

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

Helton Fernando Scherer

**CONTROLE PREDITIVO DISTRIBUÍDO DE REDES DINÂMICAS:
ALGORITMO DE PONTO-INTERIOR DISTRIBUÍDO E
APLICAÇÕES**

Florianópolis

2014

Helton Fernando Scherer

**CONTROLE PREDITIVO DISTRIBUÍDO DE REDES DINÂMICAS:
ALGORITMO DE PONTO-INTERIOR DISTRIBUÍDO E
APLICAÇÕES**

Tese submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas.

Orientador: Prof. Eduardo Camponogara, Phd

Coorientador: Prof. Júlio Elias Normey-Rico, Dr.

Florianópolis

2014

Scherer, Helton Fernando

Controle preditivo distribuído de redes dinâmicas: algoritmo de ponto-interior distribuído e aplicações / Helton Fernando Scherer ; orientador, Eduardo Camponogara ; coorientador, Júlio Elias Normey-Rico. - Florianópolis, SC, 2014.

xx + 97 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. controle preditivo baseado em modelo. 3. otimização distribuída. 4. método de ponto-interior. 5. conforto térmico. I. Camponogara, Eduardo. II. Normey-Rico, Júlio Elias . III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. IV. Título.

Helton Fernando Scherer

**CONTROLE PREDITIVO DISTRIBUÍDO DE REDES
DINÂMICAS: ALGORITMO DE PONTO-INTERIOR
DISTRIBUÍDO E APLICAÇÕES**

Esta Tese foi aceita em sua presente forma pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas como parte dos requisitos para a obtenção do grau de “Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas”.

Florianópolis, 25 de abril de 2014.

Prof. Jomi Fred Hübner
Coordenador do Curso

Prof. Eduardo Camponogara
Orientador

Prof. Julio Elias Normey-Rico
Co-Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Eduardo Camponogara
Presidente

Prof. Jorge Otávio Trierweiler

Dr. Mário César Mello Massa de Campos

Prof. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi

Prof. Rodolfo César Costa Flesch

Prof. Ubirajara Franco Moreno

RESUMO

O controle preditivo é uma técnica de controle avançado que vem recebendo cada vez mais atenção tanto da indústria quanto do meio acadêmico. Suas características como a capacidade de tratar restrições de maneira sistemática e a utilização de algoritmos que encontram soluções ótimas definem a grande vantagem de sua utilização. Na indústria já existem diversas aplicações do controle preditivo, porém, devido à necessidade de troca de informações com os sensores e atuadores do processo, sua utilização às vezes se torna inviável, principalmente quando o sistema a ser controlado possui muita esparsidade geográfica. Uma alternativa que vem se tornando interessante é a utilização de controladores preditivos distribuídos (DMPC), que são implementados localmente mas trabalham em conjunto, conseguindo ao final um desempenho similar ao controlador centralizado, porém com a vantagem da descentralização da computação das ações de controle. Este trabalho propõe uma estrutura DMPC onde o sistema é dividido em subsistemas, cada qual com o seu subproblema, e é tratado através de uma rede de agentes. Neste caso, a formulação utilizada engloba problemas de controle onde podem existir acoplamentos entre as saídas dos subsistemas. É proposto um algoritmo distribuído que coordena a rede de agentes e utiliza métodos de ponto-interior para resolver o conjunto de subproblemas, encontrando a solução ótima global. Além de testar a formulação do controlador distribuído de maneira numérica, é realizado um estudo utilizando a estratégia DMPC para o caso de alocação de recursos de energia. Neste caso, um conjunto de sistemas consumidores tem suas necessidades energéticas supridas por uma fonte comum, cuja capacidade é limitada e às vezes não atende as demandas. A estratégia DMPC foi testada neste caso através de uma metodologia *hardware-in-the-loop* em uma planta solar para demonstrar a boa funcionalidade e a possibilidade de aplicação de controladores distribuídos em sistemas reais.

Palavras-chave: Controle preditivo baseado em modelo, otimização distribuída, método de ponto-interior, conforto térmico.

ABSTRACT

Predictive control is an advanced control technique that has been getting increasing attention from both industry and academia. Its characteristics such as the ability to handle constraints in a systematic way and the use of algorithms that find optimal solutions define the great advantage of its use. In industry there are already several applications of predictive control, however, due to the necessity of information exchange with the sensors and actuators of the process, their use is sometimes not feasible, especially when the system to be controlled has much geographical sparsity. An alternative that is becoming interesting is the use of distributed predictive controllers (DMPC), which are implemented locally but work together, achieving at the end a performance similar to a centralized controller, but with the advantage of decentralization in the computation of control actions. This thesis proposes a DMPC structure where the system is divided into subsystems, each with its subproblem, and is treated through a network of agents. In this case, the formulation used comprises control problems which may exist couplings between the outputs of the subsystems. It is proposed a distributed algorithm that coordinates the network of agents and use interior-point methods to solve the set of subproblems, finding the optimal global solution. Besides testing the formulation of the distributed controller in a numerical manner, a study using the DMPC strategy for the case of allocation of energy resources is performed. In this case, a set of consumer systems have their energy needs supplied by a common source, whose capacity is limited and sometimes does not meet the demands. The DMPC strategy was tested in this case through a hardware-in-the-loop methodology in a solar plant to demonstrate the good functionality and applicability of distributed controllers in real systems.

Keywords: Model predictive control, distributed optimization, interior-point method, thermal comfort.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Grafo de acoplamento de uma rede dinâmica linear com 6 subsistemas.	11
Figura 2	Ilustração de não equivalência entre os pontos fixos e as soluções ótimas na presença de restrições de acoplamento.	22
Figura 3	Função indicadora e curvas de aproximação da função barreira logarítmica	27
Figura 4	Esquema de instalação solar para resfriamento ou aquecimento	50
Figura 5	Esquema de trocador de calor adotado para cada um dos subsistemas	53
Figura 6	Visão local do uso e vazão de recursos no subsistema m	59
Figura 7	Saídas e controles dos subsistemas com controle descentralizado utilizando temperatura e vazão constantes.	68
Figura 8	Saídas e controles dos subsistemas com DMPC utilizando temperatura e vazão constantes.	69
Figura 9	Resultados comparando as abordagens centralizada e distribuída.	70
Figura 10	Convergência de $\Delta \mathbf{u}_1$ em $k = k^0 + Ts$	72
Figura 11	Convergência de $\Delta \mathbf{u}_1$ em $k = k^0 + Ts$ limitando as iterações q	72
Figura 12	Saídas e controles dos subsistemas, temperatura e vazão da planta solar com a aplicação do DMPC	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Comparação entre os métodos centralizado e distribuído de gradiente descendente	44
Tabela 2	Desempenho do Gradiente Descendente Centralizado	45
Tabela 3	Desempenho do Newton Centralizado	46
Tabela 4	Desempenho do Gradiente Descendente Distribuído	46
Tabela 5	Desempenho do Newton Distribuído	47
Tabela 6	Variáveis e parâmetros para os modelos	54
Tabela 7	Resultados dos controladores centralizado e distribuído	75

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MPC	Controle Preditivo Baseado em Modelo (Model Predictive Control)	1
DMPC	Controle Preditivo Distribuído (Distributed MPC)	2
DGD	Gradiente Descendente Distribuído (Distributed Gradient Descent)	41
CGD	Gradiente Descendente Centralizado (Centralized Gradient Descent)	41
QP	Problemas Quadráticos (Quadratic Programming)	41
CN	Método de Newton (Centralized Newton's method)	43
DND	Newton Descendente Distribuído (Distributed Newton Descent)	43
HVAC	Aquecimento, Ventilação e Ar Condicionado (Heating, Ventilation, and Air Conditioner)	51

