características do Método de Planos Cortantes (instabilidade numérica e o aumento progressivo do custo computacional por iteração) podem trazer dificuldades na utilização desse método. Com relação ao primeiro item, na prática se observa que, principalmente próximo da solução, o Método de Planos Cortantes tende a um comportamento oscilatório do valor da função objetivo, o que é indesejável. Esse comportamento tem como resultado o aumento no número de iterações necessárias para a finalização do processo iterativo do método, o que, conseqüentemente, remete à segunda dificuldade. Apesar de pacotes de otimização atuais serem extremamente eficientes na resolução de um LP, o custo computacional pode ser elevado se muitas iterações forem necessárias. Além disso, mesmo que várias restrições do LP (linearizações da função objetivo) estejam inativas, não se pode eliminá-las e ainda assim garantir a convergência do método.

Na década de 1970, Lemaréchal [74] e Wolfe [75] desenvolveram, independentemente, Métodos de Feixes (apesar de, na época, outros nomes terem sido dados). Com desenvolvimentos subsequentes, os Métodos de Feixes atuais superaram as dificuldades do Método de Planos Cortantes e tem, tipicamente, desempenho consideravelmente superior a este.

Nos Métodos de Feixes, a primeira dificuldade do Método de Planos Cortantes – instabilidade numérica, – é resolvida através de um mecanismo de estabilização. Já a segunda dificuldade é resolvida com o gerenciamento do feixe, [1, p. 147]. Ao longo desta seção e do próximo capítulo serão detalhadas essas duas características.

Assim como o Método de Planos Cortantes, os Métodos de Feixes também contam com uma “memória” para a formação do modelo por planos cortantes. O feixe, então, é o conjunto que armazena todas essas informações passadas. No entanto, diferentemente do Método de Planos Cortantes, a memória dos Métodos de Feixes pode ser limitada através do gerenciamento do feixe. Adiante serão detalhadas quais informações

devem ser armazenadas e como é feito tal gerenciamento.

Uma das principais diferenças entre o Método de Planos Cortantes e os Métodos de Feixes é que neste último utiliza-se um centro de estabilidade \hat{x}_k , que contém, usualmente, o melhor ponto até a iteração atual [69]. Com essa nova variável, a representação das linearizações pode ser feita de uma forma alternativa. Na seção anterior foi escrito que:

$$\bar{f}_k(x) = f(x_k) + \langle g_k, x - x_k \rangle, \quad (2.12)$$

ou seja, cada linearização é tangente ao ponto x_k . Com a utilização do centro de estabilidade, pode-se reescrever (2.12) como:

$$\bar{f}_i(x) = f(\hat{x}_k) - e_i + \langle g_i, x - \hat{x}_k \rangle, \quad (2.13)$$

em que e_i são os erros de linearização em \hat{x}_k , dados por:

$$e_i = f(\hat{x}_k) - f(x_i) - \langle g_i, \hat{x}_k - x_i \rangle. \quad (2.14)$$

Do ponto de vista teórico não há diferença entre as representações (2.12) e (2.13). No entanto, a segunda opção é mais interessante para implementação. Em uma dada iteração k , as seguintes informações estão presentes no feixe para a primeira representação, (2.12):

$$\{x_j, f(x_j), g_j\}_{j \in J_k}. \quad (2.15)$$

Recapitulando, x_j são os pontos em que o oráculo foi chamado, $f(x_j)$ e $g_j \in \partial f(x_j)$ são, respectivamente, os valores da função e os subgradientes nesses pontos, e J_k contém os índices das linearizações sendo utilizadas. Tais índices são um subconjunto de $\{1, \dots, k\}$. Além disso, o tamanho do feixe é definido por sua cardinalidade, $|J_k|$.

Utilizando o erro de linearização apresentado, o feixe pode ser escrito como

$$\{\hat{x}_k, f(\hat{x}_k)\} \cup \{e_j, g_j\}_{j \in J_k}. \quad (2.16)$$

Utilizando (2.16) há o seguinte impacto na quantidade de memória utilizada para o armazenamento do feixe:

- uma redução de $|J_k| - 1$ escalares, devido à substituição de $f(x_j)$ por $f(\hat{x}_k)$;
- a substituição dos $|J_k|$ vetores x_j pelos escalares e_j ;
- a inclusão do centro de estabilidade \hat{x}_k .

Com essa abordagem, o modelo \check{f}_k , que aproxima f inferiormente, é dado por:

$$\check{f}_k(x) = f(\hat{x}_k) + \max_{j \in J_k} \{-e_j + \langle g_j, x - \hat{x}_k \rangle\}. \quad (2.17)$$

Dadas as informações presentes no feixe na iteração k , o próximo ponto candidato x_{k+1} é tipicamente obtido ao se resolver um problema de Programação Quadrática (QP). Enquanto no Capítulo 3 serão abordadas três variantes dos Métodos de Feixes, nesta seção será apresentado somente o próximo candidato de uma das principais variantes: o Método de Feixes Proximal.

Em sua formulação clássica, o próximo ponto candidato para o Método de Feixes Proximal é dado por:

$$x_{k+1} = \arg \min \left\{ \check{f}_k(x) + \frac{1}{2\tau_k} |x - \hat{x}_k|^2 : x \in \mathfrak{R}^n \right\}, \quad (2.18)$$

em que $\tau_k > 0$ é chamado de parâmetro proximal. Observe que se $\tau_k \rightarrow \infty$, (2.18) tende a (2.11), ou seja, τ_k controla a influência do termo de estabilização, $|x - \hat{x}_k|^2$ na determinação do próximo iterado.

Resta então explicar como atualizar o centro de estabilidade, \hat{x}_k . Dado um ponto candidato x_{k+1} , utiliza-se uma estratégia análoga àquela imposta pela condição de Armijo, [64], comum em algoritmos para otimização diferenciável [13]. O Algoritmo 4 apresenta essa abordagem.

Algoritmo 4 Pseudocódigo para atualização do centro de estabilidade

-
- 1: **Função** CENTROEST($\hat{x}_k, x_{k+1}, f(\hat{x}_k), f(x_{k+1}), \check{f}_k(x_{k+1}), m_f$)
 - 2: Parâmetros: $m_f \in (0, 1)$.
 - 3: Calcule o decréscimo predito $\delta_k = f(\hat{x}_k) - \check{f}_k(x_{k+1})$.
 - 4: **Se** $f(x_{k+1}) \leq f(\hat{x}_k) - m_f \delta_k$, **então**
 - 5: Faça $\hat{x}_{k+1} \leftarrow x_{k+1}$.
 - 6: **Senão**
 - 7: Faça $\hat{x}_{k+1} \leftarrow \hat{x}_k$.
 - 8: Retorne \hat{x}_{k+1} .
-

Como o modelo de planos cortantes \check{f}_k é uma aproximação inferior de f , $\delta_k \geq 0$.

No Algoritmo 4, quando a condição $f(x_{k+1}) \leq f(\hat{x}_k) - m_f \delta_k$ é atendida, tem-se um passo sério, ou passo de descida. O centro de estabilidade é então atualizado. Quando essa condição não é atendida, tem-se um passo nulo e o centro de estabilidade permanece inalterado.

Em caso de passo sério é necessário atualizar os erros de linearização. Isto é feito da seguinte forma (os sobrescritos k e $k + 1$ serão utilizados somente aqui para diferenciar o erro de linearização atual e o novo):

$$e_i^{k+1} = e_i^k + f(\hat{x}_{k+1}) - f(\hat{x}_k) + \langle g_i, \hat{x}_k - \hat{x}_{k+1} \rangle \quad \text{para todo } i \in J_k. \quad (2.19)$$

Ainda no Algoritmo 4 pode-se atualizar um ou mais parâmetros da variante do Método de Feixes utilizada. Para o Método de Feixes Proximal a atualização de τ_k pode ser realizada de maneira distinta em caso de passo sério ou passo nulo, sem perda das propriedades de convergência.

Como dito anteriormente, ao contrário do Método de Planos Cortantes, em que todas as linearizações devem ser mantidas para a determinação do próximo iterado, nos Métodos de Feixes é permitido agregar e eliminar planos cortantes existentes, [1, p. 148].

Para ficar clara a ideia da compressão do feixe, é necessário

introduzir o conceito de linearização agregada, $\bar{f}_k^a(x)$. Sua expressão é dada por (2.20).

$$\bar{f}_k^a(x) = f(\hat{x}_k) - \hat{e}_k + \langle \hat{g}_k, x - \hat{x}_k \rangle, \quad (2.20)$$

em que

$$\hat{e}_k = \sum_{j \in J_k} u_j e_j \quad (2.21)$$

é conhecido como erro da linearização agregada, u_j corresponde ao multiplicador de Lagrange associado à restrição do j -ésimo plano cortante do subproblema quadrático (2.18), e

$$\hat{g}_k = \sum_{j \in J_k} u_j g_j \quad (2.22)$$

é conhecido como subgradiente agregado.

Pode-se provar que a linearização (2.20) contém todas as informações do feixe de forma agregada [1], ou seja, do ponto de vista teórico pode-se substituir todos os planos cortantes contidos no feixe por \bar{f}_k^a .

Outro papel importante do gerenciamento do feixe consiste na eliminação de planos cortantes inativos do feixe, que são aqueles cujo multiplicador de Lagrange u_j é igual a zero. Também em [1] se mostra que a eliminação dessas restrições não prejudica a convergência do método do ponto de vista teórico. Neste caso, não é necessária a inclusão da linearização agregada.

No Algoritmo 5 é apresentada uma estratégia de gerenciamento do feixe, em que estão presentes a eliminação de linearizações inativas e a compressão do feixe.

Algumas opções podem ser utilizadas no Passo 6 do Algoritmo 5. Por exemplo, pode-se eliminar as duas linearizações mais antigas, ou as duas com maiores erros de linearização, ou todas as linearizações.

A linearização agregada também serve como base para um teste

Algoritmo 5 Pseudocódigo para gerenciamento do feixe

```

1: Função GERFEIXE( $J_k, np_{\max}$ )
2:   Parâmetros:  $np_{\max} \geq 2$ .
3:   Se  $|J_k| = np_{\max}$  então
4:     Elimine as linearizações inativas.
5:     Se todas as linearizações estiverem ativas então
6:       Elimine duas ou mais linearizações do feixe.
7:       Inclua a linearização agregada.
8:       Vá para o passo 9.
9:   Inclua a linearização da iteração atual no feixe.
10:  Retorne o feixe atualizado  $J_{k+1}$ .

```

de parada eficiente, dado por:

$$\hat{e}_k < tol_e \quad \text{e} \quad |\hat{g}_k| < tol_g. \quad (2.23)$$

Na Seção 3.1.2 será apresentado um detalhamento do porquê de tal escolha.

Com estas considerações, pode-se apresentar um algoritmo genérico para o Método de Feixes, detalhado no Algoritmo 6.

Algoritmo 6 Método de Feixes

-
- 1: Parâmetros: $k_{max} > 0$, $np_{max} > 0$, $m_f \in (0, 1)$, $tol_e \geq 0$, $tol_g \geq 0$.
 - 2: Entrada: x_0 .
 - 3: Faça $x_1 \leftarrow x_0$ e $\hat{x}_1 \leftarrow x_0$.
 - 4: Chame o oráculo com x_1 para obter $f(x_1)$ e $g_1 \in \partial f(x_1)$.
 - 5: Faça $e_1 \leftarrow 0$.
 - 6: Faça $k \leftarrow 1$.
 - 7: **Enquanto** $k < k_{max}$,
 - 8: Defina o próximo iterado.
 - 9: Obtenha a linearização agregada, através de (2.21) e (2.22).
 - 10: Verifique a convergência utilizando (2.23).
 - 11: **Se** o teste de parada é satisfeito **então**
 - 12: Pare com a solução \hat{x}_k .
 - 13: Chame o oráculo com x_{k+1} para obter $f(x_{k+1})$ e $g_{k+1} \in \partial f(x_{k+1})$.
 - 14: Decida se o centro de estabilidade deve ser atualizado:
CENTROEST(\hat{x}_k , x_{k+1} , $f(\hat{x}_k)$, $f(x_{k+1})$), $\check{f}_k(x_{k+1})$, m_f). Em caso de passo sério, atualize os erros de linearização através de (2.19). Em caso de passo nulo, decresça ou mantenha fixo o parâmetro proximal τ_k .
 - 15: Faça o gerenciamento do feixe: $J_{k+1} \leftarrow \text{GERFEIXE}(J_k, np_{max})$.
 - 16: Faça $k \leftarrow k + 1$ e retorne ao passo 7.
-

Apesar da maior complexidade do Algoritmo 6 em relação ao Método de Planos Cortantes, o algoritmo apresentado não é implementável enquanto não for definida uma forma de obter o próximo iterado, no passo 8.

Como citado no início deste capítulo, uma das diferenças entre as variantes dos Métodos de Feixes reside na forma de se obter esse passo. Anteriormente foi apresentada a expressão do próximo iterado, x_{k+1} , para o Método de Feixes Proximal, (2.18), apesar de detalhes do algoritmo não terem sido mostrados. No Capítulo 3 este método será detalhado, e serão apresentadas duas outras variantes: o Método de

Nível e o Método de Feixes Duplamente Estabilizado.

Para o problema-teste apresentado no Apêndice A, no Método de Feixes Proximal utilizou-se o mesmo ponto inicial $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^2$ e tolerância de 10^{-5} .

O valor da função dual no ponto candidato e no centro de estabilidade ao longo das iterações é apresentado na Figura 8. Na iteração 2 observa-se por que este método é de descida: como $f(x_2) > f(\hat{x}_1)$, o centro de estabilidade é mantido em \hat{x}_1 , logo $f(\hat{x}_2) = f(\hat{x}_1)$.

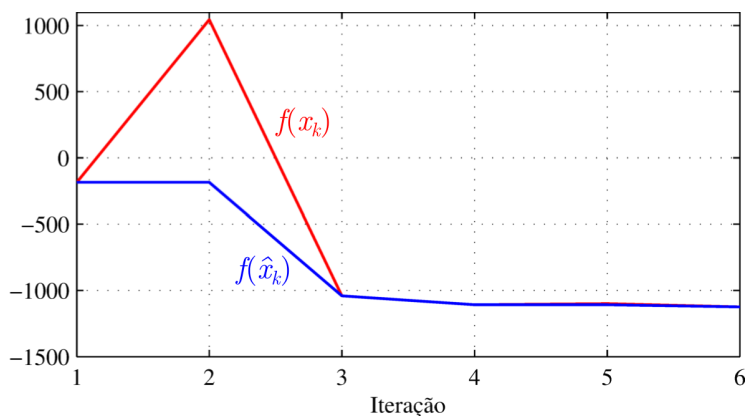


Figura 8 – Função dual nos pontos candidatos (em vermelho) e nos centros de estabilidade (em azul) para o Método de Feixes Proximal.

Na Figura 9 são apresentados os testes de convergência baseados na linearização agregada. O ponto \hat{e}_0 não está presente no gráfico pois $\hat{e}_0 = 0$.

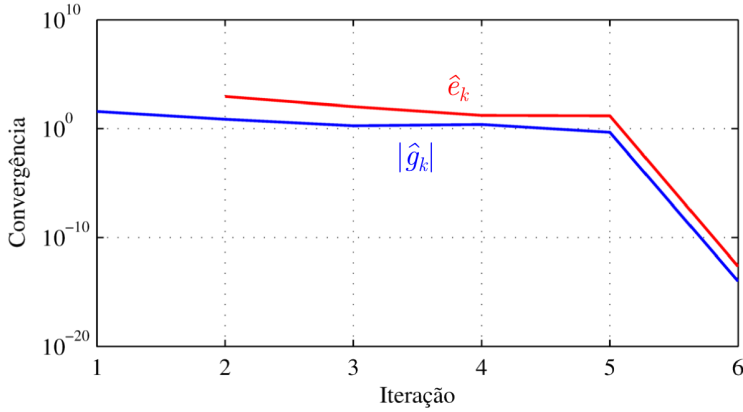


Figura 9 – Testes de convergência para o Método de Feixes Proximal.

2.4 CONCLUSÕES

Os resultados apresentados ao longo deste capítulo não têm como objetivo comparar os métodos numericamente, visto que este problema ilustrativo, por ser de pequeno porte (2 variáveis duais), não requer muitas iterações para se obter a solução.

No Capítulo 4 será apresentado o problema do comissionamento de unidades termelétricas com modelagem completa. O problema dual, então, será de maior porte, o que permitirá uma comparação adequada entre os métodos.

3 VARIANTES DO MÉTODO DE FEIXES UTILIZADAS NO TRABALHO

No capítulo anterior foram apresentadas três famílias de métodos de otimização não-diferenciável. Como foi dito, os Métodos de Feixes estão entre os mais eficientes algoritmos para esse tipo de problema de otimização.

Devido ao interesse por esta família de métodos, diversas variantes foram propostas e, para algumas dessas variantes, uma série de melhoramentos foram estudados. As duas principais variantes deste método são o Método de Feixes Proximal e o Método de Nível. Além dessas, neste trabalho será considerada uma terceira variante, o Método de Feixes Duplamente Estabilizado, investigado por Oliveira e Solodov em [13].

Entre os avanços específicos para cada variante do método, pode-se citar: utilização de oráculos inexatos [76], [77], [78], [79]; desagregação do feixe [31], [32], [80]; inclusão de restrições dos subproblemas no problema dual [81]; formas alternativas de estabilização [82]; Método de Feixes com memória limitada [83]; paralelização na resolução dos subproblemas do oráculo [84], [85] e paralelização do Método de Feixes Proximal [86], apenas para citar alguns exemplos.

3.1 MÉTODO DE FEIXES PROXIMAL

O próximo iterado do Método de Feixes Proximal é dado por:

$$x_{k+1} = \arg \min \left\{ \check{f}_k(x) + \frac{1}{2\tau_k} |x - \hat{x}_k|^2 : x \in \mathfrak{R}^n \right\}, \quad (3.1)$$

em que $\check{f}_k(x)$ é o modelo de planos cortantes dado por (2.17).

Este método pode ser analisado a partir da equivalência entre minimizar uma função convexa e encontrar um ponto fixo do operador

de ponto proximal: um dado ponto x^* é solução de (1.2) se e somente se

$$x^* \text{ é solução de } \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \frac{1}{2\tau} |x - x^*|^2, \quad (3.2)$$

para algum tamanho de passo $\tau > 0$, [87], [1]. Para tornar a formulação (3.2) implementável substitui-se x^* pelo centro de estabilidade \hat{x}_k e f por um modelo de planos cortantes \check{f}_k , o que fornece (3.1).

Para ser implementado, o problema (3.1) pode ser escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,r} \quad r + \frac{1}{2\tau_k} |x - \hat{x}_k|^2 \\ \text{s.a:} \quad f(\hat{x}_k) - e_j + \langle g_j, x - \hat{x}_k \rangle \leq r, j \in J_k \\ \quad \quad x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Ao contrário do Método de Planos Cortantes, observa-se que para o Método de Feixes Proximal o próximo iterado é obtido através da resolução de um QP.

Esta seção tem dois objetivos principais: apresentar uma metodologia para a escolha e atualização do parâmetro proximal τ_k e mostrar a formulação dual do problema (3.3). Como se verá na Seção 3.1.1, tal formulação é vantajosa do ponto de vista computacional.

O parâmetro proximal controla a influência que o termo estabilizador, $|x - \hat{x}_k|^2$, tem sobre o modelo de planos cortantes $\check{f}_k(x)$, representado através da variável auxiliar r .

Apesar de a convergência teórica do método não depender da escolha desse parâmetro (exige-se apenas que $\tau_k > 0$), resultados numéricos mostram que uma escolha adequada pode ter um impacto considerável no desempenho do método, [1].

A estratégia para atualização de τ_k considerada neste trabalho e apresentada no Algoritmo 7 é baseada em Kiwiel, [11].

Algoritmo 7 Atualização do parâmetro proximal

- 1: **Função** PARPROX($f(\hat{x}_k)$, $f(x_{k+1})$, $\check{f}_k(x_{k+1})$, τ_k , a , n_{ps} , τ_{\min})
- 2: Parâmetros: $a > 1$, $n_{ps} \geq 1$, $\tau_{\min} > 0$.
- 3: Calcule o decréscimo predito:

$$\delta_{k+1} \leftarrow f(\hat{x}_k) - \check{f}_k(x_{k+1}).$$

- 4: Calcule o parâmetro proximal auxiliar:

$$\tau_{\text{aux}} \leftarrow 2\tau_k \left(1 + \frac{f(\hat{x}_k) - f(x_{k+1})}{\delta_{k+1}} \right).$$

- 5: **Se** passo nulo **então**
- 6: Retorne

$$\tau_{k+1} \leftarrow \min \{ \tau_k, \max \{ \tau_{\text{aux}}, \tau_k/a, \tau_{\min} \} \}.$$

- 7: **Se** passo sério **então**
- 8: **Se** houve mais de n_{ps} passos sérios consecutivos **então**

$$\tau_{\text{aux}} \leftarrow a \cdot \tau_{\text{aux}}.$$

- 9: Retorne

$$\tau_{k+1} \leftarrow \min \{ \tau_{\text{aux}}, 10\tau_k \}$$

A atualização do parâmetro proximal apresentada no Algoritmo 7 não é a mesma em caso de passo sério ou passo nulo. Por este motivo, os passos citados podem ser inseridos após a atualização do centro de estabilidade, descrito no Algoritmo 4. Para garantir a convergência do método é necessário somente que τ_k seja não-crescente durante passos nulos e $\tau_k \geq \tau_{\min} > 0$.

O Algoritmo 8 apresenta o Método de Feixes Proximal, adaptado do Algoritmo 6.

Algoritmo 8 Método de Feixes Proximal

-
- 1: Parâmetros: $k_{max} > 0$, $np_{max} \geq 2$, $m_f \in (0, 1)$, $a > 1$, $\tau_{min} > 0$, $tol_e \geq 0$, $tol_g \geq 0$.
 - 2: Entrada: x_0 .
 - 3: Siga os passos 3–6 do Algoritmo 6.
 - 4: **Enquanto** $k < k_{max}$,
 - 5: Defina o próximo iterado resolvendo o problema (3.3).
 - 6: Siga os passos 9-10 do Algoritmo 6.
 - 7: **Se** o teste de parada é satisfeito **então**
 - 8: Pare com a solução \hat{x}_k .
 - 9: Chame o oráculo com x_{k+1} para obter $f(x_{k+1})$ e $g_{k+1} \in \partial f(x_{k+1})$.
 - 10: Decida se o centro de estabilidade deve ser atualizado:
CENTROEST(\hat{x}_k , x_{k+1} , $f(\hat{x}_k)$, $f(x_{k+1})$), $\check{f}_k(x_{k+1})$, m_f). Atualize o parâmetro proximal: $\tau_{k+1} \leftarrow \text{PARPROX}(f(\hat{x}_k)$, $f(x_{k+1})$, $\check{f}_k(x_{k+1})$, a , n_{ps} , τ_{min}). Em caso de passo sério, atualize os erros de linearização através de (2.19).
 - 11: Faça o gerenciamento do feixe: $J_{k+1} \leftarrow \text{GERFEIXE}(J_k, np_{max})$.
 - 12: Faça $k \leftarrow k + 1$ e retorne ao passo 4.
-

Para a obtenção do próximo iterado é necessário resolver um QP com $(n + 1)$ variáveis e $|J_k|$ restrições. Enquanto o tamanho do feixe, $|J_k|$, pode ser controlado através da compressão do feixe (Algoritmo 5), o número de variáveis do problema depende do número de variáveis da função f . Em problemas de grande porte n pode ser elevado, o que pode aumentar consideravelmente o custo computacional para resolver (3.3).

