

Thiago Mannes Guesser

**CONTROLE DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE PLACAS
PLANAS ATRAVÉS DE OTIMIZAÇÃO DE FORMA**

Dissertação submetida ao Programa de
Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica da Universidade
Federal de Santa Catarina para a
obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Arcanjo Lenzi, PhD.

Florianópolis
2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor.

Guesser, Thiago Mannes
CONTROLE DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE PLACAS PLANAS
ATRAVÉS DE OTIMIZAÇÃO DE FORMA / Thiago MannesGuesser
;
orientador, ArcajoLenzi - Florianópolis, SC, 2014.
131 p.Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui referências
1. Engenharia Mecânica. I. Lenzi, Arcajo. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Controle
das frequências naturais de placas planas através de
otmização de forma.

Thiago Mannes Guesser

**CONTROLE DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE PLACAS
PLANAS ATRAVÉS DE OTIMIZAÇÃO DE FORMA**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de “Mestre”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 28 de fevereiro de 2014.

Prof. Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr. Eng.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Fábio Fiates, Dr.Eng.
Universidade do Sul de Santa Catarina

Prof. Roberto Jordan, Dr.Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

À família e aos amigos.

AGRADECIMENTOS

Ao programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica (POSMEC) da Universidade Federal de Santa Catarina e seus professores, e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).

Ao Laboratório de Vibrações e Acústica (LVA) da UFSC e sua equipe, sobretudo ao professor Arcanjo Lenzi e ao Doutorando Olavo Mecias da Silva Junior, grandes incentivadores e orientadores deste projeto, e ao Bolsista de Iniciação Científica (e irmão) Igor Mannes Guesser.

À empresa Whirlpool S/A - Unidade Compressores (Embraco), pelo suporte financeiro e incentivo, na pessoa de Cláudio de Pellegrini.

À minha família e à minha namorada, Bruna, pelo apoio e motivação sem fim nesse período de mestrado, cheio de mudanças e decisões importantes.

Aos amigos, imprescindíveis nesta empreitada, Arcanjo, Olavo, Igor, Zinho, Caetano, Cristiano, Cláudio, Cadu, Hattori, Hofmann, Leandro, James, e outros, pela parceria.

À empresa Volvo do Brasil, pela flexibilidade à mim proporcionada na finalização deste trabalho, na pessoa de Luciano Faggion.

Obrigado.

Faz o que o teu coração manda.

(Arcanjo Lenzi)

RESUMO

Problemas causados por ressonâncias indesejadas são bastante conhecidos dos projetistas de estruturas. Alterações geométricas em componentes estruturais frequentemente são necessárias para que estes tenham comportamento dinâmico adequado às suas aplicações. Estas alterações podem ser efetuadas através do uso de ferramentas de otimização de forma. Este trabalho aborda a otimização de forma de placas planas com o objetivo de controlar suas frequências naturais evitando ressonâncias em determinadas faixas de interesse. A análise baseou-se na representação da posição dos nós da malha em elementos finitos em função da liberdade de criação de diferentes geometrias através da movimentação destes nós. Tendo em vista o grande número de variáveis optou-se por usar o método gradiente MMA (*Method of Moving Asymptotes*) de busca e passo para a otimização. Este procedimento foi utilizado nas análises de dois casos práticos.

Palavras-chave: Otimização estrutural, análise de sensibilidade, vibrações de placas.

ABSTRACT

Problems caused by undesirable resonances are well known to structural engineers. Geometric changes in the project design are frequently necessary to achieve good dynamic response of its structural components. These changes can be proposed using optimization tools. This dissertation is about flat plates optimization for the control of their natural frequencies in order to avoid undesirable resonances in certain frequencies ranges. The analysis is based on the use of the plate finite element mesh nodes position due to the great variety of possible geometry designs. Given the large number of variables created using this approach, a gradient method of optimization is used: the MMA (Method of Moving Asymptotes). This procedure is used to analyze two practical cases.

Keywords: Structural optimization, sensitivity analysis, plate vibration.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Níveis de vibração medido (no tempo, em banda estreita e em bandas terço de oitava) no bloco de um compressor hermético em operação.....	34
Figura 2 - Amplitudes das harmônicas do torque no eixo para motores quatro e dois tempos.....	36
Figura 3 - Espectro característico idealizado de um compressor operando a 50Hz e a 60Hz.....	37
Figura 4 - Refrigerador doméstico e seus componentes típicos.....	38
Figura 5 - Montagem experimental para análise modal da placa: Placa de 570x135x2mm para validação do modelo.....	40
Figura 6 - Correlação de pontos medidos e malha elementos finitos da placa.....	42
Figura 7 - Validação do Modelo para diferentes tipos de elementos.....	44
Figura 8 - Matriz de MAC comparando formas modais experimentais e numéricas.....	45
Figura 9 - Fluxograma de um processo de otimização.....	50
Figura 10 - Formas de parametrização de geometria.....	52
Figura 11 - Geometria da placa base do refrigerador a ser parametrizada.....	55
Figura 12 - Detalhes da parametrização da placa base.....	55
Figura 13 - Ordem de numeração dos nós para elemento sólido hexaédrico 8 nós.....	56
Figura 14 - Placa base do refrigerador e suas restrições geométricas.....	60
Figura 15 - Comparação das sensibilidades analíticas e por diferenças finitas para diversos valores de perturbação.....	70
Figura 16 - Corpo 3D com elemento sólido 8 nós.....	72
Figura 17 - Elemento sólido de 8 nós real (à esquerda) e elemento mestre (à direita).....	78
Figura 18 - Resposta elástica de um elemento quadrilátero à flexão puxa.....	82
Figura 19 - Pré-deformação da placa com base no primeiro modo de vibração.....	95
Figura 20 - Região de influência do filtro de sensibilidade.....	98
Figura 21 - Compressor Hermético de Aplicação Doméstica.....	103
Figura 22 - Dimensões do compressor utilizado.....	104
Figura 23 - Isolador de vibrações recomendado pelo fabricante para este modelo de compressor.....	104
Figura 24 - Modelo da placa base e compressor utilizado.....	105
Figura 25 - Forma inicial da placa com compressor pré-deformada para o caso 1.....	109
Figura 26 - Variação das frequências naturais ao longo das iterações para o caso 1.....	109
Figura 27 - Forma otimizada da placa para o caso 1.....	111
Figura 28 - Variação da função objetivo e restrição ao longo da otimização para o caso 1.....	112
Figura 29 - Variação das duas primeiras frequências naturais ao longo da otimização para o caso 1.....	113

Figura 30 - Variação das frequências naturais ao longo das iterações para o caso 2.....	117
Figura 31 - Variação da função objetivo e restrição ao longo da otimização para o caso 2.....	118
Figura 32 - Forma otimizada da placa para o caso 2.	120
Figura 33 - Compressor linear.	123
Figura 34 - Modelo e condições de contorno para análise harmônica.	124
Figura 35 - Curvas de resposta da velocidade média quadrática.	124
Figura 36 - Radiação sonora da placa nas harmônicas do compressor.	125

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Comparação das frequências naturais medidas e simuladas [Hz].	43
Tabela 2 - Frequências naturais e formas modais da placa plana.....	46
Tabela 3 - Distribuições da função sensibilidade para primeira frequência natural da placa para diferentes deformações iniciais.	94
Tabela 4 - Sensibilidade da função objetivo para a primeira frequência natural, filtrada para diferentes raios de filtro.	99
Tabela 5 - Sensibilidade da função objetivo para a primeira frequência natural com e sem filtro para diferentes deformações iniciais.	100
Tabela 6 - Frequências naturais e formas modais do modelo de placa base com compressor original.	106
Tabela 7 - Variação da geometria da placa otimizada ao longo da otimização para o caso 1.	110
Tabela 8 - Geometrias inicial e final da placa otimizada para diferentes deformações iniciais no caso 1.	114
Tabela 9 - Variação da geometria da placa otimizada ao longo da otimização para o caso 2.	119
Tabela 10 - Geometrias inicial e final da placa otimizada para diferentes deformações iniciais no caso 2.	121
Tabela 11 - Comparação entre frequências naturais calculadas para modelo otimizado do caso 2 para elementos sólido e casca.	122

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LVA	Laboratório de Vibrações e Acústica
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
MMA	Method of Moving Asymptotes
MAC	Modal Assurance Criterion
CAD	Computer Aided Design
KTH	Kungliga Tekniska Högskolan
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
GHz	Gigahertz
GB	Gigabytes

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos romanos:

B	Matriz que correlaciona deformações com deslocamentos nodais
C	Matriz que correlaciona tensões com deslocamentos nodais
<i>c</i>	Velocidade do som
<i>e</i>	Índice relativo ao número de elemento
<i>esp</i>	Espessura da placa
$\det(\)$	Função determinante de matriz
$dist(j, i)$	Distância entre os nós "j" e "i"
\hat{f}	Função qualquer que foi filtrada
\mathbf{f}^B	Vetor de forças por unidade de volume
\bar{f}_i	Valor da restrição
$\tilde{f}_i^{(k)}$	Função restrição na forma explícita para iteração "k"
$f_i(\mathbf{x})$	Função Restrição
\mathbf{f}^S	Vetor de forças por unidade de área
$f_0(\mathbf{x})$	Função Objetivo
$\tilde{f}_0^{(k)}$	Função objetivo na forma explícita para iteração "k"
$h_i(r, s, t)$	Funções de forma (ou interpolação)
H	Vetor de funções de forma
H_i	Fator de ponderação do filtro pela distância
<i>i, j, k</i>	Índices
J	Momento de Inércia de uma esfera
J	Matriz Jacobiana
<i>k</i>	Constante de mola
K	Matriz de Rigidez
$\tilde{\mathbf{K}}$	Matriz de rigidez para elemento de 11 nós condensada para tamanho de 8 nós.
\mathbf{K}_{reduz}	Matriz de rigidez de um modelo reduzido

\bar{L}	Aresta média da placa
\bar{L}_e	Aresta média elementar
lim	Indicação de função Limite
L_1	Comprimento da primeira aresta vizinha ao nó em análise
L_2	Comprimento da segunda aresta vizinha ao nó em análise
m	Índice relativo a número de elemento
m	Massa
M	Número de restrições do problema
\mathbf{M}	Matriz de Massa
M_{esf}	Massa da esfera
$\mathbf{M}_{\text{reduz}}$	Matriz de massa de um modelo reduzido
M_{total}	Massa total do modelo
N	Número de variáveis do problema
N_e	Número de elementos
N_{filt}	Número de nós de influência no filtro.
N_{GL}	Número de graus de liberdade
\mathbf{N}_i	Vetor de coordenadas em (X,Y,Z) do nó "i"
N_n	Número de nós da malha
N_p	Número de pontos de Gauss
N_{reduz}	Número de elementos do modelo reduzido
p	Índice relativo ao número do ponto de Gauss
$p_{ij}^{(k)} q_{ij}^{(k)}$	Funções utilizadas no cálculo da função objetivo na forma explícita para iteração "k"
$U_j^{(k)} L_j^{(k)} r_i^k$	
(r, s, t)	Coordenadas locais do elemento isoparamétrico
R^3	Espaço vetorial de três dimensões
$\bar{\mathbf{R}}_C$	Vetor de forças concentradas
R_{esf}	Raio da esfera
r_{max}	Raio de influência do filtro

S	Área de radiação sonora
S_u	Área onde os deslocamentos estão prescritos
$\text{Tr}[\]$	Função traço de matriz
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos internos nas coordenadas locais
U	Deslocamento na direção X
$\bar{\mathbf{U}}$	Vetor de deslocamentos virtuais nas coordenadas globais
$\hat{\mathbf{U}}$	Vetor de deslocamentos virtuais
$\ddot{\mathbf{U}}$	Vetor de acelerações virtuais
\mathbf{U}^{Sf}	Vetor de deslocamentos prescritos
$\mathbf{U}(X, Y, Z)$	Vetor deslocamentos no sistema de coordenadas global
V	Deslocamento na direção Y
V	Volume de um corpo
$\langle \bar{v}^2 \rangle$	Velocidade média quadrática de vibração
W	Deslocamento na direção Z
W	Potência sonora radiada
W_{ext}	Trabalho virtual externo
W_{int}	Trabalho virtual interno
x	Deslocamento
\ddot{x}	Aceleração
\mathbf{x}	Vetor de variáveis
x, y, z	Sistema de coordenadas local
x_j, y_j, z_j	Valor das coordenadas do nó "j" nas direções (X,Y,Z)
X, Y, Z	Sistema de coordenadas global
$x_j^{(k)}$	Valor da coordenada do nó "j" na direção X para iteração "k"
z	Valor da coordenada na direção Z

Símbolos gregos:

$\gamma_{XY}, \gamma_{YZ}, \gamma_{ZX}$	Deformações angulares nas direções X, Y e Z respectivamente
∂	Indicação de função Derivada
Δ	Delta (variação)
ϵ	Vetor de deformações
$\epsilon_{XX}, \epsilon_{YY}, \epsilon_{ZZ}$	Deformações normais nas direções X, Y e Z respectivamente
λ	Autovalor
$\bar{\epsilon}$	Vetor de deformações virtuais
ρ	Densidade de massa
ρ	Variável topológica
σ_{rad}	Eficiência de radiação
\sum	Função somatório
τ	Vetor de tensões
$\tau_{XX}\tau_{YY}\tau_{ZZ}$	Tensões normais nas direções X, Y e Z respectivamente
$\tau_{XY}\tau_{YZ}\tau_{ZX}$	Tensões cizalhantes nas direções X, Y e Z respectivamente
Φ	Autovetor
$\Phi_{i_{reduz}}$	Autovetor reduzido

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	27
1.1	CONTEXTO DO TRABALHO.....	27
1.2	OBJETIVOS	28
1.3	ESTRUTURA DO DOCUMENTO.....	29
1.4	TRABALHOS ANTERIORES	29
2	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	33
2.1	RUÍDO DE MÁQUINAS	33
2.2	REFRIGERADOR DOMÉSTICO	37
2.2.1	Modelo da placa base em elementos finitos - validação	39
3	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	49
3.1	PARAMETRIZAÇÃO.....	52
3.1.1	Parametrização da placa base do refrigerador.....	54
3.2	FUNÇÃO OBJETIVO	56
3.3	RESTRICÇÕES.....	58
3.3.1	Restrição de massa/volume	59
3.3.2	Restrição geométrica.....	60
3.3.3	Restrição de aresta média.....	60
3.4	ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO.....	62
4	ANÁLISE DA SENSIBILIDADE.....	65
4.1	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	68
4.2	MÉTODO ANALÍTICO.....	71
4.2.1	Formulação geral de elementos finitos.....	71
4.2.2	Elemento sólido hexaédrico linear	77
4.2.3	Elemento não-conforme	82
4.2.4	Aplicação para caso da placa plana.....	83
4.2.4.1	Derivada da matriz B	85
4.2.4.2	Derivada do determinante do Jacobiano	90
4.2.4.3	Derivadas das matrizes de Massa e Rigidez final	90
4.3	SENSIBILIDADE DA RESTRIÇÃO	91
4.3.1	Restrição de massa/volume	91
4.3.2	Restrição de aresta média.....	92
4.4	PARTICULARIDADES.....	93
4.4.1	Placa plana	93
4.4.2	Filtro de sensibilidade	96
5	APLICAÇÃO E ESTUDO DE CASOS.....	103
5.1	CASO 1: MAXIMIZAÇÃO DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL	108
5.2	CASO 2: CRIAÇÃO DE <i>BAND-GAPS</i>	116

5.2.1	Validação com elementos finitos de casca.....	122
5.2.2	Resposta dinâmica	123

6	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES DE TRABALHOS FUTUROS	127
7	REFERÊNCIAS.....	129

INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO DO TRABALHO

A ressonância estrutural é um fenômeno onde a estrutura tende a oscilar com grandes amplitudes em certas frequências, chamadas frequências naturais, sendo muitas vezes um fenômeno indesejado considerado problemático. As frequências naturais são propriedades intrínsecas de um projeto devido à elasticidade e à massa dos materiais utilizados e sua distribuição geométrica. Provavelmente o mais conhecido e trágico problema de ressonância foi o da ponte de Tacoma, que ressonava com grandes amplitudes, até sua quebra. O caso de um refrigerador doméstico, cuja estrutura pode apresentar ressonâncias de grande amplitude não é tão trágico, mas pode gerar ruído incômodo ao usuário e consequente perda de atratividade do produto. Por isso, é importante um projeto com desenho correto para evitar esses problemas, em outras palavras, que as suas frequências naturais não sejam excitadas fortemente.

Por vezes, as mudanças geométricas que devem ser aplicadas para se alterarem as frequências naturais de um componente não são simples, e ainda, soluções triviais como enrijecer indefinidamente a estrutura através da adição de material são proibitivas. Surge espaço então para o desenvolvimento e aplicação de ferramentas de otimização estrutural.

A solução de problemas de engenharia através das análises numéricas já é realidade em nível acadêmico e industrial. A melhoria dos computadores, a necessidade da redução nos custos e no tempo de projeto, do número de protótipos, também impulsiona o desenvolvimento e aplicação destes métodos.

No presente trabalho, estes métodos serão estudados e aplicados para o desenho de uma placa base de refrigerador doméstico, responsável pela união estrutural entre compressor e refrigerador.

Sabendo que a maior fonte de transientes vibratórios neste sistema é o compressor, percebe-se a importância que a placa base tem como filtro de vibrações do compressor para o gabinete do refrigerador, evitando que este vibre e irradie ruído.

Sendo conhecida a assinatura da excitação gerada pelo compressor, pode-se fazer a definição das frequências mais fortemente excitadas por ele e assim projetar a placa para que não tenha frequências naturais com estes valores, de forma que se evite a ocorrência de ressonâncias. Essa informação é devidamente processada e repassada

para o processo de otimização, que deve buscar uma geometria que a atenda.

O tipo de otimização utilizado no presente trabalho é a otimização de forma, o qual é explicado ao longo do texto. Tal opção é escolhida devido ao desenho base do problema, uma placa plana, e pelas limitações do processo de fabricação das placas de refrigerador por estampagem. O problema de otimização de forma, resumidamente, consiste em encontrar uma geometria para a estrutura ou seu contorno, que extremize um determinado parâmetro de desempenho, e que simultaneamente satisfaça restrições especificadas.

Ao longo da otimização a placa deixa de ser plana, e a nomenclatura correta passaria a ser casca. No entanto, o termo placa continuará a ser utilizado ao longo do trabalho pois remete-se ao componente placa base do refrigerador, e não à sua geometria propriamente dita.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é melhorar o comportamento vibroacústico de placas base de refrigeradores domésticos fazendo uso da otimização de forma, com intuito final de minimizar a potência sonora radiada. Para isto, as frequências naturais da placa serão deslocadas de acordo com a assinatura da excitação típica vinda de um compressor, evitando frequências de grande energia vibratória. Os parâmetros aqui escolhidos para a otimização de forma são as posições espaciais de certos nós de uma malha obtida através do Método dos Elementos Finitos, alterando-se a forma da estrutura à medida que estas posições são modificadas.

Um modelo numérico de placa plana será criado e validado para escolha do melhor tipo de elemento a ser utilizado, casca ou sólido, com formulação linear ou quadrática. Será utilizado o elemento de formulação mais simples mas que represente corretamente o comportamento dinâmico da placa.

Este elemento terá sua formulação numérica analisada para que a sensibilidade da função objetivo seja calculada de forma analítica.

O compressor é então adicionado ao modelo, na forma de uma massa pontual com massa e momentos de inércia semelhantes ao real. Esse modelo também é engastado nas bordas, na tentativa de melhor representar as condições de contorno reais à que está submetida a placa.

Faz-se necessária também a definição de uma restrição, para que o processo de otimização possa convergir.

Com o modelo pronto e a restrição definida, o cálculo da sensibilidade à movimentação dos nós que foi desenvolvido pode ser aplicado ao caso da placa base do refrigerador. Esse pacote todo é então utilizado no processo de otimização utilizando o algoritmo MMA ("*Method of Moving Asymptotes*").

1.3 ESTRUTURA DO DOCUMENTO

A seguir, o Capítulo 2 aborda o problema de vibração de máquinas através de um estudo de sua assinatura de vibração no espectro de frequências. Este capítulo também apresenta uma descrição do problema da placa base de um refrigerador e faz a validação do modelo de uma placa plana, necessária para escolha do tipo de elemento finito a ser utilizado no trabalho.

O Capítulo 3 aborda a otimização estrutural de forma geral e os aspectos importantes para sua implementação, entre eles, parametrização da geometria, função objetivo, restrições e algoritmo otimizador. Nesse sentido, também demonstra como será a aplicação deste método no presente trabalho.

Uma vez demonstrado o método de otimização, o Capítulo 4 foca no cálculo das sensibilidades tanto da função objetivo como também das restrições. São comentadas as formas de cálculo: analítica ou por diferenças finitas, e a formulação de elementos finitos necessária ao cálculo pela forma analítica. Ao final, este capítulo aborda também outros aspectos importantes da otimização, aqui chamados de "pontos de atenção", como problemas de implementação e a utilização de filtros nas sensibilidades.

O Capítulo 5 utiliza os desenvolvimentos deste trabalho em dois estudos de caso para placa base do refrigerador. Ao fim, respostas harmônicas são calculadas comparando placa base original e sua versão otimizada.

O Capítulo 6 trata das conclusões, e traz um resumo do que foi aprendido no desenvolvimento do trabalho.

O capítulo 7 traz propostas de trabalhos futuros, e por fim, o capítulo 8 traz as referências bibliográficas utilizadas neste trabalho.

1.4 TRABALHOS ANTERIORES

Na busca por trabalhos similares ao que será desenvolvido aqui, alguns artigos interessantes foram encontrados, e são citados abaixo. Todos utilizam otimização de forma através da alteração da posição dos

nós de uma malha, com base em métodos gradientes de otimização, ou seja, envolvem o cálculo de sensibilidade.

O mais completo deles, no quesito cálculo de sensibilidade, é o trabalho de Wang et al (1985), onde a sensibilidade é calculada de forma analítica para o elemento sólido hexaédrico de 20 nós, similar ao proposto no presente trabalho. A diferença principal é que a física de seu problema é estática, portanto, somente a matriz de rigidez é trabalhada. Sua parametrização, também, não envolve todos os nós da malha. Apenas alguns nós específicos são parametrizados e se movem levando consigo os nós da vizinhança, que definem o contorno da geometria que tem sua malha alterada a cada iteração. O exemplo apresentado usa estado plano de tensões, portanto, só há movimentação dos nós em 2 dimensões.

Outro trabalho muito interessante é o de Inzarulfaishan e Azegami (2004), que parametriza os nós da geometria de um chassi veicular. Porém, em vez de otimizar frequências, otimiza a geometria visando posicionar as regiões nodais dos modos (com baixa amplitude de deslocamento) em locais desejados. A movimentação dos nós durante a otimização é garantida pelas características do método adjunto que utiliza no cálculo de sensibilidade, onde os deslocamentos nodais são sempre o resultado de uma sobreposição de modos ponderados por constantes. Isso resulta em geometrias com características das várias formas modais utilizadas no procedimento.

O trabalho de Yu et al (2010) também tem como objetivo posicionar as regiões nodais dos modos em locais adequados, mas desta vez, em um violino. Sua parametrização não envolve movimentação de nós, mas sim, variação de espessuras de cada um dos elementos tipo casca que utiliza para modelar o instrumento. Sua metodologia também faz uso de método adjunto para sensibilidade, focada em duas formas modais específicas. Para seguir estas formas modais ao longo da otimização, faz uso do chamado "*mode tracking*", método que assegura que a frequência natural em análise corresponde a determinada forma modal ao longo de todo o processo de otimização, evitando a troca de posição entre os modos. Esse método é comentado sucintamente nos exemplos desenvolvidos nesta dissertação.

Com relação à otimização do valor de determinada frequência natural de uma estrutura (autovalor), o trabalho de Pedersen (2004) parte de uma abordagem analítica, similar à desenvolvida no presente trabalho, porém calcula as derivadas das matrizes de massa e rigidez do modelo por diferenças finitas, chamado método semi-analítico. Seu objetivo é otimizar geometria e posição de um furo numa placa para

determinada frequência natural. Para isso, não move os nós da malha de forma direta, e faz uso de uma equação de elipse, cujos parâmetros são utilizados também no cálculo de sensibilidade, onde entra em ação o método semi-analítico.

Ainda, com relação a otimização do valor de determinada frequência natural de uma estrutura (autovalor), o trabalho de Kilian et al (2003) parametriza e move nós em três dimensões de uma placa que é um componente da suspensão de disco rígido para computador. Para isso, entretanto, ele faz uso de um software comercial, cujas equações não são abertas no trabalho. O resultado são placas nervuradas com repuxos e saliências de transição suave, formas similares às obtidas no presente trabalho.

2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O ruído radiado por sistemas de vários graus de liberdade tem geralmente seu espectro na frequência dominado pela assinatura da excitação e das transmissibilidades dos caminhos de propagação da vibração, ponderados pela eficiência de radiação do radiador final.

Neste capítulo será feito um pequeno estudo sobre o espectro de ruído e vibração de compressores herméticos, focado em baixas frequências (até 500Hz), de forma a determinar a melhor abordagem para o projeto de placas base de refrigeradores.

Uma breve descrição do sistema de refrigeração e seus componentes, principalmente a placa base que sustenta o compressor, também é assunto deste capítulo.

Por fim, a validação do modelo em elementos finitos de uma placa será feita para escolha do tipo de elemento a ser utilizado neste trabalho, no capítulo sobre cálculo da sensibilidade (Capítulo 4).