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{A}	letras maiúsculas caligráficas denotam conjuntos	11
m	índice de subsistemas do controle DMPC	11
$I(m)$	conjunto de entrada do subsistema m	11
a	letras minúsculas em negrito denotam vetores	11
\mathbf{x}_m	vetor de estados do subsistema m	11
\mathbf{y}_m	vetor de saídas do subsistema m	11
\mathbf{u}_m	vetor de ações de controle do subsistema m	11
A	letras maiúsculas denotam matrizes	12
k	índice de tempo discreto	12
$\bar{\mathbf{a}}$	letras minúsculas em negrito com barra denotam vetores reunindo valores ao longo do horizonte	13
\bar{A}	letras maiúsculas com barra denotam matrizes reunindo valores ao longo do horizonte	13
$O(m)$	conjunto de saída do subsistema m	19
$\mathcal{N}(m)$	vizinhança do subsistema m	19
ε	parâmetro de ajuste da barreira logarítmica	26
$N_{1,m}$	ponto inicial do horizonte de predição para o subsistema m	66
$N_{2,m}$	ponto final do horizonte de predição para o subsistema m	66
$N_{u,m}$	horizonte de controle para o subsistema m	66
N	horizonte de predição e simplificação quando $N_{1,m} = 1$	66

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
2 MODELAGEM DE SISTEMAS DE LARGA ESCALA E FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS DE CONTROLE	7
2.1 REDES DINÂMICAS LINEARES	10
2.2 FORMULAÇÃO DO MPC	15
2.3 DISTRIBUIÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE	19
2.4 SUMÁRIO	22
3 ALGORITMO DE PONTO-INTERIOR DISTRIBUÍDO	25
3.1 MÉTODO DE BARREIRA DISTRIBUÍDA	25
3.1.1 Método de Barreira Logarítmica	26
3.1.2 Método do Gradiente Descendente Distribuído para a Centralização	29
3.1.3 Análise de Convergência para Busca Linear Exata	32
3.1.4 Análise de Convergência para Busca Linear com <i>Backtracking</i>	35
3.1.5 Esboço do Algoritmo	36
3.2 OUTRAS QUESTÕES	37
3.2.1 Inicialização Factível	37
3.2.2 Projeto do Método de Barreira	38
3.2.3 Solução Ótima dos Problemas dos Agentes	39
3.3 SUMÁRIO	39
4 ANÁLISE NUMÉRICA	41
4.1 CENTRALIZAÇÃO DISTRIBUÍDA	41
4.2 BARREIRA DISTRIBUÍDA	43
4.3 SUMÁRIO	47
5 DMPC APLICADO EM ALOCAÇÃO DE RECURSOS	49
5.1 A PLANTA SOLAR E SISTEMAS CONSUMIDORES	50
5.2 PROBLEMA DE CONTROLE COM RESTRIÇÃO DE RECURSOS	55
5.2.1 MPC Utilizando Variáveis de Folga	59
5.3 DMPC COM VARIÁVEIS DE FOLGA	61
5.4 ALGORITMO DISTRIBUÍDO	63
5.5 RESULTADOS E ANÁLISES	66
5.5.1 Comparando Controladores Descentralizados com Distribuídos	66
5.5.2 Resultados Centralizados e Distribuídos	70
5.5.3 Análise dos Parâmetros de Barreira	71
5.5.4 Restringindo as Iterações entre os Agentes	71

5.5.5 Experimentos Distribuídos	73
5.6 SUMÁRIO.....	76
6 CONCLUSÕES	77
REFERÊNCIAS	81
APÊNDICE A – Definições	89
APÊNDICE B – Prova de Convergência	93
APÊNDICE C – Modelo Linear de Trocadores de Calor	97

1 INTRODUÇÃO

O controle automático de processos é um conceito antigo, com um marco inicial nos processos industriais através do regulador centrífugo de James Watt em 1769 (DORF; BISHOP, 2010), que foi utilizado para controlar a velocidade de máquinas a vapor. Deste ponto em diante, como uma das consequências diretas da globalização e aumento da competitividade entre os mercados produtores, as técnicas de controle automático vêm evoluindo e se tornando cada vez mais importantes nas indústrias, visando acelerar o processo de fabricação de produtos e atender às restrições ambientais e de segurança, porém da maneira mais rentável possível.

Com todo esse avanço na indústria, é evidente não somente o desenvolvimento das técnicas de controle de processos, mas também de outras áreas afins, tais como a modelagem de sistemas dinâmicos e a otimização, que se tornaram necessárias no controle de processos industriais que estão se tornando cada vez mais complexos e flexíveis.

Além disso, o rápido desenvolvimento das tecnologias de computação, comunicação e informação, refletido em equipamentos eletrônicos cada vez mais rápidos e mais baratos, permitiu que as aplicações das técnicas de controle não ficassem restritas às indústrias e teorias, sendo empregadas nas mais diversas áreas, com crescente atenção em sistemas de infraestrutura, tais como redes elétricas inteligentes (VENKAT et al., 2008), redes de água (PARTAN; KUROSE; LEVINE, 2007), controle de tráfego urbano (ZHAO; DAI; ZHANG, 2012), entre tantas outras.

Com o desenvolvimento crescente dos sistemas de controle, uma das estratégias que vem ganhando cada vez mais espaço é o Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC) (CAMACHO; BORDONS, 2004). O MPC já possui uma história de longa data, principalmente na indústria petroquímica (RICHALET et al., 1978; CUTLER; RAMAKER, 1979), porém ainda está longe de utilizar todo o seu potencial no controle de processos, sendo o foco de muitas pesquisas realizadas tanto na indústria quanto no meio acadêmico (LEE, 2011).

Os principais aspectos de seu sucesso se devem à sua formulação intuitiva, com características importantes que envolvem a possibilidade de aplicação multivariável, a facilidade de incorporar e tratar restrições operacionais e a operação baseada em uma função custo (CAMACHO; BORDONS, 2004; QIN; BADGWELL, 2003).

Em essência, o MPC converte um problema de controle dinâmico em uma série de problemas de otimização estáticos que são resolvidos com algoritmos de otimização específicos em tempo real. Mais detalhes de seu funcionamento serão dados no capítulo 2.

Na aplicação do MPC, existe a necessidade da centralização das informações dos sensores do sistema a ser controlado, direcionadas para uma central de processamento que utilizará estas informações para resolver o problema atual de controle e enviará os novos comandos para os atuadores do sistema.

Aparece aqui um limitante para a aplicação do MPC quando o objetivo é controlar sistemas demasiadamente grandes e/ou geograficamente distribuídos, chamados aqui de sistemas de larga escala. As aplicações do MPC podem ser restringidas tanto por causa da quantidade de informações que devem ser manipuladas simultaneamente quanto pela dificuldade na transmissão dessas informações por longas distâncias.

Nesta tese, a pesquisa foi direcionada principalmente para sistemas geograficamente distribuídos. Nos casos estudados, além da barreira da distância que desfavorece a aplicação do MPC, existe um acoplamento entre as partes do sistema, resultando em desempenhos de controle inaceitáveis quando controlados de maneira descentralizada. Para esses casos, uma das metodologias promissoras e que vem se tornando viável é o Controle Preditivo Distribuído (DMPC), que possibilita a distribuição do problema de controle, enquanto preserva as mesmas características do MPC padrão, tais como a utilização de um modelo de predição e a manipulação explícita de restrições (CAMPNOGARA et al., 2002; NEGENBORN; SCHUTTER; HELLENDORN, 2009; RAWLINGS; STEWART, 2008; SCATTOLINI, 2009; CHRISTOFIDES et al., 2013).