Na próxima subseção é apresentado o desenvolvimento matemático para a obtenção do problema dual do QP utilizado para definir o próximo iterado. Como se verá, esta abordagem é interessante pois o problema dual contém $|J_k|$ variáveis e uma restrição.

3.1.1 Formulação dual

Proposição 1. *O QP (3.3), utilizado para a determinação do próximo iterado do Método de Feixes Proximal, pode ser substituído pelo seu problema dual, dado por:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_u \quad f(\hat{x}_k) - \frac{\tau_k}{2} \left| \sum_{j \in J_k} u_j g_j \right|^2 - \sum_{j \in J_k} u_j e_j, \\ \text{s. a:} \quad \sum_{j \in J_k} u_j = 1, \\ \quad \quad u_j \geq 0, \quad j \in J_k. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Demonstração. A função Lagrangiana para o problema (3.3) é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, r, u) = & r + \frac{1}{2\tau_k} |x - \hat{x}_k|^2 + \\ & + \sum_{j \in J_k} u_j (f(\hat{x}_k - e_j + \langle g_j, x - \hat{x}_k \rangle - r). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Isolando os termos contendo a variável r em (3.5), chega-se a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, r, u) = & \left(1 - \sum_{j \in J_k} u_j\right) r + \frac{1}{2\tau_k} |x - \hat{x}_k|^2 + \\ & + \sum_{j \in J_k} u_j (f(\hat{x}_k - e_j + \langle g_j, x - \hat{x}_k \rangle). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dado que o problema (3.3) é convexo e que as restrições (dadas pelas linearizações presentes no feixe) são afins, pode-se resolver esse problema através de seu dual e não haverá brecha de dualidade. Ou seja,

$$(3.3) \equiv \min_{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \max_{u \in \mathbb{R}_+^{|J_k|}} \mathcal{L}(x, r, u) \equiv \max_{u \in \mathbb{R}_+^{|J_k|}} \min_{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \mathcal{L}(x, r, u). \quad (3.7)$$

Focando no problema dual, ou seja, a expressão à direita, para

que $\min_{(x,r) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}} \mathcal{L}(x, r, u)$ seja finito é necessário que

$$\sum_{j \in J_k} u_j = 1. \quad (3.8)$$

Desta forma, elimina-se a variável r da função Lagrangiana e obtém-se um conjunto viável para os multiplicadores de Lagrange u :

$$\sum_{j \in J_k} u_j = 1, \quad (3.9)$$

$$u_j \geq 0, \quad j \in J_k, \quad (3.10)$$

em que $u_j \geq 0$ é incluída porque as restrições que formam o modelo de planos cortantes são de desigualdade.

Utilizando (3.9) a função Lagrangiana pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, u) &= \frac{1}{2\tau_k} |x - \hat{x}_k|^2 + \sum_{j \in J_k} u_j (f(\hat{x}_k - e_j + \langle g_j, x - \hat{x}_k \rangle)) \\ &= \frac{1}{2\tau_k} |x - \hat{x}_k|^2 + \sum_{j \in J_k} u_j f(\hat{x}_k) + \sum_{j \in J_k} u_j (-e_j + \langle g_j, x - \hat{x}_k \rangle) \\ &= f(\hat{x}_k) + \frac{1}{2\tau_k} |x - \hat{x}_k|^2 + \sum_{j \in J_k} u_j (-e_j + \langle g_j, x - \hat{x}_k \rangle). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para um vetor de Multiplicadores de Lagrange u fixo, a condição de otimalidade de

$$x(u) = \arg \min_{x \in \mathfrak{R}^n} \mathcal{L}(x(u), u) \quad (3.12)$$

é dada por

$$0 = \nabla_x \mathcal{L}(x(u), u) = \frac{1}{\tau_k} (x(u) - \hat{x}_k) + \sum_{j \in J_k} u_j g_j, \quad (3.13)$$

em que $x(u)$ é único devido à convexidade de f .

Mais especificamente, em x_{k+1} , que é a solução (única) de (3.7), tem-se

$$0 = \frac{1}{\tau_k} (x_{k+1} - \hat{x}_k) + \sum_{j \in J_k} u_j g_j, \quad (3.14)$$

que pode ser escrito como

$$x_{k+1} = \hat{x}_k - \tau_k \sum_{j \in J_k} u_j g_j. \quad (3.15)$$

No entanto, na seção anterior definiu-se o subgradiente agregado como:

$$\hat{g}_k = \sum_{j \in J_k} u_j g_j. \quad (3.16)$$

Logo, pode-se escrever (3.15) como

$$x_{k+1} = \hat{x}_k - \tau_k \hat{g}_k, \quad (3.17)$$

que é semelhante à expressão apresentada no Método do Subgradiente, (2.6). Ou seja, pode ser feita uma analogia entre o passo proximal τ_k e o tamanho de passo t_k , e entre o subgradiente agregado \hat{g}_k e o subgradiente g_k .

Voltando à Equação (3.13) e multiplicando-a por $(x(u) - \hat{x}_k)$ obtém-se:

$$\sum_{j \in J_k} u_j \langle g_j, x(u) - \hat{x}_k \rangle = -\frac{1}{\tau_k} |x(u) - \hat{x}_k|^2. \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.11):

$$\mathcal{L}(x(u), u) = f(\hat{x}_k) - \frac{1}{2\tau_k} |x(u) - \hat{x}_k|^2 - \sum_{j \in J_k} u_j e_j. \quad (3.19)$$

Multiplicando (3.13) por $(\tau_k \sum_{j \in J_k} u_j g_j)$ chega-se a:

$$\sum_{j \in J_k} u_j \langle g_j, x(u) - \hat{x}_k \rangle = -\tau_k \left| \sum_{j \in J_k} u_j g_j \right|^2. \quad (3.20)$$

Combinando (3.18) e (3.20):

$$\frac{1}{\tau_k} |x(u) - \hat{x}_k|^2 = \tau_k \left| \sum_{j \in J_k} u_j g_j \right|^2. \quad (3.21)$$

Por fim, substituindo (3.21) em (3.19) pode-se eliminar a variável

$x(u)$:

$$\mathcal{L}(u) = f(\hat{x}_k) - \frac{\tau_k}{2} \left| \sum_{j \in J_k} u_j g_j \right|^2 - \sum_{j \in J_k} u_j e_j. \quad (3.22)$$

A partir da função Lagrangiana (3.22) e do conjunto viável definido por (3.9) e (3.10) chega-se ao problema (3.4).

□

Desconsiderando o termo constante $f(\hat{x}_k)$ e multiplicando a função objetivo por -1 , o problema (3.4) pode ser expresso na seguinte forma:

$$\begin{cases} \min_u & \frac{1}{2} u^T G u + c^T u \\ \text{s.a:} & \sum_{j \in J_k} u_j = 1, \\ & u \geq 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

A matriz G , conhecida como Hessiana, é obtida ao expandir o termo $\frac{\tau_k}{2} \left| \sum_{j \in J_k} u_j g_j \right|^2$. O elemento (p, q) dessa matriz é dado por:

$$G_{pq} = \tau_k \langle g_p, g_q \rangle = \tau_k \sum_{i=1}^n g_{pi} g_{qi} \quad (3.24)$$

Por exemplo, se $f : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ e $|J_k| = 2$, a matriz será

$$G = \tau_k \begin{bmatrix} g_{11}^2 + g_{12}^2 & g_{11}g_{21} + g_{12}g_{22} \\ g_{11}g_{21} + g_{12}g_{22} & g_{21}^2 + g_{22}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Se, na iteração seguinte, for adicionado um terceiro plano cortante, a matriz atualizada será

$$G = \tau_k \begin{bmatrix} g_{11}^2 + g_{12}^2 & g_{11}g_{21} + g_{12}g_{22} & g_{11}g_{31} + g_{12}g_{32} \\ g_{11}g_{21} + g_{12}g_{22} & g_{21}^2 + g_{22}^2 & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} \\ g_{11}g_{31} + g_{12}g_{32} & g_{21}g_{31} + g_{22}g_{32} & g_{31}^2 + g_{32}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Observa-se que a única alteração consiste na linha e na coluna adicionadas à matriz. Do ponto de vista computacional, essa propriedade é interessante, pois não é necessário recalcular toda a matriz

Hessiana a cada iteração. Além disso, como o produto interno é comutativo, a matriz G é simétrica, logo pode-se economizar processamento e armazenamento ao calcular somente sua porção triangular inferior (ou superior).

De forma mais geral, se houver m linearizações no feixe a matriz Hessiana será dada por:

$$G = \tau_k \begin{bmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \cdots & \langle g_1, g_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_m, g_1 \rangle & \cdots & \langle g_m, g_m \rangle \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

A matriz contendo os produtos internos entre os subgradientes é conhecida como matriz Gramiana. Sua estrutura pode ser utilizada para a resolução eficiente do problema dual, como em [88].

Por fim, o termo linear na função objetivo de (3.23) é dado por:

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

A solução do problema dual fornece os multiplicadores de Lagrange associados às linearizações que formam o modelo de planos cortantes $\check{f}_k(x)$. Para obter o próximo iterado x_{k+1} basta utilizar a Equação (3.17).

3.1.2 Teste de parada

Na Seção 2.2, o decréscimo predito para o Método de Planos Cortantes, δ_{k+1} , foi definido como diferença entre o valor da função e o valor do modelo no iterado calculado. Como nos Métodos de Feixes tem-se um centro de estabilidade \hat{x}_k , este parâmetro pode ser definido como [13]:

$$\delta_{k+1} := f(\hat{x}_k) - \check{f}_k(x_{k+1}). \quad (3.28)$$

Como visto na seção anterior, dado que o problema (3.3) é convexo, não há brecha de dualidade. Utilizando (3.4) em sua solução

tem-se:

$$\check{f}_k(x_{k+1}) + \frac{1}{2\tau_k}|x_{k+1} - \hat{x}_k|^2 = f(\hat{x}_k) - \frac{\tau_k}{2}|\hat{g}_k|^2 - \hat{e}_k. \quad (3.29)$$

Na solução do problema dual (3.4), a Equação (3.21) pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\tau_k}|x_{k+1} - \hat{x}_k|^2 = \tau_k|\hat{g}_k|^2. \quad (3.30)$$

Substituindo (3.30) em (3.29) e (3.29) em (3.28) chega-se a:

$$\delta_{k+1} = \tau_k|\hat{g}_k|^2 + \hat{e}_k. \quad (3.31)$$

O parâmetro δ_{k+1} mede a otimalidade de \hat{x}_k . A fim de garantir que (3.31) pode ser utilizado como critério de parada para os Métodos de Feixes, a seguinte proposição é necessária, [1, p. 146]:

Proposição 2. *O subgradiente \hat{g}_k pertence ao \hat{e}_k -subdiferencial de f em \hat{x}_k .*

Demonstração. Para um dado $\epsilon \geq 0$, o ϵ -subdiferencial de f em x é definido como [1, p. 124]:

$$\partial_\epsilon f(x) := \{g \in \mathfrak{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle g, y - x \rangle - \epsilon \text{ para todo } y \in \mathfrak{R}^n\}. \quad (3.32)$$

Devido à convexidade de f e do modelo de planos cortantes \check{f}_k , garante-se que:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \check{f}_k(x) \geq \check{f}_k(x_{k+1}) + \langle \hat{g}_k, x - x_{k+1} \rangle \\ &= \check{f}_k(x_{k+1}) + \langle \hat{g}_k, x - x_{k+1} + \hat{x}_k - \hat{x}_k \rangle \\ &= \check{f}_k(x_{k+1}) + \langle \hat{g}_k, x - \hat{x}_k \rangle - \langle \hat{g}_k, x_{k+1} - \hat{x}_k \rangle. \end{aligned}$$

Usando (3.17):

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \check{f}_k(x_{k+1}) + \langle \hat{g}_k, x - \hat{x}_k \rangle + \tau_k|\hat{g}_k|^2 \\ &= f(\hat{x}_k) + \langle \hat{g}_k, x - \hat{x}_k \rangle - \left(f(\hat{x}_k) - \check{f}_k(x_{k+1}) - \tau_k|\hat{g}_k|^2 \right). \end{aligned}$$

Substituindo (3.30) em (3.29) e isolando o erro da linearização agregada:

$$\hat{e}_k = f(\hat{x}_k) - \check{f}_k(x_{k+1}) - \tau_k |\hat{g}_k|^2 \quad (3.33)$$

De forma que se chega a:

$$f(x) \geq f(\hat{x}_k) + \langle \hat{g}_k, x - \hat{x}_k \rangle - \hat{e}_k. \quad (3.34)$$

De acordo com a definição (3.32), \hat{g}_k é um \hat{e}_k -subgradiente de f em \hat{x}_k . \square

Para que $\{\hat{x}_k\}$ seja uma sequência minimizadora, deve-se ter $\{\hat{e}_k\} \rightarrow 0$ e $\{\hat{g}_k\} \rightarrow 0$, [1, p. 147]. Por este motivo, ao invés de testar $\delta_{k+1} < tol$, como no Método de Planos Cortantes, é preferível utilizar como teste de parada (2.23), ou seja:

$$\hat{e}_k < tol_e \quad \text{e} \quad |\hat{g}_k| < tol_g. \quad (3.35)$$

3.2 MÉTODO DE NÍVEL

O Método de Nível, proposto originalmente em [12], está, de certa forma, relacionado ao Método de Feixes Proximal. Utilizando a abordagem apresentada na seção anterior, pode-se escrever que um dado ponto x^* é solução de (1.2) se e somente se

$$x^* \text{ é solução de } \min_{x \in \mathbb{R}^n} \tau f(x) + \frac{1}{2} |x - x^*|^2, \quad (3.36)$$

em que a expressão sendo minimizada em (3.2) foi multiplicada por τ .

A solução do problema acima não se altera se subtrairmos a constante τf^* :

$$x^* \text{ é solução de } \min_{x \in \mathbb{R}^n} \tau(f(x) - f^*) + \frac{1}{2} |x - x^*|^2, \quad (3.37)$$

O parâmetro τ pode ser interpretado como um multiplicador de

Lagrange associado à restrição $f(x) \leq f^*$, o que fornece:

$$x^* \text{ é solução de } \begin{cases} \min_x \frac{1}{2} |x - x^*|^2 \\ \text{s.a: } f(x) \leq f^*. \end{cases} \quad (3.38)$$

Para tornar (3.38) implementável substituiu-se x^* pelo centro de estabilidade \hat{x}_k , f por um modelo de planos cortantes \check{f}_k e o lado direito da restrição de desigualdade por um parâmetro de nível, ℓ_k .

Desta forma, no método de nível o próximo iterado é dado por:

$$x_{k+1} = \arg \min \left\{ \frac{1}{2} |x - \hat{x}_k|^2 : \check{f}_k(x) \leq \ell_k, x \in \mathbb{R}^n \right\}. \quad (3.39)$$

Dada essa interpretação de τ como o multiplicador de Lagrange associado à restrição de nível, $\check{f}_k(x) \leq \ell_k$, pode-se considerar que o Método de Nível faz aproximações primais-duais do Método de Feixes Proximal, [87].

O problema (3.39) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} |x - \hat{x}_k|^2 \\ \text{s.a: } f(\hat{x}_k) - e_j + \langle g_j, x - \hat{x}_k \rangle \leq \ell_k, j \in J_k. \end{cases} \quad (3.40)$$

Aplicando a condição de otimalidade de primeira ordem ao problema (3.40) pode-se escrever o próximo iterado para o Método de Nível como:

$$x_{k+1} = \hat{x}_k - \lambda_k \hat{g}_k, \quad (3.41)$$

em que λ_k é o Multiplicador de Lagrange associado à restrição de nível, $\check{f}_k(x) \leq \ell_k$, $\hat{g}_k = \sum_{j \in J_k} \left(\frac{u_j}{\lambda_k}\right) g_j$ e $\lambda_k = \sum_{j \in J_k} u_j$.

O Método de Nível emprega uma projeção do centro de estabilidade em um conjunto viável definido pelas linearizações presentes no feixe e pela restrição $r \leq \ell_k$. Por este motivo, o problema (3.40) pode ser inviável para um dado parâmetro de nível.

Na Figura 10 é apresentado esse caso. Enquanto na figura da esquerda o próximo iterado, x_{k+1} , é obtido através da projeção, na figura da direita o conjunto viável é vazio. Logo não se pode obter x_{k+1} .

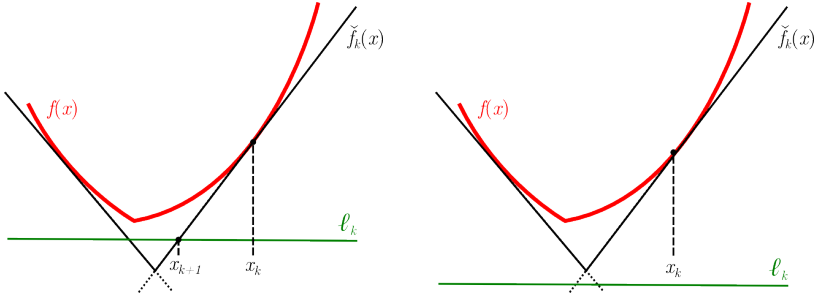


Figura 10 – Método de nível.

Em um primeiro momento essa característica do Método de Nível pode parecer indesejável. Em caso de inviabilidade, é necessário aumentar o parâmetro de nível e então resolver novamente o QP (3.40). No entanto, a inviabilidade do problema fornece uma informação útil: dado que f é uma função convexa, garante-se nesse caso que o valor ótimo da função dual é maior que ℓ_k .

Desta forma, define-se um limite inferior f_k^{low} e um critério de parada adicional ao apresentado para o Método de Feixes Proximal (que utiliza o erro e a norma do subgradiente agregado, conforme as Equações (2.21) e (2.22)), baseado na brecha de otimalidade. Como se conhece o valor da função no centro de estabilidade atual, $f(\hat{x}_k)$, a brecha de otimalidade, Δ_k , é dada por:

$$\Delta_k = f(\hat{x}_k) - f_k^{\text{low}}. \quad (3.42)$$

O critério de parada, então, é dado por:

$$\Delta_k \leq \text{tol}_\Delta, \quad (3.43)$$

em que $\text{tol}_\Delta \geq 0$ é uma tolerância.

Se o conjunto de nível $\{x \in \mathfrak{R}^n : \check{f}_k(x) \leq \ell_k\}$ for vazio, então ℓ_k é um limite inferior. Desta forma pode-se atualizar f_k^{low} :

$$f_k^{\text{low}} \leftarrow \ell_k. \quad (3.44)$$

Neste caso, o parâmetro de nível deve ser atualizado de forma a satisfazer $\ell_k \in (f_k^{\text{low}}, f(\hat{x}_k))$.

Em alguns casos é possível obter algum limite inferior inicial. Por exemplo, na RL qualquer ponto viável para o problema primal é um limite superior para o problema dual.

Além disso, se observa na Figura 10 que a minimização do modelo de planos cortantes $\check{f}_k(x)$ também pode fornecer um limite inferior finito, desde que tal modelo seja limitado inferiormente. A minimização de tal função é justamente a forma que se obtém o próximo iterado no Método de Planos Cortantes, como apresentado no problema (2.11).

Pode-se atualizar o limite inferior através da minimização de $\check{f}_k(x)$ a cada iteração. No entanto, essa abordagem envolve a resolução de um PL, o que pode ser caro computacionalmente ao longo das iterações. Logo, pode-se utilizar essa estratégia apenas quando é detectada a inviabilidade do problema (3.40).

No entanto, é possível atualizar ℓ_k com custo computacional menor, sem a resolução de um PL. Para isso, o parâmetro de nível é dado por:

$$\ell_k = f(\hat{x}_k) - \nu_k, \quad (3.45)$$

em que ν_k representa o quanto se deseja reduzir o valor de $f(\hat{x}_k)$ na iteração atual. Há três situações em que se atualiza ν_k :

- se o limite inferior f_k^{low} aumentar;
- se $f(\hat{x}_k)$ decrescer, ou seja, em um passo sério;
- se o multiplicador de Lagrange associado a restrição de nível, λ_k , for suficientemente grande.

O Algoritmo 9 apresenta a atualização do parâmetro de nível para essas três condições.

Algoritmo 9 Atualização do parâmetro de nível

- 1: **Função** PARNIVEL($f(\hat{x}_k)$, f_k^{low} , ν_k , λ_k , m_ℓ , λ_{\max})
 - 2: Parâmetros: $m_\ell \in (0, 1)$, $\lambda_{\max} > 0$.
 - 3: **Se** f_k^{low} aumentou **então**
 - 4: Faça $\nu_k \leftarrow (1 - m_\ell)(f(\hat{x}_k) - f_k^{\text{low}})$.
 - 5: Vá para o Passo 12.
 - 6: **Se** passo sério **então**
 - 7: Faça $\nu_k \leftarrow \min \{ \nu_k, (1 - m_\ell)(f(\hat{x}_k) - f_k^{\text{low}}) \}$.
 - 8: Vá para o Passo 12.
 - 9: **Se** $\lambda_k > \lambda_{\max}$ **então**
 - 10: $\nu_k \leftarrow m_\ell \nu_k$.
 - 11: Vá para o Passo 12.
 - 12: Retorne $\ell_k \leftarrow f(\hat{x}_k) - \nu_k$.
-

Dadas as considerações e um procedimento para a atualização do parâmetro de nível, o Algoritmo 6, genérico para Métodos de Feixes, pode ser aprimorado para o Método de Nível, como mostra o Algoritmo 10.