2.1 RUÍDO DE MÁQUINAS

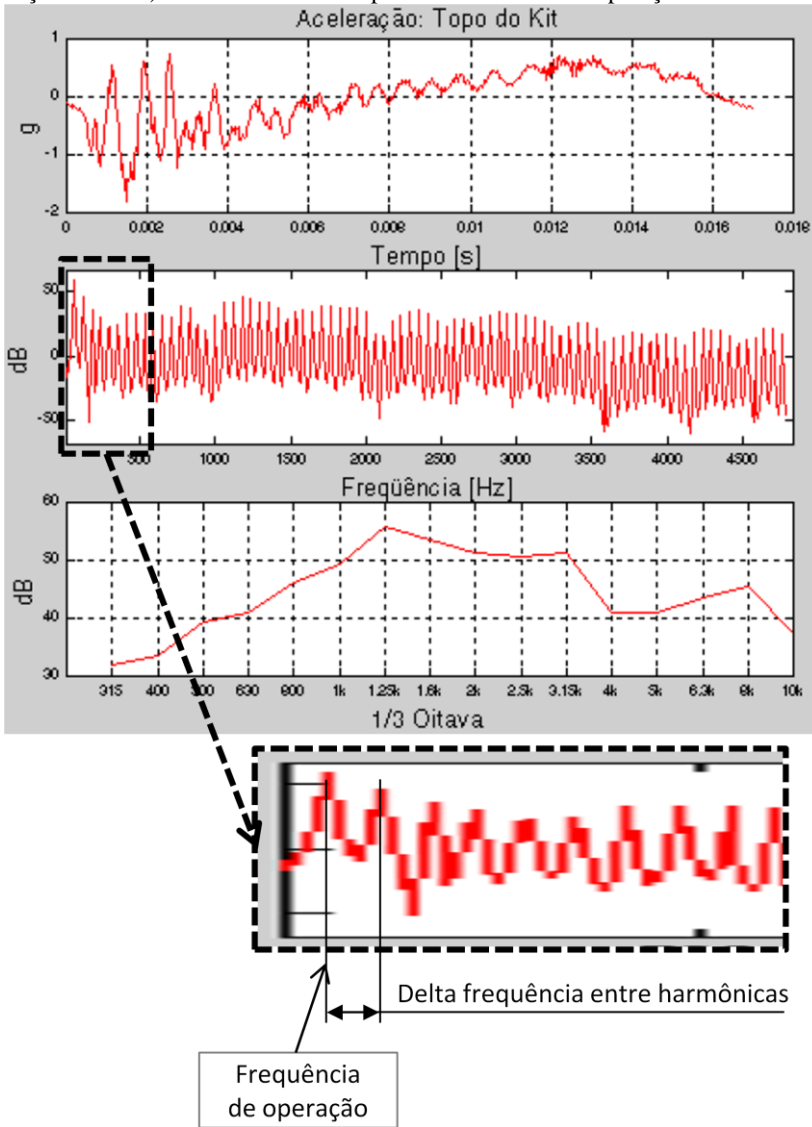
Quando se fala em ruído de refrigeradores, podem ser consideradas como principais fontes de vibração o compressor e os ventiladores (SATO et al, 2007). Refrigeradores mais simples sequer utilizam ventilador, e refrigeradores topo de linha geralmente utilizam bons ventiladores, de baixo ruído e vibração, restando apenas o compressor como fonte principal. Sendo assim, de forma geral, o compressor é considerado a maior fonte de transientes vibratórios para a maioria dos casos quando se trata de ruído em refrigeradores.

No presente estudo, serão considerados os compressores alternativos herméticos, assim chamados por possuírem motor elétrico e compressor acoplados e envoltos por uma carcaça metálica selada (hermética). Nestes compressores, o fluido proveniente do ciclo de refrigeração entra nesta cavidade hermética pela tubulação de sucção e preenche o espaço junto ao motor a ao compressor, de onde é succionado para o cilindro através de um filtro acústico. O gás é então comprimido pelo pistão e descarregado numa câmara de descarga, sendo levado pela tubulação de descarga de volta à linha de refrigeração.

Podem-se observar neste processo dois fortes transientes de pressão, o de sucção e o de descarga, sendo estas consideradas as maiores fontes causadoras do ruído do compressor (Hamilton, 1988; Lenzi, 2003). Esses transientes geram vibrações que se propagam pela estrutura do compressor até chegar na carcaça e placas bases. A Figura

1, extraída do trabalho de Rodrigues (2003), mostra níveis de vibração medida no bloco de um compressor hermético em operação.

Figura 1 - Níveis de vibração medido (no tempo, em banda estreita e em bandas terço de oitava) no bloco de um compressor hermético em operação.



Fonte: Rodrigues, R. S. (2003).

Os transientes de um compressor são considerados sinais periódicos, ou seja, se repetem dentro de um intervalo de tempo cujo período é igual ao inverso da frequência de operação do compressor. Essa frequência é a frequência de giro do eixo motriz, afirmação que só é válida para compressores monocilíndricos de rotação constante (excluem-se aqui os compressores de velocidade variável), que correspondem à quase totalidade dos compressores utilizados em sistemas de refrigeração doméstica.

Porém, segundo Shin e Hammond (2008), um sinal é considerado periódico puro se apresentar apenas componentes discretos no domínio da frequência. Isso significa que para que o sinal anterior (de um compressor) possa ser considerado periódico, sua representação no domínio da frequência deverá conter apenas a frequência fundamental (frequência de operação) e componentes múltiplas desta frequência, apresentando valores zero para todas as outras frequências.

Isso não significa que o sinal de excitação de um compressor seja não-periódico. Shin e Hammond (2008) explicam que a maioria dos sinais em situações reais não são "verdadeiramente" periódicos, mas "quase periódicos".

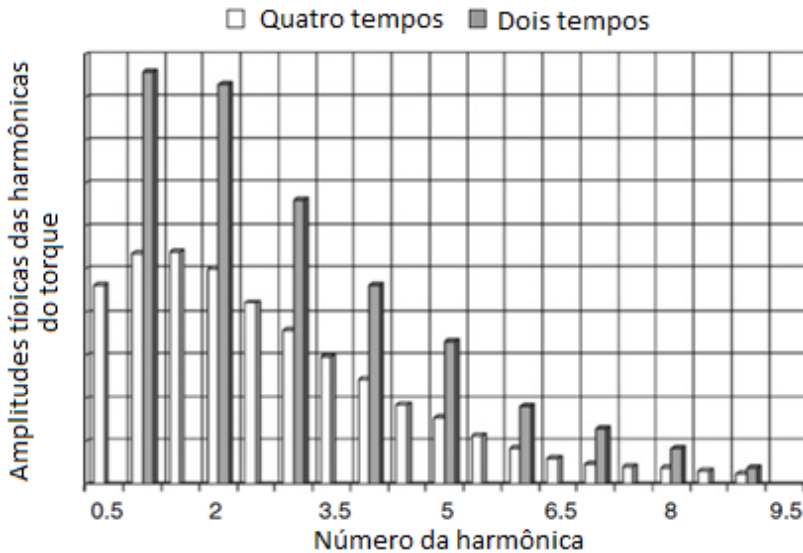
Há algumas explicações para que o sinal medido não esteja de acordo com a definição, mas ainda possa ser considerado periódico. Uma delas é o tempo de aquisição do sinal medido. Shin e Hammond (2008) trazem alguns exemplos desse tipo de problema no cálculo dos coeficientes da transformada de Fourier quando o tempo de aquisição do sinal não é um múltiplo inteiro do período de repetição do sinal.

Outra razão para esta diferença é o ruído de medição, que pode vir de flutuações na condição de operação do compressor devido ao aparato experimental, excitações externas indesejáveis ou ainda problemas na alimentação e aterramento do sistema de medição.

Outra fonte de vibração importante em compressores é o desbalanceamento do sistema biela-manivela, que gera vibrações fortes principalmente na frequência de giro e seu primeiro múltiplo, descrito matematicamente em vários livros didáticos da área.

Para reforçar a afirmação de que o sinal de um compressor é periódico, pode-se citar Mollenhauer e Tschoeke (2010), que comparam o espectro de harmônicas de um motor quatro e dois tempos. O ciclo de um motor 2 tempos pode ser comparado aqui ao de um compressor, pois produz um ciclo transiente completo a cada giro do eixo do virabrequim. Mollenhauer e Tschoeke (2010) consideram que o sinal da pressão no cilindro é periódico para construção do gráfico da Figura 2.

Figura 2 - Amplitudes das harmônicas do torque no eixo para motores quatro e dois tempos.



Fonte: Mollenhauer e Tschoeke (2010).

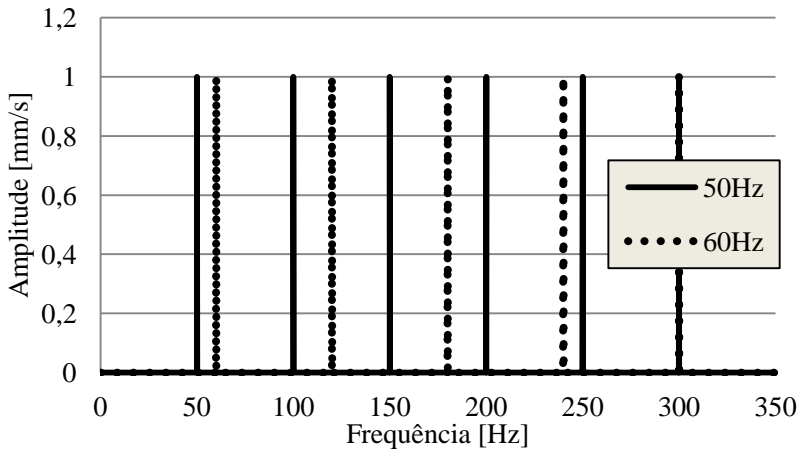
O gráfico acima mostra que o motor 2 tempos possui somente as harmônicas inteiras (1, 2, 3...), enquanto um 4 tempos apresenta harmônicas intermediárias (0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3...).

Portanto, será considerado neste trabalho que a excitação característica de um compressor é composta somente de harmônicas múltiplas inteiras da frequência de giro do eixo,.

A frequência de giro de um compressor é, na maioria dos casos, a própria frequência da tensão elétrica fornecida pela companhia de eletricidade local. Por exemplo, nos mercados da América do Norte e América Latina, é 60Hz, e para Europa e Ásia, é 50Hz. Existe porém o chamado escorregamento do motor elétrico, que faz com que a frequência de giro fique um pouco abaixo da frequência do campo girante, mas isto será desconsiderado neste trabalho.

Se o sinal medido de um compressor respeitasse perfeitamente o mencionado anteriormente, teria o espectro característico semelhante ao da Figura 3, desconsiderando as amplitudes, as quais foram normalizadas.

Figura 3 - Espectro característico idealizado de um compressor operando a 50Hz e a 60Hz.



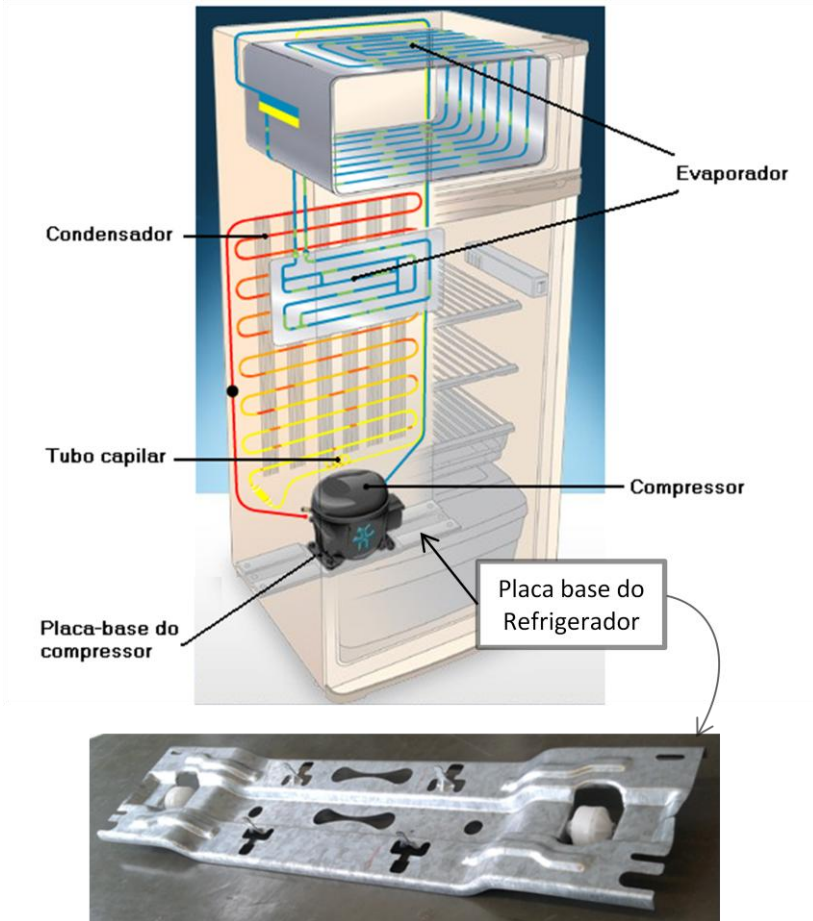
É baseado nessa assinatura de excitação que a placa base do refrigerador será otimizada, de forma a evitar modos nas regiões de forte excitação, ou seja, na frequência fundamental e em seus múltiplos.

2.2 REFRIGERADOR DOMÉSTICO

O refrigerador doméstico é constituído basicamente por uma caixa com propriedades de isolamento térmico, chamada gabinete, que utiliza um ciclo de compressão de vapor para refrigeração. Para poder operar neste ciclo, essa caixa deve estar preparada para receber alguns componentes principais: compressor, condensador, evaporador e válvula de expansão. Esta última, é normalmente substituída por um tubo capilar por questões de custo. Estes componentes estão assinalados na Figura 4, extraída do site de um fabricante de compressores para refrigeração.

Nessa figura ficam evidentes o compressor, o refrigerador, e as placas base, tanto do compressor quanto do sistema, responsáveis pela ligação estrutural entre compressor e refrigerador. Foi adicionada à Figura 4 uma foto de uma placa base de um refrigerador padrão para melhor entendimento. Observa-se que se trata de uma chapa estampada e recortada, com duas rodas, e esperas para parafusamento no gabinete do refrigerador.

Figura 4 - Refrigerador doméstico e seus componentes típicos.



Fonte: Site da empresa Embraco (www.embraco.com).

A placa base de um refrigerador é responsável pela conexão estrutural entre o gabinete do refrigerador e o compressor, sendo esta união a sua principal função. Para desempenhar bem esta função, a placa base deve respeitar uma série de requisitos, entre eles, apresentar baixa resposta dinâmica durante a operação do compressor. Esta é uma das características que irão determinar o bom desempenho da placa base projetada.

A baixa resposta dinâmica da placa base será importante tanto para filtrar as vibrações do compressor, reduzindo a energia transmitida para o refrigerador, como também para que não radie ruído em excesso.

Projetar uma placa base com baixa resposta dinâmica significa principalmente que não tenha frequências naturais nas regiões de alta excitação do compressor. Conforme comentado anteriormente, significa evitar as regiões da frequência de operação do compressor e seus múltiplos.

2.2.1 Modelo da placa base em elementos finitos - validação

Para analisar propostas de desenho de placa base no presente trabalho, será utilizado um modelo em elementos finitos.

A técnica de solução de equações diferenciais por discretização em elementos finitos já está bem validada nos mais diversos trabalhos acadêmicos e em aplicações em indústria. Sendo assim, os aprofundamentos em sua metodologia apresentados neste trabalho são apenas aqueles necessários ao bom entendimento e apresentação dos conceitos aqui desenvolvidos.

Em resumo, no método dos elementos finitos, as equações diferenciais utilizadas em problemas de vibração são resolvidas através da divisão da geometria em elementos discretos e conhecidos que servirão para a representação do campo de deslocamentos real do problema. Dessa forma, as equações diferenciais que definem um problema de vibração livre não amortecida,

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (2.1)$$

são transformadas em um sistema de equações lineares, obtendo como respostas o deslocamento dos nós de cada elementos. A solução final é a de um problema de autovalores e autovetores finito com número de graus de liberdade do modelo " N_{GL} ":

$$(K - \lambda_i M)\Phi_i = 0 \quad (2.2)$$

$$i = 1, \dots, N_{GL}.$$

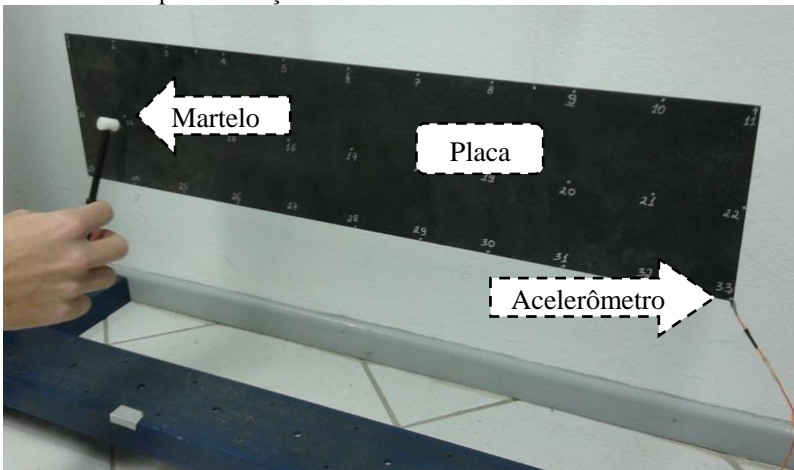
Faz-se necessário somente a escolha do tipo de elemento a ser utilizado nesta discretização, dentre os vários disponíveis formulados. Esta escolha é feita baseada na formulação e forma geométrica do elemento, que implica em suas limitações físicas (graus de liberdade) e capacidade de representar a geometria original do problema em análise.

O modelo deve ser capaz de corresponder fielmente aos parâmetros avaliados e seus efeitos nas grandezas que se desejam calcular.

Neste trabalho, o parâmetro que se deseja estudar é a forma da placa (plana, ondulada, vincos, etc), mantendo a espessura constante e preservando a continuidade do material. A grandeza a ser avaliada por este modelo é a sua resposta dinâmica (harmônica), mais precisamente, o valor das suas frequências naturais. Também, serão importantes neste trabalho as formas modais, pois têm influência no cálculo de algumas grandezas importantes, conforme será demonstrado no Capítulo 4.

O foco deste trabalho não é a modelagem fiel de uma placa base de refrigerador com compressor acoplado, mas sim o desenvolvimento de um procedimento de otimização para placas através do melhor posicionamento de suas frequências naturais. Desta forma, a validação inicial do modelo é feita sobre uma placa plana sem acessórios, de dimensões semelhantes àsquelas encontradas nos refrigeradores domésticos, mas aqui operando na condição livre-livre. A montagem experimental pode ser vista na Figura 5.

Figura 5 - Montagem experimental para análise modal da placa: Placa de 570x135x2mm para validação do modelo



As dimensões da placa base aqui utilizada são semelhantes àsquelas encontradas em refrigeradores, em torno de 570x135mm, tendo como única diferença a espessura. As placas base de refrigerador disponíveis no mercado, mostrada na Figura 4, possuem 1,25mm de espessura. No entanto, por questões de disponibilidade de matéria prima,

foi utilizada na validação uma placa de chapa 2mm. Por este motivo, todos os modelos em elementos finitos utilizados neste trabalho consideram 2mm de espessura.

O objetivo desta validação é, acima de tudo, comparar diferentes tipos de elementos finitos utilizados para modelar a placa, e proporcionar a escolha de um tipo de elemento para este trabalho.

Para fazer a avaliação dos modelos em elementos finitos foi utilizado o software comercial ANSYS (versão 12.1). São utilizados nesta comparação os seguintes elementos (os nomes utilizados pelo software ANSYS estão entre parênteses):

- elemento de casca com formulação linear (shell181);
- elemento de casca com formulação quadrática (shell281)
- elemento sólido hexaédrico com formulação linear (solid45);
- elemento sólido hexaédrico com formulação quadrática (solid95);
- elemento sólido hexaédrico com formulação linear não-conforme (solid45 + KEYOPT(1)=0 "*Include extra displacementshapes*").

Este último elemento da lista é um sólido linear, pois faz uso de funções de forma lineares, com o detalhe da adição temporária de 3 novos nós, posicionados no centro do elemento. Este tipo de elemento é descrito no trabalho de Zienkiewicz et al (2005). Seu equivalente na biblioteca do software comercial ANSYS é também o Solid45, com a diferença da ativação da opção interna "KEYOPT(1)=0", chamada "*Extra Displacement Shapes*". Sua formulação será comentada no Capítulo 4.

O tamanho de elemento utilizado (4x4x2mm) é muito menor do que o necessário para modelar esta placa até a frequência de interesse estipulada (500Hz), e foi definido prevendo já as mudanças geométricas que virão da otimização. O modelo possui 5040 nós e 4862 elementos, distribuídos na proporção 143x34x1 elementos.

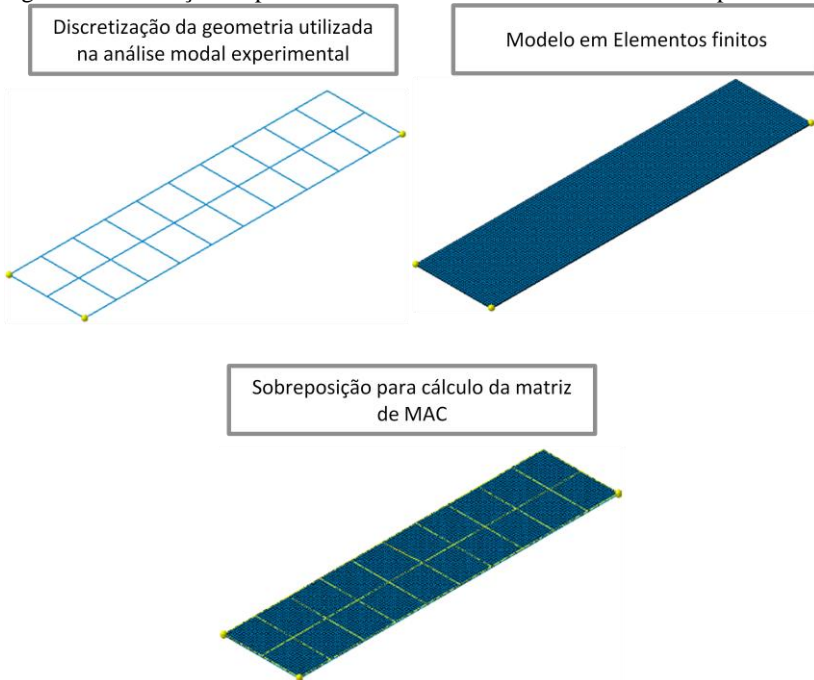
Para aquisição dos dados experimentais, o analisador de sinais LMS Scadas foi utilizado com o software LMS TestLab.

Conforme já citado, a correta representação das formas modais também é importante neste trabalho, e deve ser validada. Para a sua validação, é utilizada a matriz de MAC ("*Modal Assurance Criterion*"), calculada utilizando o software LMS Virtual.Lab V12.0. A matriz de MAC permite a comparação dos autovetores experimentais e numéricos através da seguinte equação:

$$MAC_{Exp,Num} = \frac{[\Phi_{Exp}^T \cdot \Phi_{Num}]}{[\Phi_{Exp}^T \cdot \Phi_{Exp}] \cdot [\Phi_{Num}^T \cdot \Phi_{Num}]} = 0, \quad (2.3)$$

onde Φ_{Exp} são os autovetores da placa medidos experimentalmente, nos pontos medidos e Φ_{Num} são os autovetores obtidos numericamente do modelo elementos finitos, sendo considerados somente os valores dos nós que correspondem espacialmente aos pontos medidos experimentalmente. Essa correlação entre nó e ponto medido experimentalmente é feita via software, demonstrada na Figura 6.

Figura 6 - Correlação de pontos medidos e malha elementos finitos da placa.



Os valores de MAC variam de 0, indicando correlação inexistente, até 1, que indica que as formas modais dos pontos analisados são idênticas. Valores intermediários indicam que há semelhança, mas devem ser avaliados caso a caso.

A validação das propriedades geométricas (espessura) e do material (módulo de elasticidade e densidade) da placa foram feitas

utilizando elementos do tipo casca quadrática, conceitualmente os mais precisos para este tipo de geometria.

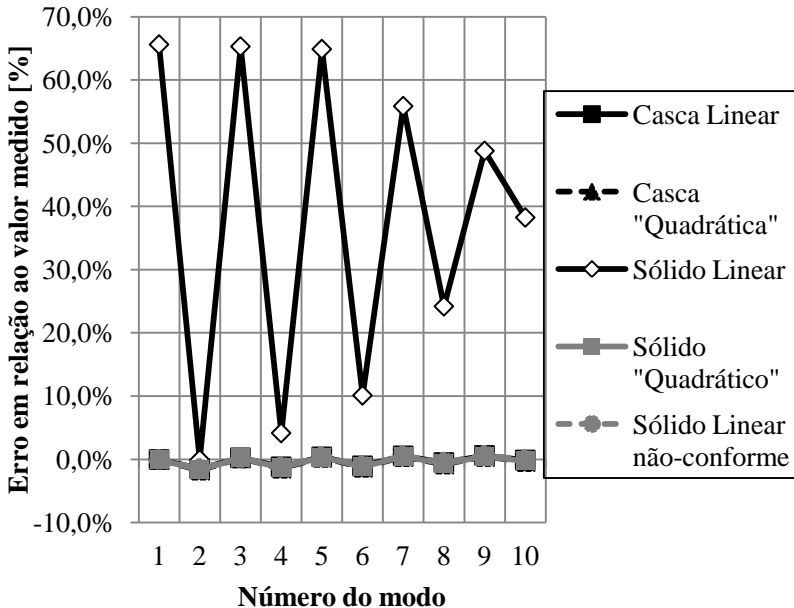
A Tabela 1 mostra a comparação entre os resultados medidos e os obtidos para cada tipo de elemento utilizado.

Tabela 1 - Comparação das frequências naturais medidas e simuladas [Hz].

Frequência Natural	Valor Medido	Casca Linear Validada	Casca "Quadrática"	Sólido Linear	Sólido "Quadrático"	Sólido Linear não-conforme
1	34,1	34,1	34,1	56,5	34,1	34,1
2	88,7	87,4	87,2	88,6	87,3	87,4
3	94,3	94,5	94,5	155,9	94,5	94,5
4	182,8	180,6	180,2	190,4	180,4	180,7
5	185,6	186,3	186,1	306,0	186,2	186,3
6	288,1	285,1	284,4	317,2	284,7	285,2
7	307,6	309,2	308,8	479,4	308,9	309,3
8	407,8	405,6	404,6	506,4	405,1	405,9
9	460,0	462,7	461,9	684,3	462,0	462,8
10	547,3	546,6	545,2	756,5	545,8	547,0

Para facilitar a comparação entre os resultados, segue na Figura 7 um gráfico com as curvas dos valores dos erros relativos (tomando por base o resultado experimental).

Figura 7 - Validação do Modelo para diferentes tipos de elementos.



Salvo para o caso do elemento tipo sólido linear, os outros elementos possuem erros baixos, na faixa de 1%, o que será considerado aceitável neste trabalho.

Tamanho discrepância nos resultados do elemento sólido linear se deve ao fato de não considerar corretamente a flexão em sua formulação, e como a malha utilizada está com apenas um elemento representando a espessura da placa, seu resultado apresenta uma rigidez maior que a real. Por outro lado, sua versão com formulação linear não-conforme apresenta resultados alinhados com os outros elementos.

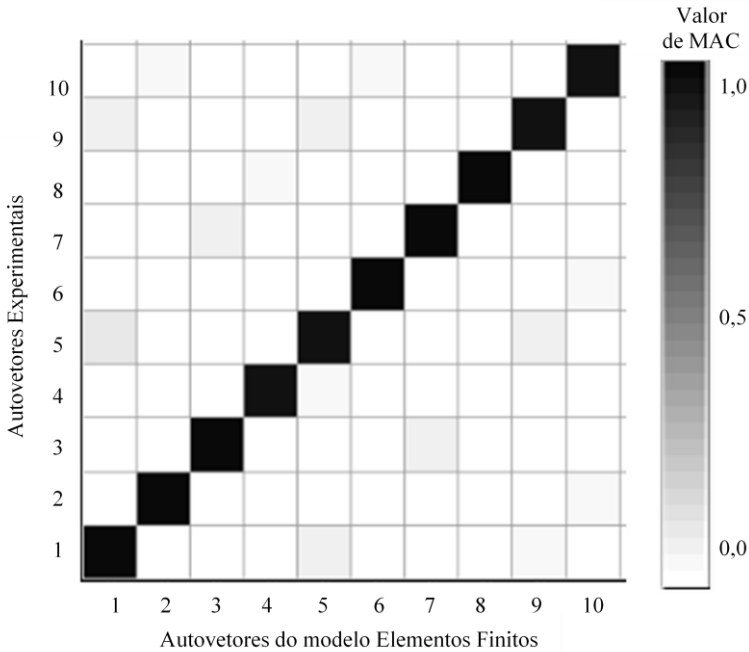
Assim sendo, por ter formulação simples e ao mesmo tempo precisa, o elemento sólido linear com formulação não-conforme será o escolhido para uso neste trabalho.