Nessa estratégia de controle, o sistema é tratado através de uma rede de agentes acoplados, que podem trabalhar em conjunto visando resolver o problema de controle do sistema, normalmente buscando resultados similares aos que podem ser obtidos com um MPC centralizado.

Os estudos sobre o DMPC podem abordar as mais diversas áreas, tais como tratamento dos problemas de otimização distribuídos, considerações sobre os acoplamentos dinâmicos entre os subsistemas, questões de cooperação entre os agentes da rede, tratamento de restrições de maneira distribuída, condições de estabilidade em malha fechada, entre outras.

Com tantas linhas de pesquisa, surgiram diversas classificações do DMPC, sendo as mais comuns dadas pela topologia da rede de comunicação, diferentes protocolos de comunicação utilizados pelos controladores locais e função custo dos problemas de otimização locais (SCATTOLINI, 2009). Neste trabalho, a principal classificação entre os tipos de DMPC que será utilizada divide as estratégias entre *não cooperativas* e *cooperativas*. Nesta tese foi desenvolvida uma estratégia de controle preditivo distribuído que segue a linha das abordagens cooperativas.

Dentre as técnicas *não cooperativas* são encontrados diversos trabalhos (DUNBAR, 2007; TRODDEN; RICHARDS, 2006; FARINA; SCATTOLINI, 2012),

com destaque para uma linha de pesquisa que utiliza a abordagem de tubos (MAYNE; SERON; RAKOVIĆ, 2005), com resultados envolvendo aplicações em sistemas incertos e projetos de controladores robustos (FARINA; SCATTOLINI, 2012; RIVERSO; FERRARI-TRECCATE, 2012).

Um ponto importante de se destacar em algumas dessas técnicas é a necessidade de uma computação *offline* centralizada que precisa ser refeita em caso de reconfiguração. Além disso, este trabalho engloba características que não são abordadas nesses trabalhos, como questões de otimalidade e subotimalidade, processo iterativo e acoplamentos através das restrições de entrada e saída.

Em relação à modelagem de redes dinâmicas lineares, é mostrado que foram realizados alguns avanços através do tratamento de problemas mais gerais com o desenvolvimento de modelos de redes dinâmicas com restrições nas variáveis de saída do sistema, que anteriormente eram restritos aos sinais de controle dos subsistemas (CAMPONOGARA; OLIVEIRA, 2009). É demonstrado que este tipo de restrição torna a rede dinâmica mais acoplada, aumentando a quantidade de informações trocadas entre os agentes, além da necessidade de algoritmos específicos para encontrar a solução dos problemas de controle.

Uma contribuição importante deste trabalho foi o desenvolvimento de um algoritmo de ponto-interior distribuído para a otimização utilizada no DMPC, que aplicado em redes dinâmicas lineares converge para uma solução ótima do problema de controle.

Outra contribuição foi a implementação do DMPC em um sistema real. Neste caso, o DMPC foi utilizado no controle de distribuição de recursos de uma planta solar que alimenta o sistema de ar condicionado de um edifício. Para esta aplicação, a formulação desenvolvida teve que ser adaptada para se encaixar com o estudo de caso, pois existia uma restrição que acoplava todo o sistema. Porém, foi possível tirar benefício da estrutura em linha do sistema para reduzir o efeito do acoplamento.

Buscando relacionar as contribuições desta tese com outros trabalhos, abaixo são discutidas as principais abordagens *cooperativas* encontradas na literatura.

Cheng, Forbes e Yip (2007) desenvolvem um algoritmo de ajuste de preços baseado no método de Newton, no qual técnicas de análise de sensibilidade e identificação de mudança de conjuntos ativos são aplicadas. Uma técnica de coordenação é proposta para controladores MPC descentralizados utilizando um esquema de coordenação baseado em preço que envolve um modelo de entrada e saída. Nesse caso, cada controlador individual tem uma função objetivo que considera as entradas e saídas da unidade local e o impacto de outras unidades, caracterizando um algoritmo cooperativo.

Uma das características que diferem esse trabalho do nosso é a influência dinâmica mútua entre os controladores descentralizados, contabilizados apenas na forma de restrições. Além disso, as restrições de acoplamento de recursos físicos dos controladores descentralizados não fazem parte da formulação, como em um dos casos apresentados neste trabalho.

Negenborn, Schutter e Hellendoorn (2008) tratam a solução de problemas de otimização para a estratégia DMPC aplicado em redes de subsistemas que possuam apenas acoplamento dinâmico, diferente do nosso trabalho que trata também acoplamentos por restrições. Além disso, é utilizada a dualidade Lagrangeana para conciliar os valores das variáveis de acoplamento utilizados para desacoplar os subproblemas de subsistemas vizinhos, diferente deste trabalho que utiliza um método primal que produz uma sequência de soluções factíveis.

Venkat et al. (2008) desenvolvem um procedimento iterativo baseado em cooperação que alcança o ótimo global para subsistemas lineares acoplados com restrições locais nos sinais de controle. Condições de estabilidade de malha fechada são estabelecidas utilizando custo terminal quadrático, obtido através da solução de equações de Lyapunov. Diferente do nosso trabalho, são consideradas apenas restrições nos sinais de controle, desconsiderando quaisquer restrições nas variáveis de saída.

Em Pannocchia et al. (2009) é utilizado o princípio da subotimalidade, cujos resultados são comparados com soluções centralizadas para um grupo de subsistemas acoplados dinamicamente. A estratégia apresentada poderia ser aplicada aos nossos estudos de caso, porém tornaria todo o sistema acoplado e não garantiria otimalidade. Além disso, existe a questão em relação à solução factível inicial, diferente neste trabalho por apresentar um método para encontrar uma solução factível de forma distribuída.

Em Stewart et al. (2010), é desenvolvido um algoritmo DMPC para sistemas lineares com garantia de estabilidade através de comunicação iterativa entre os controladores distribuídos e funções objetivos que levam em consideração todo o sistema de controle. Neste caso, a estabilidade é assegurada mesmo quando o processo iterativo dos controladores termina antes da convergência.

Apesar da quantidade de semelhanças, o trabalho de Stewart et al. (2010) possui dois pontos principais que o diferem desta tese. O primeiro é em relação às restrições, se restringindo em receber apenas restrições de entrada, e o segundo é em relação à informação em cada subsistema, pois é necessário que cada controlador possua total conhecimento das dinâmicas do sistema.

Ferramosca et al. (2013) desenvolvem controladores baseados em jogos cooperativos que são aplicados em processos com equilíbrio variável cu-

jas referências das plantas controladas podem mudar. Técnicas de factibilidade recursiva e a definição de um conjunto terminal admissível são utilizados para garantir a estabilidade do sistema, porém pode produzir respostas subótimas.

Diferente do nosso trabalho, não é apresentada uma garantia que os agentes não ficarão presos em soluções subótimas, caso em que os agentes não conseguem realizar muito progresso através de uma otimização unilateral quando encontram um limite dado por alguma restrição. Além disto, o desempenho deste algoritmo pode ser lento, pois será dependente da primeira solução factível encontrada.

Em síntese, a presente tese desenvolveu as seguintes contribuições científicas e tecnológicas:

1. um modelo distribuído de redes dinâmicas lineares com restrições nos sinais de controle e saídas;
2. um algoritmo distribuído baseado no método de ponto-interior que garante convergência das decisões de controladores distribuídos à solução ótima global, que seria encontrada por um controlador centralizado;
3. aplicação do DMPC em um sistema real, comprovando a aplicabilidade da metodologia distribuída.