Algoritmo 10 Método de Nível

- 1: Parâmetros: $k_{max} > 0$, $np_{max} \geq 2$, $m_f \in (0, 1)$, $m_\ell \in (0, 1)$,
 $\lambda_{max} > 0$, $tol_e \geq 0$, $tol_g \geq 0$, $tol_\Delta \geq 0$.
 - 2: Entrada: x_0 .
 - 3: Siga os passos 3–6 do Algoritmo 6.
 - 4: **Se** algum limite inferior f_1^{low} for conhecido **então**
 - 5: Faça $v_1^\ell \leftarrow (1 - m_\ell)(f(\hat{x}_1) - f_1^{low})$.
 - 6: **Senão**
 - 7: Faça $f_1^{low} \leftarrow -\infty$ e escolha algum $v_1^\ell > 0$.
 - 8: Faça $\ell_1 \leftarrow f(\hat{x}_1) - v_1^\ell$.
 - 9: **Enquanto** $k < k_{max}$,
 - 10: Calcule a brecha de otimalidade através de (3.42). Se $\Delta_k \leq tol_\Delta$,
pare com a solução \hat{x}_k .
 - 11: Atualize o parâmetro de nível:
 $\ell_k \leftarrow \text{PARNIVEL}(f(\hat{x}_k), f_k^{low}, \nu_k, \lambda_k, m_\ell, \lambda_{max})$.
 - 12: **Se** o problema for inviável **então**
 - 13: Atualize o limite inferior: $f_k^{low} \leftarrow \ell_k$.
 - 14: Retorne ao passo 10.
 - 15: Defina o próximo iterado resolvendo o problema (3.40).
 - 16: Siga os passos 9-10 do Algoritmo 6.
 - 17: **Se** o teste de parada é satisfeito **então**
 - 18: Pare com a solução \hat{x}_k .
 - 19: Chame o oráculo com x_{k+1} para obter $f(x_{k+1})$ e $g_{k+1} \in$
 $\partial f(x_{k+1})$.
 - 20: Decida se o centro de estabilidade deve ser atualizado:
 $\text{CENTROEST}(\hat{x}_k, x_{k+1}, f(\hat{x}_k), f(x_{k+1})), \check{f}_k(x_{k+1}), m_f)$. Em caso
de passo sério, atualize os erros de linearização através de (2.19).
 - 21: Faça o gerenciamento do feixe: $J_{k+1} \leftarrow \text{GERFEIXE}(J_k, np_{max})$.
 - 22: Faça $k \leftarrow k + 1$ e retorne ao passo 9.
-

3.2.1 Formulação dual

Assim como no Método de Feixes Proximal, o QP que define o próximo iterado do Método de Nível também pode ser escrito em sua formulação dual. Utilizando uma abordagem semelhante àquela da Seção 3.1.1 chega-se ao seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_u \frac{1}{2} \left| \sum_{j \in J_k} u_j g_j \right|^2 - \sum_{j \in J_k} u_j (f(\hat{x}_k) - \ell_k - e_j) \\ \text{s.a: } u_j \geq 0, \quad j \in J_k. \end{array} \right. \quad (3.46)$$

No Método de Feixes Proximal também é necessária a restrição $\sum_{j \in J_k} u_j = 1$. Para o Método de Nível deve-se ter $\sum_{j \in J_k} u_j \geq 0$. Como essa condição é atendida se $u_j \geq 0$, não é necessário incluí-la em (3.46).

3.3 MÉTODO DE FEIXES DUPLAMENTE ESTABILIZADO

Conforme visto nas seções anteriores, enquanto a atualização do parâmetro de nível, ℓ_k pode ser feita de maneira natural, a atualização do parâmetro proximal, τ_k , é mais delicada. Oliveira e Solodov, [13], então, propuseram um método que combina ambas as variantes através de dupla estabilização e permite a atualização de τ_k com base no conjunto de nível.

Para este método, conhecido como Método de Feixes Duplamente Estabilizado (MFDE), o próximo iterado é dado por:

$$x_{k+1} = \arg \min \left\{ \check{f}_k(x) + \frac{1}{2\tau_k} |x - \hat{x}_k|^2 : \check{f}_k(x) \leq \ell_k, x \in \mathfrak{R}^n \right\}, \quad (3.47)$$

que pode ser escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,r} r + \frac{1}{2\tau} |x - \hat{x}_k|^2 \\ \text{s.a: } f(\hat{x}_k) - e_j + \langle g_j, x - \hat{x}_k \rangle \leq r, j \in J_k \\ r \leq \ell_k \\ x \in \mathfrak{R}^n, r \in \mathfrak{R}. \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Observa-se que o QP (3.48) contém uma restrição a mais que o QP do Método de Feixes Proximal, e uma restrição e uma variável a mais que o QP do Método de Nível.

Aplicando a condição de otimalidade de primeira ordem ao problema (3.48) pode-se escrever o próximo iterado para o MFDE como:

$$x_{k+1} = \hat{x}_k - \tau_k \mu_k \hat{g}_k, \quad (3.49)$$

em que $\mu_k = \lambda_k + 1$, sendo λ_k o multiplicador de Lagrange associado à restrição de nível, $r \leq \ell_k$, e $\hat{g}_k = \sum_{j \in J_k} u_j g_j$.

Pode-se analisar o Método de Feixes Duplamente Estabilizado como um algoritmo que escolhe de forma automática, a cada iteração, o Método de Feixes Proximal ou o Método de Nível. A partir do valor de λ_k tem-se:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_{k+1}^\tau & \text{se } \lambda_k = 0 \\ x_{k+1}^\ell & \text{se } \lambda_k > 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

em que x_{k+1}^τ é a solução do problema (3.3) e x_{k+1}^ℓ é a solução do problema (3.40).

A Figura 11 mostra esse comportamento: no gráfico à esquerda a restrição de nível está inativa em x_{k+1} , logo o próximo iterado é o mesmo que seria obtido com o Método de Feixes Proximal; já no gráfico à direita x_{k+1} é a projeção do centro de estabilidade \hat{x}_k no conjunto de nível, ou seja, o método se comporta como o Método de Nível.

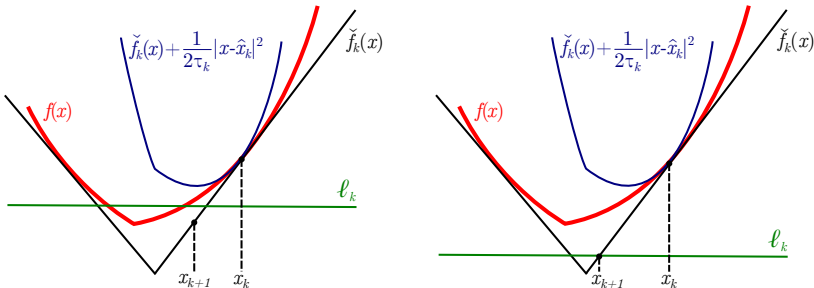


Figura 11 – Iteração Proximal e de Nível.

Com relação à atualização do parâmetro proximal, o Algoritmo 11 mostra como isso é realizado. Na sequência é apresentada uma explicação sobre como o parâmetro cresce ou decresce.

Algoritmo 11 Atualização do parâmetro proximal para o Método de Feixes Duplamente Estabilizado

- 1: **Função** PARPROXMFDE($\tau_k, \mu_k, \tau_{\min}$)
 - 2: Parâmetros: $\tau_{\min} > 0$.
 - 3: **Se** passo sério **então**
 - 4: Retorne $\tau_{k+1} \leftarrow \mu_k \tau_k$.
 - 5: **Senão**
 - 6: Calcule o decréscimo predito: $\delta_k \leftarrow f(\hat{x}_k) - \check{f}_k(x_{k+1})$.
 - 7: Calcule o decréscimo predito do parâmetro de nível: $\nu_k \leftarrow f(\hat{x}_k) - \ell_k$.
 - 8: Retorne $\tau_{k+1} \leftarrow \max \{ \tau_{\min}, \tau_k (\nu_k / \delta_k) \}$.
-

Em caso de passo sério o parâmetro proximal só será aumentado se $\mu_k > 1$, ou seja, se for uma iteração de nível ($x_{k+1} = x_{k+1}^{\ell}$). Por outro lado, τ_k decrescerá somente se o passo for nulo e a iteração for proximal ($x_{k+1} = x_{k+1}^{\tau}$). Observe que, neste caso, se a iteração for de nível, $\check{f}_k(x_{k+1}) = \ell_k$, o que implica $\delta_k = \nu_k$, logo τ_k permanece inalterado.

Com essas considerações pode-se apresentar o pseudocódigo do MFDE, no Algoritmo 12.

Algoritmo 12 Método de Feixes Duplamente Estabilizado

-
- 1: Parâmetros: $k_{max} > 0$, $np_{max} \geq 2$, $m_f \in (0, 1)$, $m_\ell \in (0, 1)$,
 $m_e \in (0, 1)$ $\mu_{max} \geq 1$, $tol_e \geq 0$, $tol_g \geq 0$, $tol_\Delta \geq 0$.
 - 2: Entrada: x_0 .
 - 3: Siga os passos 3-8 do Algoritmo 10.
 - 4: **Enquanto** $k < k_{max}$,
 - 5: Calcule a brecha de otimalidade através de (3.42). Se $\Delta_k \leq tol_\Delta$,
pare com a solução \hat{x}_k .
 - 6: Atualize o parâmetro de nível:
 $\ell_k \leftarrow \text{PARNIVEL}(f(\hat{x}_k), f_k^{\text{low}}, \nu_k, \lambda_k, m_\ell, \lambda_{max})$.
 - 7: **Se** o problema for inviável **então**
 - 8: Atualize o limite inferior: $f_k^{\text{low}} \leftarrow \ell_k$.
 - 9: Retorne ao passo 5.
 - 10: Defina o próximo iterado resolvendo o problema (3.48).
 - 11: Siga os passos 9-10 do Algoritmo 6.
 - 12: **Se** o teste de parada é satisfeito **então**
 - 13: Pare com a solução \hat{x}_k .
 - 14: Chame o oráculo com x_{k+1} para obter $f(x_{k+1})$ e $g_{k+1} \in$
 $\partial f(x_{k+1})$.
 - 15: Decida se o centro de estabilidade deve ser atualizado:
 $\text{CENTROEST}(\hat{x}_k, x_{k+1}, f(\hat{x}_k), f(x_{k+1})), \check{f}_k(x_{k+1}), m_f)$. Atualize
o parâmetro proximal: $\text{PARPROXMFDE}(\tau_k, \mu_k, \tau_{\min})$. Em caso
de passo nulo, se $\mu_k > \mu_{max}$ decresça ν_k : $\nu_k \leftarrow m_e \nu_k$. Em caso de
passo sério, atualize os erros de linearização através de (2.19).
 - 16: Faça o gerenciamento do feixe: $J_{k+1} \leftarrow \text{GERFEIXE}(J_k, np_{max})$.
 - 17: Faça $k \leftarrow k + 1$ e retorne ao passo 5.
-

3.3.1 Formulação dual

O QP que define o próximo iterado do Método de Feixes Duplamente Estabilizado também pode ser escrito em sua formulação dual. Utilizando uma abordagem semelhante àquela da Seção 3.1.1 chega-se

ao seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_u \quad \frac{\tau_k}{2} \left| \sum_{j \in J_k} u_j g_j \right|^2 - \sum_{j \in J_k} u_j (f(\hat{x}_k) - \ell_k - e_j) \\ \text{s.a:} \quad \sum_{j \in J_k} u_j \geq 1, \\ \quad \quad u_j \geq 0, \quad j \in J_k. \end{array} \right. \quad (3.51)$$

3.4 CONCLUSÕES

Apesar de as variantes dos Métodos de Feixes apresentadas neste capítulo pertencerem à mesma família de métodos, há diferenças na atualização de alguns parâmetros. No Capítulo 5 essas variantes, além do Método de Planos Cortantes, serão utilizadas para resolver o problema do comissionamento de unidades termelétricas, que será apresentado no Capítulo 4.

4 COMISSONAMENTO DE UNIDADES TERMELÉTRICAS

Conforme já citado, o problema do comissionamento de unidades termelétricas tem características que tornam sua resolução uma tarefa desafiadora, fazendo com que técnicas de decomposição tenham de ser aplicadas. Neste cenário, a RL é uma dessas técnicas. No entanto, a eficiência da RL depende de um bom método para resolver o problema dual, cuja função objetivo é côncava e não-diferenciável.

Neste capítulo será apresentada primeiramente a modelagem para o sistema termelétrico, assim como o problema de otimização em sua forma primal. Em seguida serão apresentados dois esquemas de decomposição do problema baseados na RL, que resultam em diferentes problemas não-diferenciáveis.

Estes problemas serão usados no próximo capítulo para compor a bateria de testes deste trabalho.

4.1 REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA TERMELÉTRICO

Nesta seção são apresentadas as características que definem a modelagem do sistema termelétrico, ou seja, como são representadas a rede de transmissão e as unidades geradoras.

4.1.1 Rede de transmissão

Neste trabalho será utilizada uma modelagem linear para a rede de transmissão. Deste modo, as seguintes premissas serão adotadas:

- Os módulos das tensões em todas as barras são iguais a 1 p.u.;
- As resistências e admitâncias transversais das linhas de transmissão são desprezadas;
- As aberturas angulares correspondentes às barras da rede são

pequenas, ϕ , de modo que $\text{sen}(\phi) \approx \phi$.

Dadas estas considerações, o fluxo de potência entre as barras i e j , fl_{ij} , em um estágio de tempo t é dado por:

$$fl_{ij} = S_B x_{ij}^{-1} (\phi_{it} - \phi_{jt}), \quad (4.1)$$

em que:

S_B é a base de potência do sistema, para converter de p.u. para MW, em MW;

x_{ij} é a reatância da linha que conecta as barras i e j , em p.u.;

ϕ_{it} é o ângulo de tensão da barra i no estágio de tempo t , em rad.;

ϕ_{jt} é o ângulo de tensão da barra j no estágio de tempo t , em rad.

4.1.2 Atendimento à demanda

As barras de um sistema de potência podem ser divididas em quatro conjuntos: barras contendo unidades geradoras, I_g ; barras sem unidades geradoras, $I_{\bar{g}}$; barras contendo carga, I_c ; barras sem carga, $I_{\bar{c}}$. A partir desses quatro conjuntos podem ser formados quatro subconjuntos: barras com geradores e com carga: $I_{gc} = I_g \cap I_c$; barras com geradores e sem carga: $I_{g\bar{c}} = I_g \cap I_{\bar{c}}$; barras sem geradores e com carga: $I_{\bar{g}c} = I_{\bar{g}} \cap I_c$; barras sem geradores e sem carga: $I_{\bar{g}\bar{c}} = I_{\bar{g}} \cap I_{\bar{c}}$. Essas divisões serão úteis nos esquemas de decomposições a serem apresentados adiante.

O conjunto de todas as barras do sistema, I , é dado por:

$$I = I_g \cup I_{\bar{g}} = I_c \cup I_{\bar{c}} = I_{gc} \cup I_{g\bar{c}} \cup I_{\bar{g}c} \cup I_{\bar{g}\bar{c}}, \quad (4.2)$$

e o número de barras, N_b , pode ser escrito como:

$$N_b = |I|. \quad (4.3)$$

Além disso, uma dada barra $i \in I_g$ pode ter mais de um gerador conectado a ela. Por este motivo, o conjunto I_{gi} contém os índices dos

geradores conectados à barra i . O número total de unidades geradoras do sistema é, então, dado por:

$$N_g = \sum_{i \in I_g} |I_{gi}|. \quad (4.4)$$

Com as considerações citadas, as restrições de atendimento à demanda podem ser escritas para cada um dos subconjuntos mencionados:

$$\sum_{j \in I_{gi}} p_{jt} + S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = D_{it}, \quad i \in I_{gc}, \quad (4.5)$$

$$\sum_{j \in I_{gi}} p_{jt} + S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = 0, \quad i \in I_{g\bar{c}}, \quad (4.6)$$

$$S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = D_{it}, \quad i \in I_{g\bar{c}}, \quad (4.7)$$

$$S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = 0, \quad i \in I_{g\bar{c}}, \quad (4.8)$$

em que:

I_{gi} é um conjunto que contém os índices das unidades geradoras conectadas à barra i ;

p_{jt} é a potência da unidade geradora j no estágio de tempo t , em MW;

M_i é o conjunto de todas as barras conectadas à barra i ;

ϕ_{it} é o ângulo de tensão da barra i no estágio de tempo t , em rad;

ϕ_{bt} é o ângulo de tensão da barra b no estágio de tempo t , em rad;

D_{it} é a demanda da barra i no estágio de tempo t , em MW.

4.1.3 Limites operativos

Para a modelagem da rede de transmissão apresentada, as restrições dos limites de fluxos entre linhas podem ser escritos como (4.9).

$$-\overline{f}l_{ib} \leq S_B x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) \leq \overline{f}l_{ib}, \quad i \in I, b \in M_i, \quad (4.9)$$

em que $\overline{f}l_{ib}$ é o fluxo de potência máximo entre as barras i e b .

4.2 UNIDADES TERMELETRICAS

Nesta seção será apresentada a modelagem matemática das unidades termelétricas utilizada neste trabalho.

4.2.1 Custo de geração

O custo de geração de uma unidade termelétrica típica (do tipo convencional, que utilizam combustíveis fósseis, como carvão, gás natural, óleo combustível; ou nucleares) tem a forma mostrada na Figura 12 [2].

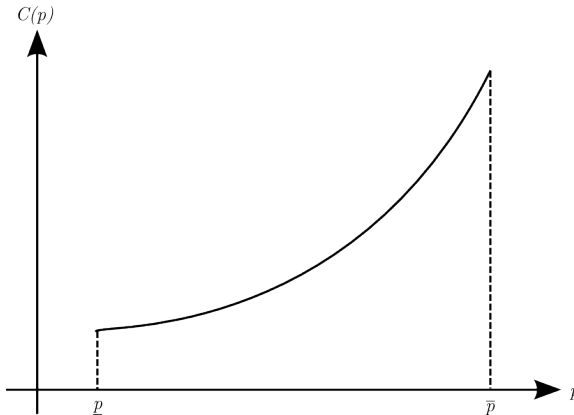


Figura 12 – Custo de geração de uma unidade termelétrica típica.

A curva da Figura 12 é usualmente representada através de uma função quadrática:

$$C(p) = q_0 + q_1p + q_2p^2. \quad (4.10)$$

em que $C(p)$ é a função custo de geração para uma dada unidade geradora, e os coeficientes q_0 , q_1 e q_2 são determinados através de regressão não-linear.

Uma representação alternativa consiste em aproximar a função $C(p)$ por um conjunto de funções lineares, ou seja, representá-la através

de uma função linear por partes, $C^{LPP}(p)$.

Algumas abordagens são possíveis para essa aproximação:

- retas tangentes: cada reta toca em um único ponto da função original;
- retas secantes: dois pontos da função original são necessários para formar uma reta;
- retas que se situam entre os dois extremos citados.

Na abordagem utilizada neste trabalho, a função custo $C(p)$ é aproximada por um conjunto de retas secantes. Na Figura 13 é mostrado um exemplo com três funções lineares.

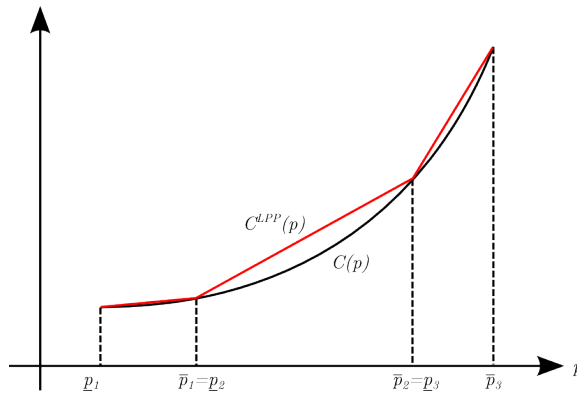


Figura 13 – Custo de geração linear por partes.

Considerando que $C(p)$ é convexa, garante-se que $C^{LPP}(p) \geq C(p) \forall p \in [p_1, \bar{p}_n]$, em que p_1 é o limite inferior da primeira reta, \bar{p}_n é o limite superior da reta n , e n é o número de retas secantes. Para um intervalo j tal que $p \in [p_j, \bar{p}_j]$, a equação da reta é dada por:

$$C_j^{LPP}(p) = a_0 + a_1 p, \quad (4.11)$$

em que:

$$a_0 = q_0 - q_2 p_j \bar{p}_j, \quad (4.12)$$

$$a_1 = q_1 + q_2(\underline{p}_j + \bar{p}_j). \quad (4.13)$$

Por sua vez, a função custo linear por partes é definida como:

$$C^{LPP}(p) = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{C_j^{LPP}(p)\}. \quad (4.14)$$

O erro absoluto para o segmento j é definido como:

$$\epsilon_j^{abs}(p) = C_j^{LPP}(p) - C(p). \quad (4.15)$$

Manipulando essa expressão, chega-se a:

$$\epsilon_j^{abs}(p) = -q_2(p - \underline{p}_j)(p - \bar{p}_j), \quad (4.16)$$

e o erro máximo é dado por:

$$\epsilon_{j,max}^{abs} = \frac{q_2}{4}(\bar{p}_j - \underline{p}_j)^2. \quad (4.17)$$

Pode-se controlar o erro da aproximação de $C(p)$ através de $C^{LPP}(p)$ utilizando $\epsilon_{j,max}^{abs}$. No entanto, como esse erro é expresso em R\$, a escolha de um erro limite ϵ_{lim}^{abs} tal que $\epsilon_{i,max}^{abs} \leq \epsilon_{lim}^{abs}$ pode ser complicada. Principalmente se houver um conjunto de unidades geradoras termelétricas com características muito distintas.

Uma alternativa é utilizar o erro relativo entre $C(p)$ e $C_j^{LPP}(p)$, definido como:

$$\epsilon_j^{rel}(p) = \frac{C_j^{LPP}(p) - C(p)}{C(p)} = \frac{\epsilon_j^{abs}(p)}{C(p)}. \quad (4.18)$$

O ponto em que o erro relativo é máximo é dado por:

$$p_{\epsilon_j^{max}} = \frac{\sqrt{q_2(q_2 a_0^2 - q_1 a_0 a_1 + q_0 a_1^2)} - a_0 q_2}{a_1 q_2}, \quad (4.19)$$

e o erro relativo nesse ponto é:

$$\epsilon_{j,max}^{rel} = \frac{\epsilon_j^{abs}(p_{\epsilon_j^{max}})}{q_0 + q_1 p_{\epsilon_j^{max}} + q_2 (p_{\epsilon_j^{max}})^2}. \quad (4.20)$$

Uma forma de determinar $C_j^{LPP}(p)$ mantendo um erro relativo controlado e maximizando seu limite \bar{p}_j é apresentada no Algoritmo 13, desenvolvido pelo autor.