O fato de se estar buscando um elemento com formulação simples neste trabalho deve-se à necessidade do cálculo de sensibilidade analítica para otimização. Elementos tipo casca, aparentemente de construção mais simples, tornam-se complicados quando aplicados em três dimensões, que é o caso deste trabalho.

Já que os valores das frequências naturais estão sendo bem representadas pelo modelo numérico, parte-se para verificação da

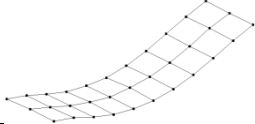
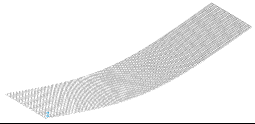
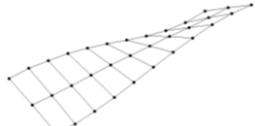
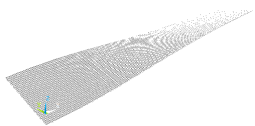
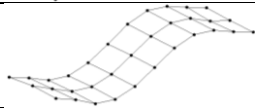
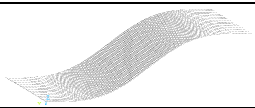
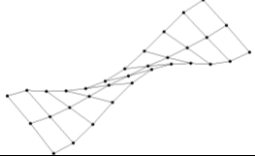
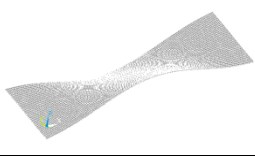
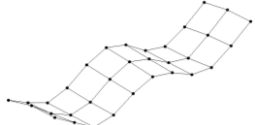
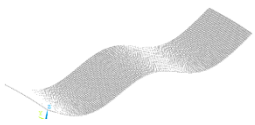
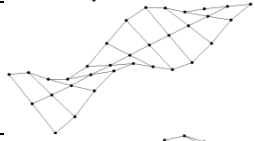
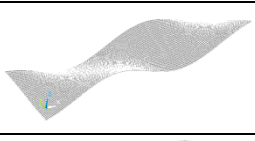
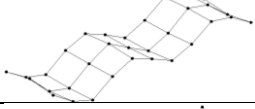
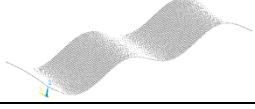
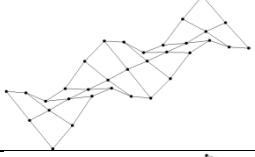
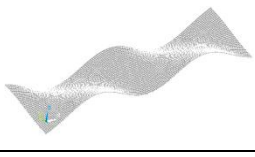
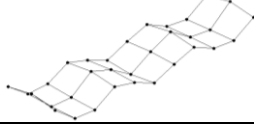
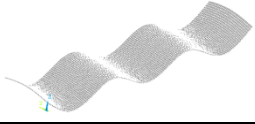
representação das formas modais. Conforme já citado, a matriz de MAC é utilizada com esse objetivo, e foi calculada comparando a análise modal experimental com a análise modal numérica utilizando elemento tipo sólido linear não-conforme. Os valores de MAC estão plotados na Figura 8, utilizando uma escala de cor cinza que varia entre zero (cor branca) e 1 (cor preta).

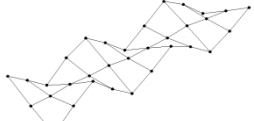

Figura 8 - Matriz de MAC comparando formas modais experimentais e numéricas.



Para melhor interpretar os valores de MAC, seguem na Tabela 2 as formas modais medidas e calculadas.

Tabela 2 - Frequências naturais e formas modais da placa plana.

Modo	Freq. Nat. Exp. [Hz]	Forma Modal Experimental	Forma Modal Numérica
1	34,1		
2	88,7		
3	94,3		
4	182,8		
5	185,6		
6	288,1		
7	307,6		
8	407,8		
9	460,0		

10	547,3		
----	-------	---	---

Pode-se observar que a diagonal principal da matriz está bem definida, indicando que os valores no eixo das abscissas (formas modais calculadas) tem somente uma correlação forte com o eixo das ordenadas (formas modais experimentais). Outras correlações que podem ser observadas, ainda que em menor intensidade, são entre os modos 1, 5 e 9, todos modos de flexão ao longo da maior dimensão da placa. Dados estes resultados, pode-se afirmar que as formas modais estão sendo bem representadas pelo modelo numérico.

Os erros pequenos que ainda persistem na relação numérico experimental podem vir de variações de espessura da placa, devido à sua fabricação, ou ainda da massa do acelerômetro, que foi desprezada no modelo numérico. Uma boa prática seria usar um medidor laser, que não interferiria na distribuição espacial da massa da placa, como no caso do acelerômetro. Como o foco do trabalho não é a modelagem fiel da placa, o modelo é considerado validado com as propriedades acima.

3 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

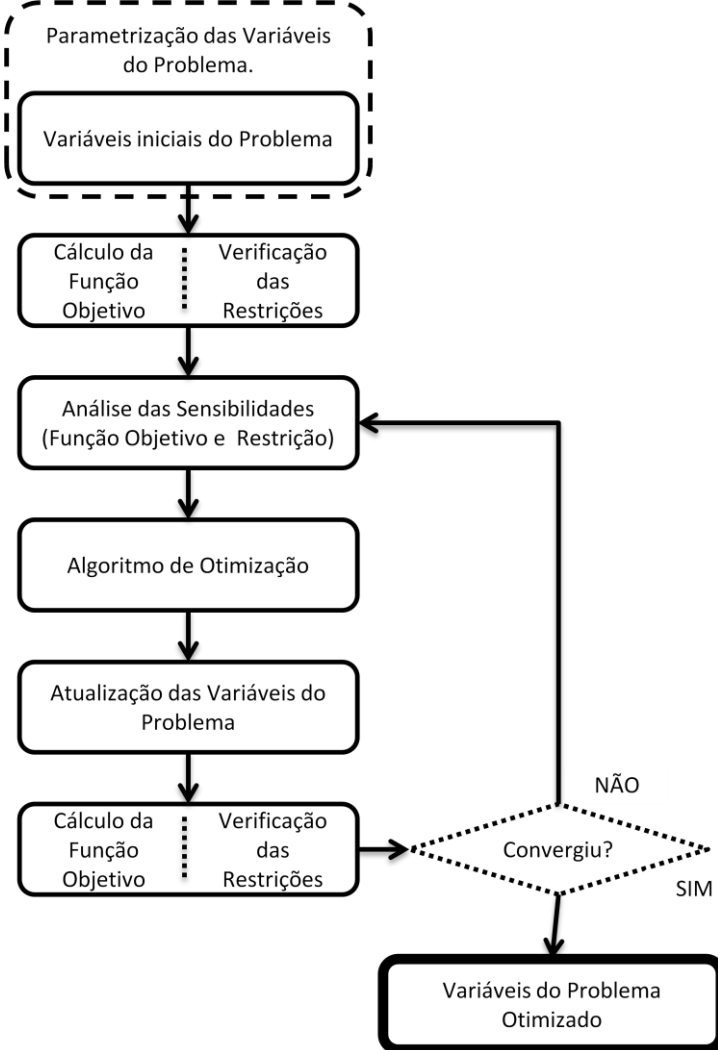
A otimização estrutural busca encontrar um projeto que apresente o melhor desempenho e que satisfaça as restrições impostas a um determinado problema. Em termos matemáticos, busca-se uma solução pertencente ao espaço de soluções R^n que extremize uma dada função, seja maximizando ou minimizando, chamada de função objetivo. A avaliação deste desempenho está associada a algum critério físico que pode ser: mínima massa, máxima rigidez, máxima primeira frequência natural, máxima carga de flambagem crítica, entre outros. As restrições podem ser interpretadas como desempenhos mínimos, seguindo os mesmos critérios da função objetivo, que não precisam ser amplificadas ou reduzidas neste projeto, mas que atendam um valor mínimo determinado para o projeto.

A avaliação destes critérios exige um modelo físico. No presente trabalho, por exemplo, o modelo físico tratado é uma placa base de um refrigerador, responsável pela sustentação do compressor, modelada por elementos finitos. A função objetivo utilizada, bem como as restrições, são abordadas com maior detalhes à frente.

A otimização é um procedimento iterativo, na qual um projeto inicial recebe melhorias a cada iteração e, para funcionar, um algoritmo de otimização precisa ser utilizado. Este algoritmo avalia o ponto em que a função objetivo do projeto se encontra, define quais variáveis devem ser alteradas e o quanto deve ser essa mudança. A direção como as variáveis serão modificadas é chamada de direção de busca e o quanto serão modificadas é chamado de passo. Assim, o algoritmo de otimização deve ser capaz de determinar a direção e o passo que as variáveis se modificam em cada iteração na busca pelo ponto ótimo de sua função objetivo, respeitando as restrições.

Na Figura 9, tem-se um exemplo de um procedimento iterativo de otimização completo representado como um fluxograma.

Figura 9 - Fluxograma de um processo de otimização.



Conforme pode ser visto no fluxograma, tudo começa na parametrização do problema. A parametrização é a forma como as modificações aplicadas ao projeto se transformam em variáveis de um problema de otimização, tomando a forma de um vetor pertencente ao espaço de soluções R^n , onde n é o número de variáveis definidos para o problema. Dependendo do tipo de parametrização definida para o

problema, este pode ser classificado como sendo uma otimização dimensional, de forma ou topológica. Estes três tipos de parametrização são comentados adiante.

Uma vez parametrizado o problema, e tendo avaliadas a função objetivo e as restrições, baseadas no modelo físico definido, a otimização deve encerrar ou prosseguir para a próxima iteração em busca do ponto ótimo.

Caso prossiga, o próximo passo é a definição do novo vetor de variáveis para esta iteração. Existem duas categorias de métodos para definir o novo vetor de variáveis: métodos determinísticos, como o que será usado aqui e faz uso do gradiente das funções objetivo e restrição, e métodos estocásticos, como o exemplo dos algoritmos genéticos.

A sensibilidade representa a influência que cada uma das variáveis utilizadas para definir o problema tem nos valores da função objetivo e da restrições. Algumas variáveis têm maior influência sobre o resultado final que outras e esta informação norteia o algoritmo de otimização na definição das variáveis para cada iteração.

Com a informação da sensibilidade, bem como das funções objetivo e restrição na iteração atual, pode-se processar estas informações através do algoritmo de otimização. Este utiliza tais informações para definir a direção e o passo a ser aplicado em cada variável, de forma a gerar um novo vetor de variáveis, que deve ser avaliado, dando sequência ao processo iterativo.

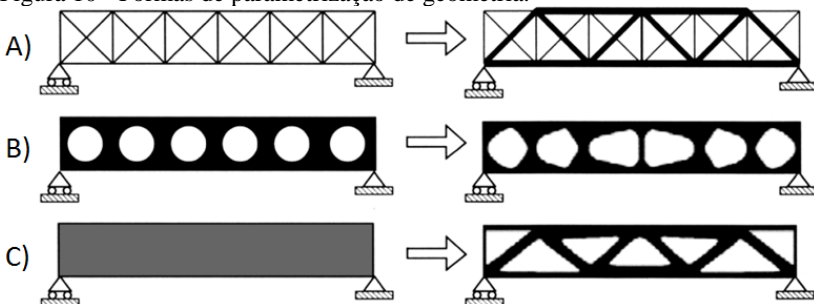
A sequência de iterações segue até sua convergência. Devido ao tipo de algoritmo de otimização utilizado neste trabalho, o MMA (*Method of Moving Asymptotes*) (Svanberg, 1987), essa convergência é definida de forma arbitrária pelo usuário, como por exemplo, variação mínima na função objetivo ao longo da sequência minimizante. Isso significa dizer que a partir do momento em que a função objetivo apresentar variações desprezíveis, a critério do usuário, o processo é finalizado. Conforme Arora (2004), o melhor processo de otimização é aquele com a interação do projetista (*the best approach would be an optimum design process that is aided by the designer's interaction*). Maiores informações sobre o método MMA serão apresentadas na Seção 3.4.

3.1 PARAMETRIZAÇÃO

A parametrização é o processo onde as diferentes mudanças que podem ser aplicadas no desenho de um projeto são transformadas em um número finito de variáveis quantitativas. Essas variáveis devem ser escritas de maneira a serem lidas e transformadas em modelo físico, que determina a função objetivo e as restrições.

A forma como essas variáveis são escritas e as diferentes formas de representação no modelo físico podem ser agrupadas em três grandes grupos no ramo da otimização estrutural, mostrados na Figura 10.

Figura 10 - Formas de parametrização de geometria.



Fonte: Bense e Sigmund (2003).

Em ordem, na figura acima, tem-se: A - otimização dimensional (*size optimization*), B - otimização de forma (*shape optimization*) e C - otimização topológica (*topology optimization*).

A otimização dimensional define as variáveis de projeto através de parâmetros geométricos, dimensões como área da seção transversal de uma viga ou barra, espessura de placas, comprimentos, etc. Ou seja, existe uma série de parâmetros que definem a geometria da estrutura, ou parte dela, de forma macro. Neste processo de otimização, tomando por exemplo a estrutura treliçada A da Figura 10, a geometria ótima resultante é provavelmente a melhor combinação de seções transversais das barras (ou vigas) capaz de maximizar a rigidez da treliça com um mínimo de material, por exemplo. Este tipo de problema é possível de ser resolvido utilizando tanto métodos determinísticos como estocásticos, mas pode apresentar dificuldades de convergência quando o número de variáveis for grande.

Na otimização de forma, por sua vez, o contorno da geometria é parametrizado de forma a definir a estrutura do projeto. Podem ser

considerados tanto os contornos externos, laterais, como também internos, bem como posição, tamanho e forma de furos no domínio da geometria, conforme pode ser visto na estrutura B da Figura 10. Entretanto, não é possível ao algoritmo criar novos furos, mas apenas modificar furos previamente criados e parametrizados.

A geometria da estrutura exemplo da Figura 10 acima poderia até mesmo se deslocar e se arcar, saindo das fronteiras do retângulo inicial, se o usuário do algoritmo assim definir, na busca por otimizar a função objetivo. Esse tipo de parametrização é o que mais exige do usuário em termos de dificuldade de programação e implementação numérica, já que o domínio de projeto muda a cada iteração, ao contrário da otimização dimensional, onde mudam-se apenas constantes.

É necessário, então, definir estes contornos através de um número finito de parâmetros, e para isso, é comum se utilizar de curvas tipo *Splines*, onde a posição dos pontos que as controlam são as variáveis. Ainda, quando utilizando um modelo de elementos finitos, são utilizadas as posições dos nós da malha como variáveis, definindo assim a forma da geometria a cada iteração. Nota-se que nesse tipo de parametrização o número de variáveis pode ser enorme, e por isso, deve-se dar preferência aos métodos determinísticos de otimização para solução.

Por fim, a otimização topológica pode alterar qualquer seção da estrutura, modificar contornos, criar e deslocar furos, desde que estejam dentro do domínio da geometria, pois parametriza a geometria da estrutura através da sua topologia, ou seja, da disposição espacial e conectividade de seus membros estruturais (Bendsoee; Sigmund, 2003).

Quando essa parametrização é empregada em cálculos pelo método dos elementos finitos, as variáveis utilizadas para parametrizar a geometria são associadas às propriedades dos elementos que constituem a malha (Le, 2010). Essas propriedades são atribuídas na forma de um vetor de densidades relativas, onde para cada elemento que constitui a malha apresenta uma ponderação de propriedades entre 0 (elemento desligado, inativo na análise) a 1 (elemento ativo, participante da análise). Valores intermediários, fisicamente impossíveis, são trabalhados através de filtros especificamente desenvolvidos para esse método.

Por estes motivos, a otimização topológica pode ser considerada a mais genérica das parametrizações, pois permite uma livre distribuição de material e a criação de novos vazios no domínio de projeto, o que não é possível nas duas outras formas de parametrização.

A placa base de refrigerador, objeto que é analisado no presente trabalho, é uma estrutura que pode conter vazios e apresentar curvaturas

não-triviais. No caso de uma otimização paramétrica, a geometria da placa dependeria de um número limitado de curvaturas-base, que estão atreladas aos diversos parâmetros geométricos e às limitações do software CAD utilizado no seu desenho. Por isso, essa parametrização foi descartada.

De forma geral, a otimização topológica não é recomendada para placas, pois haveria dificuldade em manter a espessura constante. A espessura constante é uma restrição de projeto, dado o processo de fabricação da placa, estampagem, a partir de uma chapa plana. Mesmo se a geometria base fosse uma placa previamente plana, nessa parametrização haveria somente a possibilidade da criação de uma placa cheia de furos, restringindo a possibilidade de modificar os contornos e a posição da placa no espaço, que é onde sabe-se haver grande influência sobre seu comportamento dinâmico.

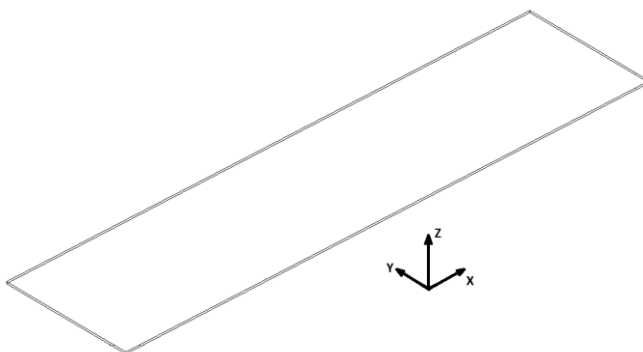
Assim, escolheu-se a otimização de forma, utilizando a posição dos nós de sua malha de elementos finitos como variáveis de projeto. Isto possibilita a criação de novas concepções para o formato da placa base além das possibilidades de um software CAD, facilitando encontrar novas formas que atendam aos critérios de projeto vibroacústicos. Ponto negativo para esta parametrização é a impossibilidade da criação de furos na placa que, combinados com a nova geometria, poderiam proporcionar bons resultados.

3.1.1 Parametrização da placa base do refrigerador

Uma vez escolhido o método, é preciso aplicá-lo à geometria utilizada neste trabalho (Figura 11). Como já foi citado, este trabalho propõe a utilização das coordenadas dos nós que constituem uma malha de Elementos Finitos como variáveis do problema de otimização. O tipo de elemento que será utilizado é o sólido hexaédrico, distribuído de forma a ter uma camada de elementos para representar a espessura da placa, como pode ser visto na Figura 12.

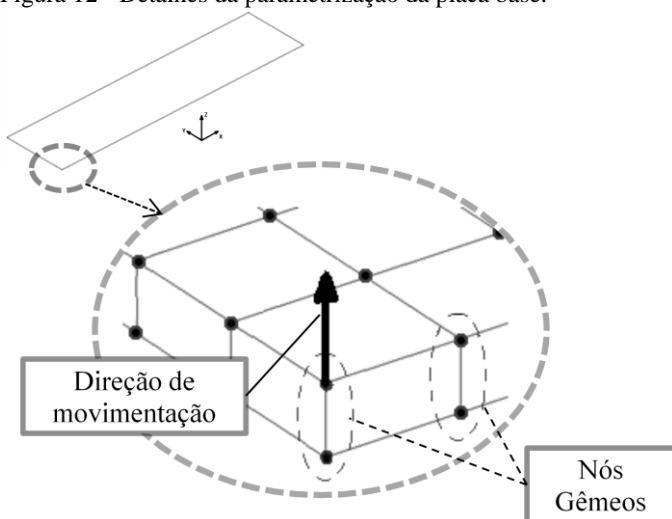
Para simplificar os cálculos, o problema é definido como uma placa no plano XY, de largura e comprimento conhecidos e mantidos constantes ao longo do processo. As mudanças na geometria da placa somente poderão ocorrer na direção Z.

Figura 11 - Geometria da placa base do refrigerador a ser parametrizada.



As dimensões da placa são as mesmas que foram utilizadas na validação do modelo. Para manter a espessura da placa constante utilizando elemento sólido hexaédrico, a sensibilidade deve ser calculada para a movimentação de um par de nós, ao invés de um único nó. Sendo assim, cada nó da superfície superior da placa terá seu nó equivalente na superfície inferior conhecido e mapeado, e neste trabalho são chamados de nós gêmeos.

Figura 12 - Detalhes da parametrização da placa base.

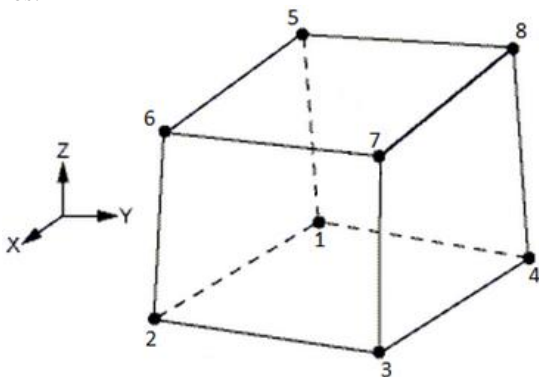


Desta forma, o algoritmo de otimização MMA irá interpretar como variáveis somente o conjunto de coordenadas em Z da posição da metade dos nós da placa (da superfície superior, por exemplo), já que a posição dos outros nós (da superfície inferior) está matematicamente atrelada, na forma:

$$z_j = \begin{cases} z_j, & \text{para } j = 1,2,3,4 \\ z_{j-4} + esp, & \text{para } j = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde z_j é a posição do nó j , seguindo a ordem de numeração usual para elementos hexaédricos que pode ser vista na Figura 13, e esp é a espessura da placa.

Figura 13 - Ordem de numeração dos nós para elemento sólido hexaédrico 8 nós.



Seguindo esta parametrização, o MMA irá otimizar a posição na direção Z dos nós da superfície inferior da placa, utilizando a sensibilidade calculada para movimentação de um par de nós (gêmeos), resultando em uma placa com espessura igual à inicial.

A cada passo de um procedimento de otimização, um novo conjunto de variáveis de projeto é criado, possibilitando a atualização da malha a partir das coordenadas z_j e da espessura esp .

3.2 FUNÇÃO OBJETIVO

Matematicamente, a função objetivo é aquela cujo valor de mínimo (ou máximo) se quer encontrar. Fisicamente, a função objetivo

representa a grandeza que se quer avaliar através de suas variáveis até se obter um valor ótimo.

Em termos de controle de ruído, essas grandezas seriam o valor da potência sonora ou ruído radiado por uma fonte, além da transmissão de energia vibratória. Nesses casos, pode-se dizer que o ponto de ótimo desta função seria uma configuração de placa base que apresenta o menor ruído radiado e a menor transmissão de energia vibratória. Entretanto, como essas grandezas possuem cálculo complexo, principalmente quando as geometrias começam a ficar muito diferentes dos casos acadêmicos clássicos (esfera vibrante/oscilante, pistão, placa plana infinita, etc), deve-se buscar para função objetivo uma grandeza mais fácil de calcular, mas que tenha correlação com a função objetivo inicial.

É sabido que tanto a energia vibratória transmitida quanto o ruído radiado por uma estrutura que contenha uma fonte vibrante são grandezas que estão intimamente ligadas às frequências naturais da estrutura, principalmente ao casamento entre estas frequências naturais e as componentes espectrais da fonte. Ou seja, se as componentes frequenciais de maior energia da fonte forem as mesmas ou tiverem valores próximos às frequências naturais da estrutura à qual está ligada, ocorrem grandes deslocamentos da estrutura e forte radiação de ruído. Também devem ser levadas em conta as formas dos modos de vibração, sua eficiência de radiação e as coincidências entre direções com maior energia vibratória da fonte e direções de maior deslocamento dos modos da estrutura.

Logo, fica evidenciada a dificuldade de se usar como função objetivo o ruído radiado ou a transmissão de energia vibratória, dada toda a cadeia entre a fonte de vibração e o ruído final. Contudo, uma simplificação deve ser utilizada baseada no que se conhece do problema: a fonte, cujas componentes frequenciais de maior energia são conhecidas, e as frequências naturais da estrutura.

Sabe-se que para os casos em que não há sintonia entre o espectro de excitação da fonte e as frequências naturais da estrutura, tem-se um bom indicativo de que haverá menor ruído radiado e menor vibração transmitida pela placa base, quando comparado aos casos em que ocorre a sintonia.

Por isso, no presente trabalho, optou-se por usar como função objetivo o descasamento, ou afastamento, entre as frequências naturais da placa e os picos do espectro de energia vibratória da fonte.

Assim, a função objetivo da otimização tem correlação direta com o valor das frequências naturais, seja maximizando ou minimizando

determinada frequência natural. É possível também, através de modificações simples na função objetivo, escolher valores para determinada frequência natural.

Nem sempre os valores escolhidos serão possíveis de serem alcançados, já que existem restrições físicas e também de projeto que podem impedir que a placa chegue em uma forma que atenda à estes valores.

Para citar um exemplo, na tentativa de obter uma maior rigidez dinâmica da placa, pode-se maximizar a primeira frequência natural λ_{min} , ou seja:

$$\max\{\lambda_{min} = (\min\{\lambda_i\})_{i=1,\dots,N_{GL}}\}, \quad (3.2)$$

onde N_{GL} é o número de graus de liberdade do sistema. O modelo físico utilizado para avaliar esta função é:

$$\begin{aligned} (K - \lambda_i M)\Phi_i &= 0 \\ i &= 1, \dots, N_{GL} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Esta última equação representa o modelo físico utilizado para o cálculo da função objetivo, um problema de autovalores e autovetores, e será a base deste trabalho. Com este modelo físico são calculadas a função objetivo e a sensibilidade do problema, tema do Capítulo 4.

3.3 RESTRIÇÕES

Assim como a função objetivo, as restrições são funções que representam algum parâmetro importante no projeto, e devem ser incluídas no processo de otimização.

As funções de restrição servem para considerar principalmente requisitos mínimos que o projeto deve atender em alguma área, como por exemplo, máxima massa, rigidez estática mínima, e até mesmo poderia ser primeira frequência natural mínima.

Neste trabalho, serão trabalhadas 3 restrições principais, melhor explicadas a seguir:

- restrição de máxima massa/volume;
- restrição geométrica;
- restrição de aresta média.

As restrições utilizadas neste trabalho vão ajudar principalmente a evitar que a malha de elementos finitos fique com elementos muito

distorcidos, prejudicando a precisão e confiabilidade dos resultados calculados.

Da mesma forma que foi definida para função objetivo, é necessário calcular a sensibilidade da restrição para movimentação de cada par de nós gêmeos. Essa informação é de suma importância para o algoritmo MMA, que deve ponderar entre esta e a sensibilidade da função objetivo na movimentação dos nós e definir as variáveis para a próxima iteração. Assim, pode convergir e chegar em uma geometria ótima que atenda aos critérios mínimos de projeto.