Este trabalho está organizado em seis capítulos, incluindo a Introdução. O Capítulo 2 é dedicado à modelagem de redes dinâmicas lineares e a formulação dos problemas de controle preditivo, desde o problema centralizado até a formulação distribuída. No Capítulo 3 estão descritos os algoritmos de otimização utilizados nos controladores distribuídos. O Capítulo 4 se refere aos resultados numéricos deste trabalho. O Capítulo 5 trata de uma adaptação das formulações desenvolvidas para aplicação em um caso prático envolvendo uma planta solar. E por último, o Capítulo 6 faz uma síntese das contribuições e sugere direções de pesquisa para trabalhos futuros.

2 MODELAGEM DE SISTEMAS DE LARGA ESCALA E FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS DE CONTROLE

Este capítulo trata de três assuntos principais, sendo eles modelagem de sistemas dinâmicos, formulação do controlador MPC e aplicação de uma estratégia DMPC. A primeira parte tem como objetivo modelar sistemas dinâmicos de larga escala, de tal maneira que sejam facilmente visualizados e representativos para a aplicação das técnicas de controle deste trabalho. Partindo dos modelos obtidos, é formulado o problema de controle preditivo para o sistema, sendo referenciado aqui como MPC centralizado. Após estas etapas, é feita a formulação do problema de controle tratado de maneira distribuída.

Foram utilizadas neste trabalho redes dinâmicas lineares para modelar as dinâmicas dos sistemas estudados. Este tipo de representação já vem sendo utilizada para representar sistemas esparsos e geograficamente distribuídos, tais como redes de tráfego urbano (CAMPOGARA; SCHERER; MOURA, 2009; OLIVEIRA; CAMPOGARA, 2010), redes de energia elétrica (VENKAT et al., 2008), plantas petroquímicas (SCHERER; CAMPOGARA; PLUCENIO, 2009), entre outros (DOLD; STURBERG, 2009; MERCANGÖZ; DOYLE III, 2007). Uma das vantagens desta representação é a facilidade para visualizar os acoplamentos que ocorrem através dos sinais de um dado elemento com os demais elementos do sistema.

Com a utilização das redes dinâmicas lineares, o sistema é dividido em subsistemas e a cada subsistema é atribuído uma dinâmica local e dinâmicas de acoplamentos. Para os modelos matemáticos destes subsistemas dinâmicos, tanto para a dinâmica local quanto para a influência entre os subsistemas, é possível utilizar diversas representações, podendo ser classificadas em lineares e não lineares, contínuas e discretas, cada qual possuindo vantagens e desvantagens para os estudos realizados (ÅSTRÖM; MURRAY, 2010). Este trabalho utiliza em cada subsistema modelos no espaço de estados representando sistemas lineares discretos (CHEN, 1999; FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2009).

Representações no espaço de estados são modelos matemáticos de sistemas físicos compostos por conjuntos de variáveis de entrada, de saída e de estado relacionadas entre si por meio de equações diferenciais de primeira ordem, ou equações à diferença para o caso discreto. As variáveis são expressas em vetores e as equações diferenciais e algébricas são escritas na forma matricial quando o sistema dinâmico é linear e invariante no tempo. A representação em espaço de estados fornece uma maneira prática e compacta para modelar e analisar sistemas com múltiplas entradas e saídas. O *espaço de*

estados refere-se ao espaço cujos eixos são as variáveis de estado e o estado do sistema pode ser representado como um vetor dentro desse espaço (CHEN, 1999).

Optou-se por modelos no espaço de estados pois grande parte da teoria de controle preditivo distribuído desenvolvida utiliza modelagem de sistemas dinâmicos através de variáveis de estado para a realização da predição do comportamento da planta, sendo com estas formulações os principais resultados quando se trata de convergência, estabilidade e desempenho (VENKAT; RAWLINGS; WRIGHT, 2005). Definir o modelo para representar o sistema é uma das bases para a formulação do controlador preditivo.

O termo MPC é utilizado para designar uma vasta classe de algoritmos de controle que utilizam explicitamente um modelo de processo e minimização de uma função objetivo em um dado horizonte para obter o sinal de controle (CAMACHO; BORDONS, 2004). O MPC pode ser formulado utilizando diversos tipos de modelos para representar as dinâmicas dos processos, assim como pode utilizar diferentes tipos de funções objetivo. Neste caso, ficou definido o modelo no espaço de estados para a formulação dos problemas de controle.

A história deste tipo de controlador já possui vários anos, com uma das primeiras formulações descrita em 1976 (RICHALET et al., 1976), sendo também conhecido como controlador preditivo de horizonte retrocedente (RHPC) (CAMACHO; BORDONS, 2004). O MPC já possui grande aceitação na academia, com diversos livros que tratam do assunto (CAMACHO; BORDONS, 2004; MORARI; LEE, 1999; NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007; GRÜNE et al., 2011) e é cada vez mais aceito na indústria, com possibilidade de aplicações em diversas áreas, como indústria petroquímica (MINH; MUHAMAD, 2010), usinas geradoras de energia elétrica (HINES; JIA; TALUKDAR, 2004), plantas solares (CASTILLA et al., 2011), entre outras tantas mais.

De maneira geral, o MPC é um método baseado em otimização, no qual a seguinte estratégia é comum a todos os controladores (CAMACHO; BORDONS, 2004; ARAUJO, 2008):

- a cada período de amostragem, um modelo do processo é utilizado para prever as saídas do sistema em uma janela temporal futura chamada de *horizonte de predição*;
- o algoritmo de otimização recebe este modelo de predição juntamente com as restrições do sistema e resolve um problema de otimização que visa minimizar uma função objetivo definida previamente. A solução deste problema fornece uma sequência de sinais de controle;
- somente os sinais de controle computados para o primeiro período de amostragem são enviados para os atuadores do sistema;

- o horizonte é deslocado adiante para começar no próximo período de amostragem e todo o processo é repetido.

O MPC normalmente é implementado de maneira centralizada, ou seja, um único controlador possui todo o conhecimento do processo e calcula as ações de controle para todo o sistema. Porém, para aplicações em larga escala, a complexidade do MPC pode crescer de maneira significativa com o aumento do número de variáveis, potencialmente tornando os cálculos com o MPC centralizado proibitivos.

Para estes casos, pode ser útil (e às vezes necessário) utilizar estratégias que dividam o problema de controle em subproblemas locais, no qual é atribuído a cada subproblema um agente, responsável por um controlador, e este conjunto de agentes será responsável por calcular as ações de controle locais, utilizando medições e modelos de ordem reduzida das dinâmicas locais (CAMPONOGARA et al., 2002).

Quando o problema é particionado e resolvido por uma rede de agentes, pode existir ou não comunicação entre estes agentes, chamados aqui, respectivamente, de controle distribuído e controle descentralizado.

Para o segundo caso, uma das opções é o DMPC, cujas funções do controlador MPC são distribuídas ao longo do sistema, reduzindo assim a distância e a quantidade de sensores e atuadores interligados em cada controlador, o que conseqüentemente reduz o tamanho dos problemas de otimização. Neste caso, os problemas de cálculo de ações de controle são resolvidos por uma rede de agentes, porém mantendo as mesmas características do MPC padrão (CAMPONOGARA et al., 2002).

Na literatura atual, já existem alguns trabalhos que fazem um levantamento dos tipos de controladores preditivos distribuídos que já foram desenvolvidos, discutindo sobre as tecnologias existentes e definindo alguns dos desafios e rumos para pesquisas futuras (NEGENBORN; SCHUTTER; HELLENDORN, 2009; RAWLINGS; STEWART, 2008; SCATTOLINI, 2009; ALVARADO et al., 2011).