Algoritmo 13 Linearização com erro relativo controlado

- 1: **Função** LINERROCONTR($\underline{p}_j, \epsilon_{lim}^{rel}$)
 - 2: Entrada: δ .
 - 3: Faça $k \leftarrow 1, \bar{p}_j^k \leftarrow \underline{p}_j$.
 - 4: **Enquanto** $\bar{p}_j^k < \bar{p}$,
 - 5: Determine o ponto máximo do segmento j : $\bar{p}_j^k \leftarrow \underline{p}_j + k\delta$;
 - 6: Determine os coeficientes a_0 e a_1 da reta que passa pelos pontos \underline{p}_j e \bar{p}_j^k , através de (4.12) e (4.13);
 - 7: Calcule o erro relativo máximo dessa reta, $\epsilon_{rel,k}^{i,max}$, através de (4.20);
 - 8: **Se** $\epsilon_{rel,k}^{i,max} < \epsilon_{lim}^{rel}$, **então**
 - 9: Faça $k \leftarrow k + 1$ e retorne ao passo 4.
 - 10: **Senão**
 - 11: Faça $\bar{p}_j \leftarrow \bar{p}_j^{k-1}$.
 - 12: Retorne \bar{p}_j e pare.
-

O Algoritmo 13 encontra a equação de uma linearização. Para a determinação das linearizações em todo o intervalo de geração da unidade geradora, utiliza-se o Algoritmo 14, em que se garante que $\epsilon^{rel}(p) \leq \epsilon_{lim}^{rel} \forall p \in [\underline{p}, \bar{p}]$.

Algoritmo 14 Função custo linear por partes

- 1: **Função** CUSTOLPP($\underline{p}, \bar{p}, \epsilon_{lim}^{rel}$)
 - 2: Faça $j \leftarrow 1, \underline{p}_j \leftarrow \underline{p}, \bar{p}_j \leftarrow \underline{p}$.
 - 3: **Enquanto** $\bar{p}_j < \bar{p}$,
 - 4: Determine o ponto máximo do segmento j :
 $\bar{p}_j \leftarrow \text{LINERROCONTR}(\underline{p}_j, \epsilon_{lim}^{rel})$;
 - 5: Faça $j \leftarrow j + 1$ e retorne ao passo 3.
-

4.2.2 Custo de partida

Devido à natureza da geração termelétrica, pode ser necessário um intervalo de tempo considerável para que a unidade atinja o estado ideal para começar a gerar energia. O combustível consumido nesse intervalo de tempo pode ser modelado através de um custo de partida [2].

Neste trabalho, o custo de partida é modelado de forma simplificada, através de um valor constante, e se dá de forma instantânea, entre dois estágios de tempo, como mostram as Equações (4.21) e (4.22).

$$cp_{it} \geq 0, \quad (4.21)$$

$$cp_{it} \geq (u_{it} - u_{i,t-1}) CP_i, \quad (4.22)$$

em que:

cp_{it} é uma variável auxiliar utilizada para modelar o custo de partida da unidade geradora i no estágio de tempo t , em R\$;

u_{it} é uma variável binária com valor 1 se a unidade geradora i está ligada no estágio t ou 0 se desligada;

CP_i é o custo de partida da unidade geradora i , em R\$.

4.2.3 Rampas de incremento/decremento de geração

Devido a características termodinâmicas do processo de geração de unidades termelétricas, existem limitações com relação às mudanças no ponto de operação entre estágios sucessivos de tempo. Assim, restrições conhecidas como rampas de incremento e decremento de geração devem ser incluídas na modelagem do problema.

Neste trabalho, utiliza-se a modelagem descrita em [89], que utiliza as Equações (4.23) e (4.24).

$$p_{it} \leq p_{i,t-1} + u_{i,t-1} \Delta_i^u + (1 - u_{i,t-1}) \underline{p}_i, \quad (4.23)$$

$$p_{i,t-1} \leq p_{it} + u_{it} \Delta_i^d + (1 - u_{it}) \underline{p}_i, \quad (4.24)$$

em que:

Δ_i^u é o máximo incremento de potência entre dois estágios consecutivos para a unidade geradora i , em MW;

Δ_i^d é o máximo decréto de potência entre dois estágios consecutivos para a unidade geradora i , em MW;

p_i é a potência mínima de geração da unidade i , em MW.

Com a modelagem acima, três tipos de rampas são contempladas: a transição de uma unidade geradora desligada para ligada, o incremento ou decréto de potência para uma unidade já ligada, e a transição de uma unidade ligada para desligada.

4.2.4 Tempos mínimos de permanência em/fora de operação

As restrições de tempos mínimos de permanência em operação e fora de operação devem ser modeladas para evitar estresse mecânico nas unidades e, conseqüentemente, evitar o aumento de paradas para manutenção. Assim, é importante que o modelo leve em consideração os seguintes aspectos:

- Manter uma unidade geradora operando por um tempo mínimo, caso esteja ligada; ou
- Manter uma unidade geradora desligada por um tempo mínimo, caso esteja fora de operação.

Esse comportamento é modelado através das Equações (4.25) e (4.26), retiradas de [89].

$$u_{it} \geq u_{i,r} - u_{i,r-1}, \quad r \in [t - t_i^{up} + 1, t - 1], \quad (4.25)$$

$$u_{it} \leq 1 + u_{i,r} - u_{i,r-1}, \quad r \in [t - t_i^{down} + 1, t - 1], \quad (4.26)$$

em que:

t_i^{up} é o número mínimo de estágios de tempo em operação para a unidade geradora i , em horas;

t_i^{down} é o número mínimo de estágios de tempo fora operação para a unidade geradora i , em horas.

4.2.5 Limites operativos

Como mostrado na Figura 12, as unidades geradoras têm limites inferiores e superiores de geração. Além disso, as restrições dos limites devem considerar o estado da unidade – ligada ou desligada – em um estágio de tempo, como mostra a Equação (4.27).

$$u_{it}\underline{p}_i \leq p_{it} \leq u_{it}\bar{p}_i, \quad (4.27)$$

em que:

\underline{p}_i é a potência mínima de geração da unidade i , em MW;

\bar{p}_i é a potência máxima de geração da unidade i , em MW.

4.3 MODELAGEM DO PROBLEMA DO COMISSIONAMENTO DE UNIDADES TERMELETRICAS

Consideradas as características do sistema termelétrico (tipos de barras, fluxos e limites entre barras) e das unidades geradoras (custo de geração e de partida, rampas, tempos mínimos de permanência em e fora de operação, limites operativos), pode ser apresentada a modelagem do problema do comissionamento de unidades termelétricas, conforme as Equações (4.28)-(4.40).

$$\min C^{Tot} = \sum_{t=1}^T \sum_{i \in I_g} (q_0^i u_{it} + q_1^i p_{it} + q_2^i p_{it}^2 + cp_{it}) \quad (4.28)$$

$$\text{s.a: } \sum_{j \in I_{gi}} p_{jt} + S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = D_{it}, \quad (4.29)$$

$$\sum_{j \in I_{gi}} p_{jt} + S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = 0, \quad (4.30)$$

$$S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = D_{it}, \quad (4.31)$$

$$S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = 0, \quad (4.32)$$

$$p_{it} \leq p_{i,t-1} + u_{i,t-1} \Delta_i^u + (1 - u_{i,t-1}) \underline{p}_i \quad (4.33)$$

$$p_{i,t-1} \leq p_{it} + u_{it} \Delta_i^d + (1 - u_{it}) \underline{p}_i \quad (4.34)$$

$$u_{it} \geq u_{i,r} - u_{i,r-1}, \quad (4.35)$$

$$u_{it} \leq 1 + u_{i,r} - u_{i,r-1}, \quad (4.36)$$

$$cp_{it} - (u_{it} - u_{i,t-1}) CP_i \geq 0 \quad (4.37)$$

$$u_{it} \underline{p}_i \leq p_{it} \leq u_{it} \bar{p}_i \quad (4.38)$$

$$-\bar{f}_{ib} \leq S_B x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) \leq \bar{f}_{ib}, \quad (4.39)$$

$$u_{it} \in \{0, 1\}. \quad (4.40)$$

Na modelagem acima são utilizadas funções quadráticas para representar os custos de geração das unidades geradoras. Alternativamente, ao se utilizar custos lineares por partes, a função objetivo (4.28) é escrita como:

$$\min C^{Tot} = \sum_{t=1}^T \sum_{i \in I_g} (l_{i,t} + cp_{it}), \quad (4.41)$$

em que $l_{i,t}$ são variáveis auxiliares utilizadas para representar as funções lineares que compõem a função custo, através do conjunto de restrições (4.42).

$$l_{i,t} \geq a_0^{i,m} + a_1^{i,m} p_{it}, \quad m \in \{1, \dots, NR_i\}, \quad (4.42)$$

em que NR_i é o número de linearizações utilizadas para representar a função custo de geração da unidade i .

Observa-se que a função objetivo – tanto com custos quadráticos, (4.28), quanto com custos lineares por partes, (4.42), – não apresenta acoplamento temporal nem espacial. Em outras palavras, o custo de uma unidade geradora não depende de seu estado em outros estágios de tempo, bem como independe de outras unidades.

No entanto, o mesmo desacoplamento não ocorre para as restrições

do problema:

- As restrições de atendimento à demanda, (4.29)-(4.32), apresentam acoplamento espacial, pois contêm os fluxos entre barras;
- As restrições de rampa, (4.33)-(4.34), apresentam acoplamento temporal, pois a potência da unidade geradora i no estágio t depende de sua potência no estágio anterior, $p_{i,t-1}$;
- As restrições de mínimos tempos em operação e fora de operação, (4.35)-(4.36), apresentam acoplamento temporal, pois o estado de uma unidade geradora i no estágio t , u_{it} , depende dos estados passados;
- As restrições de custo de partida, (4.37), apresentam acoplamento temporal, pois o custo de partida de uma unidade geradora i no estágio t depende tanto do seu estado anterior quanto do atual.

Dado que o acoplamento espacial se deve exclusivamente às restrições de atendimento à demanda, pode ser vantajoso se, de alguma forma, essas restrições puderem ser relaxadas ou modificadas. Como apresentado na Seção 1.1 e para uma modelagem simplificada do problema do comissionamento de unidades termelétricas no Apêndice A, a RL pode ser utilizada para este fim.

4.4 RELAXAÇÃO LAGRANGIANA APLICADA AO PROBLEMA DO COMISSIONAMENTO DE UNIDADES TERMELETRICAS

Nas próximas seções são apresentadas duas estratégias em que o objetivo é substituir o problema (4.28)-(4.40), que é de difícil solução, por uma série de subproblemas menores, mais simples, que são coordenados pelo problema dual.

É importante lembrar que a maximização do problema dual tipicamente fornece um ponto de operação inviável. Ou seja, após a

resolução do problema dual é necessário aplicar uma etapa chamada de recuperação primal, cujo objetivo é obter um ponto viável de operação. Essa etapa posterior, no entanto, foge do escopo deste trabalho.

4.4.1 Duplicação de variáveis

A primeira estratégia consiste na duplicação das variáveis que acoplam espacialmente o problema. A formulação (4.43)-(4.47) abaixo é equivalente à formulação original, (4.28)-(4.40), com a substituição de p_{jt} por pa_{jt} nas restrições de atendimento à demanda e a inclusão do conjunto de restrições $p_{it} - pa_{it} = 0$.

$$\min C^{Tot} = \sum_{t=1}^T \sum_{i \in I_g} (q_0^i u_{it} + q_1^i p_{it} + q_2^i p_{it}^2 + cp_{it}) \quad (4.43)$$

$$\text{s.a: } \sum_{j \in I_{g_i}} pa_{jt} + S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = D_{it}, \quad (4.44)$$

$$\sum_{j \in I_{g_i}} pa_{jt} + S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = 0, \quad (4.45)$$

$$p_{it} - pa_{it} = 0, \quad (4.46)$$

$$(4.31)-(4.40). \quad (4.47)$$

Na formulação acima o problema pode ser decomposto através da relaxação das restrições (4.46). Transferindo-as para a função objetivo e incluindo os multiplicadores de Lagrange λ_{it} , chega-se à função dual (4.48).

$$\Theta(\lambda) = \min \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in I_g} (q_0^i u_{it} + q_1^i p_{it} + q_2^i p_{it}^2 + cp_{it}) + \sum_{i \in I_g} \lambda_{it} (p_{it} - pa_{it}) \right] \quad (4.48)$$

$$\text{s.a: } (4.44)-(4.47).$$

Com a relaxação das restrições 4.46, que acoplam as variáveis de geração p_{it} entre as unidades (acoplamento espacial), a função dual

(4.48) pode ser decomposta em um subproblema para cada unidade geradora, $\theta_{UG}^i(\lambda)$, (4.49), e um subproblema para a rede, $\theta_R(\lambda)$, (4.50).

$$\begin{aligned}
\theta_{UG}^i(\lambda) = \min & \sum_{t=1}^T [q_0^i u_{it} + (q_1^i + \lambda_{it}) p_{it} + q_2^i p_{it}^2 + cp_{it}] \\
\text{s.a: } & p_{it} \leq p_{i,t-1} + u_{i,t-1} \Delta_i^u + (1 - u_{i,t-1}) \underline{p}_i, \\
& p_{i,t-1} \leq p_{it} + u_{it} \Delta_i^d + (1 - u_{it}) \underline{p}_i, \\
& u_{it} \geq u_{i,r} - u_{i,r-1}, \\
& u_{it} \leq 1 + u_{i,r} - u_{i,r-1}, \\
& cp_{it} \geq (u_{it} - u_{i,t-1}) CP_i, \\
& u_{it} \underline{p}_i \leq p_{it} \leq u_{it} \bar{p}_i, \\
& u_{it} \in \{0, 1\}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
\theta_R(\lambda) = \min & \sum_{t=1}^T \sum_{i \in I_g} -\lambda_{it} p_{ait} \\
\text{s.a: } & \sum_{j \in I_{gi}} p_{ajt} + S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = D_{it}, \quad i \in I_{gc} \\
& \sum_{j \in I_{gi}} p_{ajt} + S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = 0, \quad i \in I_{g\bar{c}} \\
& S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = D_{it}, \quad i \in I_{g\bar{c}} \\
& S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = 0, \quad i \in I_{g\bar{c}} \\
& -\bar{f}_{ib} \leq S_B x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) \leq \bar{f}_{ib},
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Os problemas (4.49) e (4.50) cumprem o papel esperado da RL: separar o problema original em um conjunto de problemas de menor porte e independentes.

Adicionalmente, observa-se que o subproblema referente a cada unidade geradora mantém o acoplamento temporal. Ou seja, devido à presença de variáveis binárias u_{it} , (4.49) ainda é inteiro-misto. Dado o tamanho do problema, podem ser utilizados pacotes de otimização de Programação Quadrática Inteira-Mista (MIQP) (ou Programação

Linear Inteira-Mista (MILP), caso as funções de custo dos geradores sejam representadas por funções lineares por partes), como CPLEX, [90] ou Gurobi, [91].

Por outro lado, o subproblema referente à rede não é acoplado no tempo e não apresenta variáveis binárias. Logo, pode-se resolver (4.50) ou um subproblema para cada estágio.

Com as formulações dos subproblemas, a função dual pode ser escrita como:

$$\Theta(\lambda) = \sum_{i \in I_g} \theta_{UG}^i(\lambda) + \theta_R(\lambda) \quad (4.51)$$

$$= \sum_{i \in I_g} \theta_{UG}^i(\lambda) + \sum_{t=1}^T \theta_R^t(\lambda), \quad (4.52)$$

em que $\theta_R^t(\lambda)$ corresponde à parcela do problema (4.50) referente ao estágio t .

Utilizando esta decomposição o número de variáveis do problema dual é $N_g \cdot T$.

A estratégia de decomposição baseada em duplicação de variáveis permite uma certa liberdade em relação a quais termos devem ser duplicados. Pode-se, por exemplo, substituir p_{it} por pa_{it} também na função objetivo (4.43). Desta forma, ao duplicar o termo quadrático, os subproblemas referentes às unidades geradoras serão MILPs e os subproblemas referentes à rede serão QPs. Apesar de esta estratégia fornecer um oráculo mais barato computacionalmente (MILPs são tipicamente mais fáceis de serem resolvidos que MIQPs), testes computacionais tiveram desempenho muito inferior à estratégia apresentada anteriormente. Por este motivo, no Capítulo 5 serão considerados os subproblemas (4.49) e (4.50).

4.4.2 Relaxação das restrições de atendimento à demanda das barras com geração

Um esquema de decomposição alternativo ao anterior consiste em relaxar as restrições de atendimento à demanda das barras com geração. A função dual para essa decomposição é mostrada em (4.53)-(4.54).

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda) = \min \sum_{t=1}^T \sum_{i \in I_g} (q_0^i u_{it} + q_1^i p_{it} + q_2^i p_{it}^2 + cp_{it}) + \quad (4.53) \\ \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in I_{gc}} \lambda_{it} \left(p_{it} + S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) - D_{it} \right) + \right. \\ \left. \sum_{i \in I_{g\bar{c}}} \lambda_{it} \left(p_{it} + S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) \right) \right] \\ \text{s.a: (4.31)-(4.40).} \quad (4.54) \end{aligned}$$

Os subproblemas das unidades geradoras são iguais aos da decomposição anterior, ou seja, (4.49). Já o subproblema da rede é apresentado nas Equações (4.55).

$$\begin{aligned} \theta_R(\lambda) = \min \sum_{t=1}^T \left[\sum_{i \in I_{gc}} \lambda_{it} \left(S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) - D_{it} \right) + \right. \\ \left. \sum_{i \in I_{g\bar{c}}} \lambda_{it} \left(S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) \right) \right] \quad (4.55) \\ \text{s.a: } S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = D_{it}, \quad i \in I_{gc} \\ S_B \sum_{b \in M_i} x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) = 0, \quad i \in I_{g\bar{c}} \\ -\bar{f}l_{ib} \leq S_B x_{ib}^{-1} (\phi_{bt} - \phi_{it}) \leq \bar{f}l_{ib}. \end{aligned}$$

O problema (4.55) não apresenta acoplamento temporal, logo pode ser decomposto e resolvido para cada estágio de tempo.

Nesta abordagem o número de variáveis duais também é $N_g \cdot T$.

4.5 CONCLUSÕES

O problema apresentado na Seção 4.3 é de grande porte, não-linear e inteiro misto. Devido a essas características, o custo computacional para resolvê-lo pode ser muito elevado. Logo, dois esquemas de decomposição foram propostos, que substituem o problema original por uma série de subproblemas menores e independentes.

No Capítulo 5 será apresentado um sistema termelétrico teste, e os problemas duais das duas decomposições serão resolvidos utilizando o Método de Planos Cortantes apresentado no Capítulo 2 e os Métodos de Feixes apresentados no Capítulo 3.

5 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Este capítulo tem como objetivo descrever os principais resultados computacionais obtidos para a implementação dos métodos de otimização não-diferenciável apresentados e para o modelagem proposta para o problema do comissionamento de unidades termelétricas.

O capítulo está organizado da seguinte forma. Primeiramente são apresentados detalhes sobre a implementação dos métodos e o sistema teste utilizado, assim como a calibração dos parâmetros utilizados nos Métodos de Feixes. Na sequência são apresentados resultados obtidos para os dois esquemas de decomposição descritos no Capítulo 4, assim como alguns casos particulares relacionados ao gerenciamento do feixe, ponto inicial, limite inferior e tolerância dos métodos. Também são considerados casos com horizontes de planejamento mais longos, de até 168 horas. Por fim as três variantes dos Métodos de Feixes são comparadas em uma bateria de casos com demandas variadas.

5.1 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Os métodos de otimização não-diferenciável apresentados nos Capítulos 2 e 3 foram implementados em linguagem C++. A biblioteca Eigen, [92], foi utilizada para as operações vetoriais e matriciais. O compilador utilizado foi o Microsoft Visual C++ 2013, com *flag* de otimização /O2, para maximizar o desempenho.

A modelagem do sistema termelétrico e dos esquemas de decomposição também foram implementados em linguagem C++, de maneira genérica, o que permite que o código-fonte desenvolvido possa ser utilizado para diferentes sistemas termelétricos.

Os resultados que serão mostrados nas próximas seções foram executados em um computador com processador Intel(R) Core i7 860 @ 2.8 GHz, com 8 GB de memória RAM.

5.2 SISTEMA TESTE

O sistema termelétrico para o caso base possui as seguintes características: 46 barras, 95 linhas de transmissão que interligam essas barras e 10 unidades geradoras termelétricas, como mostra a Figura 14. Os dados das linhas de transmissão e dos geradores são apresentados no Apêndice B, respectivamente nas Tabelas B.1 e B.2.

Além disso, os custos de geração das unidades termelétricas são representados através de funções quadráticas.

O horizonte de planejamento é de 24 horas, e as demandas das barras de geração seguem o perfil da Figura 15, extraído de [93]. Na Tabela B.3 são apresentados os fatores multiplicados por esse perfil para cada barra contendo carga.

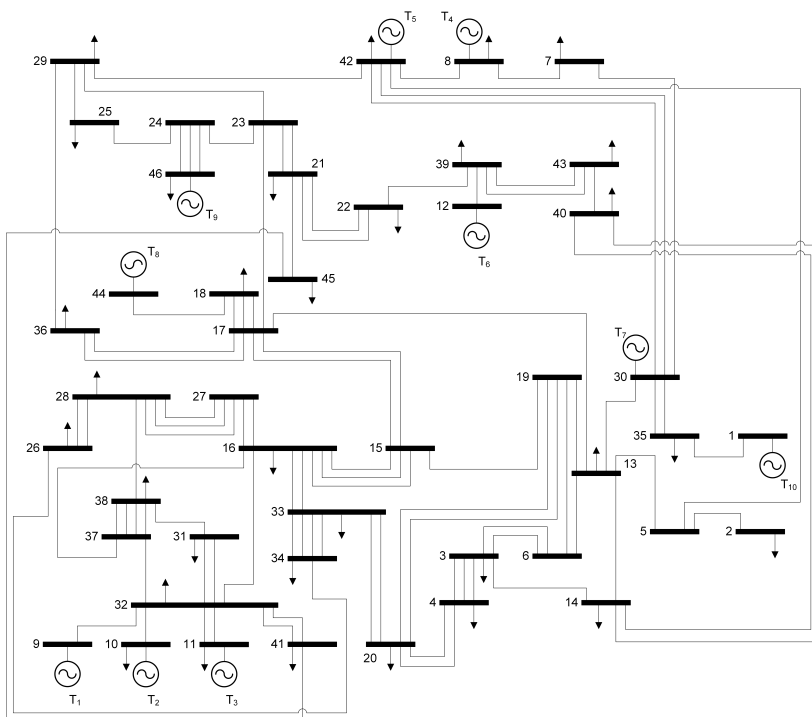


Figura 14 – Sistema termelétrico.

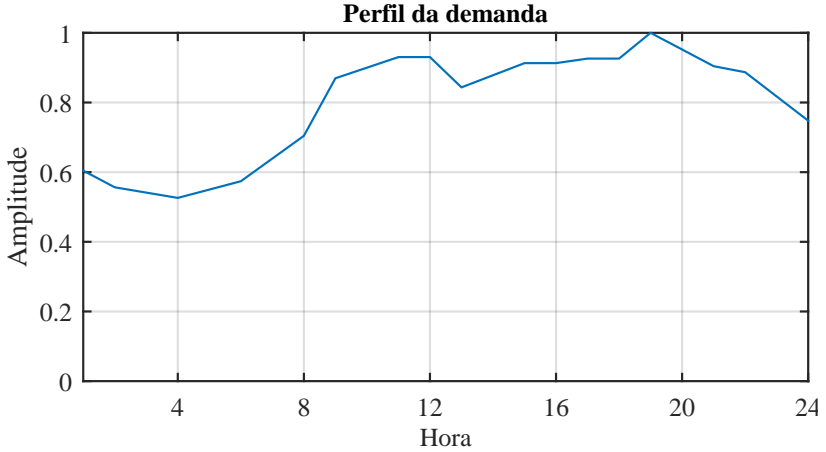


Figura 15 – Perfil da demanda.