3.3.1 Restrição de massa/volume

Esta restrição serve na maioria dos casos para limitar o quanto de material pode ser utilizado em um projeto. Entretanto, neste trabalho, será utilizada principalmente na tentativa de reduzir as distorções locais de malha que podem ocorrer.

É esperado que os elementos mais distorcidos apresentem maiores variações de massa à movimentação de um nó (sensibilidade) que os elementos menos distorcido, e assim, o MMA dará preferência a mover os nós dos elementos menos distorcidos.

Normalmente este tipo de restrição é escrito na forma de porcentagem da massa inicial, por exemplo, a massa total da nova estrutura deve apresentar no máximo 120% da massa inicial.

A sensibilidade desta restrição é calculada utilizando o Jacobiano do elemento e sua derivada, sendo demonstrados no Capítulo 4.

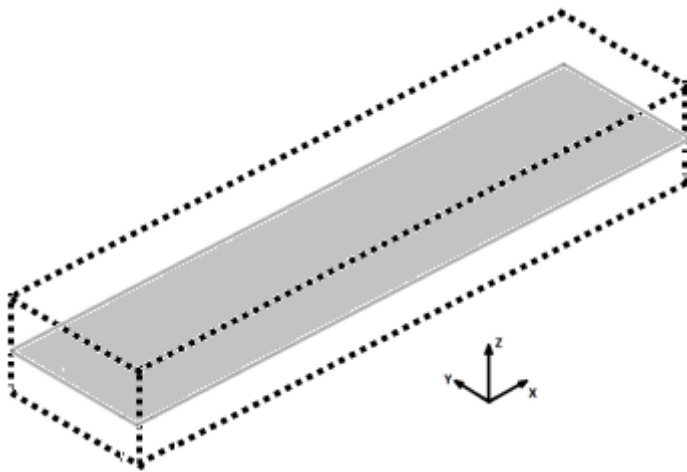
Durante os testes de otimização da placa utilizando esta restrição, observou-se que seu valor apresentava variação desprezível, assim como sua sensibilidade, o que resultou em geometrias com malhas de pouca confiabilidade dada a distorção local de muitos elementos, inclusive com problemas para simulação. Mesmo multiplicando este valor por constantes grandes (10^3 e 10^6), o MMA não conseguiu fazer uso desta restrição, já que seu valor não era alterado. Para validar esta informação, foi utilizado o software comercial ANSYS para comparar a massa de dois elementos, um em sua forma inicial hexaédrica e outro com um par de nós gêmeos fortemente deslocados (cerca de 2 vezes a altura do elemento), sendo obtido o mesmo resultado para a massa.

Ficou evidente, então, que a massa do elemento não apresenta mudança quando do deslocamento de um par de nós gêmeos na forma como a placa foi parametrizada neste trabalho. Sendo assim, esta restrição não é utilizada neste trabalho.

3.3.2 Restrição geométrica

A restrição geométrica refere-se aos limites físicos construtivos de altura, largura e comprimento do projeto. As componentes largura e comprimento não são variáveis neste projeto. Já para o caso da altura, esta restrição é aplicada na forma de limites no domínio da função objetivo. O conjunto de variáveis opera em um intervalo definido de valores em Z , e este intervalo é uma das entradas que devem ser fornecidas ao algoritmo MMA. Internamente, garante que a placa deve estar contida dentro destes limites, chamados limites laterais, que formam uma espécie de caixa limite que a geometria deve respeitar, e pode ser visto esquematicamente na Figura 14.

Figura 14 - Placa base do refrigerador e suas restrições geométricas.



3.3.3 Restrição de aresta média

A restrição de aresta média foi considerada para contornar o não funcionamento da restrição de volume.

Esta restrição refere-se matematicamente ao tamanho médio das arestas dos elementos finitos que constituem o modelo. Somente são contabilizadas nesta restrição as arestas da face superior ou inferior do elemento.

Tal abordagem é, na verdade, uma tentativa de obter um valor rápido e simples para calcular um valor aproximado para a área da

superfície de uma das faces do elemento, independente se superior ou inferior, já que são iguais entre si de acordo com a parametrização desenvolvida neste trabalho.

Como este valor é calculado para todos os elementos, a aproximação serve também como um número indicativo proporcional à área da superfície total da placa, que é uma restrição física.

Além de restringir a área da placa, essa restrição vai evitar que os elementos do modelo apresentem alta distorção, já que o valor da aresta média de um elemento distorcido é grande quando comparado a um elemento sem distorção, e proporcionalmente à sensibilidade. Isto faz com que o algoritmo MMA evite mover nós de elementos já muito distorcidos.

Para que esta abordagem de aresta média apresente bons resultados, todos os elementos do modelo utilizados neste trabalho são idênticos em tamanho e forma, caso contrário, o algoritmo poderia interpretar que deve diminuir os elementos maiores e aumentar os menores. Uma saída para o caso de se utilizar modelos com elementos de tamanho diferente seria normalizar a aresta média de cada elemento pela sua aresta inicial.

A formulação desta restrição é simples. A aresta média da placa é definida como:

$$\bar{L} = \frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} \bar{L}_e, \quad (3.4)$$

onde, \bar{L}_e é a aresta média de um elemento e N_e o número de elementos da placa. A aresta média elemental, tomando por base o elemento da Figura 13, é definida como:

$$\bar{L}_e = \frac{|N_2 - N_1| + |N_3 - N_2| + |N_4 - N_3| + |N_1 - N_4|}{4}, \quad (3.5)$$

onde N_1 corresponde às coordenadas do nó 1 do elemento em análise, e assim sucessivamente. As normas indicadas na Equação (2.8) são calculadas por:

$$|N_2 - N_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (3.6)$$

onde (x_1, y_1, z_1) são as coordenadas do nó 1, e assim sucessivamente. A sensibilidade desta função é calculada no Capítulo 4.

3.4 ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO

Como o número de variáveis do problema acima descrito é grande (depende do número de nós do domínio de projeto), os Métodos Gradientes de otimização são mais recomendados que os Métodos Heurísticos (como Algoritmos Genéticos). Dos Métodos Gradientes, este trabalho fará uso do Método das Assíntotas Móveis (MMA) por ser de uso corrente da equipe do Laboratório de Vibrações e Acústica (LVA) da Universidade Federal de Santa Catarina, ao qual este trabalho faz parte. Este algoritmo possui versões em MATLAB e FORTRAN, cedidas ao orientador deste trabalho pelo Professor Krister Svanberg (KTH, Suécia).

Esses métodos estudam o ponto atual da função objetivo e restrições e suas vizinhanças através do gradiente destas funções (a sensibilidade), definindo a melhor direção de caminhada para que a função atinja seus valores máximos ou mínimos. O cálculo correto do gradiente é de suma importância para o sucesso do processo de otimização, e é estudado com maior detalhe no Capítulo 4.

No MMA, a cada iteração um subproblema de otimização é montado e resolvido, através da definição de um subproblema aproximado. Seja o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f_0(\mathbf{x}) \\ & \text{Sujeito a } \begin{cases} f_i(\mathbf{x}) \leq \bar{f}_i, & i = 1, 2, \dots, M \\ x_{j \min} \leq x_j \leq x_{j \max}, & j = 1, 2, \dots, N \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

em que M é o número de restrições e N o número de variáveis.

A função $f_0(\mathbf{x})$ é a função objetivo e $f_i(\mathbf{x})$ são as funções restrição do problema. No MMA, estas funções implícitas são aproximadas por funções explícitas $\tilde{f}_i(\mathbf{x})$. A construção destas funções de aproximação é feita tomando por base os valores das funções objetivo e restrições do problema e seus gradientes, previamente calculados. Assume-se agora, a cada iteração k , um subproblema de otimização na forma:

$$\text{Minimizar } \tilde{f}_0^{(k)}(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} \tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) \leq \bar{f}_i^{(k)}, i = 1, 2, \dots, M \\ x_{j \min} \leq x_j^{(k)} \leq x_{j \max}, j = 1, 2, \dots, N \end{cases},$$

que deve ter seu ponto ótimo definido, respeitando as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (condições de KKT). Como as aproximações são sempre funções convexas, basta que as condições de KKT sejam respeitadas para que esteja num ponto ótimo local, que neste caso, é global também. O ponto ótimo resultante deste subproblema é um novo vetor de variáveis, que será utilizado como ponto de partida na próxima iteração.

No MMA, cada função de aproximação é construída na forma (Svanberg, 1987; Svanberg, 2002):

$$\tilde{f}_i^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right) + r_i^k \quad (3.9)$$

para $i = 0, 1, \dots, M$.

O processo de cálculo dos termos dessa equação não será descrito neste trabalho. Porém, pode-se citar que para os valores de $p_{ij}^{(k)}$ e $q_{ij}^{(k)}$ leva-se em conta o valor da sensibilidade da função f_i . Já o cálculo dos valores de $U_j^{(k)}$ e $L_j^{(k)}$, nas primeiras iterações, leva em conta os valores da variável e seus limites, enquanto que nas iterações seguintes, leva em conta o valor da variável na iteração atual e também os seus próprios valores em iterações anteriores, sempre ponderados por constantes multiplicadores que são escolhidas a critério do usuário. Estas constantes proporcionam um certo controle ao usuário do tamanho do passo da variável. Este parâmetro foi importante neste trabalho, principalmente na primeira iteração, quando o algoritmo tendia a levar as variáveis até seus limites geométricos logo de início, gerando uma malha extremamente distorcida. Para resolver este problema, foi aplicado um valor baixo de deslocamento nodal inicial, e como para as iterações seguintes o próprio algoritmo faz uso dos deslocamentos anteriores, o problema foi resolvido.

A grande vantagem do MMA é que, neste método, as funções de aproximação são convexas, e conforme comentado, os subproblemas tem sua convergência garantida por KKT. Entretanto, a convergência do problema global é definida arbitrariamente, através da análise da

variação da função objetivo entre uma iteração e outra. Quando estas variações não forem mais expressivas, ou o objetivo já foi atendido, assim como as restrições, considera-se que o problema terminou.

4 ANÁLISE DA SENSIBILIDADE

No processo de otimização utilizando Métodos Gradientes, além de avaliar o valor da função objetivo e restrições a cada iteração, necessita-se também avaliar as derivadas destas funções com relação às variáveis de projeto, ou seja, as posições geométricas de cada nó da malha de elementos finitos. Estas derivadas representam a sensibilidade.

A análise de sensibilidade é a parte mais importante de um processo de otimização. É quem fornece para o algoritmo otimizador a informação da "direção de busca", que é a direção de minimização (ou maximização) da função objetivo, à qual o algoritmo fará uso para saber quais as variáveis apresentam maior influencia no valor da função objetivo.

A sensibilidade da função objetivo que se quer avaliar neste trabalho é o quanto determinada frequência natural varia em função da variação da posição de um nó da malha na direção Z. Logo, deseja-se calcular:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} = ?, \quad (4.1)$$

onde λ_i é a frequência natural em radianos ao quadrado, e z_j é o deslocamento de um nó j .

Para chegar a essa derivada, segue-se o procedimento realizado por Haftka e Gurdal (1991), para o problema de vibração livre sem amortecimento:

$$M\ddot{x} + Kx = 0, \quad (4.2)$$

em que M representa a massa de um sistema, K representa a rigidez e x o vetor que representa o movimento da peça. A solução desta equação diferencial leva a um problema de autovalores (λ_i) e autovetores (Φ_i):

$$(K - \lambda_i M)\Phi_i = 0, \quad (4.3)$$

$$i = 1, \dots, N_{GL}$$

Para o cálculo da sensibilidade, define-se uma variável arbitrária z_j , que no presente trabalho é o deslocamento do nó j na direção Z. Essa variável pode ser interpretada como uma perturbação no domínio da

função objetivo (vetor variáveis), ou seja, uma pequena modificação na geometria do sistema em análise na Equação (4.2).

A Equação (4.3) é então inteiramente derivada em função dessa variável arbitrária:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} (K - \lambda_i M) \Phi_i = \frac{\partial}{\partial z_j} (0). \quad (4.4)$$

Fazendo essa operação e reorganizando os termos (Haftka e Gürdal, 1991), tem-se:

$$(K - \lambda_i M) \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} M \Phi_i = - \left(\frac{\partial K}{\partial z_j} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial z_j} \right) \Phi_i. \quad (4.5)$$

Multiplicando-se arbitrariamente ambos os lados da equação pelo autovetor transposto Φ_i^T , tem-se:

$$\begin{aligned} \Phi_i^T \left((K - \lambda_i M) \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} M \Phi_i \right) \\ = - \Phi_i^T \left(\frac{\partial K}{\partial z_j} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial z_j} \right) \Phi_i. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Faz-se, então, uso da propriedade de simetria das matrizes de massa e rigidez, e usando a Equação (4.3) para simplificar a Equação (4.6), chega-se à seguinte expressão para sensibilidade do autovalor (Haftka e Gürdal, 1991):

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} = \frac{\Phi_i^T \left(\frac{\partial K}{\partial z_j} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial z_j} \right) \Phi_i}{\Phi_i^T M \Phi_i}. \quad (4.7)$$

Também usando a propriedade de simetria das matrizes K e M , pode-se fazer a normalização dos autovetores em função da matriz de massa (operação muito utilizada pelos softwares de elementos finitos):

$$\Phi_i^T M \Phi_i = 1, \quad (4.8)$$

o que simplifica a equação anterior para:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} = \Phi_i^T \left(\frac{\partial K}{\partial z_j} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial z_j} \right) \Phi_i. \quad (4.9)$$

Dessa forma, a sensibilidade que um determinado autovalor λ_i apresenta a uma perturbação z_j depende da sensibilidade das matrizes de rigidez e de massa a essa perturbação, ponderadas pelo autovalor correspondente.

Ou seja, se o nó j em análise afetar diretamente muitos elementos da malha do modelo, a mudança na matriz de rigidez e massa será grande. Porém, caso essa região tenha pouca participação na forma do modo em análise (ponto nodal, de baixa amplitude, por exemplo), a sensibilidade final calculada desse nó será baixa, devido à ponderação pelo autovetor.

É de se esperar, portanto, que a forma do vetor sensibilidade para um dado autovalor siga a forma do autovetor correspondente.

Como a movimentação de um nó modifica somente as matrizes de rigidez e massa dos elementos conectados a este nó, fica evidente que as derivadas das matrizes dos elementos que não estão conectados a este nó são nulas. Essa constatação reduz bastante o cálculo da sensibilidade. Retirando todas as linhas e colunas das derivadas das matrizes que são nulas, tem-se um problema reduzido, com K_{reduz} e M_{reduz} , que leva em conta somente os elementos afetados pela movimentação do nó j :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} = \Phi_{i_{reduz}}^T \left(\frac{\partial K_{reduz}}{\partial z_j} - \lambda_i \frac{\partial M_{reduz}}{\partial z_j} \right) \Phi_{i_{reduz}}. \quad (4.10)$$

Fica fácil, então, observar que a equação de sensibilidade deste modelo reduzido pode ser separada num somatório de sensibilidades para cada um dos N_{reduz} elementos conectados a esse nó movimentado, ponderadas pelos valores dos autovetores Φ_{i_k} aplicados a cada elemento k , na forma:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^{N_{reduz}} \Phi_{i_k}^T \left(\frac{\partial K_k}{\partial z_j} - \lambda_i \frac{\partial M_k}{\partial z_j} \right) \Phi_{i_k}. \quad (4.11)$$

Sendo assim, para avaliar a sensibilidade de movimentação de um nó, deve-se encontrar os elementos que apresentam conectividade a esse

nó, calcular as derivadas de suas matrizes de rigidez e de massa, e multiplicar pela parte do autovetor correspondente aos nós desse elemento, conforme Equação (4.11).

São necessários então 4 termos para determinar a derivada analítica do autovalor:

- Φ_i^T ;
- λ_i ;
- $\partial K / \partial z$;
- $\partial M / \partial z$;

Os dois primeiros termos citados são obtidos da solução do problema de autovalores e autovetores definido pela Equação (4.3), podendo ser resolvidos via software comercial de elementos finitos. Os outros dois termos (derivadas), podem ser calculados utilizando a técnica das diferenças finitas ou de forma analítica, através da formulação de elementos finitos. Ambas técnicas serão demonstradas a seguir.

4.1 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O método das diferenças finitas faz uso da definição de derivada de uma função qualquer F em relação a uma variável x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}. \quad (4.12)$$

No presente trabalho, se aplicada diretamente sobre o valor de interesse, ou seja, o autovalor λ_i , obtém-se:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} = \lim_{\Delta z_j \rightarrow 0} \frac{\lambda_i(z_j + \Delta z_j) - \lambda_i(z_j)}{\Delta z_j}, \quad (4.13)$$

onde cada $F(z_j)$ implica na avaliação da função objetivo, ou seja, um problema de autovalores e autovetores. A parte do limite da função, onde a variação da variável tende a zero, deve ser substituída por um valor real Δz_j , que é um valor de perturbação do domínio a ser definido, e influi fortemente na precisão desta aproximação. É, inclusive, um dos grandes problemas da aplicação deste método.

A utilização deste método implica que a função objetivo deve ser avaliada $N + 1$ vezes a cada iteração, sendo N o número de variáveis do

problema. Como no presente trabalho o número de variáveis é grande (proporcional ao número de nós da malha elementos finitos), esse método acarreta muito tempo para cada iteração.

Porém, pode-se fazer uso da derivação demonstrada no início deste capítulo e ainda assim aplicar o método das diferenças finitas, mas desta vez, para calcular os valores das derivadas das matrizes de rigidez e de massa, na forma:

$$\frac{\partial K_i}{\partial z_j} = \frac{K_i(z_j + \Delta z_j) - K_i(z_j)}{\Delta z_j} \quad (4.14)$$

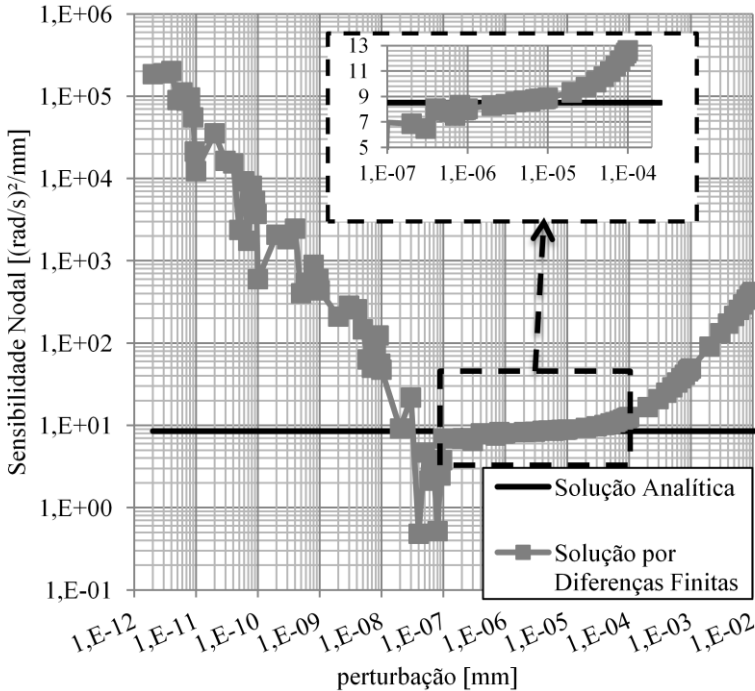
e

$$\frac{\partial M_i}{\partial z_j} = \frac{M_i(z_j + \Delta z_j) - M_i(z_j)}{\Delta z_j} . \quad (4.15)$$

Esse método é chamado de semi-analítico, pois resolve o problema da sensibilidade parcialmente de forma analítica e parcialmente por diferenças finitas.

A correta utilização deste método depende fortemente da escolha da perturbação Δz_j . Para demonstrar, traça-se o gráfico mostrado na Figura 15 com o valor da derivada calculada analiticamente para a variação de um par de nós gêmeos da placa plana escolhido na região central da placa, e compara-se com os valores obtidos por diferenças finitas para diversos valores de perturbação Δz_j .

Figura 15 - Comparação das sensibilidades analíticas e por diferenças finitas para diversos valores de perturbação.



O gráfico acima, plotado em escala log-log, mostra que as perturbações devem ser da ordem de 10^{-7} a 10^{-4} para que os cálculos de sensibilidade pelo método das diferenças finitas sejam da mesma ordem de grandeza dos valores calculados analiticamente. Mas uma ampliação dessa região, plotada em escala semilog na mesma figura, mostra que os valores podem facilmente apresentar erros da ordem de 10% dentro desta faixa.

Concluindo, sabe-se que o cálculo das derivadas das matrizes de massa e rigidez é complexo, e exige abrir a formulação de elementos finitos, que será demonstrada no Capítulo 4. Isto justificaria o uso das diferenças finitas pela simplicidade de implementação. Por outro lado, o custo computacional para resolver grandes modelos por este método é

maior (Wang et al, 1984), já que deve-se montar as matrizes $N + 1$ vezes a cada iteração, ou ainda maior, se for avaliar a função objetivo $N + 1$ vezes.

No presente trabalho, será utilizado o método analítico, descrito a seguir, devido à sua maior precisão.

4.2 MÉTODO ANALÍTICO

O método analítico é mais preciso que o método das diferenças finitas e não sofre problemas de precisão devido as escolhas do tamanho Δz_j utilizado. Entretanto, sua formulação é mais complexa. Conforme já comentado, precisam ser deduzidos dois termos importantes:

- $\partial K / \partial z_j$;
- $\partial M / \partial z_j$.

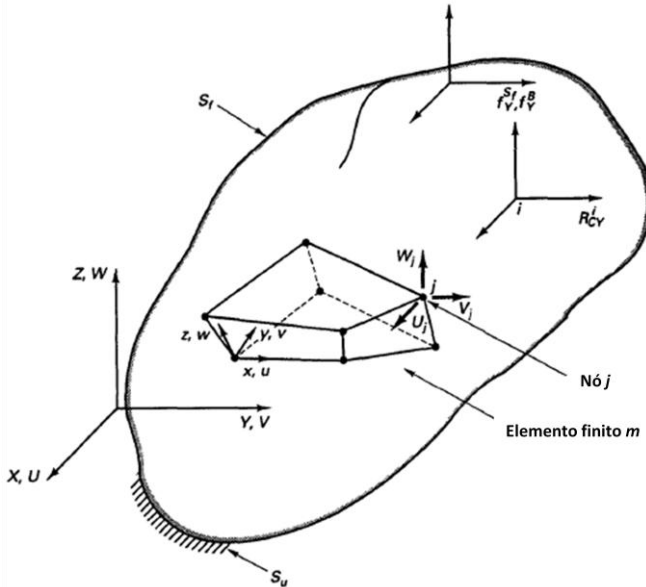
Para calcular estas derivadas, faz-se necessário rever a formulação dos elementos finitos utilizados, no caso, o sólido hexaédrico linear com formulação não conforme. É aqui que fica claro o motivo de sua escolha, a sua simplicidade de formulação.

Para tanto, o ponto de partida é a formulação geral de elementos finitos (Bathe, 1996), tentando não entrar no detalhe de todos os termos. Procede-se, então, com a aplicação para elemento sólido hexaédrico linear de 8 nós (Bathe, 1996), aplica-se a formulação de elementos não-conformes (Zienkiewikz et al; 2005), chegando na formulação das matrizes de massa e rigidez do modelo. Conhecendo a formulação destas matrizes do elemento, parte-se para a sua derivação analítica, de acordo com a parametrização escolhida neste trabalho. Uma vez definidas a sensibilidade da função objetivo, as sensibilidades das restrições também são avaliadas.

4.2.1 Formulação geral de elementos finitos

Para a formulação de elementos finitos, supõe-se um corpo em equilíbrio no espaço R^3 , engastado, submetido a forças por unidade de volume f^B , forças por unidade de área f^S , deslocamentos U^{Sf} prescritos na área S_u e forças concentradas \bar{R}_C , conforme Figura 16.

Figura 16 - Corpo 3D com elemento sólido 8 nós.



Fonte: Bathe (1996).

O sistema de coordenadas global é (X, Y, Z) e os deslocamentos de um ponto qualquer são:

$$\mathbf{U}(X, Y, Z) = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

onde (U, V, W) são os deslocamentos nas direções (X, Y, Z) , respectivamente. As deformações no corpo, decorrentes de um deslocamento \mathbf{U} são organizadas na forma:

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = [\epsilon_{XX} \epsilon_{YY} \epsilon_{ZZ} \gamma_{XY} \gamma_{YZ} \gamma_{ZX}], \quad (4.17)$$

sendo:

$$\epsilon_{XX} = \frac{\partial U}{\partial X}; \quad \epsilon_{YY} = \frac{\partial V}{\partial Y}; \quad \epsilon_{ZZ} = \frac{\partial W}{\partial Z}; \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{XY} &= \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right); \\ \gamma_{YZ} &= \left(\frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y} \right); \\ \gamma_{ZX} &= \left(\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z} \right).\end{aligned}$$

Todas as tensões no corpo são reunidas no vetor:

$$\boldsymbol{\tau}^T = [\tau_{XX} \tau_{YY} \tau_{ZZ} \tau_{XY} \tau_{YZ} \tau_{ZX}]. \quad (4.19)$$

O método dos elementos finitos parte do princípio dos trabalhos virtuais, também chamado de deslocamentos virtuais (Bathe, 1996), que cria deformações virtuais na estrutura, ou seja, que não existem realmente, mas possibilitam o desenvolvimento da formulação, em que:

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}}. \quad (4.20)$$

A equação acima estabelece que para qualquer corpo no seu estado de equilíbrio, o trabalho virtual interno total W_{int} é igual ao trabalho virtual externo total W_{ext} (Bathe, 1996).

O trabalho virtual externo W_{ext} é calculado somando as integrais de forças de corpo \mathbf{f}^B multiplicadas pelos deslocamentos virtuais do corpo $\bar{\mathbf{U}}$ ao longo do volume, de forças de área \mathbf{f}^S multiplicadas pelos deslocamentos virtuais $\bar{\mathbf{U}}^{Sf}$ das áreas onde atuam, e fazendo o somatório das forças externas pontuais \mathbf{R}_{Ci} multiplicadas pelos seus deslocamentos virtuais $\bar{\mathbf{U}}_i^T$:

$$W_{\text{ext}} = \int_V \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{f}^B dV + \int_{S_f} \bar{\mathbf{U}}^{Sf T} \mathbf{f}^{Sf} dS + \sum_i \bar{\mathbf{U}}_i^T \mathbf{R}_{Ci}. \quad (4.21)$$

O trabalho virtual interno é definido como a integral no volume do produto das deformações virtuais $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ pelas tensões $\boldsymbol{\tau}$ no corpo:

$$W_{\text{int}} = \int_V \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\tau} dV. \quad (4.22)$$

Para resolver as integrais de W_{int} e W_{ext} , o método de elementos finitos aproxima os deslocamentos do corpo da Figura 16 por um arranjo de elementos finitos discretos, interconectados em seu contorno pelos seus nós. Além disso, considera que os deslocamentos internos para cada elemento em seu próprio sistema de coordenadas locais (x, y, z) podem ser definidos como uma função dos deslocamentos dos nós deste elemento no sistema de coordenadas global (X, Y, Z) , fazendo uso das chamadas Funções de Forma \mathbf{H} :

$$\mathbf{u}^m(x, y, z) = \mathbf{H}^m(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{U}}, \quad (4.23)$$

onde \mathbf{u}^m representa o campo de deslocamentos internos do elemento m . Tem-se que \mathbf{H}^m é a matriz de interpolação dos deslocamentos e $\hat{\mathbf{U}}$ é o vetor com os deslocamentos virtuais de todos os nós da malha nas 3 direções (U, V, W) , na forma:

$$\hat{\mathbf{U}}^T = [U_1 V_1 W_1 \quad U_2 V_2 W_2 \quad \dots \quad U_{N_n} V_{N_n} W_{N_n}], \quad (4.24)$$

sendo N_n é o número de nós da malha. As funções de forma \mathbf{H} variam de acordo com o tipo de elemento, número de nós, geometria e graus de liberdade dos nós.