Em linhas gerais, algumas das características que podem ser utilizadas para classificar os tipos de controladores preditivos distribuídos são:

Tipo de abordagem, que define se a abordagem é ascendente ou descendente, isto é, se o DMPC é formulado partindo da visão de cada subsistema até chegar no problema completo ou se o problema de controle centralizado é particionado em subproblemas menores. Este trabalho descreve a formulação ascendente, na qual se inicia com conjuntos e informações sobre vizinhanças e os problemas vão sendo formulados gradualmente. No entanto, para fins de comparação, foi formulado primeiramente o problema centralizado e descrito os passos para que dele

seja possível chegar ao problema equivalente distribuído;

Arquitetura, que define como será a coordenação entre os agentes. Algumas estratégias utilizam hierarquia, com uma camada superior responsável pela coordenação, enquanto outras utilizam comunicação direta ponto a ponto. Este trabalho utiliza a segunda abordagem;

Tipo do modelo utilizado para representar as dinâmicas dos sistemas a serem controlados. Neste caso, foi adotada a modelagem via espaço de estados;

Tipo de computação, que define como as ações de controle são calculadas, de modo iterativo ou não iterativo. Este trabalho utiliza processos iterativos para resolver os problemas de controle distribuídos.

Com relação a este trabalho, pode-se dizer que deu continuidade ao trabalho de Camponogara e Oliveira (2009), que foca em DMPC aplicado em redes dinâmicas lineares com restrições locais de controle, além do desenvolvimento de um método de direção factível distribuído que consegue alcançar o ótimo global. Neste caso, a aplicação utilizada foi de controle de tráfego urbano, cujas dinâmicas dos subsistemas são acopladas e as restrições são locais.

Esta tese avançou a tecnologia do DMPC com a manipulação de restrições sobre as variáveis de saída de redes dinâmicas lineares, que anteriormente eram limitadas aos sinais de controle dos nós da rede (VENKAT et al., 2008; CAMPONOGARA; OLIVEIRA, 2009; STEWART et al., 2010), além do desenvolvimento de um método de ponto-interior distribuído. Na sequência se apresentam as formulações matemáticas relacionadas com a modelagem utilizada e a própria formulação do DMPC.

2.1 REDES DINÂMICAS LINEARES

As formulações desta seção serão dadas de maneira genérica e exemplificadas através de um sistema dinâmico representado na Figura 1. Uma maneira ilustrativa de representar sistemas dinâmicos é através de um grafo direcionado, $\mathcal{G} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$, em que $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$ representa o conjunto de elementos que formam a rede dinâmica, sendo aqui chamados de subsistemas e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ representa as influências que existem entre os subsistemas.

A rede dinâmica genérica representada no formato de grafo pela Fi-

gura 1 é escrita como:

$$\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathcal{E} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 6), (4, 5), (5, 6), (6, 3)\}$$

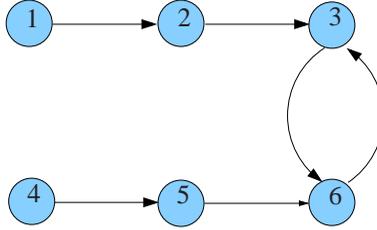


Figura 1 – Grafo de acoplamento de uma rede dinâmica linear com 6 subsistemas.

É definida aqui a vizinhança de entrada de um dado elemento $m \in \mathcal{M}$, dada pelo conjunto $I(m) = \{i : (i, m) \in \mathcal{E}\} \cup \{m\}$, que contém os subsistemas que influenciam a dinâmica do subsistema m .

Para representar as dinâmicas de cada subsistema e seus acoplamentos foi utilizada a representação no espaço de estados. Esta representação define $\mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^{n_m}$ como sendo o vetor com os estados, $\mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^{p_m}$ o vetor com os sinais de controle locais e $\mathbf{y}_m \in \mathbb{R}^{q_m}$ como o vetor de saídas do subsistema m . Neste caso n_m representa o número de estados, p_m representa o número de entradas e q_m o número de saídas.

Quando se escrevem as equações dinâmicas para representar as influências existentes entre os subsistemas, a representação dos acoplamentos é dada através dos estados ou dos sinais de controle. Prevendo uma formulação que englobasse ambos os casos, foi utilizada aqui uma formulação mais genérica, em que aparecem influências nos estados e controles dos subsistemas vizinhos.

Será considerado que os estados dos subsistemas $m \in \mathcal{M}$ evoluem de acordo com o seguinte modelo matemático:

$$\mathbf{x}_m(k+1) = \sum_{i \in I(m)} (A_{m,i} \mathbf{x}_i(k) + B_{m,i} \mathbf{u}_i(k)) \quad (2.1)$$

em que $\mathbf{x}_i(k)$ é o estado e $\mathbf{u}_i(k)$ é o controle do subsistema i no tempo k , e $A_{m,i}$ e $B_{m,i}$ são matrizes constantes de dimensões adequadas, chamadas também

de matriz dinâmica e matriz de controle respectivamente (ÅSTRÖM; MURRAY, 2010).

A saída $\mathbf{y}_m \in \mathbb{R}^{q_m}$ do subsistema m será dada por uma combinação dos estados. A equação que define este comportamento é dada por:

$$\mathbf{y}_m(k) = \sum_{i \in I(m)} C_{m,i} \mathbf{x}_i(k) \quad (2.2)$$

em que $C_{m,i}$ é uma matriz constante, chamada também de matriz de saída. Este tipo de sistema é dito linear invariante no tempo (ÅSTRÖM; MURRAY, 2010).

Após atribuir modelos matemáticos para as dinâmicas de cada subsistema e seus acoplamentos tem-se o modelo do sistema dinâmico completo em mãos, sendo possível partir para a formulação das predições, que são uma parte fundamental na formulação de controladores preditivos.

Dado o estado da rede $\mathbf{x}(k) = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M)(k)$ no tempo k , o estado de um subsistema m depois de t instantes de tempo torna-se uma função das entradas de controle dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m(k+t) &= \sum_{\omega_t \in \pi(m,t)} A(\omega_t) \mathbf{x}_{i_t}(k) + \sum_{\omega_t \in \pi(m,t)} B(\omega_t) \mathbf{u}_{i_t}(k) \\ &+ \sum_{\omega_{t-1} \in \pi(m,t-1)} B(\omega_{t-1}) \mathbf{u}_{i_{t-1}}(k+1) + \dots \\ &\dots + \sum_{\omega_1 \in \pi(m,1)} B(\omega_1) \mathbf{u}_{i_1}(k+t-1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde:

- $\pi(m,t) = \{\langle i_0, i_1, \dots, i_t \rangle : i_0 = m, i_1 \in I(i_0), i_2 \in I(i_1), \dots, i_t \in I(i_{t-1})\}$ são as cadeias dinâmicas pelas quais o estado ou entrada de controle de um subsistema i_t influencia, t passos depois, o estado do subsistema m ;
- $A(\omega_t) = A_{i_0, i_1} A_{i_1, i_2} \dots A_{i_{t-1}, i_t}$ modela a influência do estado do subsistema i_t no tempo k sobre o estado do subsistema i_0 no tempo $k+t$, sendo $\omega_t = \langle i_0, i_1, \dots, i_t \rangle$;
- $B(\omega_t) = A_{i_0, i_1} A_{i_1, i_2} \dots A_{i_{t-2}, i_{t-1}} B_{i_{t-1}, i_t}$ é a matriz que modela como a entrada de controle do subsistema i_t no tempo k influencia o estado do subsistema i_0 no tempo $k+t$.