Utilizando os dados apresentados no Apêndice B, o problema do comissionamento de unidades termelétricas pode ser resolvido em sua formulação primal, (4.28)-(4.40), o que fornece o custo ótimo de operação de R\$ 4.181.205, 735. Conhecendo esse valor pode-se calcular a brecha de dualidade para a solução dos problemas duais nas próximas seções. Como citado no Apêndice A, a brecha de dualidade relativa, $gap\%$, é dada por:

$$gap\% = 100 \frac{C^{Tot}(p^*) + f(x^*)}{C^{Tot}(p^*)}, \quad (5.1)$$

em que $C^{Tot}(p^*)$ é o valor da função objetivo na solução do problema primal, e $f(x^*)$ é o negativo da função dual na solução do problema dual.

5.3 CALIBRAÇÃO DOS MÉTODOS

Métodos de Feixes contêm diversos parâmetros que devem ser selecionados a fim de se obter um bom desempenho computacional dos algoritmos. A escolha de tais parâmetros é usualmente feita empirica-

mente, pois é comum que essa escolha seja diferente para cada tipo de problema.

Para este trabalho foram criados dez casos baseados no sistema teste e as demandas foram multiplicadas por constantes. Desta forma foram criadas condições de carregamento do sistema leves, médias e pesadas. Esse conjunto de dez problemas foi resolvido utilizando a decomposição por duplicação de variáveis para os três Métodos de Feixes apresentados, e os parâmetros foram alterados sequencialmente. O valor de cada parâmetro com melhor desempenho (menor número de chamadas ao oráculo, que coincide com o número de iterações) foi escolhido.

Os seguintes parâmetros não foram modificados nos métodos:

- número máximo de iterações: 1000;
- tamanho máximo do feixe: 500. O gerenciamento do feixe é feito da seguinte forma: assim que o tamanho do feixe atinge 400 linearizações, em caso de passo sério são eliminadas linearizações inativas. Caso todas as linearizações estejam ativas, são eliminadas as duas mais antigas, e são inseridas a linearização da iteração atual, \bar{f}_{k+1} , e a linearização agregada, \bar{f}_k^a ;
- tolerância: $tol = (1 + |f(\hat{x}_k)|)10^{-4}$. Os testes de parada para a linearização agregada e para o gap de otimalidade (para o Método de Nível e para o Método de Feixes Duplamente Estabilizado) foram então definidos como:

$$\hat{\epsilon}_k < 10 \cdot tol, \quad |\hat{g}_k| < tol \quad \text{e} \quad \Delta_k < 10 \cdot tol.$$

Para o Método de Planos Cortantes o teste de parada é dado por:

$$\delta_k \leq 10 \cdot tol.$$

Além disso, o ponto de partida de todos os casos foi escolhido como $x_0 = 0 \in \mathfrak{R}^n$.

Para o Método de Feixes Proximal, o procedimento de escolha dos melhores parâmetros forneceu: $m_f = 0, 1$, $\tau_1 = 10$, $\tau_{\min} = 10^{-3}$ e $a = 25$.

Para o Método de Nível foram selecionados: $m_f = 0, 1$, $m_\ell = 0, 25$ e $\mu_{\max} = 1$.

Já para o Método de Feixes Duplamente Estabilizado os seguintes parâmetros foram considerados mais adequados: $m_f = 0, 1$, $m_\ell = 0, 25$, $\mu_{\max} = 1$ e $\tau_{\min} = 10^{-3}$.

Tanto o MFDE quanto o Método de Nível podem se beneficiar de uma estimativa do limite inferior da função dual. Tal estimativa envolve um conhecimento prévio da função a ser minimizada. Neste trabalho utiliza-se $f_1^{\text{low}} = -7,5 \cdot 10^6$. O parâmetro de nível inicial ℓ_1 depende de v_1^ℓ , que é dado por $(1 - m_\ell)(f(\hat{x}_1) - f_1^{\text{low}})$.

Os QPs para a obtenção do próximo iterado dos Métodos de Feixes foram resolvidos utilizando as formulações duais apresentadas nas Seções 3.1.1, 3.2.1 e 3.3.1.

Com relação ao oráculo, escolheu-se a formulação linear por partes para a modelagem das unidades geradoras. De acordo com o procedimento apresentado no Algoritmo 13 definiu-se $\epsilon_{lim}^{rel} = 0,5\%$, de forma que o número de linearizações para cada unidade geradora é apresentado na Tabela 1.

5.4 ESQUEMAS DE DECOMPOSIÇÃO

No Capítulo 4 foram apresentados dois esquemas de decomposição para o problema do comissionamento de unidades termelétricas: duplicação das variáveis de geração termelétrica e relaxação das restrições de atendimento à demanda das barras com geração. Nas próximas subseções são apresentados os resultados obtidos para os dois esquemas utilizando quatro métodos de otimização não-diferenciável: Método de Feixes Proximal, Método de Nível, Método de Feixes Duplamente Estabilizado e Método de Planos Cortantes.

Tabela 1 – Funções lineares por partes.

Usina	Número de linearizações da função de custo
T_1	6
T_2	8
T_3	5
T_4	6
T_5	12
T_6	4
T_7	7
T_8	7
T_9	8
T_{10}	14

5.4.1 Duplicação de variáveis

Como citado na Seção 4.4.1, o número de variáveis para o problema dual utilizado este esquema de decomposição é $(N_g \cdot T)$, em que N_g é o número de unidades geradoras e T é o número de estágios. Para o sistema teste apresentado, $N_g = 10$ e $T = 24$ horas. Logo o problema dual é composto de 240 variáveis.

Na Figura 16 é apresentado o valor da função dual para as três variantes dos Métodos de Feixes. Devido à diferença no desempenho, o valor da função dual para o Método de Planos Cortantes está na Figura 17.

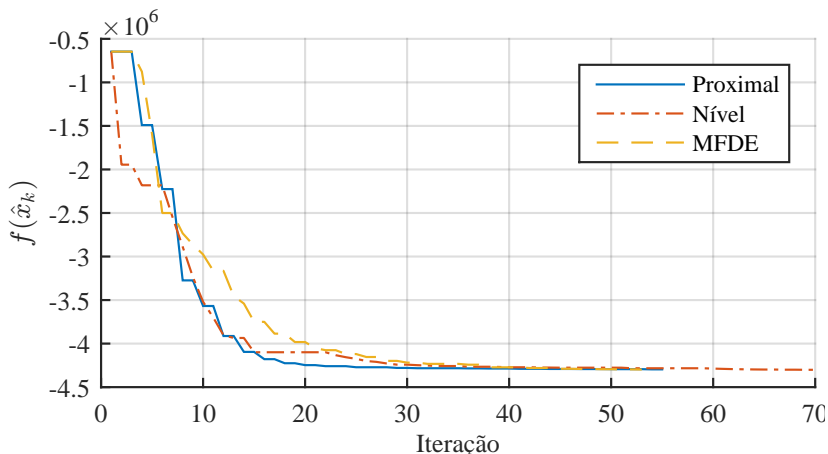


Figura 16 – Função dual para Métodos de Feixes e decomposição com duplicação de variáveis.

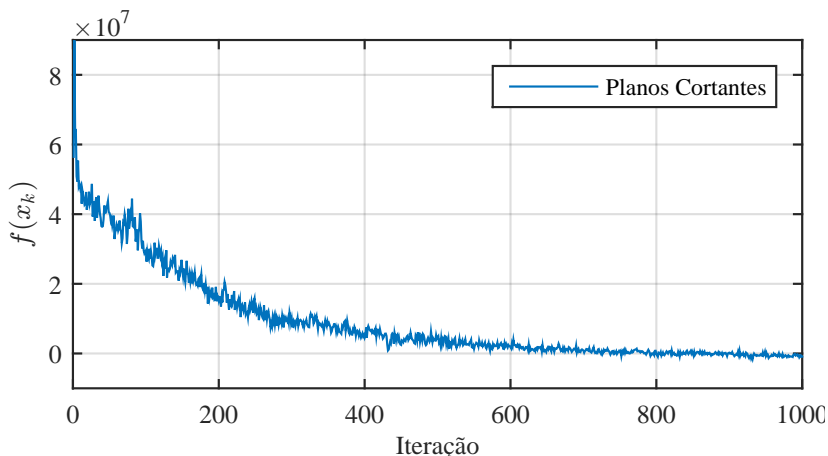


Figura 17 – Função dual para Método de Planos Cortantes e decomposição com duplicação de variáveis.

Observa-se que as três variantes do Método de Feixes se comportaram de maneira semelhante, com o Método de Feixes Duplamente Estabilizado tendo uma descida mais acentuada que os outros dois. Já o Método de Planos Cortantes não satisfaz o teste de parada dentro do

número máximo de iterações.

A Tabela 2 apresenta alguns detalhes complementares, como o número de iterações, passos sérios e passos nulos, o valor da função dual ao fim do processo iterativo, a brecha de dualidade em relação à solução primal e o tempo computacional total.

A brecha de dualidade, que fornece uma estimativa da qualidade da solução dual em relação à solução primal, é apresentada na Figura 18 para os Métodos de Feixes.

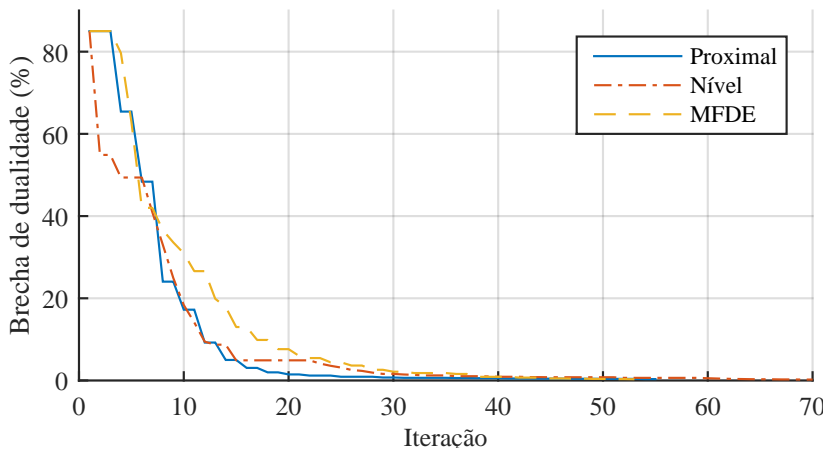


Figura 18 – Brecha de dualidade para decomposição com duplicação de variáveis.

Nota-se que as três variantes obtêm soluções com brechas de dualidade de 10% em aproximadamente 20 iterações. No entanto são necessárias iterações adicionais para que os testes de parada sejam satisfeitos para a tolerância escolhida.

5.4.2 Relaxação das restrições de atendimento à demanda das barras com geração

Um esquema de decomposição baseado na relaxação das restrições de atendimento à demanda das barras com geração foi apresentado na

Tabela 2 – Desempenho dos métodos para decomposição com duplicação de variáveis.

Método	Iterações	Passos sérios	Passos muls	Iterações proximais	Iterações de nível	Valor da função dual	Brecha de dualidade (%)	Tempo total (s)
Proximal	55	21	34	-	-	-4.296.893,233	0,321	14,24
Nível	70	34	36	-	-	-4.300.987,742	0,226	20,74
MFDE	53	27	26	48	5	-4.297.667,676	0,303	13,12
Planos Cortantes	1000	-	-	-	-	-1.255.880,548	97,23	270,94

Seção 4.4.2. Com essa abordagem o número de variáveis do problema dual é $(N_b \cdot T)$, como na decomposição por duplicação de variáveis. Para o sistema teste são 240 variáveis duais.

Na Figura 19 é apresentado o valor da função dual para as três variantes dos Métodos de Feixes. Devido à diferença no desempenho, o valor da função dual para o Método de Planos Cortantes encontra-se na Figura 20.

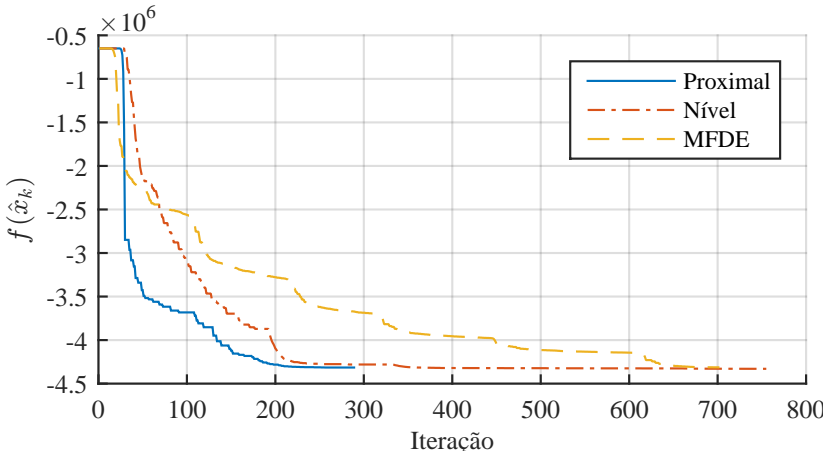


Figura 19 – Função dual para Métodos de Feixes com relaxação das restrições de atendimento das barras com geração.

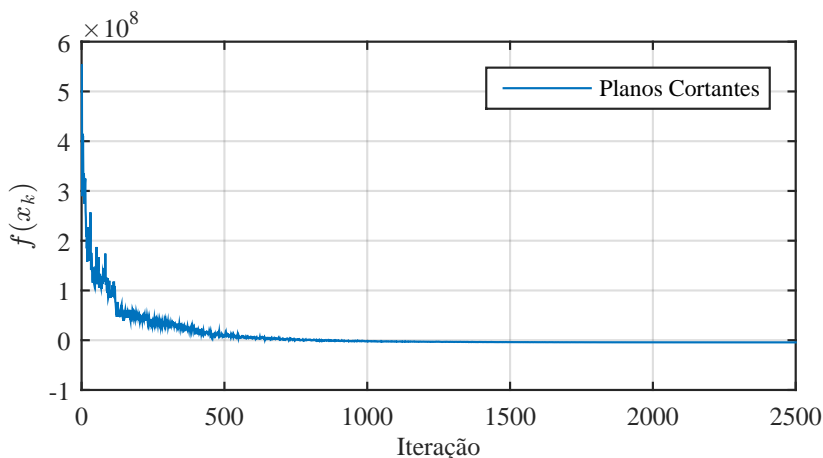


Figura 20 – Função dual para Método de Planos Cortantes com relaxação das restrições de atendimento das barras com geração.

Com este esquema de decomposição o Método de Feixes Proximal obteve o melhor desempenho, convergindo após 364 iterações. O Método de Nível teve o segundo melhor desempenho, atingindo a convergência em 403 iterações. Já o MFDE necessitou de 837 iterações antes de atender os critérios de parada. Por fim, o Método de Planos Cortantes, como no esquema de decomposição anterior, não parou após 1.000 iterações.

Na Tabela 3 são apresentados resultados mais detalhados dos quatro métodos. Observa-se que os Métodos de Feixes chegaram a soluções com valores semelhantes da função dual, apesar da grande diferença no número de iterações. O Método de Planos Cortantes teve um desempenho razoavelmente superior ao obtido com a decomposição por duplicação de variáveis. No entanto, não se mostrou competitivo frente aos Métodos de Feixes.

Também se nota que a quase totalidade das iterações do MFDE são proximais. Tal fato pode causar estranheza dado que o Método de Feixes Proximal teve um desempenho muito superior ao MFDE. No entanto, é importante reforçar que os mecanismos de atualização dos

parâmetros são diferentes para os dois métodos.

Devido à diferença no número de iterações para este esquema de decomposição e visto que foram obtidas brechas de dualidade semelhantes, nas próximas seções o foco se dará no esquema com duplicação de variáveis, exceto se o contrário for indicado.

5.5 PERFIS DE DESEMPENHO

Os resultados apresentados nas seções anteriores mostram que o desempenho dos Métodos de Feixes depende fortemente da escolha dos parâmetros. No entanto, é comum que o conjunto de parâmetros ideais dependa do tipo de problema a ser resolvido.

O objetivo desta seção consiste em comparar as três variantes dos Métodos de Feixes em um conjunto mais extenso de problemas, com o intuito de obter o desempenho médio de cada algoritmo. Utiliza-se um conjunto de 224 problemas de comissionamento de unidades termelétricas com horizonte de 24 horas e 84 com horizonte de 168 horas.

Em [93] são apresentadas 20 curvas de carga para diferentes Estados brasileiros (duas curvas para o mesmo estado, de meses distintos) e oito para os subsistemas do Sistema Interligado Nacional (duas curvas para o mesmo subsistema, de meses distintos), totalizando 28 curvas com horizonte de 24 horas. A partir desses dados são geradas:

- 28 curvas adicionais com estresse de 5% na hora de maior demanda;
- 28 curvas adicionais com estresse de 10% na hora de maior demanda;
- 28 curvas adicionais com estresse de 5% na hora de maior demanda para as 20% barras com maiores demandas;
- 28 curvas adicionais com estresse de 5% na hora de maior demanda para as 20% barras com menores demandas;

Tabela 3 – Desempenho dos métodos para decomposição com relaxação das restrições de atendimento das barras com geração.

Método	Iterações	Passos sérios	Passos muls	Iterações proximais	Iterações de nível	Valor da função dual	Brecha de dualidade (%)	Tempo total (s)
Proximal	247	51	196	-	-	-4.298.281,688	0,343	49,49
Nível	403	110	293	-	-	-4.296.563,514	0,383	86,9
MFDE	837	323	514	833	4	-4.293.822,365	0,446	121,4
Planos Cortantes	1000	-	-	-	-	-2.521.971,723	41,55	310,4

- 28 curvas adicionais com estresse de 10% na hora de maior demanda para as 20% barras com maiores demandas;
- 28 curvas adicionais com estresse de 10% na hora de maior demanda para as 20% barras com menores demandas;
- 28 curvas em que metade das barras do sistema segue uma das duas curvas de carga e metade segue a outra curva.

Para as curvas com horizonte de 168 horas, a partir dos 28 perfis originais de 24 horas, adota-se o seguinte procedimento:

- repetem-se as curvas sete vezes, gerando 28 curvas;
- criam-se 28 curvas adicionais com estresse de 5% na hora de maior demanda para o terceiro e o quinto dias e estresse de 10% na hora de maior demanda para o quarto dia;
- criam-se 28 curvas adicionais multiplicando a demanda do primeiro dia por 0,8 e do último dia por 0,9. Desta forma simula-se de forma simplificada uma redução nas demandas ao fim de semana.

Utilizando os parâmetros apresentados na Seção 5.3 e RL com duplicação de variáveis pode-se então analisar o desempenho dos três Métodos de Feixes em um conjunto mais expressivo de problemas.

Ainda resta especificar alguma forma de comparar os métodos para esse conjunto de problemas. Neste trabalho são utilizados perfis de desempenho, originalmente propostos em [94]. De forma simplificada, dados:

- um conjunto de p problemas de otimização;
- o número de iterações de um dos métodos para resolver os p problemas: $n(p)$;
- o número de iterações do melhor método para resolver os p problemas: $n^*(p)$;

- para um dado fator γ , tem-se:

$$\phi(\gamma) = \frac{\text{número de problemas tais que } n(p) \leq \gamma n^*(p)}{\text{número total de problemas}}.$$

A função $\phi(\gamma)$ é o perfil de desempenho do método.

A seguir é apresentado um exemplo ilustrativo: suponha que um conjunto de quatro problemas foi resolvido por três métodos de otimização. O número de iterações é apresentado na Tabela 4.

Tabela 4 – Exemplo ilustrativo para perfis de desempenho.

Método	Número de iterações			
	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4
Método 1	10	12	15	12
Método 2	8	10	∞	14
Método 3	9	11	12	20

Os perfis de desempenho dos três métodos são apresentados na Figura 21.

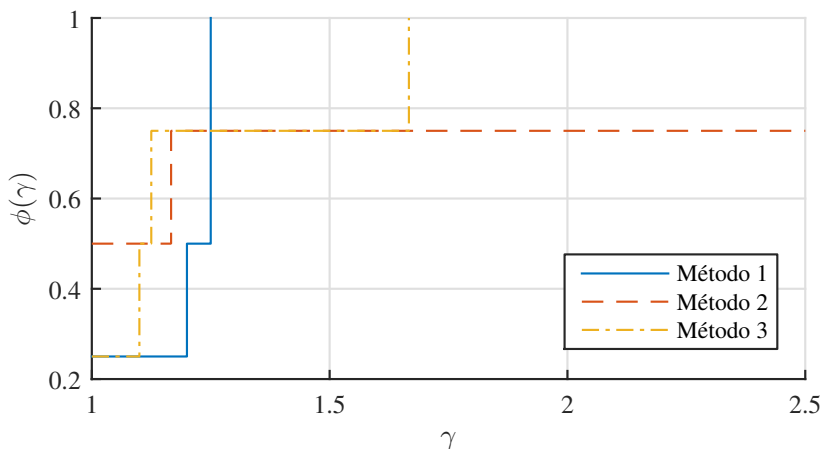


Figura 21 – Perfis de desempenho para exemplo ilustrativo.

Algumas informações podem ser extraídas dos perfis:

- o valor de $\phi(1)$ representa a fração de problemas tal que o método foi o mais eficiente. Para o exemplo ilustrativo, $\phi_2(1) = 0,5$, ou seja, em metade dos problemas o Método 2 obteve o menor número de iterações (Problemas 1 e 2). Já os Métodos 2 e 3 foram mais eficientes em um problema cada, logo $\phi_1(1) = \phi_3(1) = 0,25$;
- o primeiro método a atingir $\phi(\gamma) = 1$ é o mais robusto. Neste exemplo, $\phi_1(1,25) = 1$. Isto significa que, para o problema em que o Método 1 teve o pior desempenho comparado ao método mais eficiente, seu número de iterações foi 1,25 vezes maior;
- como o Método 2 não atendeu o critério de convergência para o Problema 3 (representado na Tabela 4 como ∞), seu perfil de desempenho nunca chegará a 1.

Na Figura 22 são apresentados os perfis de desempenho para os 224 problemas com horizonte de 24 horas e custos de geração lineares por partes. Observa-se que, para esse conjunto de problemas, o MFDE foi mais eficiente (menor número de iterações) em aproximadamente 70% dos casos.

Considerando o mesmo horizonte de planejamento mas custos quadráticos, os perfis de desempenho encontram-se na Figura 23.