Da mesma forma que os deslocamentos em um ponto qualquer do elemento m podem ser calculados a partir dos deslocamentos dos nós e das funções de forma do elemento, também as deformações $\boldsymbol{\epsilon}^m$ em qualquer ponto do elemento m podem ser calculadas derivando e combinando linhas da matriz \mathbf{H}^m , dando origem à matriz \mathbf{B}^m :

$$\boldsymbol{\epsilon}^m(x, y, z) = \mathbf{B}^m(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{U}}. \quad (4.25)$$

Adiante no texto ficarão evidentes as simplificações na formulação dos elementos finitos geradas pela criação da matriz \mathbf{B}^m .

Outra matriz necessária na formulação dos elementos finitos é a matriz \mathbf{C} , que correlaciona tensões com deformações no elemento:

$$\boldsymbol{\tau}^m = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\tau}^{I^m}, \quad (4.26)$$

onde $\boldsymbol{\tau}^{I^m}$ representa as tensões iniciais do elemento, antes da aplicação das cargas, desconsideradas neste trabalho. A formulação e organização da matriz \mathbf{C} varia de acordo com o estado de tensões a que o elementos

está submetido: estado plano de tensões, estado plano de deformações, etc.

Os trabalhos virtuais interno e externo são escalares e independem do sistema de coordenadas empregado, o que justifica o uso de sistema de coordenadas locais para cada elemento. Uma vez que tenham sido calculados para cada elemento, pode-se fazer o somatório dos trabalhos virtuais internos elementares para se chegar ao trabalho virtual interno total:

$$W_{\text{int}} = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{V^m} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{mT} \boldsymbol{\tau}^m dV^m, \quad (4.27)$$

onde N_e é o número de elementos que constituem o corpo.

Da mesma forma, o trabalho virtual externo fica:

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \sum_{m=1}^{N_e} \int_{V^m} \bar{\mathbf{U}}^{mT} \mathbf{f}^B{}^m dV^m \\ &+ \sum_{m=1}^{N_e} \int_{S_1^m \dots S_q^m} \bar{\mathbf{U}}^{S_f(m)T} \mathbf{f}^{S_f(m)} dS^m \\ &+ \sum_i \bar{\mathbf{U}}_i^T \mathbf{R}_{C_i}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Nesse caso, outras simplificações já podem ser feitas. Para o problema de vibrações livres que será resolvido aqui, não há forças por unidade de área nem forças concentradas. Somente as forças de corpo devem ser avaliadas, pois contém a participação das forças de inércia. Eliminando as forças que não serão consideradas e separando a parte inercial das forças de corpo tem-se:

$$W_{\text{ext}} = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{V^m} \bar{\mathbf{U}}^{mT} [\mathbf{f}^B{}^m - \rho \ddot{\mathbf{U}}^m] dV^m, \quad (4.29)$$

onde $\mathbf{f}^B{}^m$ representa a partir de agora as forças de corpo sem o termo de inércia, e são consideradas nulas. $\ddot{\mathbf{U}}^m$ é a aceleração virtual dos nós do

elemento m num instante de tempo t qualquer, representada pela segunda derivada dos deslocamentos virtuais $\bar{\mathbf{U}}^m$.

Resumindo, as integrais dos trabalhos virtuais interno e externo no volume total do corpo se transformam num somatório de integrais de trabalho virtual para cada elemento m , em seus sistemas de coordenadas locais. Assim sendo, faz-se sempre a escolha de um sistema de coordenadas locais para cada elemento de forma a simplificar o cálculo de sua integral.

Considerando as Equações (4.23) e (4.25), levando em conta o campo de deslocamentos reais, aplica-se o mesmo para o campo de deslocamentos virtuais, tal que:

$$\bar{\mathbf{U}}^m(x, y, z) = \mathbf{H}^m(x, y, z) \bar{\mathbf{U}} \quad (4.30)$$

e

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^m(x, y, z) = \mathbf{B}^m(x, y, z) \bar{\mathbf{U}}. \quad (4.31)$$

Utilizando as Equações (4.26), (4.25) e (4.31), e fazendo as substituições na equação do trabalho virtual interno Equação (4.22), tem-se:

$$W_{\text{int}} = \bar{\mathbf{U}}^T \left[\sum_{m=1}^{N_e} \int_{V^m} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{C} \mathbf{B}^m dV^m \right] \hat{\mathbf{U}}^T. \quad (4.32)$$

Na equação do trabalho virtual externo Equação (4.21), procede-se de forma semelhante. Da mesma forma que os deslocamentos virtuais de qualquer ponto interno do elemento podem ser escritos em função dos deslocamentos dos nós do elemento, usando as funções de forma \mathbf{H} , Equação (4.30), também as acelerações podem ser escritas neste formato, de forma que o trabalho externo fica:

$$W_{\text{ext}} = - \sum_{m=1}^{N_e} \int_{V^m} \bar{\mathbf{U}}^{mT} \rho \mathbf{H}^m \ddot{\mathbf{U}} dV^m \quad (4.33)$$

Utilizando as últimas Equações, (4.32) e (4.33), reorganizando na Equação (4.20), chega-se à equação:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}^T \left[\sum_{m=1}^{N_e} \int_{V^m} \mathbf{H}^{mT} \rho \mathbf{H}^m dV^m \right] \ddot{\mathbf{U}} \\ + \bar{\mathbf{U}}^T \left[\sum_{m=1}^{N_e} \int_{V^m} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{C} \mathbf{B}^m dV^m \right] \hat{\mathbf{U}}^T = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Esta equação está organizada na forma de um problema de vibrações livres sem amortecimento, similar à Equação (4.2), na forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (4.35)$$

em que as matrizes de rigidez e de massa, respectivamente, são expressas por:

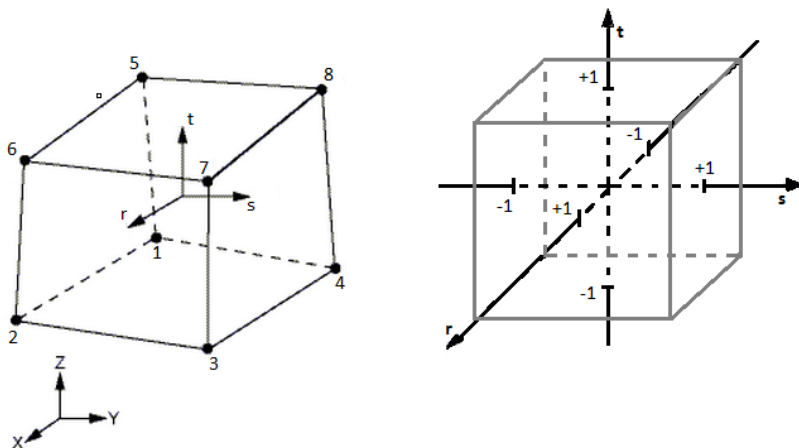
$$\mathbf{K} = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{V^m} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{C} \mathbf{B}^m dV^m, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{V^m} \rho \mathbf{H}^{mT} \mathbf{H}^m dV^m. \quad (4.37)$$

4.2.2 Elemento sólido hexaédrico linear

Até este ponto foi citado o método dos elementos finitos para obter as matrizes de massa e rigidez no sistema de coordenadas local do elemento, de forma a simplificar o equacionamento. Faz-se então necessário definir um sistema de coordenadas local padrão, e para isso usa-se aqui o conceito de elementos isoparamétricos. Esse conceito não é somente um sistema de coordenadas, mas também estabelece uma relação geométrica entre um elemento em análise e um elemento padrão, chamado elemento mestre. O elemento mestre (ou padrão) é um elemento cúbico perfeito de aresta com tamanho 2, centrado num sistema de coordenadas local (r, s, t) , chamadas de coordenadas naturais, conforme a Figura 17.

Figura 17 - Elemento sólido de 8 nós real (à esquerda) e elemento mestre (à direita).



O nome isoparamétrico origina-se no fato de a geometria de qualquer elemento em análise poder ser representada em termos das coordenadas de seus nós, fazendo uso das chamadas funções de forma (ou funções de interpolação). Esta mesma representação é utilizada na interpolação dos deslocamentos ao longo do elemento submetido a uma carga, em termos de deslocamentos nodais (Brebbia e Ferrante, 1975).

Ou seja, são definidas funções de forma para mapear a posição dos nós do elemento real em relação ao elemento mestre, que serão utilizadas para mapear os deslocamentos do elemento em função dos deslocamentos nodais.

Esse conceito é utilizado para cálculo das funções de forma, aqui definidas como conjunto de funções \mathbf{H} . Assim, seja um elemento mestre de coordenadas locais (r, s, t) , dentro de um sistema de coordenadas global (X, Y, Z) , conforme a Figura 17, pode-se mapear a geometria do elemento (ou localização de um ponto qualquer dentro do elemento) da seguinte forma:

$$X = \sum_{i=1}^{N_n^m} h_i(r, s, t) \cdot X_i, \quad (4.38)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{N_n^m} h_i(r, s, t) \cdot Y_i \quad (4.39)$$

e

$$Z = \sum_{i=1}^{N_n^m} h_i(r, s, t) \cdot Z_i , \quad (4.40)$$

onde N_n^m é o número de nós do elemento m , (X, Y, Z) são as coordenadas no sistema de coordenadas global do ponto equivalente ao ponto (r, s, t) no sistema local, (X_i, Y_i, Z_i) são as coordenadas do nó i do elemento real e $h_i(r, s, t)$ são as funções de interpolação para cada nó do elemento mestre. Estas funções de interpolação são conhecidas para cada tipo de elemento.

As funções de forma h_i são definidas usando as variáveis do sistema de coordenadas local do elemento (r, s, t) , que só variam no intervalo $[-1, +1]$. A vantagem desse método é modificar os limites de integração para $[-1, +1]$ em todas as direções (r, s, t) . Outra propriedade das funções de forma é que cada uma delas tem valor 1 quando aplicadas no nó correspondente, e 0 em todos os outros.

Da mesma forma que a geometria, os deslocamentos, dentro do elemento, podem ser interpolados usando estas mesmas funções de forma juntamente com os deslocamentos nodais, na forma:

$$U = \sum_{i=1}^{N_n} h_i(r, s, t) \cdot U_i , \quad (4.41)$$

$$V = \sum_{i=1}^{N_n} h_i(r, s, t) \cdot V_i \quad (4.42)$$

e

$$W = \sum_{i=1}^{N_n} h_i(r, s, t) \cdot W_i , \quad (4.43)$$

onde (U_i, V_i, W_i) são os deslocamentos de um nó i nas direções (X, Y, Z) , respectivamente.

Uma vez definidos os deslocamentos do elemento em função do sistema de coordenadas local, para prosseguir no cálculo das matrizes de rigidez e massa é preciso alterar também o volume de integração do elemento dV^m e seus limites, para que fique no sistema de coordenadas naturais e possa ser integrado em $[-1, +1]$. Para isso, é preciso utilizar a matriz Jacobiana, que correlaciona as derivadas entre sistemas de coordenadas diferentes, na forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

sendo assim definida a matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Com esta matriz, pode-se avaliar a integral das Equações (4.36) e (4.37), utilizando as coordenadas locais na forma:

$$\mathbf{K} = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{V^{rst}} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{C} \mathbf{B}^m \det(\mathbf{J}^m) dr ds dt, \quad (4.46)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{V^{rst}} \rho \mathbf{H}^{mT} \mathbf{H}^m \det(\mathbf{J}^m) dr ds dt, \quad (4.47)$$

onde \mathbf{H}^m é o vetor contendo as funções de interpolação $h_i(r, s, t)$ do elemento m , na forma:

$$\mathbf{H}^m = [h_i \quad h_{i+1} \quad \dots \quad h_{N_n^m}], \quad (4.48)$$

sendo N_n^m o número de nós do elemento m .

O próximo passo é o processo de integração numérica. No presente trabalho, usa-se o método da integração utilizando os pontos de Gauss, que substitui com fidelidade a integral por um somatório da função aplicada em pontos específicos dentro do domínio do elemento. Dessa forma, tem-se:

$$\mathbf{K} = \sum_{m=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} \mathbf{B}_p^{mT} \mathbf{C} \mathbf{B}_p^m \det(\mathbf{J}_p^m) \alpha_p \quad (4.49)$$

e:

$$\mathbf{M} = \sum_{m=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} \rho \mathbf{H}_p^{mT} \mathbf{H}_p^m \det(\mathbf{J}_p^m) \alpha_p, \quad (4.50)$$

onde \mathbf{B}_p^m e \mathbf{H}_p^m são agora avaliadas nos N_p pontos p de Gauss. O número de pontos de Gauss está atrelado ao grau do polinômio que está sendo integrado, que varia de acordo com a formulação utilizada para funções de forma do elemento. A constante α_p é um fator peso para cada ponto de Gauss.

Para o caso do elemento sólido linear de 8 nós, as funções de interpolação apresentam a forma:

$$h_i(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + r * r_i)(1 + s * s_i)(1 + t * t_i), \quad (4.51)$$

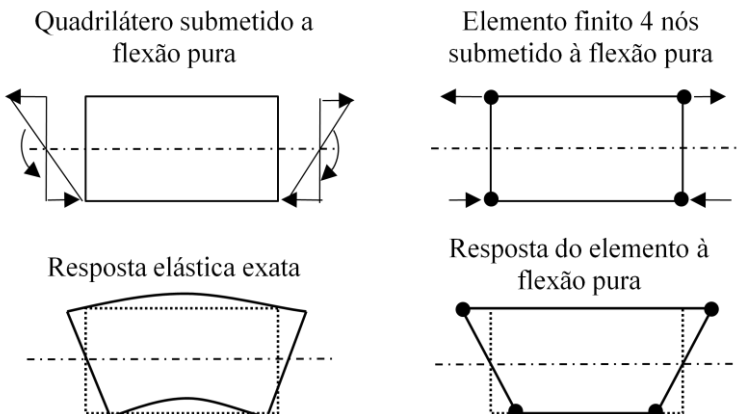
onde $h_i(r, s, t)$ é a função de forma do nó i de coordenadas naturais (r_i, s_i, t_i) . Estas coordenadas representam os pontos de Gauss.

Assim, o polinômio a ser integrado para o cálculo da matriz de rigidez é de grau 3, que resulta em dois pontos por direção de integração, cujos valores são tabelados (Bathe, 1996) em $(+0,57735, -0,57735)$. Portanto, como o elemento é 3D, o somatório levará em conta oito pontos para representar as integrais que definem as matrizes de massa e rigidez do elemento.

4.2.3 Elemento não-conforme

O elemento sólido de 8 nós em sua formulação padrão pode apresentar rigidez maior que a real. Esse problema decorre do fato de suas funções de forma não conseguirem representar efeitos de flexão, conforme a Figura 18.

Figura 18 - Resposta elástica de um elemento quadrilátero à flexão puxa.



Fonte: Hughes (1987).

Os efeitos dessa formulação mais simples podem ser vistos no Capítulo 2, na validação do modelo da placa. Utilizando elementos sólidos lineares padrão, os resultados de algumas frequências naturais da placa ficaram muito acima dos medidos.

Uma saída para considerar esses efeitos de flexão sem necessidade de partir para elementos de maior ordem (de formulação quadrática, por exemplo) é a utilização de elementos não conformes (*non-conforming elements*) proposta por Zienkiewicz et al (2005). Essa solução é a mesma utilizada no software comercial ANSYS, de acordo com as matrizes de rigidez montadas pelo programa que foram comparadas às calculadas no presente trabalho, utilizando este método. O software disponibiliza essa opção de funções de forma para o elemento sólido hexaédrico linear "solid45", sob o nome de "Extra displacement shapes".

A formulação de elementos não-conformes se baseia na criação temporária de três novos nós, cujas coordenadas são a origem do sistema de coordenadas naturais (0,0,0), e conseqüentemente três novas funções de forma (Hughes, 1987):

$$h_9(r, s, t) = (1 - r^2), \quad (4.52)$$

$$h_{10}(r, s, t) = (1 - s^2), \quad (4.53)$$

$$h_{11}(r, s, t) = (1 - t^2). \quad (4.54)$$

Esses três novos nós não apresentam conectividade com o resto da malha, e portanto não há necessidade que estejam presentes na matriz de rigidez global da estrutura. Hughes (1987) demonstra, através de dedução, uma forma de condensar numericamente os efeitos de flexão representados pelos três novos nós na matriz de rigidez original do elemento sólido 8 nós. Para isso, separa espacialmente a nova matriz de rigidez que considera 11 funções de forma (8 originais + 3 extras), aqui chamada também de \mathbf{K} , em quatro diferentes partes:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{da} \\ \mathbf{K}_{ad} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

onde a matriz \mathbf{K}_{dd} é a matriz de rigidez original do elemento 8 nós, e as outras são decorrentes dos 3 novos nós e suas funções de forma.

Hughes (1987) demonstra que pode-se obter uma matriz $\tilde{\mathbf{K}}$ equivalente, de mesmo tamanho da matriz original para 8 nós, através da condensação dos termos da matriz \mathbf{K} na forma:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{dd} - \mathbf{K}_{da} * \mathbf{K}_{aa}^{-1} * \mathbf{K}_{ad} . \quad (4.56)$$

Esse procedimento aumenta a precisão da formulação do elemento sem aumentar substancialmente o tempo de simulação (Lee e Rowe, 1990), o que ocorreria caso elementos de maior ordem (quadráticos, por exemplo) fossem utilizados. A matriz de massa, por sua vez, não sofre alteração nessa nova formulação.

4.2.4 Aplicação para caso da placa plana

Definida a formulação do elemento, procede-se para a avaliação da sensibilidade conforme definida no Capítulo 3, ou seja, em função do deslocamento do nó.

Relembrando, a sensibilidade que deve ser calculada implicará no cálculo das derivadas da matriz de rigidez e massa da placa com relação

a movimentação de um par de nós em Z , aqui chamados de nós gêmeos, que tiveram suas coordenadas mapeadas na forma:

$$z_j = \begin{cases} z_j, & \text{para } j = 1,2,3,4 \\ z_{j-4} + esp, & \text{para } j = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (4.57)$$

onde esp é a espessura da placa.

A derivada do autovalor i em relação a z_j , conforme já comentado, é:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} = \Phi_i^T \left(\frac{\partial K}{\partial z_j} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial z_j} \right) \Phi_i. \quad (4.58)$$

É necessário, então, calcular as derivadas das matrizes de massa e rigidez da placa para este deslocamento de um par de nós. Conforme visto no início deste capítulo, somente as linhas e colunas da matriz que correspondem aos nós de elementos conectados ao nó em análise terão valor não nulo, criando o que foi chamado de problema reduzido.

Derivando a matriz de rigidez, Equação (4.49), em função do deslocamento do par de nós z_j , tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\sum_{m=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} \mathbf{B}_p^{mT} \mathbf{C} \mathbf{B}_p^m \det(\mathbf{J}_p^m) \alpha_p \right), \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_j} = & \sum_{m=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_p^{mT}}{\partial z_j} \mathbf{C} \mathbf{B}_p^m \det(\mathbf{J}_p^m) \right. \\ & + \mathbf{B}_p^{mT} \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{B}_p^m}{\partial z_j} \det(\mathbf{J}_p^m) \\ & \left. + \mathbf{B}_p^{mT} \mathbf{C} \mathbf{B}_p^m \frac{\partial \det(\mathbf{J}_p^m)}{\partial z_j} \right) \alpha_p. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Esta é a derivação geral da matriz de rigidez, e vale tanto para matriz original do elemento de 8 nós, como também para o de 11 nós. Como será utilizada a matriz da versão 11 nós condensada a partir da versão 8 nós, conforme visto anteriormente, faz-se necessário derivar a matriz $\tilde{\mathbf{K}}$ equivalente:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} (\mathbf{K}_{\text{dd}} - \mathbf{K}_{\text{da}} * \mathbf{K}_{\text{aa}}^{-1} * \mathbf{K}_{\text{ad}}), \quad (4.61)$$

ou:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}}{\partial z_j} = \frac{\partial \mathbf{K}_{\text{dd}}}{\partial z_j} - \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{\text{da}}}{\partial z_j} \mathbf{K}_{\text{aa}}^{-1} \mathbf{K}_{\text{ad}} + \mathbf{K}_{\text{da}} \frac{\partial (\mathbf{K}_{\text{aa}}^{-1})}{\partial z_j} \mathbf{K}_{\text{ad}} \right. \\ \left. + \mathbf{K}_{\text{da}} \mathbf{K}_{\text{aa}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{\text{ad}}}{\partial z_j} \right), \end{aligned} \quad (4.62)$$

onde cada parte da matriz de rigidez $\tilde{\mathbf{K}}$ para o elemento de 11 nós é derivada independente das outras, utilizando para isso a Equação (4.60) e seus respectivos componentes.

E para a matriz de massa, partindo da Equação (4.50):

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\sum_{m=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} \rho \mathbf{H}_p^{mT} \mathbf{H}_p^m \det(\mathbf{J}_p^m) \alpha_p \right), \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z_j} = \sum_{m=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} \rho \mathbf{H}_p^{mT} \mathbf{H}_p^m \frac{\partial \det(\mathbf{J}_p^m)}{\partial z_j} \alpha_p. \quad (4.64)$$

Analisando ambas derivadas, suas soluções implicam no cálculo das derivadas da matriz \mathbf{B}_p^m e do $\det(\mathbf{J}_p^m)$.

4.2.4.1 Derivada da matriz \mathbf{B}

Para esta derivada, tomam-se por base as Equações (4.17) e (4.25), origem da matriz \mathbf{B}^m . Sabe-se por definição que:

$$\epsilon^m = \begin{bmatrix} \epsilon_{XX} \\ \epsilon_{YY} \\ \epsilon_{ZZ} \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \\ \left(\frac{\partial W}{\partial Z} \right) \\ \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y} \right) \\ \left(\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

Usando as funções de interpolação para o deslocamento, Equações (4.41), (4.42) e (4.43), diretamente na equação acima, pode-se escrever:

$$\epsilon^m = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial X} \sum_{i=1}^{N_n} h_i(r, s, t) \cdot U_i \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial Y} \sum_{i=1}^{N_n} h_i(r, s, t) \cdot V_i \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial Z} \sum_{i=1}^{N_n} h_i(r, s, t) \cdot W_i \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial Y} \sum_{i=1}^{N_n} h_i(r, s, t) \cdot U_i + \frac{\partial}{\partial X} \sum_{i=1}^{N_n} h_i(r, s, t) \cdot V_i \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial Z} \sum_{i=1}^{N_n} h_i(r, s, t) \cdot V_i + \frac{\partial}{\partial Y} \sum_{i=1}^{N_n} h_i(r, s, t) \cdot W_i \right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial X} \sum_{i=1}^{N_n} h_i(r, s, t) \cdot W_i + \frac{\partial}{\partial Z} \sum_{i=1}^{N_n} h_i(r, s, t) \cdot U_i \right) \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Levando as derivadas para os somatórios:

$$\epsilon^m = \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial X} \cdot U_i \right) \\ \left(\sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial Y} \cdot V_i \right) \\ \left(\sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial Z} \cdot W_i \right) \\ \left(\sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial Y} \cdot U_i + \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial X} \cdot V_i \right) \\ \left(\sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial Z} \cdot V_i + \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial Y} \cdot W_i \right) \\ \left(\sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial X} \cdot W_i + \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial Z} \cdot U_i \right) \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

A matriz \mathbf{B} é construída através da correta organização destes termos para fazer uso do vetor $\hat{\mathbf{U}}$ na ordem em que foi definido na Equação (4.24). Assim, retornando à Equação (4.63), pode-se montar a matriz \mathbf{B}^m . Para apresentar de forma mais didática, separa-se a matriz \mathbf{B}^m em:

$$\mathbf{B}^m = [\mathbf{B}^m_1 \mathbf{B}^m_2 \dots \mathbf{B}^m_{11}], \quad (4.68)$$

onde:

$$\mathbf{B}^m_i = \begin{bmatrix} h_i'^x & 0 & 0 \\ 0 & h_i'^y & 0 \\ 0 & 0 & h_i'^z \\ h_i'^y & h_i'^x & 0 \\ 0 & h_i'^z & h_i'^y \\ h_i'^z & 0 & h_i'^x \end{bmatrix}, \quad (4.69)$$

sendo $h_i'^x$ definida como a primeira derivada de h_i na direção X, e assim para as outras direções Y e Z. Essas derivadas não são calculadas de forma direta, sendo necessário o uso do jacobiano para serem calculadas, na forma:

$$\begin{bmatrix} h_i'^x \\ h_i'^y \\ h_i'^z \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} h_i'^r \\ h_i'^s \\ h_i'^t \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

Como a matriz \mathbf{B}^m deve ser derivada em relação à movimentação de um par de nós z_j , cada matriz \mathbf{B}^m_i deve ser derivada (para facilitar a representação) conforme definido anteriormente. Aplicando a derivada na Equação (4.70):

$$\frac{\partial \mathbf{B}^m_i}{\partial z_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i'^x}{\partial z_j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_i'^y}{\partial z_j} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_i'^z}{\partial z_j} \\ \frac{\partial h_i'^y}{\partial z_j} & \frac{\partial h_i'^x}{\partial z_j} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_i'^z}{\partial z_j} & \frac{\partial h_i'^y}{\partial z_j} \\ \frac{\partial h_i'^z}{\partial z_j} & 0 & \frac{\partial h_i'^x}{\partial z_j} \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Para calcular os termos desta matriz, usa-se a Equação (4.71), derivando-a em relação à z_j . Fazendo ainda algumas simplificações obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \begin{bmatrix} h_i'^x \\ h_i'^y \\ h_i'^z \end{bmatrix} = \left[-\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial z_j} \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} h_i'^r \\ h_i'^s \\ h_i'^t \end{bmatrix} \right]. \quad (4.72)$$

Na derivação completa desta equação faz-se uso da regra da cadeia, onde aparecem as derivadas das funções de forma nas suas coordenadas naturais, que são nulas, e foram desconsideradas.

A derivada do Jacobiano deve ser calculada, e já vai servir para o cálculo da derivada do determinante do Jacobiano, também necessária para o cálculo completo da sensibilidade.