Para ilustrar estes conceitos, considere a rede da Figura 1. Neste caso,

os conjuntos de entrada são dados por:

$$\begin{aligned} I(1) &= \{1\} & I(2) &= \{1, 2\} & I(3) &= \{2, 3, 6\} \\ I(4) &= \{4\} & I(5) &= \{4, 5\} & I(6) &= \{3, 5, 6\} \end{aligned}$$

Para esta rede, temos algumas cadeias dinâmicas representadas nas equações abaixo para o subsistema 3 em $t = 1$ e $t = 2$:

$$\begin{aligned} \pi(3, 1) &= \{\langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle\} \\ \pi(3, 2) &= \{\langle 3, 2, 1 \rangle, \langle 3, 2, 2 \rangle, \langle 3, 3, 2 \rangle, \langle 3, 3, 3 \rangle, \langle 3, 3, 6 \rangle, \\ &\quad \langle 3, 6, 3 \rangle, \langle 3, 6, 5 \rangle, \langle 3, 6, 6 \rangle\} \end{aligned}$$

Neste caso, a cadeia dinâmica em $\pi(3, 2)$ induz as matrizes dinâmicas de estado $A(\langle 3, 2, 1 \rangle) = A_{3,2}A_{2,1}$ até $A(\langle 3, 6, 6 \rangle) = A_{3,6}A_{6,6}$ e as matrizes de controle $B(\langle 3, 2, 1 \rangle) = A_{3,2}B_{2,1}$ até $B(\langle 3, 6, 6 \rangle) = A_{3,6}B_{6,6}$.

Por simplificação, será considerado um horizonte de predição N de mesmo tamanho para o controle e a saída do sistema. A predição é uma função do estado no tempo k , $\mathbf{x}(k)$, e dos sinais de controle do tempo k até $k + N - 1$.

É definido $\pi(m, t, j) = \{\omega_t \in \pi(m, t) : i_t = j\}$ como o subconjunto de cadeias dinâmicas em que estado e controles no subsistema j afetam o subsistema m em t passos. Definem-se os vetores $\bar{\mathbf{x}}_m = (\mathbf{x}_m(k+1), \mathbf{x}_m(k+2), \dots, \mathbf{x}_m(k+N))$, $\bar{\mathbf{u}}_m = (\mathbf{u}_m(k), \mathbf{u}_m(k+1), \dots, \mathbf{u}_m(k+N-1))$, e $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \dots, \bar{\mathbf{u}}_M)$. Também são definidas as matrizes¹ $\bar{A}_{m,i}$ e $\bar{B}_{m,i}$ com as informações dinâmicas do sistema para todo o horizonte de predição conforme segue:

$$\bar{A}_{m,i} = \begin{bmatrix} \sum_{\omega \in \pi(m,1,i)} A(\omega) \\ \vdots \\ \sum_{\omega \in \pi(m,N,i)} A(\omega) \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_{m,i} = \begin{bmatrix} \sum_{\omega \in \pi(m,1,i)} B(\omega) & 0 & \cdots & 0 \\ \sum_{\omega \in \pi(m,2,i)} B(\omega) & \sum_{\omega \in \pi(m,1,i)} B(\omega) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{\omega \in \pi(m,N,i)} B(\omega) & \sum_{\omega \in \pi(m,N-1,i)} B(\omega) & \cdots & \sum_{\omega \in \pi(m,1,i)} B(\omega) \end{bmatrix}$$

¹ A soma sobre um conjunto vazio é assumido como uma matriz nula de dimensão apropriada.

Com base nestas definições, as predições do estado para o horizonte são dadas como:

$$\bar{\mathbf{x}}_m = \sum_{i \in \bar{I}(m)} (\bar{A}_{m,i} \mathbf{x}_i(k) + \bar{B}_{m,i} \bar{\mathbf{u}}_i) \quad (2.4)$$

em que $\bar{I}(m) = \{j : \langle i_0, i_1, \dots, i_N \rangle \in \pi(m, N, j), i_N = j\}$ é a vizinhança de entrada para um horizonte de predição de tamanho N . Na rede ilustrativa, a vizinhança de entrada do subsistema $m = 3$ para um horizonte $N = 2$ é $\bar{I}(3) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. Observe que $I(m) = \bar{I}(m)$ para $N = 1$, enquanto $I(m) \subseteq \bar{I}(m)$ para $N \geq 2$.

Realizando um tratamento semelhante, temos que a saída do subsistema m no instante $k+t$ é uma função do estado da rede no tempo k e dos sinais de controle do tempo k até $k+t-1$, dada por:

$$\mathbf{y}_m(k+t) = \sum_{i \in I(m)} C_{m,i} \mathbf{x}_i(k+t) \quad (2.5)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_m(k+t) = \sum_{i \in I(m)} C_{m,i} \left(\sum_{\omega_t \in \pi(i,t)} A(\omega_t) \mathbf{x}_i(k) + \sum_{\omega_t \in \pi(i,t)} B(\omega_t) \mathbf{u}_i(k) + \dots \right. \\ \left. \dots + \sum_{\omega_1 \in \pi(i,1)} B(\omega_1) \mathbf{u}_{i_1}(k+t-1) \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que $\pi(j,t)$ contém somente a matriz identidade quando $t = 0$, isto é, $\pi(j,0) = \{\omega_0\}$ e $A(\omega_0) = I$. Assim, (2.6) se torna (2.2) quando $t = 0$.

Definimos neste ponto o vetor $\bar{\mathbf{y}}_m = (\mathbf{y}_m(k+1), \mathbf{y}_m(k+2), \dots, \mathbf{y}_m(k+N))$ e as matrizes $\bar{C}_{m,i}$ e $\bar{D}_{m,i}$ ² dadas abaixo, sendo $C_{m,i}$ definida somente se $i \in I(m)$, de outra maneira ela se torna uma matriz nula.

$$\bar{C}_{m,i} = \begin{bmatrix} C_{m,i} \\ \sum_{j \in I(m)} \sum_{\omega \in \pi(j,1,i)} C_{m,j} A(\omega) \\ \vdots \\ \sum_{j \in I(m)} \sum_{\omega \in \pi(j,N-1,i)} C_{m,j} A(\omega) \end{bmatrix}$$

²Vale ressaltar que não existe transferência direta no modelo, sendo a matriz $\bar{D}_{m,i}$ um resultado da predição.

$$\bar{D}_{m,i} = \begin{bmatrix} \Psi \sum_{\omega \in \pi(j,1,i)} \zeta & 0 & \cdots & 0 \\ \Psi \sum_{\omega \in \pi(j,2,i)} \zeta & \Psi \sum_{\omega \in \pi(j,1,i)} \zeta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi \sum_{\omega \in \pi(j,N-1,i)} \zeta & \Psi \sum_{\omega \in \pi(j,N-2,i)} \zeta & \cdots & \Psi \sum_{\omega \in \pi(j,1,i)} \zeta \end{bmatrix}$$

em que foi utilizado $\Psi = \sum_{j \in I(m)}$ e $\zeta = C_{m,j}B(\omega)$ para facilitar a visualização da matriz.

Com estes vetores e matrizes são definidas as predições para as variáveis de saída do subsistema m ao longo do horizonte de tempo como uma função do estado atual da rede, $\mathbf{x}(k)$, e dos sinais de controle para o horizonte. Matematicamente a equação de predição da saída é dada por:

$$\bar{\mathbf{y}}_m = \sum_{i \in \bar{I}(m)} (\bar{C}_{m,i} \mathbf{x}_i(k) + \bar{D}_{m,i} \bar{\mathbf{u}}_i) \quad (2.7)$$

Na sequência será formulado o controlador MPC, que utilizará as equações de predição como parte de sua estrutura.