Já os perfis de desempenho dos 84 problemas com horizonte de 168 horas são apresentados na Figura 24. Observa-se um comportamento semelhante aos obtidos com horizonte de 24 horas. Não foi realizado um caso com custos quadráticos, devido ao aumento no custo computacional da chamada ao oráculo, que tornou os problemas inviáveis computacionalmente.

O tempo computacional total para resolver os problemas é mostrado na Tabela 5, onde se observa que, em média, o Método de Feixes Duplamente Estabilizado foi 17% mais rápido que o Método de Feixes Proximal e 55% mais rápido que o Método de Nível. Já o Método de Feixes Proximal foi 46% mais rápido que o Método de Nível.

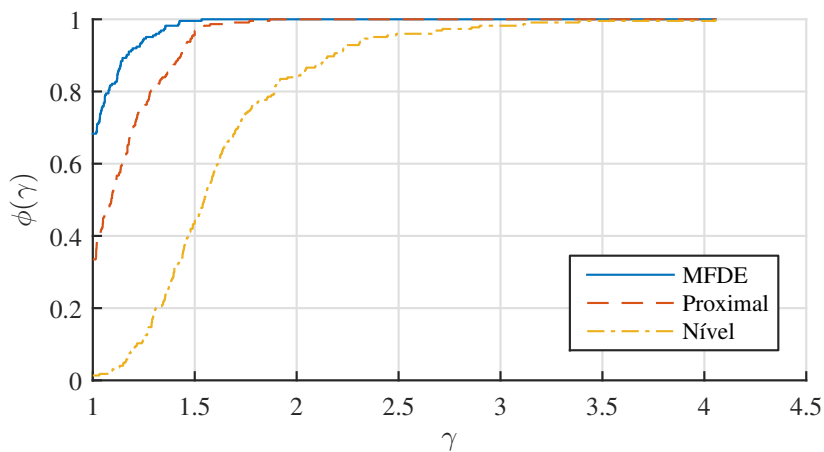


Figura 22 – Perfis de desempenho com horizonte de 24 horas e custos lineares por partes.

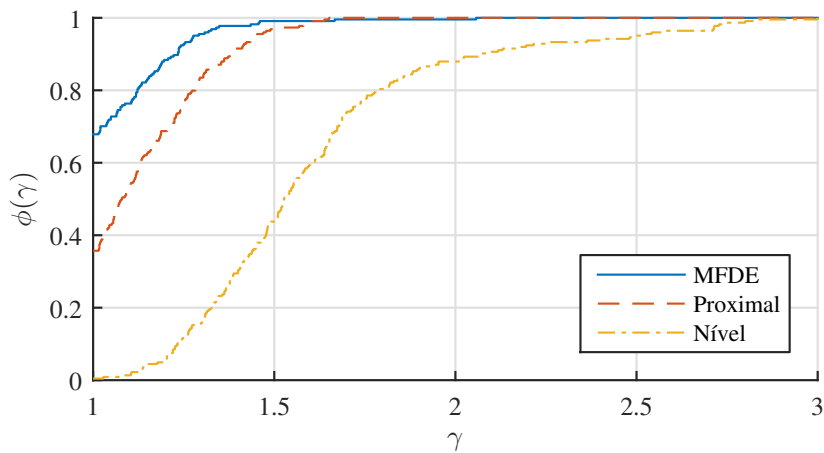


Figura 23 – Perfis de desempenho com horizonte de 24 horas e custos quadráticos.

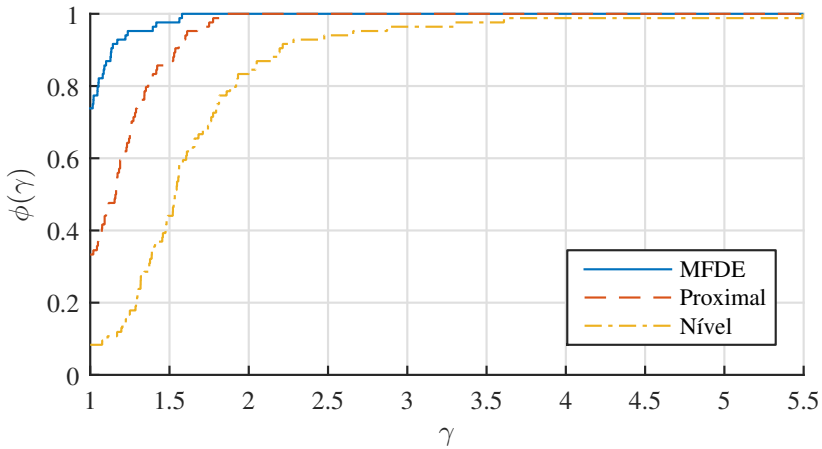


Figura 24 – Perfis de desempenho com horizonte de 168 horas e custos lineares por partes.

Tabela 5 – Tempo total (em minutos) para resolução dos casos com variações nas demandas.

Método	Horizonte (custos de geração)		
	24 (quadráticos)	24 (LPP)	168 (LPP)
MFDE	32,35	29,82	226,78
Proximal	38,14	33,54	275,26
Nível	52,29	49,01	537,22

5.6 GERENCIAMENTO DO FEIXE

Uma vantagem dos Métodos de Feixes em relação ao Método de Planos Cortantes é a possibilidade de gerenciar o feixe através da eliminação e agregação das linearizações, como citado na Seção 2.3.

Nesta seção são considerados dois casos com tamanhos máximos diferentes, $NP_{\max} = 500$ (caso base) e $NP_{\max} = 20$ para o feixe e um caso com seleção de cortes, ou seja, em que a cada iteração são eliminados os planos cortantes inativos. A fim de simplificar a análise será considerado somente o Método de Feixes Duplamente Estabilizado.

A Figura 25 apresenta o valor da função ao longo das iterações para os três casos e decomposição por duplicação de variáveis. Observa-se que o caso com seleção de cortes teve um decréscimo mais acentuado ao longo das primeiras iterações, apesar de ter garantido a convergência em 53 iterações, como o caso base. Já o caso com $NP_{\max} = 20$ teve um desempenho inferior, parando após 73 iterações.

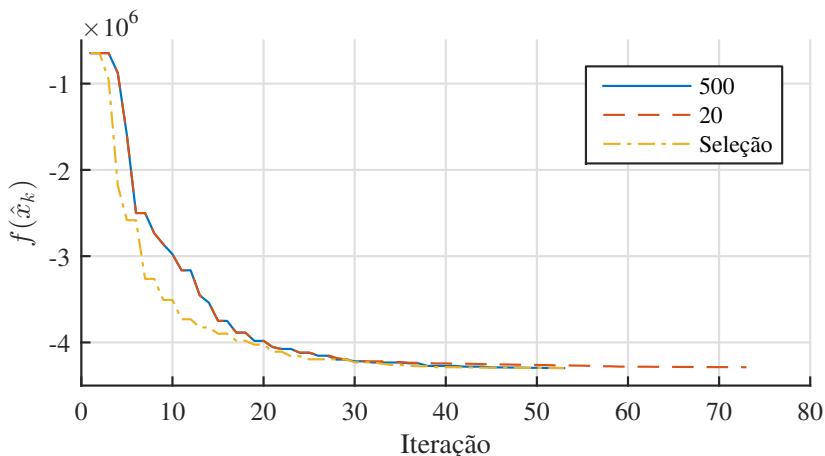


Figura 25 – Valor da função dual para diferentes tamanhos máximos do feixe.

Na Figura 26 encontra-se o número de cortes ativos a cada iteração para o caso base. Como na solução apenas cinco linearizações estão

ativas, a escolha $NP_{\max} = 500$ pode ser exagerada, dado que haverá uma tendência a manter muitos cortes inativos no feixe.

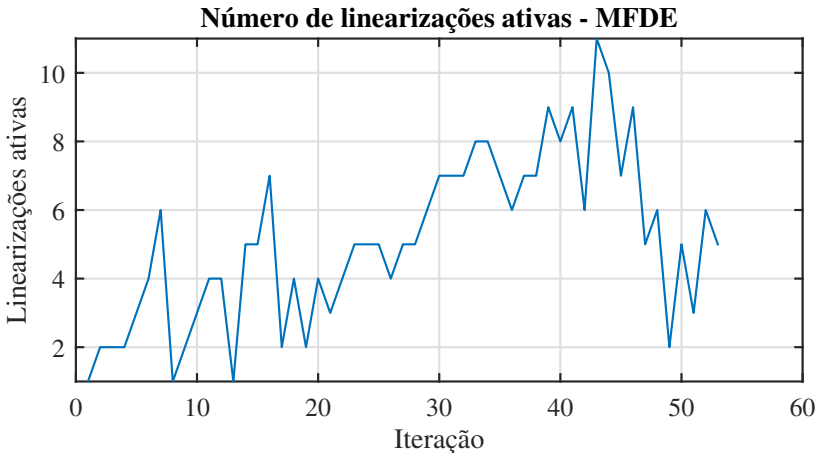


Figura 26 – Número de linearizações ativas do feixe para o caso com $NP_{\max} = 500$.

5.7 DETERMINAÇÃO DO PRÓXIMO ITERADO

Como apresentado no Capítulo 3, para obter o próximo iterado dos Métodos de Feixes utilizados neste trabalho é necessário resolver um QP. Na sua formulação primal, tal QP depende do número de variáveis do problema, n , e do número de linearizações presentes no feixe, $|J_k|$. Por outro lado, na formulação dual o tamanho do QP depende somente de $|J_k|$.

A fim de comparar as duas formulações será utilizado o Método de Feixes Duplamente Estabilizado com $\text{tol}_e = \text{tol}_g = \text{tol}_\Delta = 0$ e $k_{\max} = 1000$. Para o tamanho máximo do feixe será definido $NP_{\max} = 2000$. Desta forma não haverá eliminação de planos cortantes inativos ou agregação do feixe.

Na Figura 27 é apresentado o tempo gasto pelo MFDE a cada iteração, sem considerar o tempo de chamada ao oráculo. Devido a dificuldades numéricas do Gurobi nas iterações 957 e 964 para a

formulação primal do QP, a comparação fica prejudicada.

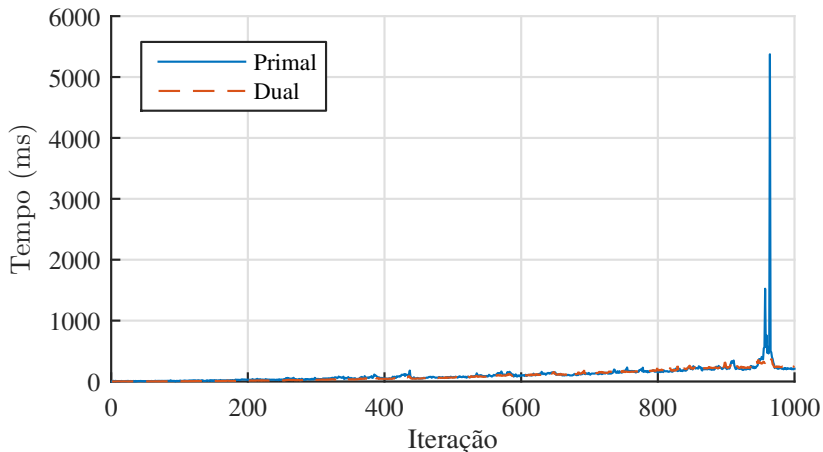


Figura 27 – Tempo computacional da determinação do próximo iterado do MFDE com $NP_{\max} = 2000$.

Na Figura 28 é aplicado um *zoom* nas primeiras 900 iterações. Observa-se que a diferença não é significativa entre as formulações. Somando-se os tempos ao longo das 900 iterações, tem-se um total de 76,2 segundos para a formulação primal e 71,3 segundos para a dual.

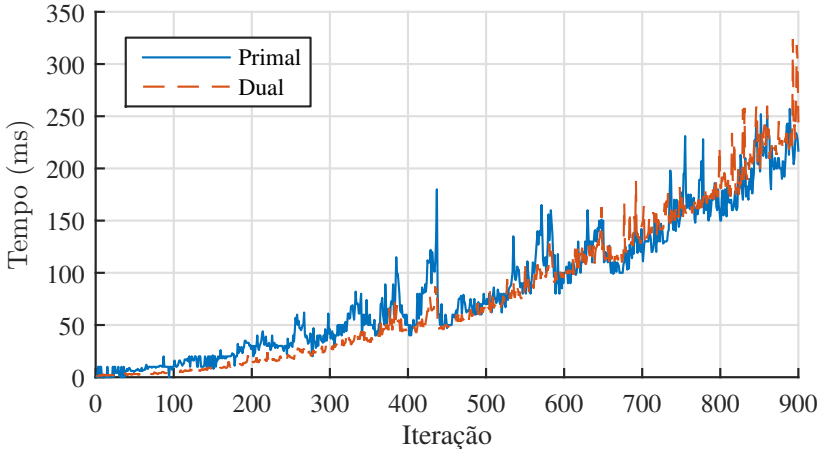


Figura 28 – Tempo computacional da determinação do próximo iterado do MFDE com $NP_{\max} = 2000$ – primeiras 900 iterações.

Como apresentado no Capítulo 3, a estrutura do QP dual pode ser explorada na implementação de um *solver* especializado, o que pode resultar em um ganho significativo na escolha dessa formulação para a obtenção do próximo iterado.

5.8 PONTO INICIAL

O caso base tem como ponto inicial $x_0 = 0 \in \mathfrak{R}^n$. Essa escolha, no entanto, pode estar muito distante da solução.

As variáveis duais representam, para o problema primal, os custos marginais das barras do sistema elétrico. Logo, algum conhecimento de condições anteriores de operação pode fornecer um ponto inicial de melhor qualidade. Por exemplo, o histórico de operação do dia anterior usualmente não difere muito da condição atual.

Uma forma de se obter um ponto inicial de boa qualidade com baixo custo computacional consiste em resolver uma variação da formulação original do problema, conhecida como problema primal conve-
nificado. Essa modelagem modificada é obtida através da substituição

das variáveis binárias $u_{it} \in \{0, 1\}$ por variáveis contínuas $u_{it} \in [0, 1]$ no problema (4.43)-(4.47). Desta maneira obtém-se um QP de grande porte contendo somente variáveis contínuas.

O tempo computacional para obter a solução do problema convexificado é de aproximadamente 1 segundo. Na Figura 29 é apresentada a brecha de dualidade para o caso base, com ponto inicial nulo e com ponto inicial dado pelo problema convexificado. Utilizou-se o Método de Feixes Duplamente Estabilizado para a resolução do problema dual.

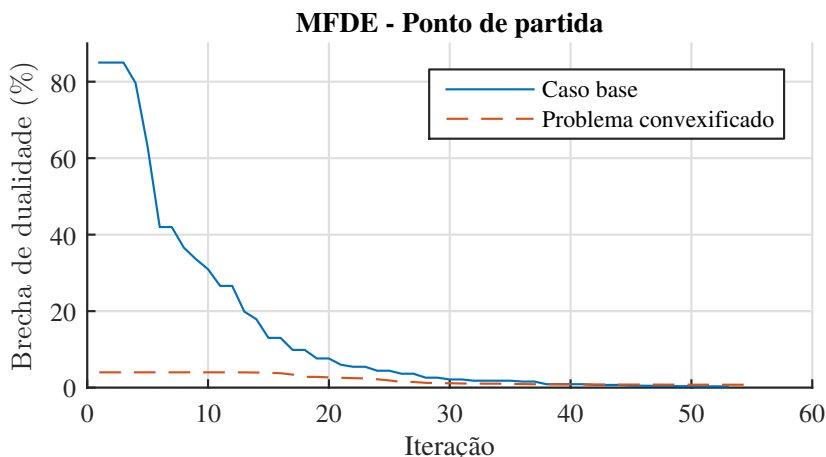


Figura 29 – Análise do ponto inicial para o MFDE.

Nota-se que já na primeira iteração a brecha de dualidade é menor que 10% para o ponto inicial proposto nesta seção. No entanto, são necessárias 55 iterações até que os critérios de convergência sejam atendidos. Na Tabela 6 são apresentados os números de iterações para os três Métodos de Feixes estudados. Enquanto o Método de Feixes Proximal tem uma redução considerável no número de iterações, o mesmo não ocorre para o MFDE e para o Método de Nível.

Tabela 6 – Comparação do número de iterações entre o caso base e com ponto de partida definido pelo problema convexificado.

Método	Número de iterações	
	Caso base	Problema convexificado
MFDE	53	55
Proximal	55	43
Nível	70	78

5.9 LIMITE INFERIOR

Como apresentado anteriormente, o Método de Nível e o Método de Feixes Duplamente Estabilizado podem se beneficiar de um limite inferior, f_1^{low} , para o valor da função objetivo na solução do problema. Na Seção 3.2 foi apresentado um critério de parada alternativo para o Método de Nível, baseado na brecha de otimalidade, que também é utilizado no Método de Feixes Duplamente Estabilizado. Além disso, um limite inferior pode auxiliar na escolha do parâmetro de nível (e, para o MFDE, na atualização do parâmetro proximal), podendo ter impacto no desempenho dos métodos.

Nesta seção são considerados quatro casos para o limite inferior:

1. $f_1^{\text{low}} = -\infty$, ou seja, não se conhece uma estimativa para esse parâmetro;
2. uma estimativa grosseira: $f_1^{\text{low}} = -7.5 \cdot 10^6$. Os casos analisados nas seções anteriores consideram este valor (lembrando que a solução do problema dual é da ordem de $-4,3 \cdot 10^6$);
3. um limite baseado em um ponto viável para o problema primal, $f_1^{\text{low}} = -6,77 \cdot 10^6$. De acordo com a teoria da dualidade, qualquer ponto primal viável é um limite superior para o problema dual, [7]. Enquanto a minimização do custo para o sistema termelétrico pode ser uma tarefa computacionalmente cara, um ponto viável pode, muitas vezes, ser obtido com baixo

custo computacional. Este é o caso para o modelo utilizado neste trabalho: utilizando o solver Gurobi pode-se obter um ponto viável em cerca de 0,5 segundo;

- o valor da função objetivo na solução do problema primal, ou seja, $f_1^{\text{low}} = -4,31 \cdot 10^6$. Apesar de este caso não ser realista para o problema do CUG, afinal resolve-se o problema dual pois o primal é muito caro computacionalmente, o limite inferior fornecido por esta estratégia será o mais próximo da solução do problema dual.

Na Figura 30 é apresentado o valor da função dual ao longo das iterações para o MFDE. Observa-se que o caso em que o valor da função objetivo na solução do problema primal é utilizado como limite inferior tem maior decréscimo se comparado aos outros casos. De forma análoga, o caso com $f_1^{\text{low}} = -\infty$ é o que decresce mais lentamente.

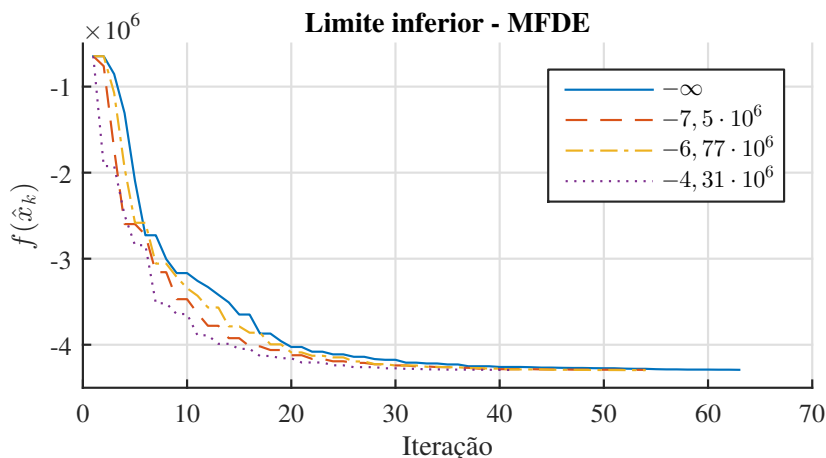


Figura 30 – Análise do limite inferior para o MFDE.

Para o Método de Nível os quatro casos são mostrados na Figura 31. Apesar de nas primeiras iterações o comportamento ser semelhante ao obtido com o MFDE, no Método de Nível os casos com limites inferiores mais próximos da solução do problema dual levam mais

iterações até que os critérios de convergência sejam garantidos.

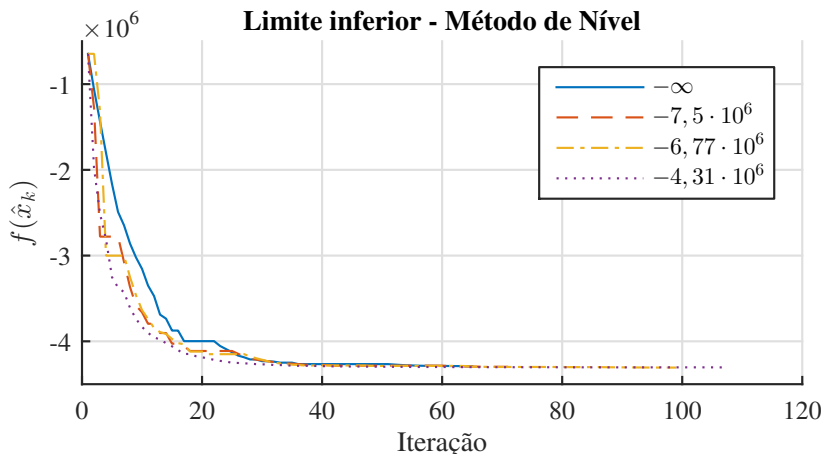


Figura 31 – Análise do limite inferior para o Método de Nível.

A Tabela 7 fornece o número de iterações para o MFDE e para o Método de Nível, que mostra que um limite inferior próximo da solução dual foi benéfico para o MFDE mas prejudicou consideravelmente o Método de Nível.

Tabela 7 – Limite inferior para o Método de Feixes Duplamente Estabilizado.

f_1^{low}	Número de iterações	
	MFDE	Nível
$-\infty$	63	65
$-7,5 \cdot 10^6$	53	71
$-6,77 \cdot 10^6$	54	99
$-4,31 \cdot 10^6$	41	107

5.10 TOLERÂNCIA PARA OS TESTES DE PARADA – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

A escolha da tolerância para o teste de parada dos métodos de otimização não-diferenciável é uma tarefa delicada. Para a RL, a solução dual é utilizada como ponto de partida em uma etapa de recuperação primal. Por um lado, a brecha de dualidade não deve ser muito grande, ou um ponto primal viável de baixa qualidade poderá ser obtido. O desafio, então, é escolher uma tolerância tal que a brecha de dualidade seja baixa sem que muitas iterações sejam necessárias.

É importante ressaltar que a brecha de dualidade é uma medida da qualidade do valor da função dual em relação ao custo ótimo de operação do problema primal. Esta brecha não está relacionada com a brecha de otimalidade já citada, que é utilizada como um critério de parada para o Método de Nível e o Método de Feixes Duplamente Estabilizado.