Tem-se, então, usando a Equação (4.45):

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Novamente, utilizando as funções de forma do elemento:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial z_j} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial r} y_i & \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial r} z_i \\ \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial s} y_i & \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial s} z_i \\ \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial t} x_i & \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial t} y_i & \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial h_i(r, s, t)}{\partial t} z_i \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

Como a derivada é em relação a Z, restam somente os termos relacionados na Equação (3.1):

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial z_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{\partial h_j(r, s, t)}{\partial r} + \frac{\partial h_{j-4}(r, s, t)}{\partial r} \right) \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial h_j(r, s, t)}{\partial s} + \frac{\partial h_{j-4}(r, s, t)}{\partial t} \right) \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial h_j(r, s, t)}{\partial r} + \frac{\partial h_{j-4}(r, s, t)}{\partial r} \right) \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Com a derivada do Jacobiano pode-se voltar e calcular a Equação (4.73), e por fim, montar a derivada da matriz \mathbf{B}^m , objetivo desta dedução. Resta agora calcular a derivada do determinante do Jacobiano.

4.2.4.2 Derivada do determinante do Jacobiano

Utilizando a fórmula para derivada de determinante, tem-se para o determinante do Jacobiano:

$$\frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial z_j} = \det(\mathbf{J}) \cdot \text{Tr} \left[\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial z_j} \right], \quad (4.76)$$

onde Tr representa a função traço de matriz.

4.2.4.3 Derivadas das matrizes de Massa e Rigidez final

A derivação geral da matriz de rigidez já foi demonstrada anteriormente, através da combinação das Equações (4.62) e (4.60), faltando somente a substituição das derivadas de \mathbf{B}_p^m e de $\det(\mathbf{J}_p^m)$ na equação. Esta substituição não será reescrita aqui devido ao seu tamanho.

Já a matriz de massa, que não sofre alteração na formulação devido aos elementos não-conformes, depende somente da derivada do determinante do Jacobiano, conforme visto na Equação (4.64), ficando na forma:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z_j} = \sum_{m=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} \rho \mathbf{H}_p^{mT} \mathbf{H}_p^m \det(\mathbf{J}_p^m) \cdot \text{Tr} \left[\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial z_j} \right] \alpha_p. \quad (4.77)$$

4.3 SENSIBILIDADE DA RESTRIÇÃO

A sensibilidade das restrições é um dado tão importante quanto a sensibilidade da função objetivo. As duas restrições que foram desenvolvidas para este trabalho estão calculadas abaixo, de forma analítica.

4.3.1 Restrição de massa/volume

Baseado na dedução feita anteriormente para elementos finitos, tem-se que a massa total do modelo é:

$$M_{\text{total}} = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{V^{rst}} \rho \det(\mathbf{J}^m) dr ds dt, \quad (4.78)$$

sendo N_e o número de elementos do modelo. Seguindo o processo de integração numérica usando os pontos de Gauss, tem-se:

$$M_{\text{total}} = \sum_{m=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} \rho \det(\mathbf{J}_p^m) \alpha_p, \quad (4.79)$$

e derivando-a em função da movimentação do nó em Z:

$$\frac{\partial M_{\text{total}}}{\partial z_j} = \sum_{m=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} \rho \frac{\partial \det(\mathbf{J}_p^m)}{\partial z_j} \alpha_p. \quad (4.80)$$

O único termo que é função da movimentação do nó z_j é o determinante do Jacobiano, similar ao que ocorreu na matriz de massa, ficando na forma:

$$\frac{\partial M_{\text{total}}}{\partial z_j} = \sum_{m=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} \rho \det(\mathbf{J}_p^m) \cdot \text{Tr} \left[\mathbf{J}_p^{m-1} \frac{\partial \mathbf{J}_p^m}{\partial z_j} \right] \alpha_p. \quad (4.81)$$

Conforme já foi comentado, este termo apresenta valores desprezíveis, bem como a massa total apresenta variações não mensuráveis. Por isso, esta restrição não será utilizada.

4.3.2 Restrição de aresta média

A restrição de aresta média já foi comentada anteriormente, e refere-se ao tamanho médio das arestas da face superior ou inferior dos elementos que constituem a placa.

Esta restrição é calculada para o elemento, no entanto, a variável de interesse é o nó. Assim, os resultados desta sensibilidade para um determinado par de nós vai considerar a soma das sensibilidades dos elementos ao qual este nó faz parte.

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial z_j} = \frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_c} \frac{\partial \bar{L}_e}{\partial z_j}, \quad (4.82)$$

onde N_c é o número de elementos e conectados ao nó j , e N_e o número de elementos do modelo.

Pode-se agora efetuar o cálculo de sua sensibilidade elementar, na forma:

$$\frac{\partial \bar{L}_e}{\partial z_j} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial L_1}{\partial z_j} + \frac{\partial L_2}{\partial z_j} \right), \quad (4.83)$$

onde, L_1 e L_2 são as duas arestas do elemento que apresentam conectividade ao nó j na superfície da placa. Por exemplo, na Figura 13, as arestas conectadas ao nó 1 são aquelas que fazem ligação aos nós 2 e 4. Como se vê, somente duas arestas são afetadas pela movimentação de um nó.

Cada uma das arestas nesta soma vai apresentar uma sensibilidade diferente de acordo com a deformação do elemento, e é avaliada separadamente, com base na derivação das Equações (3.5) e (3.6):

$$\frac{\partial L_1}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \frac{1}{|N_j - N_1|} \cdot 2 (z_j - z_1) \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \frac{1}{|N_j - N_2|} \cdot 2 (z_j - z_2) , \quad (4.85)$$

onde N_j são todas as coordenadas (x,y,z) do nó j , e z_j é somente a coordenada em Z , conforme explicado no Capítulo 3.

Esse processo de busca por quais elementos apresentam conectividade ao nó, e soma das sensibilidades elementares, é feito para todos os nós da superfície inferior da placa.

4.4 PARTICULARIDADES

Para que o processo de otimização funcione corretamente, por vezes o que foi descrito até então não é suficiente. Uma vez que a otimização é iniciada, surgem outros desafios, particularidades do problema em análise, seja de ordem numérica ou inerentes à forma de parametrização e programação do algoritmo de otimização.

Quando isto ocorre, faz-se necessária a adição de algum pré e pós processamento dos dados, que são abordados neste item.

4.4.1 Placa plana

O fato de a placa ter sua geometria inicialmente plana acarreta em problemas no cálculo de sensibilidade. Esse problema ocorre devido à simetria apresentada por esta em todas as direções.

Esse problema é comentado no trabalho de Leiva (2003), que afirma que a sensibilidade inicial, calculada para um problema como este, é nula. Ainda segundo Leiva (2003): "*o problema ocorre naturalmente em placas planas onde mover as variáveis numa direção positiva ou negativa resulta no mesmo*". Como solução, sugere forçar uma movimentação inicial aleatória pequena em toda a malha.

Isso significa que uma deformação (movimentação de nós gêmeos) na placa plana no sentido positivo ou negativo de Z apresenta a mesma influência no valor da frequência natural, ou seja, a função está num ponto de derivada igual a zero.

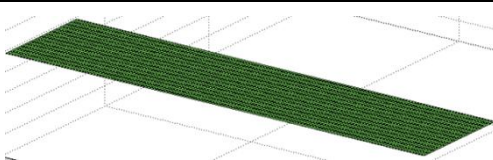
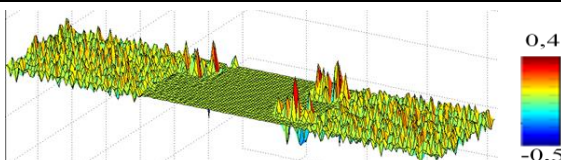
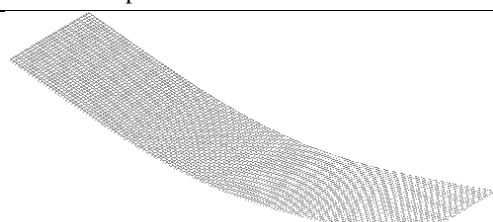
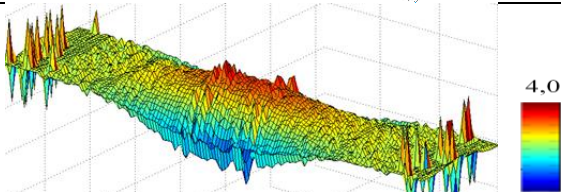
Como solução para este problema, no presente trabalho, optou-se por utilizar como pré-deformação inicial uma deformação na placa proporcional a um dos seus modo de vibração, à escolha do usuário.

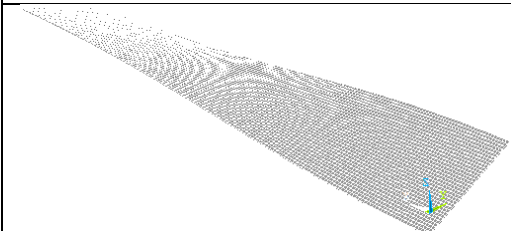
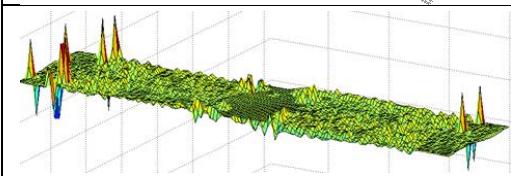
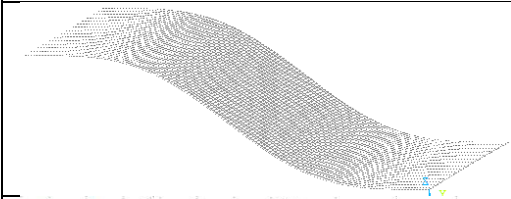
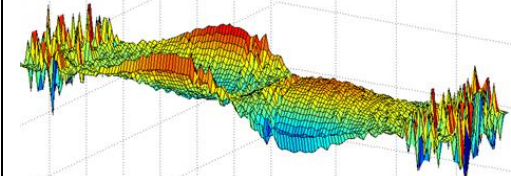
Para exemplificar o exposto, o modelo da placa plana utilizada na validação do modelo é analisada na Tabela 3. Nesta tabela, podem ser

vistas as distribuições da função sensibilidade dos nós para maximização da primeira frequência natural da placa.

As sensibilidades são calculadas para a placa plana e também utilizando a solução proposta neste trabalho, comparando três diferentes formas para deformação inicial. Elas correspondem aos três primeiros modos de vibração da placa livre-livre, que também são mostrados na tabela. As deformações máximas iniciais da placa são 1mm, ou seja, valores baixos comparados às dimensões da placa, na ordem de 100 mm.

Tabela 3 - Distribuições da função sensibilidade para primeira frequência natural da placa para diferentes deformações iniciais.

Partindo da placa plana		
		Deformação inicial da placa
		Sensibilidade nodal calculada [(rad/s) ² /mm]
Partindo do primeiro modo		
		Forma modal utilizada para deformação inicial da placa
		Sensibilidade nodal calculada [(rad/s) ² /mm]

Partindo do segundo Modo		
		Forma modal utilizada para deformação inicial da placa
		Sensibilidade nodal calculada [(rad/s) ² /mm]
Partindo do terceiro modo		
		Forma modal utilizada para deformação inicial da placa
		Sensibilidade nodal calculada [(rad/s) ² /mm]

Pode-se aqui reafirmar que as figuras das formas iniciais da placa apresentadas na Tabela 3 estão amplificadas para melhor visualização, e que seus valores máximos de deformação são 1mm. Uma figura mais realista da forma inicial da placa, cuja deformação inicial segue o primeiro modo, pode ser vista na Figura 19.

Figura 19 - Pré-deformação da placa com base no primeiro modo de vibração.



Percebe-se que, para a placa plana, os valores de sensibilidade são cerca de 10 vezes menores que para as placas pré-deformadas, confirmando a suspeita de se estar num ponto de derivada nula. Além disso, não apresentam um padrão de distribuição definido, podendo haver algum erro numérico devido a existência de valores próximos de zero. Para dois dos casos com pré-deformação, percebe-se um padrão melhor.

A sensibilidade calculada partindo de uma pré deformação igual ao modo 2 é semelhante à da placa plana. Uma explicação para isto é que o modo 2 da placa é um modo torcional, cuja deformação deixa a placa pouco curvada, com várias áreas ainda planas, apenas deslocadas. Isso faz com que continue apresentando grande parte da simetria original, resultando nos valores encontrados. Regiões com o mesmo problema são encontrados para os modos 1 e 3, nas extremidades da placa.

Para os modos 1 e 3, percebe-se que em ambos os casos a placa apresentou tendência de enrijecer a parte central da placa, através do aumento do momento de inércia da secção. Há também uma evidente influência do modo de pré-deformação utilizado, pois os dois resultados apresentam semelhanças com respeito à sua forma modal. O resultado que partiu do modo 1 criou uma região de enrijecimento equivalente à região de maior deslocamento modal. O resultado que partiu do modo 3 criou duas regiões de enrijecimento opostas na direção Z, equivalentes às duas regiões de maior deslocamento modal, que apresentam fases opostas.

De forma geral, os resultados da sensibilidade continuam apresentando certa aleatoriedade em algumas regiões, principalmente nas partes da placa que permaneceram planas na deformação inicial. Esse é um problema que pode dificultar a otimização, e criar regiões de deformação local, também prejudicando a confiabilidade dos elementos finitos nessa região. Uma alternativa para esse problema é o uso de filtros, conforme discutido a seguir.

4.4.2 Filtro de sensibilidade

A sensibilidade calculada para a placa pode apresentar variações bruscas ao longo da geometria, seja por problemas como comentado anteriormente, de se partir de uma placa plana, como também próximo às regiões da malha onde são aplicadas as condição de contorno, conforme acontecerá no estudo de caso deste trabalho. Isso pode levar o

processo de otimização a criar geometrias de placas com fortes distorções locais.

Essas distorções locais são indesejadas tanto do ponto de vista numérico, pois acarretam na falta de confiabilidade do modelo em elementos finitos, como também do ponto de vista de fabricação da placa.

O verdadeiro responsável por evitar que a geometria final da placa apresente estas distorções locais é a restrição de aresta média, conforme comentado no Capítulo 3. Entretanto, o uso de filtros na sensibilidade da função objetivo ao longo das iterações, na forma como foi definida e parametrizada neste trabalho, ajuda bastante a encurtar o caminho percorrido pelo processo de otimização.

Bendsoe (2003) comenta que filtrar a sensibilidade é uma maneira eficiente de garantir a qualidade da malha, e define um filtro para otimização topológica na forma:

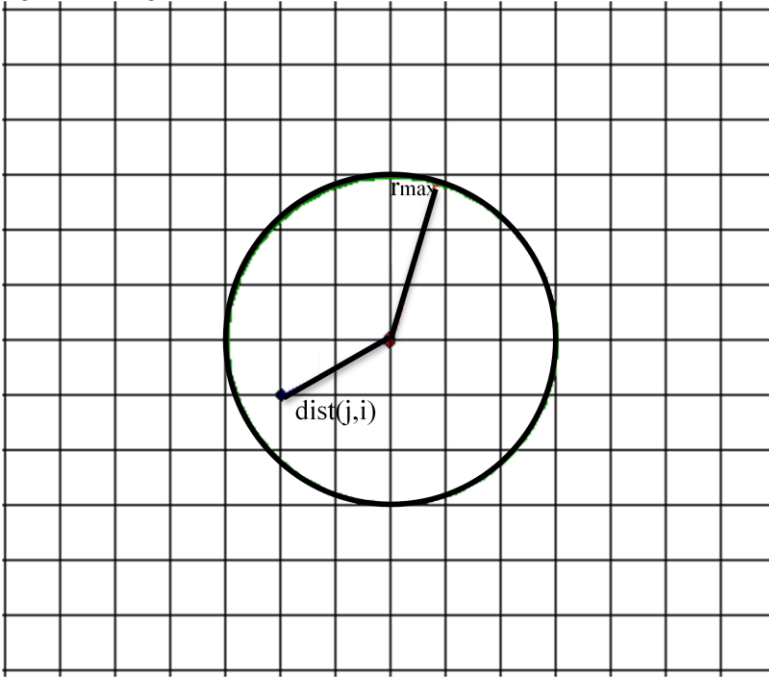
$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho_j} = \frac{1}{\rho_j \sum_{i=1}^{N_{\text{filt}}} H_i} \sum_{i=1}^{N_{\text{filt}}} H_i \rho_j \frac{\partial f}{\partial \rho_j}, \quad (4.86)$$

onde $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho_j}$ é a sensibilidade $\frac{\partial f}{\partial \rho_j}$ filtrada, ρ_j é a variável topológica, N_{filt} é o número de nós que tem influência na sensibilidade local e H_i é definido na forma:

$$H_i = r_{\text{max}} - \text{dist}(j, i), \quad (4.87)$$

sendo r_{max} o raio de influência do filtro, determinando até que distância $\text{dist}(j, i)$ a sensibilidade dos nós i vizinhos influenciam a sensibilidade filtrada de um nó j em análise. Logo, este valor H_i é o fator que representa a ponderação da sensibilidade dos nós vizinhos pela distância que seu nó apresenta ao nó em análise. A Figura 20 pode ajudar a entender o valor H_i .

Figura 20 - Região de influência do filtro de sensibilidade.



Bendsoe (2003), porém, aplica este filtro em otimização topológica. Para o presente trabalho seu filtro será adaptado, ficando na forma:

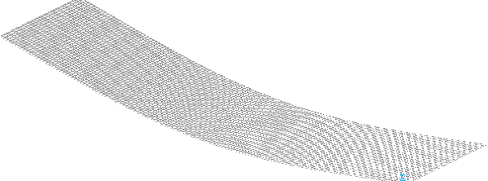
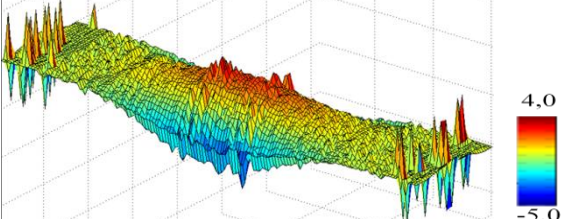
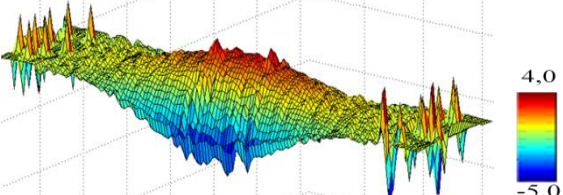
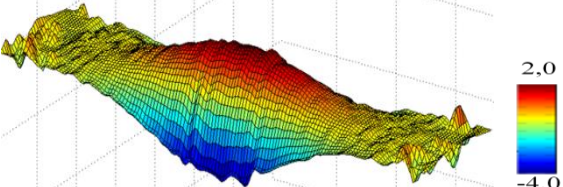
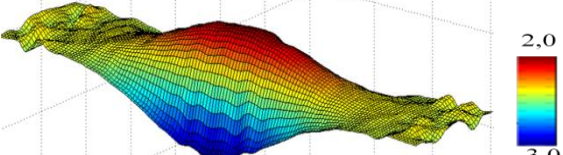
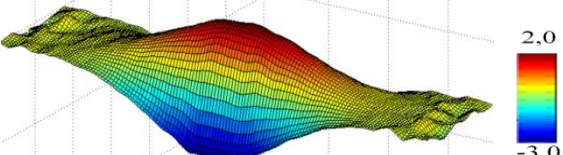
$$\frac{\hat{\partial}f}{\partial z_j} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_{\text{filt}}} H_i} \sum_{i=1}^{N_{\text{filt}}} H_i \frac{\partial f}{\partial z_j}, \quad (4.88)$$

que nada mais é que uma média local da sensibilidade dos nós vizinhos ponderada pela distância ao nó em análise.

Este filtro pode ser ajustado ao longo do processo e pode também estar atrelado à posição global do nó nas diferentes regiões da estrutura (cantos, região central de placa, lateral, etc). Este método é o mais simples a ser implementado e sua utilização é ilustrada abaixo.

Tomando como exemplo o caso de uma placa cuja deformação inicial é semelhante ao primeiro modo de vibração da placa, tem-se como distribuição de sensibilidade, para diferentes raios de filtro, os valores apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 - Sensibilidade da função objetivo para a primeira frequência natural, filtrada para diferentes raios de filtro.

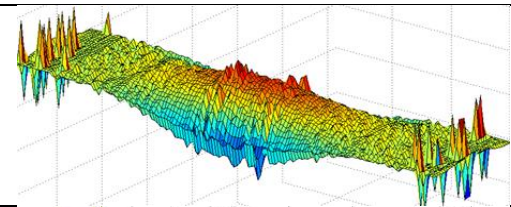

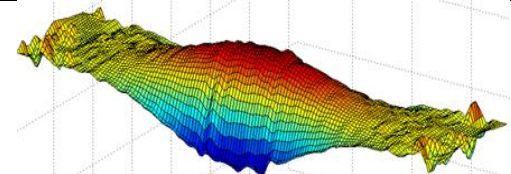
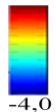
<p>Forma modal utilizada para deformação inicial da placa</p>	
<p>Sensibilidade sem filtro. [(rad/s)²/mm]</p>	
<p>Sensibilidade para um filtro de raio 5 mm [(rad/s)²/mm]</p>	
<p>Sensibilidade para um filtro de raio 10 mm [(rad/s)²/mm]</p>	
<p>Sensibilidade para um filtro de raio 15 mm [(rad/s)²/mm]</p>	
<p>Sensibilidade para um filtro de raio 20 mm [(rad/s)²/mm]</p>	

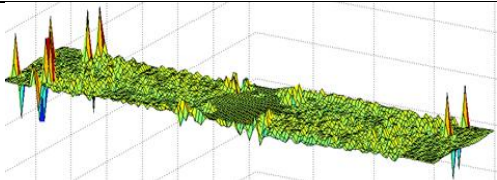
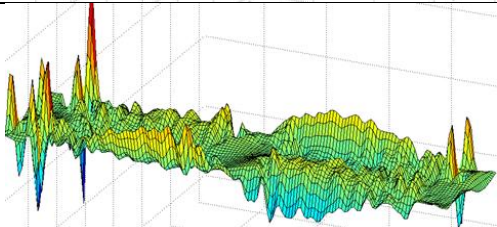
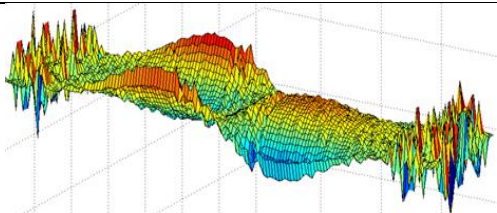
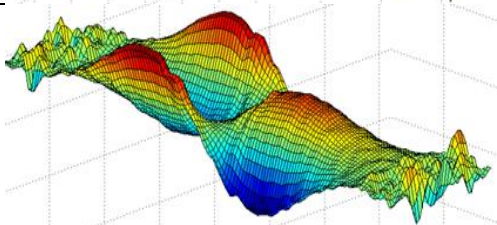
A sensibilidade não filtrada apresenta várias regiões de grande variação local. Estas variações bruscas diminuem à medida em que o raio do filtro é aumentado. A sensibilidade, que antes era local, passa a ser a média de cada vez mais vizinhos. Isso também implica que seus valores máximos caíam com o aumento do raio, como pode ser observado nas escalas em cores ao lado de cada figura na Tabela 4. Num limite onde o raio do filtro cresce tanto que muitos nós são utilizados para cada cálculo de sensibilidade nodal local, a informação da sensibilidade real começa a se perder e apresentar gradientes suaves demais, que podem prejudicar a otimização. Assim sendo, o raio escolhido não deve ser nem muito pequeno, de forma a evitar as variações bruscas, nem muito grande, a ponto de perder a informação local.

Percebe-se que a partir do raio 10mm o comportamento da sensibilidade começa a estabilizar, de forma que esse valor mínimo foi escolhido para o presente trabalho, para também conservar a informação das amplitudes da sensibilidade. Nos testes realizados esse valor se mostrou bom, comportado, preservando a informação da sensibilidade.

Recalculando agora as mesmas sensibilidades que foram calculadas para os casos apresentados no item anterior, sobre o problema de partir da placa plana, mas agora utilizando o filtro desenvolvido neste trabalho com raio 10mm, tem-se a Tabela 5.

Tabela 5 -Sensibilidade da função objetivo para a primeira frequência natural com e sem filtro para diferentes deformações iniciais.

Partindo do primeiro modo		
	4,0  -5,0	Sensibilidade sem filtro [(rad/s) ² /mm]
	2,0  -4,0	Sensibilidade com filtro de raio 10mm [(rad/s) ² /mm]

Partindo do segundo Modo		
	Sensibilidade não filtradas [(rad/s) ² /mm]	
	Sensibilidade com filtro de raio 10mm [(rad/s) ² /mm]	
Partindo do terceiro modo		
	Sensibilidade não filtradas [(rad/s) ² /mm]	
	Sensibilidade com filtro de raio 10mm [(rad/s) ² /mm]	

Com exceção do segundo modo, as sensibilidade filtradas apresentaram um comportamento suave, sem perder a informação principal. Para este modo, vale a explicação comentada no item anterior. O modo 2 da placa é um modo torcional, cuja deformação deixa a placa pouco curvada, com várias áreas ainda planas, prejudicando o cálculo da sensibilidade que, mesmo filtrada, não revela um padrão definido.

O cálculo da sensibilidade da restrição não vai fazer uso de filtro. Essa decisão foi tomada pois, ao contrário da sensibilidade da função objetivo que apresenta distribuição regular e suave ao longo da placa, geralmente relacionada à forma modal, a sensibilidade da restrição é um valor de importância fortemente localmente, elementar. Dessa forma, o

uso de filtro na sensibilidade da restrição poderia fazer com que um elemento sem distorção, vizinho de um elemento distorcido, apresentasse sensibilidade.

5 APLICAÇÃO E ESTUDO DE CASOS

Durante os estudos para aplicação do método de otimização de forma para uma placa base de refrigerador, vários casos simplificados foram utilizados para melhor compreensão do problema e limitações do método, como aqueles citados anteriormente. Neste capítulo, foca-se em dois casos específicos, utilizando placa base do refrigerador com compressor acoplado.

O primeiro caso é uma tentativa de enrijecer a placa de forma global, fazendo com que sua primeira frequência natural seja a mais alta possível.

O segundo caso é mais aplicado e foca na modificação de uma frequência natural determinada, com fortes chances de tornar-se problemática, conforme descrito no Capítulo 2, analisando-se o espectro de energia gerada pelo compressor.

Para ambos os casos, um modelo foi criado utilizando como base a placa plana livre-livre utilizada para validação do modelo numérico, com adição da massa do compressor, e engastando ambos os lados da placa.

O compressor considerado é mostrado na Figura 21, de larga utilização no mercado, cujas especificações foram retiradas do site da fabricante Embraco (Figura 22).