2.2 FORMULAÇÃO DO MPC

De maneira geral, os controladores MPC possuem alguns elementos principais, dados por:

Função objetivo, que quantifica o problema de controle, utilizado como critério de comparação na escolha das ações de controle durante a otimização. As funções objetivo podem ser dos mais variados tipos, porém é comum utilizar termos com o objetivo de seguimento de referência e esforço de controle (CAMACHO; BORDONS, 2004).

Restrições, que definem as limitações do processo, podendo ser de naturezas diversas, sendo as restrições mais comuns aplicadas nos sinais de saída, controle e taxa de variação de controle.

Algoritmo de otimização, que define o funcionamento do MPC, utilizando os demais elementos para calcular as ações de controle.

Modelo de predição, utilizado para prever as saídas futuras do sistema com respeito às ações de controle atuais. Este item foi discutido anterior-

mente na Seção 2.1, definido neste trabalho com modelos no espaço de estados.

A função objetivo escolhida possui uma parte que define a minimização do sinal de controle e outra parte que define a minimização da saída, com pontos ótimos em zero. Optou-se por este caso para facilitar a visualização e o desenvolvimento dos problemas. Adiante, no Capítulo 5, serão tratados os casos mais tradicionais, envolvendo seguimento de referência e minimização do incremento de controle. A função objetivo é matematicamente dada por:

$$J = \sum_{m=1}^M f_m, \quad (2.8)$$

sendo

$$f_m = \sum_{t=1}^N \|\hat{\mathbf{y}}_m(k+t|k)\|_{Q_m}^2 + \|\mathbf{u}_m(k+t-1)\|_{R_m}^2,$$

em que $\hat{\mathbf{y}}_m(k+t|k)$ é a previsão da saída $\mathbf{y}_m(k+t)$ com as informações obtidas até o instante k , $\|x\|_{\lambda}^2$ com a variável λ semi-definida positiva significa $x' \lambda x$, Q_m é uma matriz simétrica (*i.e.*, $Q_m = Q_m'$) e positiva semidefinida (denotado por $Q_m \succeq 0$) e $R_m = R_m'$ é positiva definida (denotado por $R_m \succ 0$).

Normalmente são utilizadas funções objetivo mais elaboradas, porém decidimos manter esta versão simplificada para as formulações atuais, facilitando a visualização e a formulação distribuída que será abordada posteriormente.

As restrições serão dadas nos sinais de saída e sinais de controle dos subsistemas. Em resumo, este trabalho é sobre a solução distribuída do problema MPC, dado por:

$$P : \min J \quad (2.9a)$$

$$\text{s.a : para } m \in \mathcal{M}, t = 1, \dots, N :$$

$$\mathbf{y}_m^{\min} \leq \hat{\mathbf{y}}_m(k+t|k) \leq \mathbf{y}_m^{\max} \quad (2.9b)$$

$$\mathbf{u}_m^{\min} \leq \mathbf{u}_m(k+t-1) \leq \mathbf{u}_m^{\max} \quad (2.9c)$$

O MPC resolve P em cada período de amostragem k e apenas os sinais de controle $\mathbf{u}(k)$ são implementados para o intervalo $[k, k+1]$. Na amostra seguinte, o horizonte é rolando para frente, P é instanciado a partir do tempo $k+1$ até $k+N+1$, e o processo é repetido.

Vale ressaltar aqui que no problema de controle foram consideradas restrições de acoplamento na saída dos subsistemas e foi permitido que a dinâmica do subsistema dependesse dos estados, além dos sinais de controle, dos subsistemas na vizinhança. Os acoplamentos decorrentes das restrições sobre

as saídas são mais complexos de serem tratados de maneira distribuída em relação aos acoplamentos devidos às restrições sobre os sinais de controle e função objetivo, tratadas em trabalhos anteriores (CAMPONOGARA; OLIVEIRA, 2009)

Observe que a função objetivo (2.9a) seria separável caso não existissem as dependências lineares dadas por (2.3) e (2.6), que introduzem termos quadráticos dependentes de \mathbf{u}_i e \mathbf{u}_j para $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Observação 1. P é um problema de programação quadrática convexo.

O problema P definido em (2.9) é reformulado em termos de variáveis de controle por substituição das variáveis de estado por (2.4) e das variáveis de saída por (2.7). As seguintes definições são necessárias em tal reformulação:

- $\bar{Q}_m = I_N \otimes Q_m$ em que I_N é uma matriz identidade $N \times N$ e \otimes denota o produto de Kronecker³,
- $H_{m,m,m} = 2(\bar{D}'_{m,m}\bar{Q}_m\bar{D}_{m,m} + \bar{R}_m)$ com $\bar{R}_m = I_N \otimes R_m$,
- $H_{m,i,j} = 2(\bar{D}'_{m,i}\bar{Q}_m\bar{D}_{m,j})$ para $i, j \in \bar{I}(m) \setminus \{m\}$ em que i ou $j \neq m$,
- $\mathbf{g}_{m,j} = 2(\sum_{i \in \bar{I}(m)} \bar{D}'_{m,j}\bar{Q}_m\bar{C}_{m,i}\mathbf{x}_i(k))$, $j \in \bar{I}(m)$,
- $c_m = \sum_{i \in \bar{I}(m)} \sum_{j \in \bar{I}(m)} \mathbf{x}_i(k)' \bar{C}'_{m,i}\bar{Q}_m\bar{C}_{m,j}\mathbf{x}_j(k)$.

sendo que \setminus significa exceto. Com esta terminologia, o problema MPC definido em (2.9) pode ser reescrito como:

$$P : \min f(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{i \in \bar{I}(m)} \sum_{j \in \bar{I}(m)} \bar{\mathbf{u}}_i' H_{m,i,j} \bar{\mathbf{u}}_j + \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{i \in \bar{I}(m)} \mathbf{g}'_{m,i} \bar{\mathbf{u}}_i + \sum_{m \in \mathcal{M}} c_m \quad (2.10a)$$

s.a : para todo $m \in \mathcal{M}$:

$$\bar{\mathbf{y}}_m^{\min} \leq \sum_{i \in \bar{I}(m)} (\bar{C}_{m,i}\mathbf{x}_i(k) + \bar{D}_{m,i}\bar{\mathbf{u}}_i) \leq \bar{\mathbf{y}}_m^{\max} \quad (2.10b)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_m^{\min} \leq \bar{\mathbf{u}}_m \leq \bar{\mathbf{u}}_m^{\max} \quad (2.10c)$$

em que $\bar{\mathbf{y}}_m^{\min} = (\mathbf{y}_m^{\min}, \dots, \mathbf{y}_m^{\min})$ é um vetor de dimensão apropriada, $\bar{\mathbf{y}}_m^{\max}$, $\bar{\mathbf{u}}_m^{\min}$ e $\bar{\mathbf{u}}_m^{\max}$ são definidos de maneira similar. Em 2.10b, $\mathbf{x}_i(k)$ deve ser atualizado

³ \bar{Q}_m é bloco diagonal com cada bloco sendo Q_m .

após cada período de amostragem e, em seguida, pode ser combinado com $\bar{\mathbf{y}}_m^{\min}$ e $\bar{\mathbf{y}}_m^{\max}$.

Vale ressaltar aqui que a restrição (2.10c) implica em um conjunto factível fechado e limitado, consequentemente compacto. Esta observação será utilizada mais adiante em definições de convexidade.