Como apresentado anteriormente, o caso base utiliza uma tolerância de 10^{-4} . Nesta seção também são consideradas as seguintes tolerâncias: 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-5} e 10^{-6} . Os resultados se encontram nas Tabelas 8, 9 e 10 respectivamente para os Métodos de Feixes Proximal, Nível e Duplamente Estabilizado.

Tabela 8 – Teste de parada para o Método de Feixes Proximal.

Tolerância	Número de iterações	Brecha de dualidade (%)
10^{-2}	10	17,2
10^{-3}	14	5,00
10^{-4}	55	0,321
10^{-5}	309	0,049
10^{-6}	937	0,031

Tabela 9 – Teste de parada para o Método de Nível.

Tolerância	Número de iterações	Brecha de dualidade (%)
10^{-2}	6	49,4
10^{-3}	22	4,90
10^{-4}	70	0,226
10^{-5}	208	0,055
10^{-6}	488	0,032

Tabela 10 – Teste de parada para o MFDE.

Tolerância	Número de iterações	Brecha de dualidade (%)
10^{-2}	7	42,0
10^{-3}	20	7,62
10^{-4}	53	0,303
10^{-5}	784	0,064
10^{-6}	1000	0,057

Enquanto nos casos com tolerância 10^{-2} e 10^{-3} o critério de parada é atingido rapidamente, a brecha de dualidade é relativamente alta. No outro extremo, com tolerância 10^{-5} e 10^{-6} , o aumento no número de iterações é muito elevado para uma pequena redução na brecha de dualidade.

5.11 CUSTOS DE GERAÇÃO

Como apresentado na Seção 4.2.1, duas abordagens são utilizadas neste trabalho para a representação do custo de geração das unidades termelétricas: através de uma função quadrática ou através de uma função linear por partes. Para o segundo caso o número de linearizações

é determinado pelo Algoritmo 14 e depende do erro relativo máximo definido previamente.

É importante ressaltar que essas linearizações não estão relacionadas às linearizações que formam o modelo de planos cortantes, que é utilizado no método de mesmo nome e nos Métodos de Feixes.

Nesta seção são considerados quatro casos para a representação do custo de geração:

1. uma função quadrática;
2. uma função linear por partes com erro relativo máximo de 5%;
3. uma função linear por partes com erro relativo máximo de 0,5%;
4. uma função linear por partes com erro relativo máximo de 0,05%.

Para os casos em que o custo é linear por partes, o número de linearizações para cada usina é apresentado na Tabela 11.

Tabela 11 – Número de linearizações da função de custo.

Usina	Erro relativo máximo		
	0,05%	0,5%	5%
T_1	2	6	19
T_2	3	8	25
T_3	2	5	15
T_4	2	6	18
T_5	4	12	36
T_6	2	4	13
T_7	3	7	22
T_8	3	7	21
T_9	3	8	23
T_{10}	5	14	43

A dimensão do problema primal para os quatro casos acima é apresentada na Tabela 12.

Tabela 12 – Representação do custo de geração.

Custo de geração	Número de variáveis	Número de restrições
Quadrática	2.592	10.820
LPP 5%	2.832	11.516
LPP 0,5%	2.832	12.668
LPP 0,05%	2.832	43.850

Nota-se que, quanto maior o erro de linearização, maior o valor ótimo primal. Isso ocorre porque as linearizações são secantes à função quadrática original. O aumento no número de variáveis para os casos com funções lineares por partes se deve à inclusão das variáveis l_{it} , como apresentado na Seção 4.3, em quantidade $N_g \cdot T$. Ou seja, neste caso são 240 variáveis extras.

Os resultados obtidos para os casos acima utilizando o Método de Feixes Duplamente Estabilizado são apresentados na Tabela 13.

Observa-se que o caso LPP 0,05%, com maior número de linearizações para as funções lineares por partes, tem custo computacional por iteração da chamada ao oráculo maior que o da representação original, com funções quadráticas. Isso ocorre devido ao porte maior do problema de otimização, devido à inclusão de variáveis e restrições para a modelagem das funções lineares por partes.

Esses resultados mostram que a modelagem utilizada é tão importante quanto a escolha adequada dos parâmetros dos métodos de otimização.

Tabela 13 – Comparação do número de iterações e dos tempos computacionais para diferentes modelagens dos custos de geração.

Custo de geração	Iterações	Tempo total (s)	Tempo MFDE (s)	Tempo total oráculo (s)	Tempo oráculo por iteração
Quadrática	48	13,773	0,114	13,659	0,285
LPP 0,05%	54	18,283	0,122	18,161	0,336
LPP 0,5%	53	13,116	0,123	12,993	0,245
LPP 5%	54	15,511	0,146	14,055	0,260

6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi analisada a utilização de métodos de otimização não-diferenciável no problema do comissionamento de unidades geradoras termelétricas, com foco na decomposição baseada em Relaxação Lagrangeana e subsequente resolução do problema dual através de Métodos de Feixes.

Uma introdução a métodos de otimização não-diferenciável foi apresentada no Capítulo 2. Partindo de uma analogia com métodos de otimização para funções diferenciáveis foram apresentados conceitos introdutórios, como o subdiferencial e o subgradiente de uma função não-diferenciável. Três algoritmos foram apresentados: o Método do Subgradiente, o Método de Planos Cortantes e um Método de Feixes. Vantagens e desvantagens de cada um foram destacadas, além de pseudocódigos. Um exemplo numérico baseado em uma modelagem simplificada do problema do comissionamento de unidades geradoras foi apresentado, com o intuito de ilustrar o funcionamento de cada um dos métodos.

Três variantes dos Métodos de Feixes foram detalhadas no Capítulo 3: Método de Feixes Proximal, Método de Nível e Método de Feixes Duplamente Estabilizado. Características e pseudocódigos de cada variante foram apresentadas.

A modelagem do problema do comissionamento de unidades geradoras termelétricas foi mostrada no Capítulo 4. Primeiramente foi apresentada a modelagem da rede de transmissão, das unidades geradoras e do problema primal. Devido ao fato de ser de grande-porte, não-linear e conter variáveis binárias, alguma forma de decomposição pode ser necessária para resolvê-lo com custo computacional aceitável. Dois esquemas de decomposição foram apresentados na sequência, ambos baseados na RL: a inclusão de variáveis artificiais de geração termelétrica e a relaxação das restrições de atendimento à demanda das barras

com geração. Desta forma substitui-se o problema primal por um conjunto de problemas menores, mais fáceis de serem resolvidos, que são coordenados por um problema côncavo mas não-diferenciável, conhecido como problema dual.

A aplicação dos métodos de otimização não-diferenciável, com ênfase nos Métodos de Feixes, no problema do comissionamento de unidades geradoras foi apresentada no Capítulo 5. Primeiramente foi apresentado o sistema teste, assim como a metodologia para calibração dos parâmetros dos Métodos de Feixes.

Em seguida foi realizada uma análise comparativa do desempenho dos métodos para os dois esquemas de decomposição. O esquema de decomposição baseado em duplicação de variáveis se mostrou muito superior ao esquema de relaxação das restrições de atendimento à demanda das barras com geração.

O Método de Planos Cortantes não teve bom desempenho, falhando tanto em obter uma solução que atendesse o critério de parada do algoritmo quanto em fornecer um valor para a função dual com baixa brecha de dualidade, como ocorreu para os Métodos de Feixes.

A fim de comparar as três variantes dos Métodos de Feixes abordadas neste trabalho, um conjunto maior de problemas do comissionamento de unidades geradoras termelétricas foi empregado. A definição de demandas adicionais para o sistema permitiu a criação de 224 casos com horizonte de planejamento de 24 horas e 84 casos com horizonte de 168 horas. Em todas as baterias de testes o Método de Feixes Duplamente Estabilizado teve desempenho superior aos outros dois métodos.

Na sequência foram exploradas diferentes opções para os Métodos de Feixes. Ao analisar três abordagens para o gerenciamento do feixe, verificou-se que, para o esquema de decomposição baseado em duplicação de variáveis, diferenças pouco significativas foram obtidas entre os casos analisados. A partir do conhecimento da função não-diferenciável, um feixe com muitas linearizações tenderá a fornecer um modelo de planos cortantes mais rico, mas pode aumentar consideravelmente o computacional por iteração do Método de Feixes. Por outro lado, um

feixe em que o número máximo de linearizações é pequeno pode forçar que a compressão seja realizada excessivamente, aumentando o número de iterações.

Uma análise comparativa das formulações primal e dual para a obtenção do próximo iterado dos Métodos de Feixes foi realizada. Resultados confirmaram que a utilização da formulação dual é mais interessante, visto que, desta forma, o tamanho do subproblema depende unicamente do número de linearizações do feixe. Para a formulação primal o tamanho do subproblema depende também do número de variáveis duais.

Duas estratégias foram utilizadas para o ponto inicial dos métodos: partida plana, com todas as variáveis duais iguais a zero e um ponto fornecido pela formulação convexificada do problema primal. Enquanto o Método de Feixes Proximal teve uma diminuição considerável no número de iterações com a segunda estratégia, tanto o Método de Nível quanto o MFDE não apresentaram vantagem, apesar de a brecha de dualidade ser pequena logo nas primeiras iterações (o que não ocorre com partida plana). É importante ressaltar que essa segunda estratégia só deve ser considerada quando o custo computacional para se obter a solução convexificada é baixo.

Na sequência foi realizada uma análise da utilização de um limite inferior para o valor ótimo da função dual. Esse limite pode ser utilizado tanto no Método de Nível quanto no Método de Feixes Duplamente Estabilizado. Os resultados obtidos mostraram que a utilização de um limite inferior pode contribuir para a diminuição no número de iterações. Porém é importante analisar o custo computacional para a obtenção de tal parâmetro.

Em seguida foram exploradas diferentes tolerâncias para os testes de parada. Observou-se que a escolha da tolerância é uma tarefa delicada. Ao se utilizar um valor elevado, os testes de parada serão satisfeitos em poucas iterações mas, possivelmente, brecha de dualidade será elevada. Ou seja, uma etapa posterior de recuperação primal poderá fornecer uma solução de baixa qualidade. Por outro lado, tolerâncias muito

baixas ocasionam um aumento considerável no número de iterações até que o critério de convergência seja atendido.

Também foram comparadas duas representações para o custo de geração das unidades. A utilização de funções lineares por partes se mostrou atrativa, principalmente para os casos com horizontes de planejamento mais longos, visto que na bateria de 84 casos com horizonte de 168 horas não foi possível utilizar custos quadráticos devido ao elevado aumento no custo computacional do oráculo.

Os métodos de otimização não-diferenciável foram implementados em linguagem C++. Os códigos-fonte podem ser livremente utilizados, bastando entrar em contato com o autor.

6.1 DIREÇÕES FUTURAS

Os Métodos de Feixes são considerados o estado da arte para a resolução de problemas de otimização não-diferenciáveis. Os três métodos analisados neste trabalho apresentaram alto desempenho, com ênfase para o Método de Feixes Duplamente Estabilizado, que emprega um mecanismo inovador de atualização do parâmetro proximal.

No entanto, diversas melhorias podem ser integradas aos algoritmos desenvolvidos, tanto para os Métodos de Feixes quanto na modelagem do oráculo. Por exemplo:

- a utilização de oráculos inexatos. Nos casos analisados o maior esforço computacional foi dispendido na resolução dos subproblemas das unidades geradoras. Duas possíveis abordagens são: a obtenção de soluções aproximadas para os subproblemas (oráculo inexato, [79]) e a obtenção exata da função dual e um subgradiente somente em caso de passo sério (oráculo com acurácia sob demanda, [87]);
- a desagregação total ou parcial do feixe, [31], [32], em que se utiliza um modelo de planos cortantes mais detalhado, o que invariavelmente aumentará o custo de obtenção do próximo

iterado, mas tende a diminuir consideravelmente o número de iterações;

- a integração de restrições “simples” do oráculo no subproblema quadrático do Método de Feixes, como proposto em [81]. Por exemplo, para a modelagem apresentada o subproblema relacionado à rede de transmissão pode ser classificado como “simples”, pois consiste em um PL para cada estágio de tempo;
- desagregação do feixe combinada com oráculos com acurácia sob demanda, que pode ser visto como uma combinação de [95] e [79].

REFERÊNCIAS

- [1] BONNANS, J. F.; GILBERT, J. C.; LEMARÉCHAL, C.; SAGASTIZÁBAL, C. A. *Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects (Universitext)*. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2006.
- [2] WOOD, A. J.; WOLLENBERG, B. F. *Power Generation, Operation, and Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1996.
- [3] FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. d.; SAGASTIZÁBAL, C. Solving the unit commitment problem of hydropower plants via lagrangian relaxation and sequential quadratic programming. *Computational & Applied Mathematics*, v. 24, n. 3, p. 317–342, dez. 2005.
- [4] LEMARÉCHAL, C. Lagrangian relaxation. In: JÜNGER, M.; NADDEF, D. (Ed.). *Computational Combinatorial Optimization*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2001, (Lecture Notes in Computer Science, 2241). p. 112–156.
- [5] SAGASTIZÁBAL, C. Divide to conquer decomposition methods for energy optimization. *Mathematical Programming*, v. 134, n. 1, p. 187–222, ago. 2012.
- [6] ROCKAFELLAR, T. Nonsmooth optimization. In: *Mathematical programming: state of the art 1994*. [S.l.]: University of Michigan, 1994.
- [7] BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- [8] BELLONI, A.; LIMA, A. L. D. S.; MACEIRA, M. E. P.; SAGASTIZÁBAL, C. A. Bundle relaxation and primal recovery in unit commitment problems. the brazilian case. *Annals of Operations Research*, v. 120, n. 1-4, p. 21–44, abr. 2003.
- [9] ARISTIZÁBAL, J. D. C. *Técnicas de dualidade e programação não-linear inteira-mista aplicadas ao programa diário da operação eletroenergética*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2012. Disponível em: (<http://www.tede.ufsc.br/teses/PEEL1469-D.pdf>).
- [10] BERTSEKAS, D. *Nonlinear Programming*. [S.l.]: Athena Scientific, 1999.

- [11] KIWIEL, K. C. Proximity control in bundle methods for convex nondifferentiable minimization. *Mathematical Programming*, v. 46, n. 1-3, p. 105–122, jan. 1990.
- [12] LEMARÉCHAL, C.; NEMIROVSKII, A.; NESTEROV, Y. New variants of bundle methods. *Mathematical Programming*, v. 69, n. 1-3, p. 111–147, jul. 1995.
- [13] OLIVEIRA, W.; SOLODOV, M. A doubly stabilized bundle method for nonsmooth convex optimization. *Submetido para publicação*, 2013. Disponível em: http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2013/04/3828.pdf).
- [14] SILVA, E. L. d. *Formação de preços em mercados de energia elétrica*. [S.l.]: Sagra Luzzatto, 2001.
- [15] PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. A decomposition approach to the economic dispatch of hydrothermal systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-101, n. 10, p. 3851–3860, out. 1982.
- [16] MATOS, V. L. de. *Um modelo para o planejamento anual da operação energética considerando técnicas avançadas de otimização estocástica*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2012. Disponível em: <http://www.bu.ufsc.br/teses/PEEL1483-T.pdf>).
- [17] ARVANITIDITS, N.; ROSING, J. Composite representation of a multireservoir hydroelectric power system. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-89, n. 2, p. 319–326, fev. 1970.
- [18] CEPEL. *Manual de Referência - Modelo NEWAVE*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2001.
- [19] PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Application of decomposition techniques to the mid - and short - term scheduling of hydrothermal systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-102, n. 11, p. 3611–3618, nov. 1983.
- [20] GONÇALVES, R. E. C. *Desenvolvimento de modelos de programação estocástica aplicados à programação mensal da operação energética*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2011. Disponível em: <http://www.tede.ufsc.br/teses/PEEL1447-T.pdf>).

- [21] CEPTEL. *Manual de Referência - Modelo DECOMP*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2001.
- [22] AMADO, S. M.; RIBEIRO, C. C. Short-term generation scheduling of hydraulic multi-reservoir multi-area interconnected systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 2, n. 3, p. 758–763, ago. 1987.
- [23] FINARDI, E.; SILVA, E. da. Solving the hydro unit commitment problem via dual decomposition and sequential quadratic programming. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 21, n. 2, p. 835–844, maio 2006.
- [24] RODRIGUES, R. N. *Um modelo para a programação da operação de sistemas hidrotérmicos baseado em relaxação lagrangeana*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2009. Disponível em: (<http://www.tede.ufsc.br/teses/PEEL1338-T.pdf>).
- [25] FINARDI, E. *Alocação de unidades geradoras hidrelétricas em sistemas hidrotérmicos utilizando relaxação lagrangeana e programação quadrática seqüencial*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2003. Disponível em: (<http://www.tede.ufsc.br/teses/PEEL0859.pdf>).
- [26] MUCKSTADT, J. A.; KOENIG, S. A. An application of lagrangian relaxation to scheduling in power-generation systems. *Operations Research*, v. 25, n. 3, p. 387–403, jun. 1977.
- [27] MITTEN, L. G. Branch-and-bound methods: General formulation and properties. *Operations Research*, v. 18, n. 1, p. 24–34, fev. 1970.
- [28] ZHUANG, F.; GALIANA, F. Towards a more rigorous and practical unit commitment by lagrangian relaxation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 3, n. 2, p. 763–773, 1988.
- [29] REDONDO, N.; CONEJO, A. Short-term hydro-thermal coordination by lagrangian relaxation: solution of the dual problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 1, p. 89–95, 1999.
- [30] LEMARÉCHAL, C.; SAGASTIZÁBAL, C.; PELLEGRINO, F.; RENAUD, A. Bundle methods applied to the unit-commitment problem. In: DOLEŽAL, J.; FIDLER, J. (Ed.). *System Modelling and Optimization*. [S.l.]: Springer US, 1996, (IFIP — The International Federation for Information Processing). p. 395–402.

- [31] BACAUD, L.; LEMARÉCHAL, C.; RENAUD, A.; SAGASTIZÁBAL, C. Bundle methods in stochastic optimal power management: A disaggregated approach using preconditioners. *Computational Optimization and Applications*, v. 20, n. 3, p. 227–244, dez. 2001.
- [32] BORGHETTI, A.; FRANGIONI, A.; LACALANDRA, F.; NUCCI, C. Lagrangian heuristics based on disaggregated bundle methods for hydrothermal unit commitment. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 18, n. 1, p. 313–323, 2003.
- [33] CULIOLI, J.; COHEN, G. Decomposition/coordination algorithms in stochastic optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 28, n. 6, p. 1372–1403, nov. 1990.
- [34] MEZGER, A. J.; ALMEIDA, K. C. de. Short term hydrothermal scheduling with bilateral transactions via bundle method. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 29, n. 5, p. 387–396, jun. 2007.
- [35] BELTRAN, C.; HEREDIA, F. J. Unit commitment by augmented lagrangian relaxation: Testing two decomposition approaches. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 112, n. 2, p. 295–314, fev. 2002.
- [36] TAKIGAWA, F. Y. K.; SILVA, E. L. da; FINARDI, E. C.; RODRIGUES, R. N. Solving the hydrothermal scheduling problem considering network constraints. *Electric Power Systems Research*, v. 88, p. 89–97, jul. 2012.
- [37] ZAOURAR, S.; MALICK, J. Prices stabilization for inexact unit-commitment problems. *Mathematical Methods of Operations Research*, v. 78, n. 3, p. 341–359, dez. 2013.
- [38] FINARDI, E. C.; SCUZZIATO, M. R. A comparative analysis of different dual problems in the lagrangian relaxation context for solving the hydro unit commitment problem. *Electric Power Systems Research*, v. 107, p. 221–229, fev. 2014.
- [39] KERR, R. H.; SCHEIDT, J. L.; FONTANNA, A.; WILEY, J. K. Unit commitment. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-85, n. 5, p. 417–421, maio 1966.
- [40] HARA, K.; KIMURA, M.; HONDA, N. A method for planning economic unit commitment and maintenance of thermal power systems.

IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-85, n. 5, p. 427–436, maio 1966. ISSN 0018-9510.

[41] JOHNSON, R. C.; HAPP, H.; WRIGHT, W. J. Large scale hydro-thermal unit commitment-method and results. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-90, n. 3, p. 1373–1384, maio 1971.

[42] SHOULTS, R.; CHANG, S. K.; HELMICK, S.; GRADY, W. A practical approach to unit commitment, economic dispatch and savings allocation for multiple-area pool operation with import/export constraints. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-99, n. 2, p. 625–635, mar. 1980.

[43] LEE, F. Short-term thermal unit commitment-a new method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 3, n. 2, p. 421–428, maio 1988.

[44] SILVA JR., I. C.; CARNEIRO JR., S.; OLIVEIRA, E. J. de; PEREIRA, J. L. R.; GARCIA, P. A. N.; MARCATO, A. L. M. A lagrangian multiplier based sensitive index to determine the unit commitment of thermal units. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 30, n. 9, p. 504–510, nov. 2008.

[45] MANTAWY, A. H.; ABDEL-MAGID, Y.; SELIM, S. Unit commitment by tabu search. *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-*, v. 145, n. 1, p. 56–64, jan. 1998.

[46] MORI, H.; MATSUZAKI, O. Embedding the priority list into tabu search for unit commitment. In: *IEEE Power Engineering Society Winter Meeting, 2001*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 3, p. 1067–1072 vol.3.

[47] RAJAN, C. C. A.; MOHAN, M. R.; MANIVANNAN, K. Neural based tabu search method for solving unit commitment problem. In: *Power System Management and Control, 2002. Fifth International Conference on (Conf. Publ. No. 488)*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 180–185.

[48] LIN, W.-M.; CHENG, F.-S.; TSAY, M.-T. An improved tabu search for economic dispatch with multiple minima. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 17, n. 1, p. 108–112, fev. 2002.

[49] COHEN, A. I.; YOSHIMURA, M. A branch-and-bound algorithm for unit commitment. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-102, n. 2, p. 444–451, 1983.