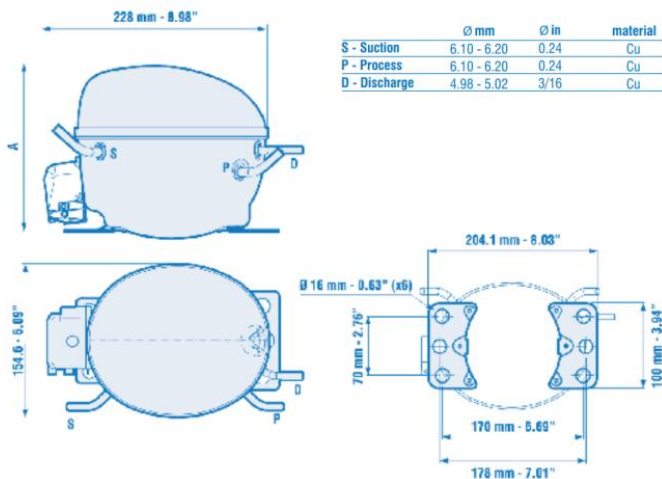
Figura 21 - Compressor Hermético de Aplicação Doméstica.



Fonte: Catálogo no site da empresa fabricante Embraco (www.embraco.com).

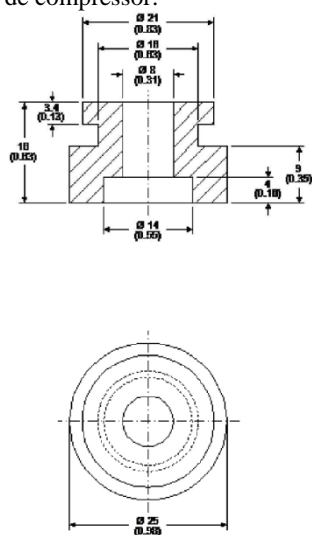
As dimensões do compressor e suas conexões à placa base do refrigerador, bem como do isolador responsável pela união destes dois componentes também são obtidas do site do fabricante (Figura 23).

Figura 22 - Dimensões do compressor utilizado.



Fonte: Catálogo no site da empresa fabricante Embraco (www.embraco.com).
Tradução: DWG 01 Série EM Placa base europeia.

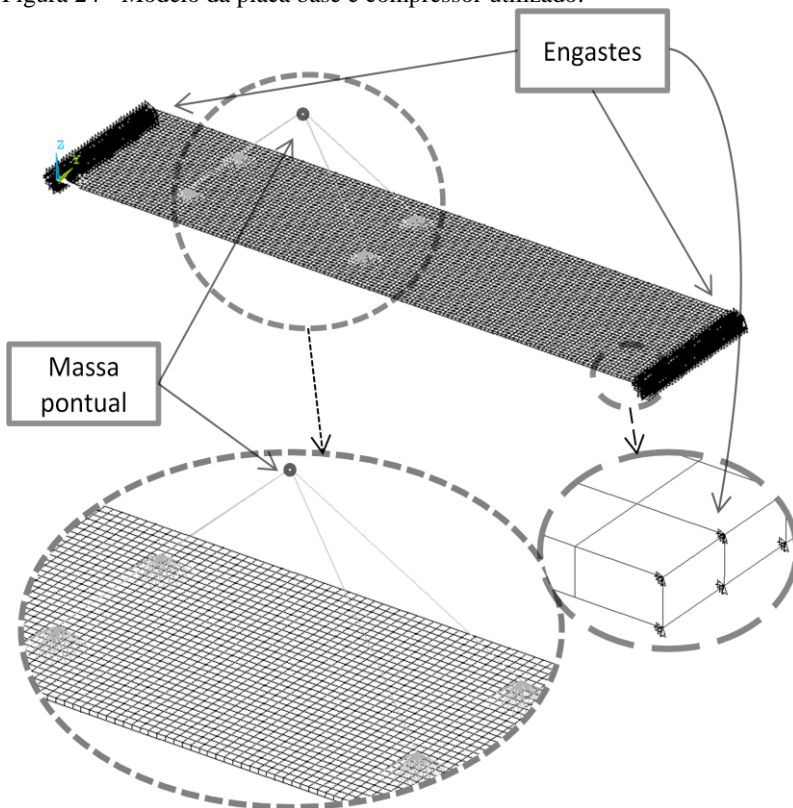
Figura 23 - Isolador de vibrações recomendado pelo fabricante para este modelo de compressor.



Fonte: Catálogo no site da empresa fabricante Embraco (www.embraco.com).

O compressor foi modelado como sendo uma massa pontual, de 8,5kg, colocado sobre a placa em uma posição entre o centro e a extremidade de placa, como pode ser visto na Figura 24.

Figura 24 - Modelo da placa base e compressor utilizado.



A massa está localizada onde seria o centro de massa do compressor, estimado como sendo na parte central dos desenhos obtidos nas especificações de catálogo, em torno de 85mm acima da placa base.

As conexões entre a massa pontual do compressor e a placa base são feitas utilizando elementos de viga rígidos de massa desprezível. Na conexão com a placa, uma região equivalente ao tamanho dos isoladores de borracha, considerados rígidos nesse trabalho, é utilizada para conectar rigidamente à placa. Essa região de conexão bem como a posição do compressor não são considerados como variáveis na

otimização, sendo mantidos fixos em suas posições iniciais durante todo o processo.

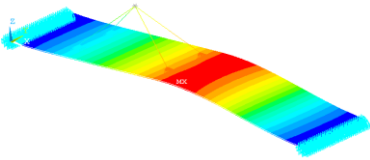
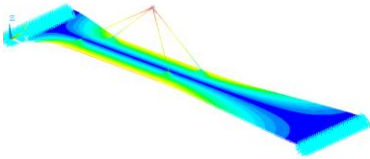
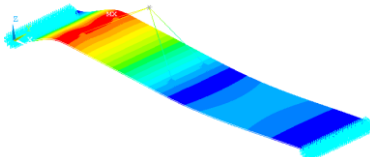
Para obter uma estimativa dos valores de inércia rotacional do compressor, este foi considerado como uma esfera maciça de um material equivalente qualquer (para manter os 8,5kg) e raio 170mm (valor aproximado do catálogo). Para uma esfera maciça de raio R_{esf} e massa total M_{esf} , o momento de inércia J é expresso como:

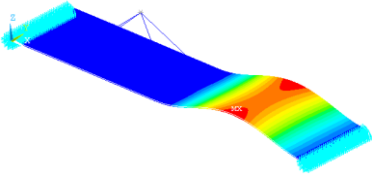
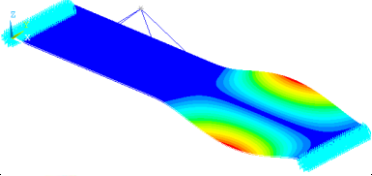
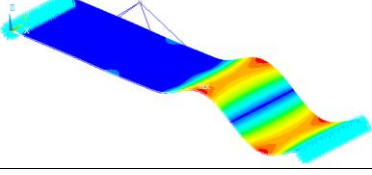
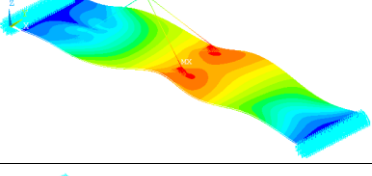
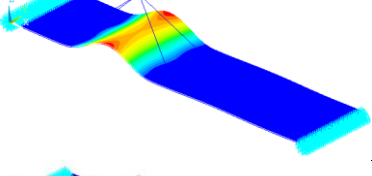
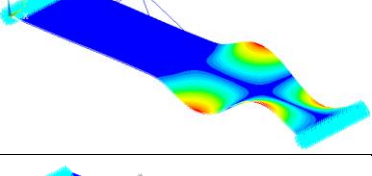
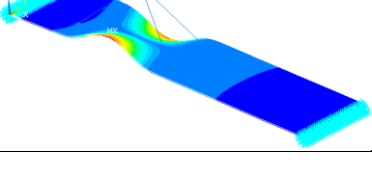
$$J = \frac{2}{5} M_{esf} R_{esf}^2 . \quad (5.1)$$

Os nós pertencentes ao engaste tem sensibilidade naturalmente nula, pois seus deslocamentos nos autovetores são nulos. Já a sensibilidade dos nós pertencentes à região do isolador é propositalmente definida como sendo nula, para evitar que estes nós mudem de posição, uma vez que a posição do compressor neste trabalho não é considerada uma variável.

O modelo assim definido apresenta as frequências naturais e respectivos modos de vibração mostrados na Tabela 6.

Tabela 6 - Frequências naturais e formas modais do modelo de placa base com compressor original.

Modo	Frequência Natural [Hz]	Forma Modal
1	11,75	
2	12,64	
3	44,29	

4	140,71	
5	233,10	
6	368,10	
7	383,36	
8	481,84	
9	501,47	
10	528,47	

Conforme já comentado sobre o problema de se partir de uma placa plana, ambos os casos partem de uma placa pré-deformada, definida de forma arbitrária, cuja deformação inicial máxima é de 1mm. Essa deformação inicial é praticamente imperceptível, mas auxilia muito no cálculo da sensibilidade inicial. Sendo assim, ao analisar os resultados da otimização que serão mostrados, a primeira iteração é sempre aquela da placa pré deformada. Em todos os casos foram utilizados filtros de sensibilidade com 10mm de raio.

Vale ressaltar que o procedimento desenvolvido neste trabalho tem formulação em função do frequência natural ao quadrado (autovalor), em $(\text{rad/s})^2$, enquanto as funções objetivos estão propostas em Hz. Fatores de conversão foram utilizados para que os resultados pudessem ser mostrados aqui em Hz, unidade considerada mais familiar.

A configuração do computador utilizado apresenta processador Intel Core i7 2,4GHz, 64bits, com 8GB de memória RAM. Cada iteração do processo de otimização nessa configuração tem tempo estimado de processamento de cerca de 1 minuto, compreendendo o cálculo de análise modal da placa com compressor, cálculo de sensibilidade da função objetivo e restrição de forma analítica, e convergência do algoritmo utilizado para definir o novo vetor de variáveis, o MMA.

5.1 CASO 1: MAXIMIZAÇÃO DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL

A maximização da primeira frequência natural do sistema pode ser expressa matematicamente como segue:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } f_0(\mathbf{z}) \\ & \text{Sujeito a } \begin{cases} f_i(\mathbf{z}) \leq \bar{f}_i, i = 1, 2, \dots, M \\ z_{k \min} \leq z_k \leq z_{k \max}, k = 1, 2, \dots, N \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

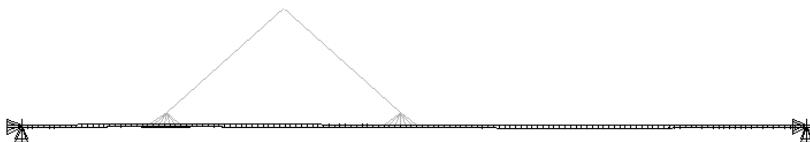
onde o número de restrições M é 1, ou seja, controle da aresta média dos elementos da placa, sendo que a função objetivo é:

$$f_0(\mathbf{z}) = \{\lambda_1\}. \quad (5.3)$$

O valor máximo da restrição é originalmente escolhido como 100,1% da aresta média inicial da placa, o quer dizer, da placa já com pré-deformação. Neste caso, a pré-deformação escolhida foi a

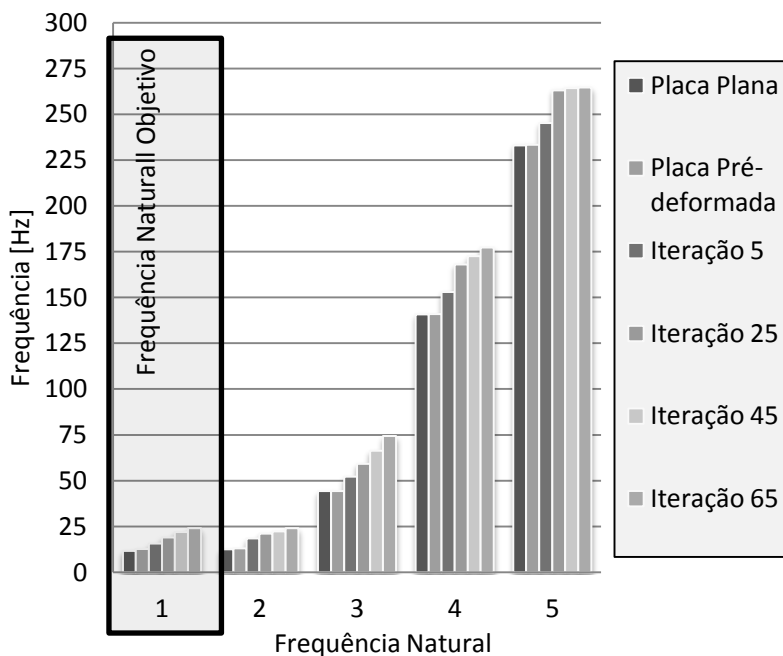
deformação proporcional ao primeiro modo de vibração da placa, com deformação máxima de 1mm, quase imperceptível como se pode ver na Figura 25.

Figura 25 - Forma inicial da placa com compressor pré-deformada para o caso 1.



Como o primeiro modo apresentou pouca variação absoluta (poucos Hertz) ao longo da otimização, a restrição teve de ser modificada para valores maiores, passando para 100,15% na iteração 25 e para 100,2% na iteração 45. A otimização foi concluída na iteração 65, e os resultados das 5 primeiras frequências naturais da placa ao longo destes intervalos estão mostrados na Figura 26.

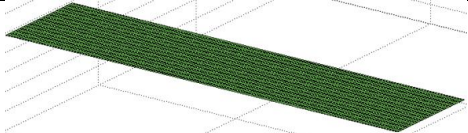
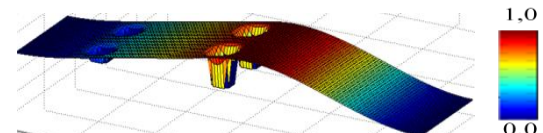
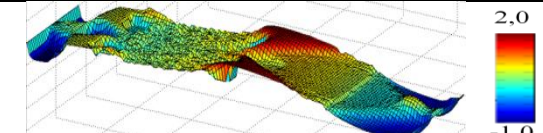
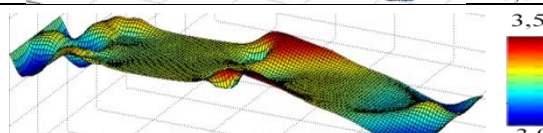
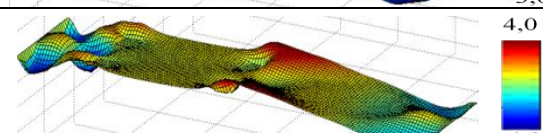
Figura 26 - Variação das frequências naturais ao longo das iterações para o caso 1.

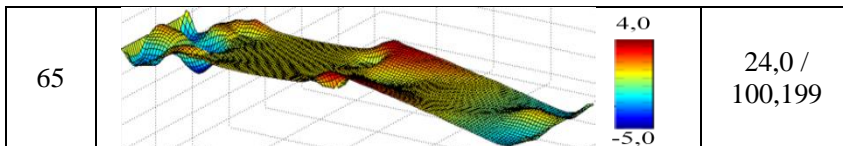


Como se pode ver, a primeira frequência natural apresentou pouca variação absoluta ao logo do processo, cerca de 12Hz, variando de 11.7Hz para 24Hz. Se interpretada na forma de variação relativa, a mudança foi grande, pois esta frequência dobrou seu valor.

A forma da placa ao longo das iterações mostradas na Figura 26 são mostradas na Tabela 7, com escala amplificada para melhor visualização. Lembrando que a iteração 1 é sempre a pré-deformação da placa. Ao lado de cada placa, uma pequena escala de cores mostra os valores máximos de deslocamento dos nós na respectiva iteração.

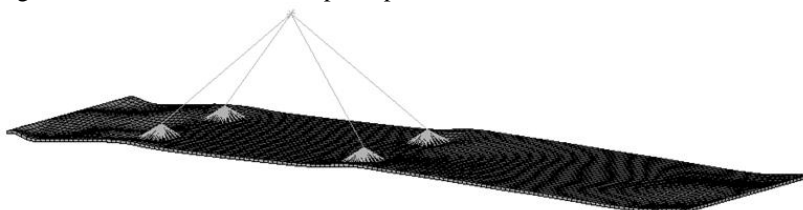
Tabela 7 - Variação da geometria da placa otimizada ao longo da otimização para o caso 1.

Iteração	Forma da Placa	Função Objetivo [Hz] / Restrição [%]
0		11,7 / não calculada.
1		12,7 / 100,000
5		15,7 / 100,090
25		19,1 / 100,100
45		22,1 / 100,148



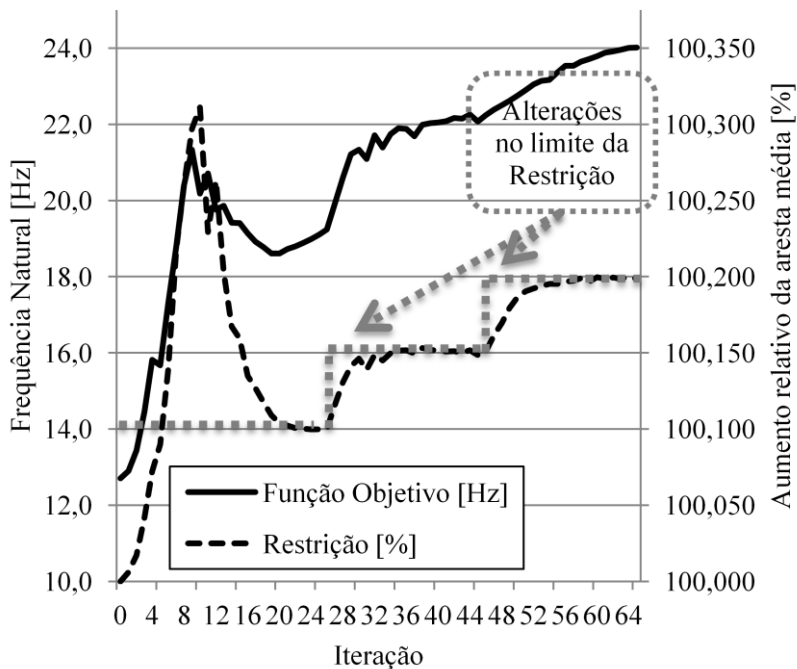
Em sua forma final, sem amplificação de escala e cores, a placa assume a geometria da Figura 27.

Figura 27 - Forma otimizada da placa para o caso 1.



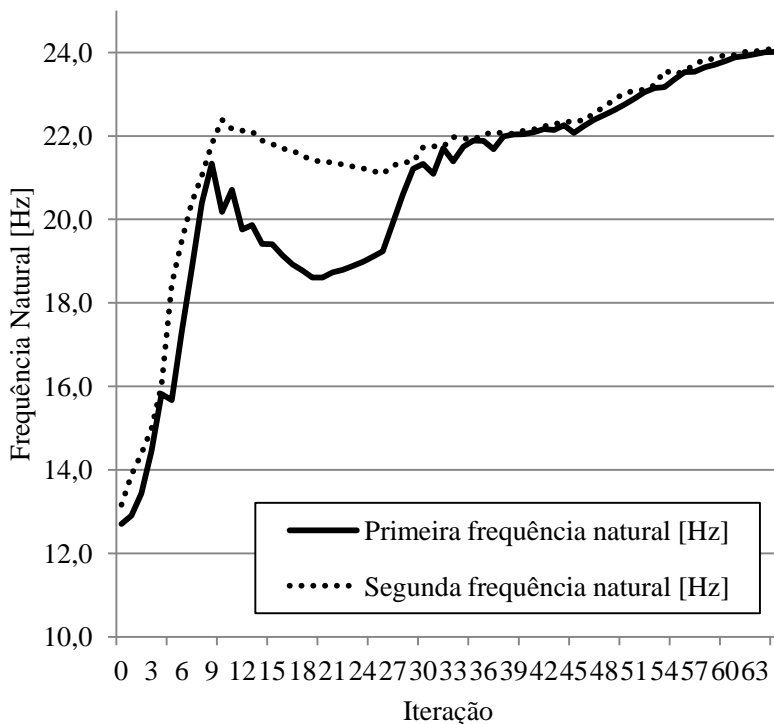
Isso demonstra que, com pequenas modificações na forma original da placa, podem-se obter grandes variações de frequência natural. Percebe-se nas primeiras iterações que a placa apresenta superfície rugosa (iteração 5), devido aos deslocamentos irregulares locais dos nós. Esta rugosidade desaparece ao longo da otimização por influência da restrição. Na Figura 28, pode-se observar que na iteração 5, a mais distorcida, a restrição ultrapassou seu valor limite, retornando depois a valores abaixo do limite estipulado. A variação da função objetivo também é mostrada ao longo das iterações. As iterações onde foi necessário aumentar o valor a restrição estão assinaladas. Lembrando que o MMA, nos pontos onde a restrição foi modificada, era reiniciado do ponto anterior, com novo valor para restrição do tamanho médio de aresta, na tentativa de encontrar melhores valores para a primeira frequência natural.

Figura 28 - Variação da função objetivo e restrição ao longo da otimização para o caso 1.



Nesta otimização ocorreu um fato que interfere no processo, que foi a primeira frequência natural ter igualado seu valor a segunda frequência natural aparentemente já na iteração 4, e provavelmente terem trocado de posição. A forma modal que antes era do modo 1, passou a ser do modo 2, e vice-versa. O fato também parece ter ocorrido na iteração 29, onde já não é mais possível distinguir entre primeiro e segundo modos. Este fenômeno pode ser visto na Figura 29.

Figura 29 - Variação das duas primeiras frequências naturais ao longo da otimização para o caso 1.



Este fenômeno de troca de modos acarreta mau comportamento da função objetivo e sua sensibilidade. O algoritmo se torna instável, pois calcula a sensibilidade ora para uma forma modal, ora para outra.

O ideal, nestes casos, seria utilizar o chamado "*mode tracking*", ou seguidor de modos, segundo Kim e Kim (2000) e Yu et al (2010). Kim et Kim (2000) utilizam um método simples por comparação, a cada iteração, dos modos da iteração atual com os modos da iteração passada, através da matriz de MAC, comentada no Capítulo 2. Nessa verificação ele pode atualizar a função objetivo, que antes considerava o primeiro modo, e agora passa a otimizar o segundo modo. Infelizmente, este método não seria útil no presente caso de otimização, que visa aumentar a primeira frequência natural e não uma forma modal específica.

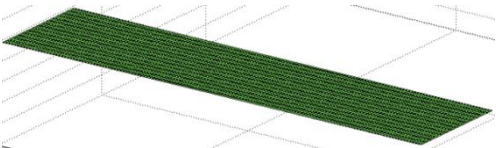
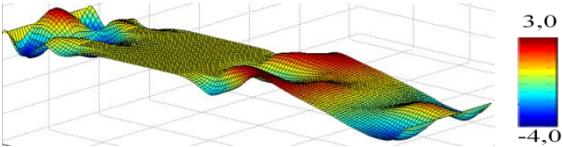
O mesmo caso foi otimizado utilizando diferentes formas modais para a deformação inicial da placa, para avaliar sua influência. No caso

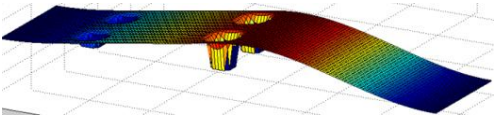
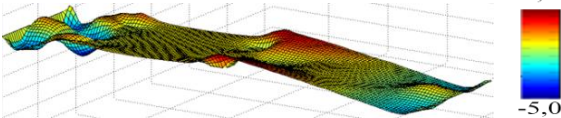
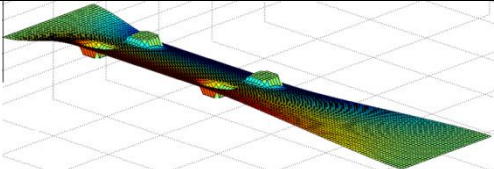
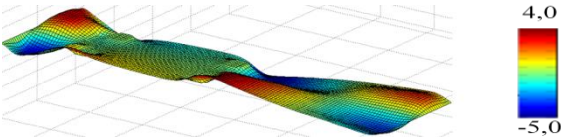
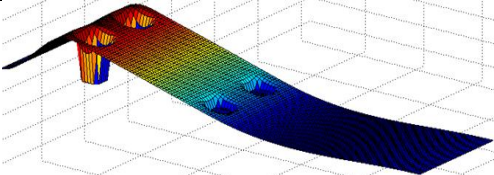
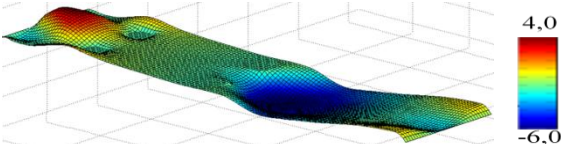
discutido até agora foi utilizada a forma modal do primeiro modo, com deslocamento máximo de 1mm. A Tabela 8 compara este e mais três outros casos de deformação inicial, utilizando o segundo e o terceiro modos como base, como também partindo diretamente da placa plana.

A placa plana pode ser utilizada neste caso com compressor pois não sofre o mesmo problema de simetria que a placa apresenta quando otimizada sozinha. Mesmo assim, os resultados iniciais da sensibilidade mostraram que o algoritmo divergia, pois em muitos pontos da placa, principalmente distante do compressor, surgia o problema da sensibilidade. A conclusão foi que, apesar do compressor inserir assimetria no modelo, esta foi pequena, e a recomendação de pré-deformar a placa ainda é válida.

Na Tabela 8 estão as geometrias inicial e final da placa (iteração 65) para os quatro casos de diferentes deformações iniciais (plana, primeiro, segundo e terceiro modos), bem como seus valores da função objetivo, neste caso, a primeira frequência natural, e também o valor da restrição. As escalas da geometria da placa na figura estão amplificadas para melhor visualização da geometria.

Tabela 8 - Geometrias inicial e final da placa otimizada para diferentes deformações iniciais no caso 1.

Partindo da placa plana	Frequência objetivo [Hz] / Restrição [%]
	Deformação inicial da placa: 11,7 / 100
	Resultado final da otimização: 23,3 / 100,2

Partindo do primeiro modo		
		Deformação inicial da placa: 12,7 / 100
		Resultado final da otimização: 24,0 / 100,2
Partindo do segundo Modo		
		Deformação inicial da placa: 12,1 / 100
		Resultado final da otimização: 26,7 / 100,2
Partindo do terceiro modo		
		Deformação inicial da placa: 11,8 / 100
		Resultado final da otimização: 28,4 / 100,2

Percebe-se que tanto o resultado final da otimização quanto as formas da placa final são bastante diferentes para os quatro casos avaliados. Isso demonstra a influência da forma inicial da placa e chama

a atenção para o fato de que a função objetivo do presente trabalho, o autovalor, é complexa e possui vários pontos de máximo locais. Como o número de variáveis é muito grande, é previsível que existam várias combinações das variáveis (pontos na função) que apresentem valores similares para função objetivo, ou mesmo de máximo local.

5.2 CASO 2: CRIAÇÃO DE *BAND-GAPS*

O segundo caso é mais específico e foca na modificação de uma frequência natural determinada, neste caso, a terceira. O objetivo é a criação dos chamados *band-gaps*, regiões específicas do espectro de frequências onde a placa não deve apresentar frequências naturais.