- [50] DILLON, T.; EDWIN, K. W.; KOCHS, H.-D.; TAUD, R. J. Integer programming approach to the problem of optimal unit commitment with probabilistic reserve determination. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-97, n. 6, p. 2154–2166, nov. 1978.
- [51] LAUER, G.; SANDELL, N.; BERTSEKAS, D.; POSBERGH, T. Solution of large-scale optimal unit commitment problems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-101, n. 1, p. 79–86, jan. 1982.
- [52] SANEIFARD, S.; PRASAD, N. R.; SMOLLECK, H. A fuzzy logic approach to unit commitment. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, n. 2, p. 988–995, 1997.
- [53] EL-SAADAWI, M. M.; TANTAWI, M. A.; TAWFIK, E. A fuzzy optimization-based approach to large scale thermal unit commitment. *Electric Power Systems Research*, v. 72, n. 3, p. 245–252, 2004.
- [54] VENKATESH, B.; YU, P.; GOOI, H.; CHOLING, D. Fuzzy MILP unit commitment incorporating wind generators. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 23, n. 4, p. 1738–1746, nov. 2008.
- [55] SASAKI, H.; WATANABE, M.; KUBOKAWA, J.; YORINO, N.; YOKOYAMA, R. A solution method of unit commitment by artificial neural networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 7, n. 3, p. 974–981, 1992.
- [56] WALSH, M.; O'MALLEY, M. Augmented hopfield network for unit commitment and economic dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, n. 4, p. 1765–1774, nov. 1997.
- [57] LIANG, R.-H.; KANG, F.-C. Thermal generating unit commitment using an extended mean field annealing neural network. *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-*, v. 147, n. 3, p. 164–170, 2000.
- [58] DASGUPTA, D.; MCGREGOR, D. Thermal unit commitment using genetic algorithms. *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-*, v. 141, n. 5, p. 459–465, 1994.
- [59] SHEBLÉ, G. B.; MAIFELD, T. T.; BRITTIG, K.; FAHD, G.; FUKUROZAKI-COPPINGER, S. Unit commitment by genetic algorithm with penalty methods and a comparison of lagrangian search and genetic algorithm—economic dispatch example. *International*

- Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 18, n. 6, p. 339–346, 1996.
- [60] LOWERY, P. G. Generating unit commitment by dynamic programming. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-85, n. 5, p. 422–426, 1966.
- [61] SNYDER, W. L.; POWELL, H.; RAYBURN, J. C. Dynamic programming approach to unit commitment. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 2, n. 2, p. 339–348, 1987.
- [62] HOBBS, W.; HERMON, G.; WARNER, S.; SHELBE, G. An enhanced dynamic programming approach for unit commitment. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 3, n. 3, p. 1201–1205, 1988.
- [63] SIU, T.; NASH, G.; SHAWWASH, Z. A practical hydro, dynamic unit commitment and loading model. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 16, n. 2, p. 301–306, 2001.
- [64] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. *Numerical Optimization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- [65] ROCKAFELLAR, R. T. *Convex Analysis*. [S.l.]: Princeton University Press, 1997.
- [66] SHOR, N. Z. The subgradient method. In: *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1985, (Springer Series in Computational Mathematics, 3). p. 22–47.
- [67] CHENEY, E. W.; GOLDSTEIN, A. A. Newton’s method for convex programming and tchebycheff approximation. *Numerische Mathematik*, v. 1, n. 1, p. 253–268, dez. 1959.
- [68] KELLEY JR., J. E. The cutting-plane method for solving convex programs. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 8, n. 4, p. 703–712, 1960.
- [69] IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. *Otimização, volume 2: Métodos computacionais*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007.
- [70] ATKINSON, D. S.; VAIDYA, P. M. A cutting plane algorithm for convex programming that uses analytic centers. *Mathematical Programming*, v. 69, n. 1-3, p. 1–43, jul. 1995.

- [71] KIWIEL, K. C. Complexity of some cutting plane methods that use analytic centers. *Mathematical Programming*, v. 74, n. 1, p. 47–54, jul. 1996.
- [72] ELZINGA, J.; MOORE, T. G. A central cutting plane algorithm for the convex programming problem. *Mathematical Programming*, v. 8, n. 1, p. 134–145, dez. 1975.
- [73] OUOROU, A. A proximal cutting plane method using chebychev center for nonsmooth convex optimization. *Mathematical Programming*, v. 119, n. 2, p. 239–271, jul. 2009.
- [74] LEMARECHAL, C. An extension of davidon methods to non differentiable problems. In: BALINSKI, M. L.; WOLFE, P. (Ed.). *Nondifferentiable Optimization*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1975, (Mathematical Programming Studies, 3). p. 95–109.
- [75] WOLFE, P. A method of conjugate subgradients for minimizing nondifferentiable functions. In: BALINSKI, M. L.; WOLFE, P. (Ed.). *Nondifferentiable Optimization*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1975, (Mathematical Programming Studies, 3). p. 145–173.
- [76] KIWIEL, K. A proximal bundle method with approximate subgradient linearizations. *SIAM Journal on Optimization*, v. 16, n. 4, p. 1007–1023, jan. 2006.
- [77] HINTERMÜLLER, M. A proximal bundle method based on approximate subgradients. *Computational Optimization and Applications*, v. 20, n. 3, p. 245–266, dez. 2001.
- [78] OLIVEIRA, W. *Métodos de Feixes Inexatos Aplicados à Programação Estocástica*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, jan. 2011. Disponível em: <http://www.cos.ufrj.br/uploadfile/1298901571.pdf>.
- [79] OLIVEIRA, W.; SAGASTIZÁBAL, C. Level bundle methods for oracles with on-demand accuracy. *Optimization Methods and Software*, v. 29, n. 6, p. 1180–1209, 2014.
- [80] FELTENMARK, S.; KIWIEL, K. Dual applications of proximal bundle methods, including lagrangian relaxation of nonconvex problems. *SIAM Journal on Optimization*, v. 10, n. 3, p. 697–721, jan. 2000.
- [81] FRANGIONI, A.; GORGONE, E. Bundle methods for sum-functions with “easy” components: Applications to multicommodity network design. *Math. Program.*, v. 145, n. 1-2, p. 133–161, jun. 2014.

- [82] FRANGIONI, A. Generalized bundle methods. *SIAM Journal on Optimization*, v. 13, p. 2002, 1998.
- [83] HAARALA, N.; MIETTINEN, K.; MÄKELÄ, M. M. Globally convergent limited memory bundle method for large-scale nonsmooth optimization. *Mathematical Programming*, v. 109, n. 1, p. 181–205, jan. 2007.
- [84] BURACHIK, R. S.; SAGASTIZÁBAL, C.; SCHEIMBERG, S. An inexact method of partial inverses and a parallel bundle method. *Optimization Methods & Software*, v. 21, n. 3, p. 385 – 400, 2006.
- [85] CAPPANERA, P.; FRANGIONI, A. Symmetric and asymmetric parallelization of a cost-decomposition algorithm for multicommodity flow problems. *INFORMS Journal on Computing*, v. 15, n. 4, p. 369–384, nov. 2003.
- [86] FISCHER, F.; HELMBERG, C. A parallel bundle framework for asynchronous subspace optimization of nonsmooth convex functions. *SIAM Journal on Optimization*, v. 24, n. 2, p. 795–822, jan. 2014.
- [87] OLIVEIRA, W.; SAGASTIZÁBAL, C. Bundle methods in the XXIst century: A birds'-eye view. *Pesquisa Operacional*, v. 34, n. 3, p. 647–670, 2014.
- [88] KIWIEL, K. C. A method for solving certain quadratic programming problems arising in nonsmooth optimization. *IMA Journal of Numerical Analysis*, v. 6, n. 2, p. 137–152, abr. 1986.
- [89] FRANGIONI, A.; GENTILE, C.; LACALANDRA, F. Tighter approximated MILP formulations for unit commitment problems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 24, n. 1, p. 105–113, 2009.
- [90] ILOG, Inc. *ILOG CPLEX: High-performance software for mathematical programming and optimization*. [S.l.: s.n.], 2014. See <http://www.ilog.com/products/cplex/>.
- [91] Gurobi Optimization Inc. *Gurobi Optimizer Reference Manual*. [s.n.], 2014. Disponível em: <http://www.gurobi.com>.
- [92] GUENNEBAUD, G.; JACOB, B. *Eigen v3*. [s.n.], 2010. Disponível em: <http://eigen.tuxfamily.org>.
- [93] ONS. *Consolidação da previsão de carga - Planejamento da operação elétrica de médio prazo - PEL 2009-2010*. 2010. Disponível

em: (http://www.ons.org.br/download/analise_carga_demanda/Relatorio_Anual_09-10-Carga.pdf).

[94] DOLAN, E. D.; MORÉ, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, v. 91, n. 2, p. 201–213, jan. 2002.

[95] EMIEL, G.; SAGASTIZÁBAL, C. Incremental-like bundle methods with application to energy planning. *Computational Optimization and Applications*, v. 46, n. 2, p. 305–332, jun. 2010.

**Apêndice A – Comissionamento de Unidades Termelétricas –
Modelagem Simplificada**

Para exemplificar a aplicação dos métodos de otimização não-diferenciável apresentados, será utilizada uma modelagem simplificada de um problema de comissionamento de unidades geradoras termelétricas, em que o objetivo é minimizar o custo de geração de um conjunto de unidades geradoras. As seguintes características serão consideradas:

- custos de geração lineares;
- barra única;
- restrições de rampa;
- variáveis inteiras para representar o estado (ligado ou desligado) das unidades geradoras.

O problema (A.1)-(A.5) apresenta essa modelagem.

$$\min_{p,u} C^{tot} = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (a_{i0}u_{it} + a_{i1}p_{it}) \quad (\text{A.1})$$

$$\text{s.a: } \sum_{i=1}^N p_{it} \geq D_t, \quad t \in \{1, \dots, T\} \quad (\text{A.2})$$

$$|p_{it} - p_{i,t-1}| \leq \Delta_i, \quad i \in \{1, \dots, N\}, t \in \{1, \dots, T\}, \quad (\text{A.3})$$

$$u_{it}\underline{p}_i \leq p_{it} \leq u_{it}\bar{p}_i, \quad i \in \{1, \dots, N\}, t \in \{1, \dots, T\}, \quad (\text{A.4})$$

$$u_{it} \in \{0, 1\}, \quad (\text{A.5})$$

em que:

C^{tot} é o custo total de geração, em R\$;

T é o número de estágios de tempo, em horas;

N é o número de unidades geradoras;

a_{i0} é o coeficiente linear da função custo do gerador i , em R\$;

a_{i1} é o coeficiente angular da função custo do gerador i , em R\$/MW;

u_{it} é uma variável binária que determina se a unidade geradora i está ligada (1) ou desligada (0) no estágio t ;

p_{it} é a potência de geração da unidade geradora i no estágio t , em MW;

D_t é a demanda do sistema no estágio t , em MW;

Δ_i é o máximo incremento/decremento de potência da unidade geradora i entre dois estágios de tempo consecutivos, em MW;

\underline{p}_i é a potência mínima de geração da unidade geradora i , em MW;

\bar{p}_i é a potência máxima de geração da unidade geradora i , em MW.

Observa-se que o conjunto de restrições (A.2), que representa o atendimento à demanda, acopla todas as unidades geradoras do sistema. Relaxando essas restrições chega-se à função dual $\Theta(\lambda)$, (A.6).

$$\begin{aligned} \Theta(x) = \min_{p,u} & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N [a_{i0}u_{it} + (a_{i1} - x_t)p_{it}] + \sum_{t=1}^T x_t D_t \\ \text{s.a: } & |p_{it} - p_{i,t-1}| \leq \Delta_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \\ & u_{it}\underline{p}_i \leq p_{it} \leq u_{it}\bar{p}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \\ & u_{it} \in \{0, 1\}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

em que:

$\Theta(x)$ é a função dual associada ao problema primal (A.6);

x_t é o multiplicador de Lagrange associado à restrição de atendimento da demanda no estágio de tempo t .

Nota-se que, dado que x_t é conhecido no contexto da RL, o valor de $\Theta(x)$ pode ser obtido de maneira desacoplada, como mostra o problema (A.7).

$$\begin{aligned} \theta_i(x) = \min_{p,u} & \sum_{t=1}^T [a_{i0}u_{it} + (a_{i1} - x_t)p_{it}] \\ \text{s.a: } & |p_{it} - p_{i,t-1}| \leq \Delta_i, \quad t = 1, \dots, T \\ & u_{it}\underline{p}_i \leq p_{it} \leq u_{it}\bar{p}_i, \quad t = 1, \dots, T \\ & u_{it} \in \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Assim, o problema dual é dado por (A.8).

$$\max_{x \in \mathfrak{R}_+^n} \Theta(x) = \max_{x \in \mathfrak{R}_+^n} \sum_{i=1}^N \theta_i(x) + \sum_{t=1}^T x_t D_t. \quad (\text{A.8})$$

Para este problema, o subgradiente é dado por (A.9).

$$g \in \partial\Theta(x) = \begin{bmatrix} D_1 - \sum_{i=1}^N p_{i1} \\ \vdots \\ D_T - \sum_{i=1}^N p_{iT} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

O oráculo para este problema é composto pelo valor da função dual (A.6), e um subgradiente (A.9). A cada chamada ao oráculo é necessário resolver N problemas de programação linear inteira-mista (MILPs).

Para ilustrar a aplicação da técnica da RL será utilizado como exemplo um sistema com quatro unidades geradoras e dois estágios de tempo. As demandas serão $D_1 = 25$ e $D_2 = 32$, constantes ao longo dos estágios. As características operativas das unidades geradoras encontram-se na Tabela A.1.

Tabela A.1 – Características das unidades geradoras.

UG	\underline{p}_i	\bar{p}_i	Δ_i	$p_{i,0}$	a_{i0}	a_{i1}
1	1	8	3	4	100	5
2	2	10	5	8	50	10
3	3	10	8	0	75	15
4	5	20	10	0	125	20

O problema (A.1)-(A.5) pode ser resolvido em sua forma primal. Utilizando algum pacote para otimização linear inteira mista, chega-se à solução apresentada na Tabela A.2, com custo ótimo de geração $C^{Tot}(p^*) = 1.205,00$.

Utilizando a RL, chega-se a um problema dual composto de duas variáveis, e quatro subproblemas devem ser resolvidos a cada chamada ao oráculo. Na Figura A.1 é apresentada a função dual obtida discretizando os multiplicadores x_1 e x_2 entre 0 e 50, com incremento de 0,25, e resolvendo o problema dual em todo o intervalo.

Tabela A.2 – Solução do problema do comissionamento de unidades termelétricas com modelagem simplificada.

UG	p_{i1}	p_{i2}
1	7	8
2	10	10
3	8	9
4	0	5

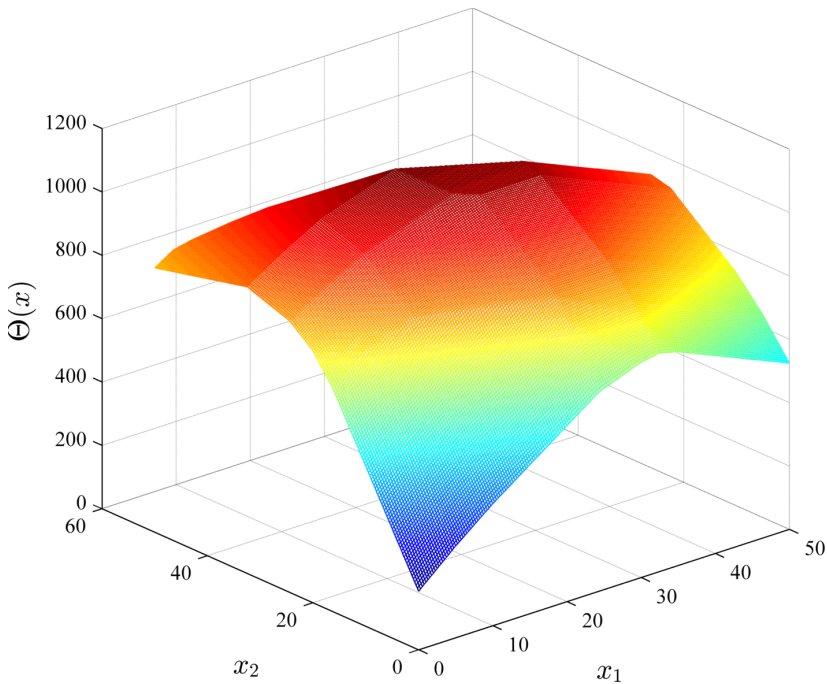


Figura A.1 – Valor da função dual para o problema do comissionamento de unidades termelétricas com modelagem simplificada.

Na Figura A.1 se observa que há vários pontos em que o gradiente não está definido. O ponto de máximo obtido por inspeção é $x_1 = 20$ e $x_2 = 32,5$, e o valor ótimo da função dual é 1.125.

Como o problema primal é não-convexo, é esperada a diferença entre o custo ótimo do problema primal e o valor da função dual no

ponto ótimo. Essa diferença é conhecida como brecha de dualidade, que, para este exemplo, é de R\$ 80. Outra medida utilizada é a brecha de dualidade relativa, $gap\%$, dada por:

$$gap\% = 100 \cdot \frac{C^{Tot}(p^*) - \Theta(x^*)}{C^{Tot}(p^*)}, \quad (\text{A.10})$$

em que $C^{Tot}(p^*)$ é o valor da função objetivo na solução do problema primal, e $\Theta(x^*)$ é o valor da função dual na solução do problema dual. Para o exemplo acima, a brecha de dualidade relativa é de 6,64%.

Nos resultados numéricos apresentados no Capítulo 2 é utilizada a notação apresentada naquele capítulo, ou seja, a função dual é escrita como:

$$f(x) = -\Theta(\lambda). \quad (\text{A.11})$$

Desta forma a função f é convexa, e o problema de otimização será de minimização.

Apêndice B – Dados do sistema teste

Tabela B.1 – Características das unidades geradoras.

Nome	Barra	\underline{p}_i	\bar{p}_i	q_0	q_1	q_2	CP_i	Δ_i^d	Δ_i^u	$p_{i,0}$	u_0	t_i^{down}	t_i^{up}	Tu_0
T_1	9	12	132	2086	118.8	0.56	82500	24	24	80	1	12	12	8
T_2	10	25	262	5983	39.6	0.387	130000	47.4	47.4	100	1	10	10	7
T_3	11	20	100	4240	52.7	0.592	46000	16	16	40	1	13	13	20
T_4	8	70	657	4700	11.5	0.02	106000	117.4	117.4	0	0	18	18	14
T_5	42	125	1350	1200	15.5	0.04	240000	245	245	450	1	20	20	30
T_6	12	65	638	24800	58	0.045	40000	114.6	114.6	240	1	3	3	8
T_7	30	120	710	7600	73	0.14	65000	118	118	0	0	4	4	1
T_8	44	40	670	14000	57	0.085	51000	126	126	380	1	2	2	5
T_9	46	50	450	35000	36	0.46	144000	80	80	220	1	8	8	2
T_{10}	1	25	600	9200	86	0.8	312000	115	115	300	1	6	6	8

Tabela B.2 – Características das linhas de transmissão.

Linha	De - Para	Reatância (p.u.)	Cap. (MW)	Linha	De - Para	Reatância (p.u.)	Cap. (MW)
L1	2-3	1.61E-02	328	L49	22-20	2.76E-02	672
L2	2-3	1.61E-02	328	L50	22-20	2.76E-02	672
L3	2-3	1.70E-02	328	L51	23-24	3.43E-03	2110
L4	2-5	1.21E-02	600	L52	25-27	2.97E-02	113
L5	2-5	1.26E-02	600	L53	25-27	2.97E-02	113
L6	3-19	1.82E-02	724	L54	25-33	1.87E-01	95
L7	3-19	2.62E-02	724	L55	27-26	6.01E-02	150
L8	4-1	1.05E-02	1300	L56	27-26	6.01E-02	150
L9	5-18	4.40E-03	2110	L57	27-26	6.01E-02	150
L10	6-7	7.40E-03	1637	L58	27-37	2.76E-01	113
L11	6-29	2.43E-02	2273	L59	28-24	3.55E-02	2110
L12	12-4	6.54E-03	2363	L60	28-35	9.20E-03	2182
L13	12-5	2.55E-02	2110	L61	28-41	2.17E-02	2363
L14	12-16	2.05E-02	2363	L62	29-34	1.39E-02	2162
L15	12-18	2.69E-02	2182	L63	29-34	1.45E-02	2162
L16	12-29	2.01E-02	2162	L64	29-41	1.94E-02	2162
L17	13-2	2.83E-01	259	L65	29-41	2.01E-02	2162
L18	13-12	1.21E-02	672	L66	30-31	1.18E-01	79
L19	13-39	1.57E-01	500	L67	30-31	1.18E-01	79
L20	13-39	1.57E-01	500	L68	30-37	2.68E-01	113
L21	14-16	2.92E-02	2037	L69	31-8	1.29E-01	159

Tabela B.2 – Características das linhas de transmissão.

Linha	De - Para	Reatância (p.u.)	Cap. (MW)	Linha	De - Para	Reatância (p.u.)	Cap. (MW)
L22	14-18	1.60E-02	2110	L70	31-9	4.49E-02	312
L23	15-14	1.15E-02	672	L71	31-10	7.44E-02	195
L24	15-14	1.16E-02	672	L72	31-10	7.41E-02	195
L25	15-14	1.28E-02	672	L73	31-36	1.19E-01	243
L26	15-26	3.28E-02	350	L74	31-40	4.84E-02	243
L27	15-26	3.28E-02	350	L75	31-40	4.64E-02	243
L28	15-31	1.94E-01	243	L76	33-32	1.05E-01	100
L29	15-32	6.56E-02	243	L77	33-32	5.85E-02	150
L30	15-32	6.56E-02	243	L78	33-32	5.78E-02	150
L31	15-36	1.31E-01	246	L79	33-32	1.27E-01	75
L32	16-14	3.91E-02	2037	L80	34-0	1.41E-02	2000
L33	16-22	2.35E-02	1688	L81	35-16	4.55E-03	2182
L34	16-35	5.90E-03	2182	L82	37-36	1.18E-01	84
L35	17-16	1.24E-02	672	L83	37-36	1.31E-01	75
L36	17-16	1.23E-02	672	L84	37-36	1.26E-01	75
L37	17-16	1.23E-02	672	L85	37-36	5.98E-02	150
L38	17-43	2.06E-02	933	L86	38-11	4.61E-02	291
L39	19-18	1.16E-02	672	L87	38-42	7.78E-02	259
L40	19-18	1.17E-02	672	L88	38-42	7.77E-02	259
L41	19-32	9.78E-02	350	L89	39-42	1.59E-01	417
L42	19-32	9.70E-02	350	L90	41-4	7.00E-03	2182
L43	20-21	3.04E-02	300	L91	41-7	1.17E-02	1637

Tabela B.2 – Características das linhas de transmissão.

Linha	De - Para	Reatância (p.u.)	Cap. (MW)	Linha	De - Para	Reatância (p.u.)	Cap. (MW)
L44	20-21	3.04E-02	300	L92	44-40	1.20E-01	333
L45	20-44	8.18E-02	232	L93	45-23	1.22E-02	672
L46	21-38	2.08E-01	600	L94	45-23	1.14E-02	672
L47	22-23	9.16E-03	1688	L95	45-23	1.22E-02	672
L48	22-28	3.03E-02	2182				

Tabela B.3 – Fatores multiplicadores das demandas das barras.

Barra	Fator
1	0,504
2	35,7
3	120,33
6	94,71
7	0,504
9	3,36
10	3,78
12	0,189
13	94,836
15	114,66
17	87,99
19	136,92
20	92,19
22	105,21
24	102,06
25	8,19
27	58,632
28	52,395
30	6,951
31	8,694
32	27,93
33	81,9
34	122,304
35	0,378
37	53,739
38	31,92
39	63,21
40	57,33
41	1,407
42	69,09
44	1,05
45	210,168