A escolha da terceira frequência natural do modelo para função objetivo deve-se ao seu valor: 44.3Hz. Esse valor está muito próximo de 50Hz, frequência dos compressores em operação em grande parte do mundo. A fonte, compressor, apresenta forte energia vibratória nessa frequência, e portanto, se aplicado sobre a placa base plana, existem fortes chances de resultar em altos níveis de vibração. Conforme explicado no Capítulo 2 sobre o espectro de energia gerado pelo compressor, essa frequência pode se tornar um problema.

Por outro lado, as vibrações do compressor possuem padrão definido pelas harmônicas múltiplas da frequência de operação. No caso de um compressor operando em 50Hz, é de se esperar forte vibração também em 100Hz, e portanto a placa também não deve ter frequência naturais nessa frequência. Sendo assim, ficou definida como função objetivo deste caso sintonizar a terceira frequência natural deste modelo em 75Hz, criando assim um *band-gap* nas regiões próximas de 50Hz e 100Hz, na forma (já transformada para autovalor):

$$\min|\lambda_3 - (2\pi 75)^2|. \quad (5.4)$$

cujo modelo físico utilizado para avaliar esta função é o mesmo do caso anterior:

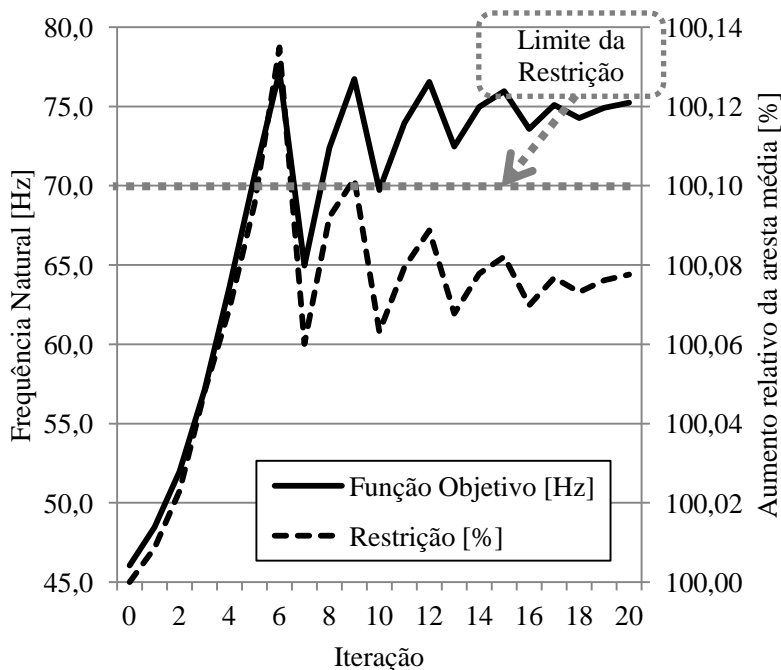
$$\begin{aligned} (K - \lambda_i M)\Phi_i &= 0 \\ i &= 1, \dots, N_{GL} \end{aligned} \quad (5.5)$$

A função módulo, utilizada na função objetivo (Equação 5.4), não é a ideal em um processo de otimização, devido aos problemas no cálculo da sensibilidade. Por isso, optou-se pela substituição desta função pela sua forma ao quadrado, ou seja:

Analisando os resultados, percebe-se que o terceiro modo logo alcançou seu objetivo de chegar a 75Hz, sem gerar grandes modificações nos demais modos.

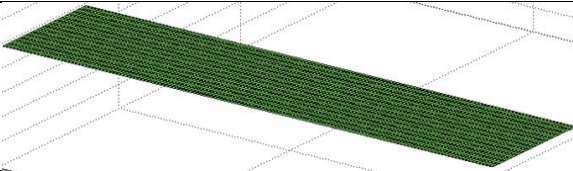
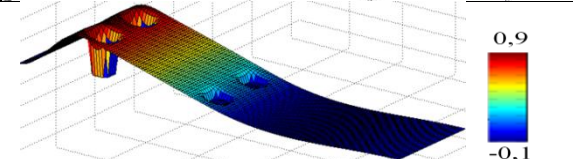
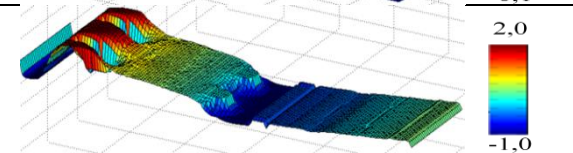
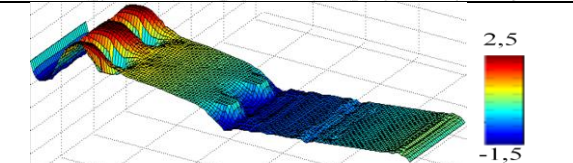
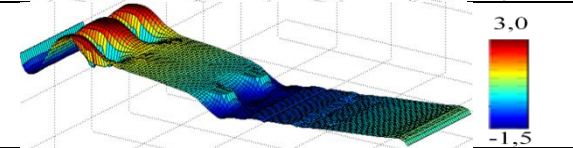
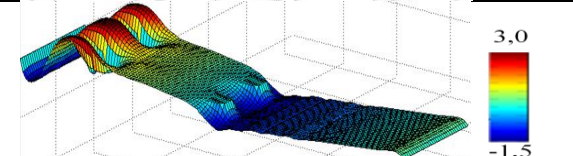
A função restrição também manteve-se bem comportada, permanecendo dentro dos valores estipulados, e sua variação ao longo das iterações pode ser vista na Figura 31.

Figura 31 - Variação da função objetivo e restrição ao longo da otimização para o caso 2.



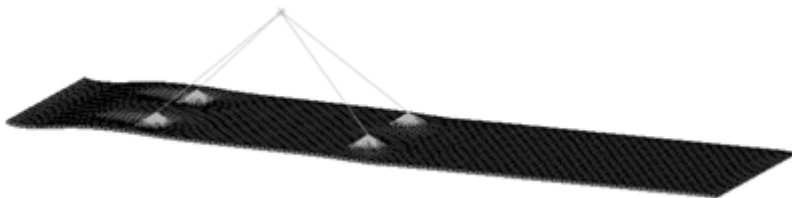
As formas da placa ao longo de algumas das iterações citadas na Figura 31 são mostradas na Tabela 9. Lembrando que a iteração 1 é sempre a pré-deformação da placa. Ao lado de cada placa, uma pequena escala de cores mostra os valores máximos de deslocamento dos nós na iteração. A tabela mostra também os valores da função objetivo, neste caso, a terceira frequência natural, bem como o valor da restrição, ao longo de algumas iterações.

Tabela 9 - Variação da geometria da placa otimizada ao longo da otimização para o caso 2.

Iteração	Forma da Placa	Função Objetivo / Restrição
0		44,3 / não calculada.
1		46,0 / 100,00
5		70,6 / 100,10
10		69,7 / 100,06
15		76,0 / 100,08
20		75,2 / 100,08

Em sua forma final, sem amplificação de escala e cores, a placa assume a geometria da Figura 32.

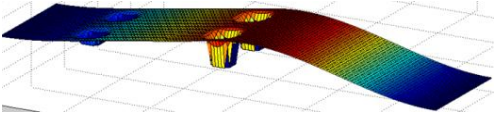
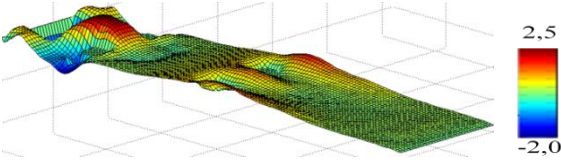
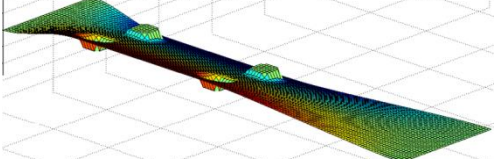
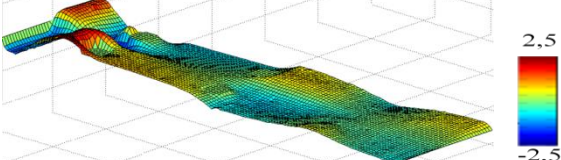
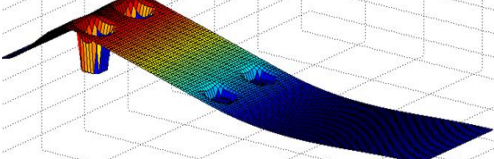
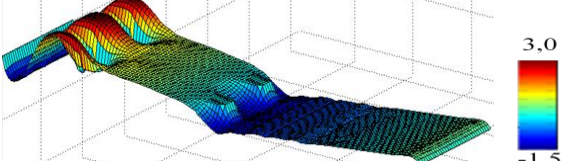
Figura 32 - Forma otimizada da placa para o caso 2.



Isso demonstra que as modificações na forma original da placa foram pequenas para se obter o valor de frequência natural desejado. Percebe-se nas primeiras iterações que a placa apresenta superfície quadrada (iteração 5), em degraus, devido aos deslocamentos irregulares locais dos nós. Estas variações desaparecem ao longo da otimização por influência da restrição.

O mesmo caso foi também otimizado utilizando diferentes formas modais para a deformação inicial para avaliar sua influência. No caso discutido até agora, como comentado, foi utilizada a forma modal do terceiro modo, com deslocamento máximo de 1mm. A Tabela 10 compara este e mais três outros casos de deformação inicial, utilizando o primeiro e o segundo modos, como também partindo diretamente da placa plana. Nesta tabela estão as geometrias inicial e final da placa (iteração 20) para estes quatro casos, bem como seus valores da função objetivo (neste caso, a terceira frequência natural) e também o valor da restrição.

Tabela 10 - Geometrias inicial e final da placa otimizada para diferentes deformações iniciais no caso 2.

Partindo do primeiro modo	Frequência Objetivo [Hz] / Restrição [%]
	Deformação inicial da placa: 44,3 / 100
	Resultado final da otimização: 74,2 / 100,08
Partindo do segundo Modo	
	Deformação inicial da placa: 45,2 / 100
	Resultado final da otimização: 74,9 / 100,08
Partindo do terceiro modo	
	Deformação inicial da placa: 46,0 / 100
	Resultado final da otimização: 75,2 / 100,08

Percebe-se que para esta otimização, o resultado final pode ser atingido com diferentes formas de placa para os quatro casos acima. Isso demonstra a influência da forma inicial da placa, mas principalmente chama a atenção para o fato de que a função objetivo deste caso 2, a terceira frequência natural ser igual a 75Hz, também é atingível para várias geometrias. Como o número de variáveis é muito grande, é previsível que existam várias combinações destas que apresentem valores similares para função objetivo.

5.2.1 Validação com elementos finitos de casca

Uma última análise pode ser feita, para avaliar o quanto os elementos sólidos no modelo da placa influenciam no resultado final da otimização, devido à sua deformação.

Para isto, um modelo em elementos finitos utilizando o tipo de elemento casca linear, fiel à geometria da superfície superior da placa, foi desenvolvido. O compressor é deslocado o equivalente à metade da espessura da placa para compensar o fato do elemento casca modelar a superfície média da geometria.

Os resultados da comparação entre a análise modal da placa otimizada em elementos sólidos e casca podem ser vistos na Tabela 11.

Tabela 11 - Comparação entre frequências naturais calculadas para modelo otimizado do caso 2 para elementos sólido e casca.

Modo	Sólido [Hz]	Casca [Hz]
1	13,0	13,1
2	18,9	19,2
3	75,2	76,9
4	142,5	142,6
5	234,6	234,6
6	361,5	361,9
7	387,4	387,7
8	472,1	472,6
9	509,2	514,4
10	532,8	532,5

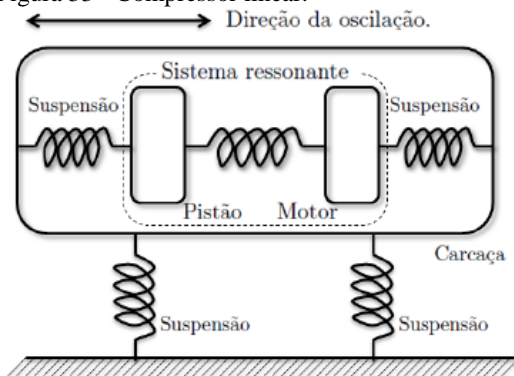
Os resultados mostram boa similaridade, indicando que o modelo construído com elementos sólidos manteve comportamento similar ao modelo em casca, mais comumente utilizado para modelos de placas.

5.2.2 Resposta dinâmica

A fim de avaliar o efeito da nova geometria da placa otimizada, sua resposta dinâmica será comparada à da resposta de sua geometria original, por meio de uma análise harmônica.

A grandeza a ser avaliada é a velocidade média espacial quadrática de vibração da placa, quando submetida a um esforço unitário no centro de gravidade do compressor. Para simplificar a análise, o estudo é feito supondo um compressor linear, conforme descrito no trabalho de Junior (2005) e operando na direção de maior comprimento da placa, como mostra a Figura 33.

Figura 33 - Compressor linear.



Fonte: Junior (2005).

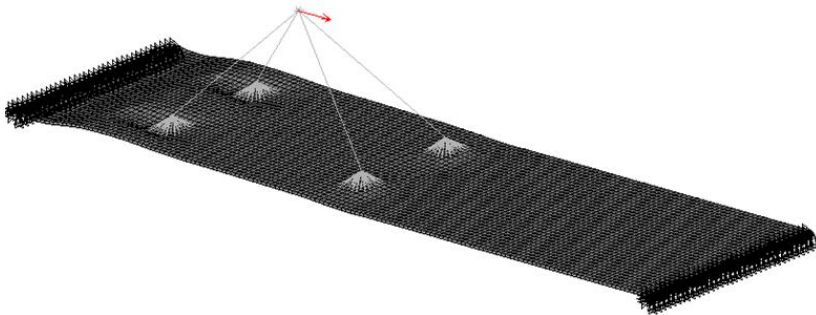
A grandeza velocidade média quadrática foi escolhida por ser a que fornece uma aproximação do valor de ruído radiado, como pode ser visto na equação abaixo, de Gerges (2000):

$$W = \rho c S \sigma_{rad} \langle \bar{v}^2 \rangle, \quad (5.8)$$

onde W é a potência sonora radiada, ρ é a densidade do fluido onde a placa está imersa, c a velocidade do som deste fluido, S é a área de radiação da placa, σ_{rad} é a eficiência de radiação e $\langle \bar{v}^2 \rangle$ a velocidade média quadrática de vibração da placa.

A força de 1mN é aplicada no centro de gravidade do compressor, como pode ser visto na Figura 34. A placa é engastada nas extremidades, conforme considerado no processo de otimização.

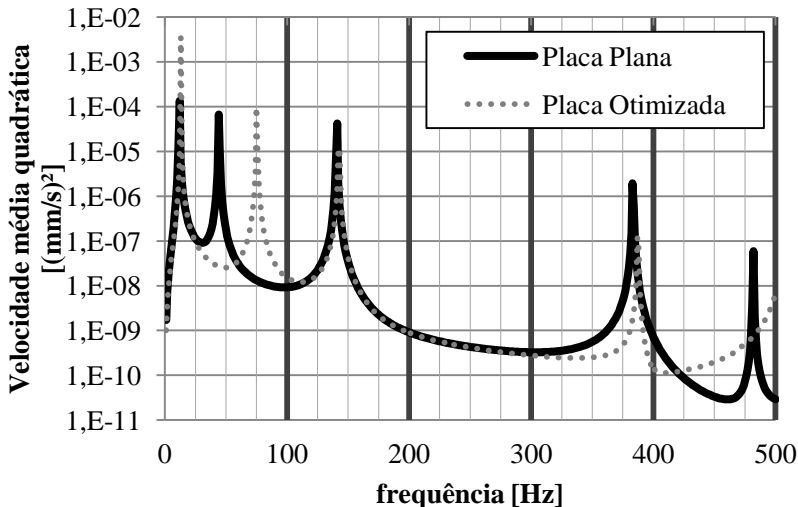
Figura 34 - Modelo e condições de contorno para análise harmônica.



O amortecimento utilizado no modelo é a média dos amortecimentos modais medidos na análise modal de validação da placa para os modos até 500Hz, em torno de 0,03%.

A curva de resposta das velocidades médias simulada com discretização de 1Hz está apresentada na Figura 35.

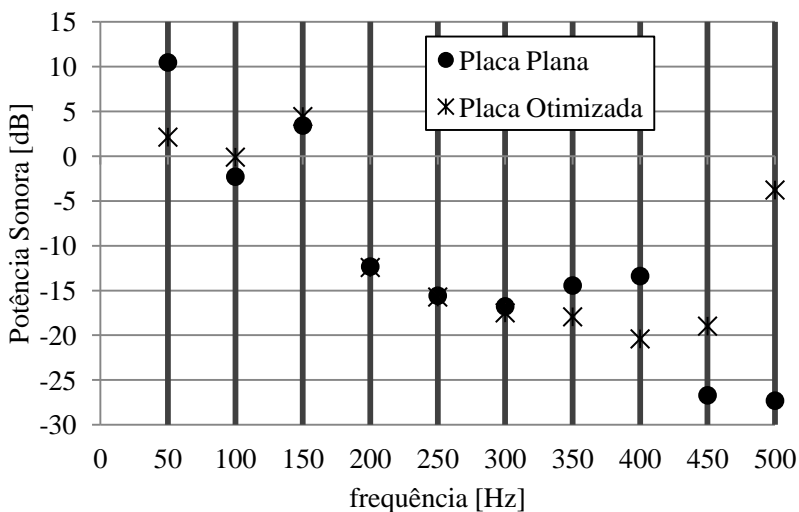
Figura 35 - Curvas de resposta da velocidade média quadrática.



Percebe-se que, conforme já comentado, a terceira frequência natural deslocou-se para 75Hz sem afetar as demais.

Utilizando a Equação (5.8) para radiação sonora, e considerando arbitrariamente que a eficiência de radiação da placa para todos os modos de vibração é 1, traçou-se uma curva de radiação sonora da placa para se ter uma idéia das possibilidades de ganho com esta otimização. Para tornar a resposta mais real, utilizou-se o exposto no Capítulo 2 sobre a excitação gerada pelo compressor, tomando para este exemplo um compressor operando em 50Hz. Assim, calculou-se a radiação sonora apenas para as frequências de 50Hz e seus múltiplos, mostradas na Figura 36.

Figura 36 - Radiação sonora da placa nas harmônicas do compressor.



Nota-se que na frequência de operação, foco principal desta otimização, os ganhos são da ordem de 7dB. Para o primeiro múltiplo desta frequência, 100Hz, houve ligeira piora, em torno de 2dB, devido à aproximação ao terceiro modo que ocorreu para esta frequência.

Neste caso, pode-se afirmar que o ponto de ótimo desta função, que considerava a mudança da frequência natural como objetivo, apresenta menor ruído radiado e possivelmente também menor transmissão de energia vibratória ao gabinete.

Isto mostra que a opção por esta função objetivo mais simples, em detrimento de funções mais complexas como potência sonora, ou ruído radiado por uma fonte, além da transmissão de energia vibratória,

é uma abordagem válida para este caso. Faz-se necessário, entretanto, um estudo anterior para conhecer o padrão das vibrações provenientes da fonte.

6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES DE TRABALHOS FUTUROS

A otimização de forma mostrou-se ser uma excelente ferramenta na busca por geometrias que atendam aos requisitos de controle de vibrações e ruído. A grande vantagem deste método é a possibilidade da criação de geometrias não convencionais, dificilmente obtidas pelos métodos de desenho tradicionais. A aplicação deste método, porém, não é simples, e varia dependendo do problema tratado.

A escolha de uma função objetivo com solução analítica seria a ideal, mas nos problemas reais sabe-se que raramente esta abordagem é possível. O método dos elementos finitos, largamente utilizado nos meios acadêmicos e na indústria, é usualmente utilizado na maioria dos casos. Seus modelos e formulações variam de acordo com a física do problema, bem como seu tamanho e precisão. No presente trabalho, o estudo baseou-se na necessidade de reduzir ruído e vibração transmitidas pela placa base de um refrigerador, funções cuja avaliação é complexa. Foram, então, utilizados conhecimentos sobre a física do problema e suas características para simplificá-lo e definir a função objetivo que foi utilizada no processo de otimização: as frequências naturais.

Uma boa parametrização da geometria também influencia bastante no trabalho necessário para poder fazer uso de métodos de otimização. Optando por uma parametrização baseada na posição dos nós do modelo, foi possível chegar a uma formulação analítica de cálculo da sensibilidade da função objetivo, mas muitas vezes, métodos semi-analíticos devem ser utilizados. Nestes casos, faz-se uso de diferenças finitas, cuja fidelidade do resultado depende fortemente da escolha da perturbação correta, conforme foi apresentado.

Outras dificuldades surgem na programação e aplicação da otimização, como geometria inicial da placa e a distorção dos elementos do modelo utilizados para modelar a placa. Sobre a geometria inicial da placa, foi demonstrado que uma deformação inicial na placa, mínima que seja, é necessária para o cálculo da sensibilidade da função objetivo. Entretanto, para cada forma inicial testada, diferentes resultados foram alcançados, tanto na geometria e como no resultado final da frequência.

Em resumo, o presente trabalho mostrou que a opção por uma função objetivo mais simples, em detrimento de funções mais complexas como potência sonora, é uma abordagem válida. Faz-se necessário, entretanto, um estudo teórico para conhecer o padrão das vibrações provenientes da fonte. O trabalho mostra também que as

variações necessárias para alterar a resposta dinâmica de uma placa podem ser pequenas, quando aplicadas nos locais certos. Como se pôde observar nos estudos de caso, as formas de placa otimizadas apresentam geometrias não usuais, e seria muito difícil chegar a tais geometrias de forma intuitiva, mesmo para profissionais experientes. No estudo de caso 2, comprovou-se que a abordagem modal é uma boa opção quando se tem conhecimento do problema, com resultados promissores.

Como recomendações de novos trabalhos, sugere-se:

Aplicar o método analítico de cálculo de sensibilidades para uma placa modelada em elementos de casca.

Desenvolver uma metodologia para placas em elementos sólidos em três dimensões, aplicando a sensibilidade tridimensional, ou ainda, com direção arbitrária (normais à geometria, por exemplo).

Desenvolver metodologia para calcular sensibilidade de corpos sólidos em três dimensões, onde somente a superfície externa do sólido seja variável (contorno).

Aplicar *Modetracking* (Kim e Kim, 2000; Yu et al, 2010) nas otimizações do tipo "Caso 1" deste trabalho.

Como sugestão para deformação inicial da placa, poder-se-ia utilizar a própria deformação estática da placa devido ao peso do compressor.

Fazer combinações de otimização de forma (como feita no presente trabalho) juntamente com otimização topológica para aumentar ainda mais as possibilidades de soluções.

Quando fazer uso de gradientes calculados por diferenças finitas, uma sugestão seria utilizar métodos que trabalham com números complexos.

7 REFERÊNCIAS

ANSYS, Inc. **ANSYS 12.1 Help**. ANSYS Mechanical APDL. Estados Unidos, 2009.

ARORA, Jasbir S. **Introduction to Optimum Design**, 2nd Edition, Elsevier, USA, 2004.

BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite Element Procedures**, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1996.

BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O.. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**, 2nd Edition, Springer, Berlin, 2003.

BREBBIA, C. A.; FERRANTE, A. J.. **The Finite Element Technique: an introduction for engineers**, Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1975.

Catálogo eletrônico de produtos Embraco (compressores). Disponível em: <www.embraco.com>. Acesso em: 29/10/2013.

GERGES, Samir N. Y. **Ruído: Fundamentos e Controle**, 2º edição, NR Edittora, Santa Catarina, Brasil, 2000.

HAFTKA, Raphael T; GURDAL, Zafer. **Elements of Structural Optimization**, 3rd edition, Kluwer Academic Publishers, Holanda, 1991.

HAMILTON, J. F. **Measurement and Control of Compressor Noise**, SME, Purdue University, Indiana, USA, 1988.

HUGHES, Thomas J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1987.

INZARULFAISHAN, Abd Rahim; AZEGAMI, Hideyuki. **Shape Optimization of Linear Elastic Continua for Moving Nodes of Natural Vibration Modes to Assigned Positions and Its Application to Chassis-like Frame Structures**, Japan Society for Computational Engineering and Science (JSCES), 2004.

JUNIOR, Otávio Santini. **Aplicação de métodos passivos de controle de ruído gerado por corpos rígidos oscilantes**, dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 2005.

KILIAN, S.; ZANDER, U.; TALKE, F. E..**Suspension modeling and optimization using finite element analysis**, Tribology International, vol.36, 317-324, 2003.

KIM, Tae Soo; KIM, Yoon Young.**Mac-based mode-tracking in structural topology optimization**, Computers and Structures, vol.74, 375-383, 2000.

LE, ChauHoai.**Developments in Topology and Shape Optimization**, Tese de Doutorado, University of Illinois, USA, 2010.

LEE, K. M.; ROWE, R. K..**Finite element modelling of the three-dimensional ground deformations due to tunnelling in soft cohesive soils: Part I - Method of analysis**, Computers and Geotechnics, vol. 10, 87-109, 1990.

LEIVA, Juan Pablo. **Method For Generating Perturbation Vectors For Topography Optimization of Structures**, 5th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, Italy, 2003.

LENZI, A. **Relatório Embraco: Identificação experimental de caminhos de transmissão em compressores**, Florianópolis: UFSC, 2003.

LMS.LMS Virtual.Lab Online Help home page.Virtual.Lab Rev 11. Bélgica, 2012.

MOLLENHAUER, Klaus; TSCHOKE, Helmut. **Handbook of Diesel Engines**, 3rd edition, Springer, Berlin, 2010.

PEDERSEN, N. L..**Optimization of holes in plates for control of eigenfrequencies**, Struct Multidisc Optim, vol.28, 1-10, 2004.

RODRIGUES, Rodrigo Sambugari. **Análise dos esforços dinâmicos transmitidos pelo eixo e pistão ao bloco de compressores herméticos**. dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 2003.

SATO, SHIN ICHI;YOU, JIN; JEON, YONG.**Sound quality characteristics of refrigerator noise in real living environments with relation to psychoacoustical and autocorrelation function parameters.** Journal of the Acoustical Society of America, vol.122 (1) 314-325, 2007.

SHIN, Kihong; HAMMOND, Joseph Kenneth.**Fundamentals of Signal Processing for Sound and Vibration Engineers.**Wiley, London, 2008.

SVANBERG, K..**A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations,** Society of Industrial and Applied Mathematics, vol.12, 555,573, 2002

SVANBERG, K..**The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization, International Journal for numerical methods in engineering,** vol.24, 359-373, 1987.

WANG, Shu-Yu; SUN, Yanbing; GALLAGHER, R. H..**Sensitivity analysis in shape optimization of continuum structures,** Computers & Structures, vol.20(5), 855-867, 1984.

YU, Yonggyun; JANG, In Gwun; KIM, In Kyum; KWAK, Byung Man.**Nodal line optimization and its application to violin top plate design,** Journal of Sound and Vibration, vol.329, 4785-4796, 2010.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU J. Z..**The Finite Element Method: Its Basis & Fundamentals,** 6nd edition, Elsevier, USA, 2005.