Corolário 1. *O conjunto factível é compacto.*

Para simplificar o projeto do algoritmo, o problema P dado em (2.10) é colocado em uma forma compacta:

$$P: \quad \min \quad f(\bar{\mathbf{u}}) \quad (2.11a)$$

$$\text{s.a: } h_i(\bar{\mathbf{u}}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.11b)$$

sendo que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ representa o objetivo e $h_1, \dots, h_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ representam as restrições dadas por (2.10b) e (2.10c), com $n = N \sum_{m \in \mathcal{M}} p_m$ sendo a dimensão de $\bar{\mathbf{u}}$ e p sendo o número de desigualdades. Na realidade, $f(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}' H \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{g}' \bar{\mathbf{u}} + c$ e $h_i = \mathbf{a}_i' \bar{\mathbf{u}} - b_i$, para uma matriz adequada H , vetores \mathbf{g} e \mathbf{a}_i , e constantes c e b_i . $H \succeq 0$ tendo em conta a Observação 1.

Proposição 1. *$f(\bar{\mathbf{u}})$ é fortemente convexa.*

Demonstração. De (2.9a),

$$f = \sum_{m=1}^M (\bar{\mathbf{y}}_m' \bar{Q}_m \bar{\mathbf{y}}_m + \bar{\mathbf{u}}_m' \bar{R}_m \bar{\mathbf{u}}_m) = \bar{\mathbf{y}}' \bar{Q} \bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{u}}' \bar{R} \bar{\mathbf{u}}$$

sendo que \bar{Q} é bloco diagonal com blocos sendo $\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_M$, \bar{R} é bloco diagonal com blocos sendo $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_M$, e $\bar{\mathbf{y}}$ e $\bar{\mathbf{u}}$ são vetores apropriados coletando todas as variáveis de controle e as predições de saídas. Reescrevendo em função dos sinais de controle, a função fica da forma

$$f = (\bar{D}\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{d}})' \bar{Q} (\bar{D}\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{d}}) + \bar{\mathbf{u}}' \bar{R} \bar{\mathbf{u}}$$

para \bar{D} e $\bar{\mathbf{d}}$ adequados. Realocando os termos, tem-se:

$$f = \bar{\mathbf{u}}' (\bar{D}' \bar{Q} \bar{D} + \bar{R}) \bar{\mathbf{u}} + 2 \bar{\mathbf{d}}' \bar{Q} \bar{D} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{d}}' \bar{Q} \bar{\mathbf{d}} = f(\bar{\mathbf{u}}),$$

que é função de $\bar{\mathbf{u}}$. Seja λ o menor autovalor da Hessiana $\nabla^2 f(\bar{\mathbf{u}}) = 2(\bar{D}' \bar{Q} \bar{D} + \bar{R})$. Já que $\nabla^2 f(\bar{\mathbf{u}}) \succ 0$, $\lambda > 0$ e $\nabla^2 f(\bar{\mathbf{u}}) \succeq \lambda I$ para todo $\bar{\mathbf{u}}$, $f(\bar{\mathbf{u}})$ é fortemente convexa. \square

Corolário 2. *$f(\bar{\mathbf{u}})$ é estritamente convexa.*

2.3 DISTRIBUIÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE

Como foi dito anteriormente, este trabalho tem como objetivo resolver o problema P de maneira distribuída, utilizando uma rede de agentes distribuídos, ao invés de usar um algoritmo centralizado tradicional. Neste caso, o problema de controle é reduzido ao ponto de vista do subsistema, chamado aqui subproblema P_m , e a cada subproblema é atribuído um agente, que deve resolver P_m utilizando os sinais locais do subsistema m e os sinais dos subsistemas na sua vizinhança.

O primeiro passo é a decomposição de P em um conjunto $\{P_m\}$ de subproblemas menores, porém acoplados. Dado um agente m e um horizonte de predição de tamanho N , é necessário definir alguns conjuntos para estabelecer a relação deste agente com seus vizinhos. Estes conjuntos são:

- $\bar{O}(m) = \{i : m \in \bar{I}(i)\}$, que consiste nos subsistemas cujo objetivo e restrições são afetados pelo subsistema m ; este conjunto será denominado *vizinhança de saída* do subsistema m ; note que $m \in \bar{O}(m)$;
- $\widetilde{\mathcal{N}}(m) = \{i : \exists j, j \neq i, m, \text{ tal que } i, m \in \bar{I}(j)\} \setminus (\bar{I}(m) \cup \bar{O}(m))$, chamada de *vizinhança indireta*, consiste dos subsistemas i que não influenciam ou não são influenciados pelo subsistema m , mas ambos afetam a função objetivo e as restrições de saída de algum subsistema j ;
- $\mathcal{N}(m) = (\bar{I}(m) \cup \bar{O}(m) \cup \widetilde{\mathcal{N}}(m)) \setminus \{m\}$, será denominada como a *vizinhança* e compreende os subsistemas que são acoplados com o subsistema m .

Utilizando como exemplo a rede da Figura 1 e $N = 2$, temos alguns destes conjuntos dados por:

Para o subsistema 1: $\bar{I}(1) = \{1\}$, $\bar{O}(1) = \{1, 2, 3\}$, $\widetilde{\mathcal{N}}(1) = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N}(1) = \{2, 3, 5, 6\}$.

Para o subsistema 3: $\bar{I}(3) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $\bar{O}(3) = \{3, 6\}$, $\widetilde{\mathcal{N}}(3) = \{4\}$ e $\mathcal{N}(3) = \{1, 2, 4, 5, 6\}$.

O problema P pode ser decomposto em subproblemas de diversas formas. Por exemplo, modelos e algoritmos para decomposição imperfeita são encontrados em (CAMPONOGARA; TALUKDAR, 2005).

Este trabalho utiliza uma decomposição do problema P em $\{P_m\}$ de maneira *perfeita*, isto é, existe uma equivalência entre P e $\{P_m\}$. Com isto, as formulações ascendente e descendente são equivalentes, sendo possível formular cada P_m a partir dos conjuntos definidos anteriormente ou removendo

do problema P todos os termos da função objetivo e descartando todas as restrições que não dependem de $\bar{\mathbf{u}}_m$

Para uma decomposição perfeita, a visão do agente m sobre as variáveis de controle do sistema global pode ser dividida em:

- *variáveis locais*: vetor $\bar{\mathbf{u}}_m$ cujos valores são definidos pelo agente m ;
- *variáveis da vizinhança*: vetor $\bar{\mathbf{w}}_m = (\bar{\mathbf{u}}_i : i \in \mathcal{N}(m))$ cujos valores são definidos pelos agentes na vizinhança;
- *variáveis remotas*: vetor $\bar{\mathbf{r}}_m = (\bar{\mathbf{u}}_i : i \notin \mathcal{N}(m) \cup \{m\})$ com todas as demais variáveis.

Para qualquer agente m , $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m, \bar{\mathbf{r}}_m)$ é dado através de uma reordenação das variáveis. Um subproblema P_m é definido como:

$$P_m(\bar{\mathbf{w}}_m) : \min f_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_m' H_m \bar{\mathbf{u}}_m + \mathbf{g}_m' \bar{\mathbf{u}}_m + c_m \quad (2.12a)$$

sujeito a:

$$\bar{\mathbf{y}}_i^{\min} \leq \sum_{j \in \bar{\mathcal{I}}(i)} \bar{C}_{i,j} \mathbf{x}_j(k) + \sum_{j \in \bar{\mathcal{I}}(i)} \bar{D}_{i,j} \bar{\mathbf{u}}_j \leq \bar{\mathbf{y}}_i^{\max}, \quad i \in \bar{\mathcal{O}}(m) \quad (2.12b)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_m^{\min} \leq \bar{\mathbf{u}}_m \leq \bar{\mathbf{u}}_m^{\max} \quad (2.12c)$$

em que H_m e \mathbf{g}_m são agrupamentos de termos dados pelas equações (2.13a) e (2.13b) respectivamente, conforme segue:

$$H_m = \sum_{i \in \bar{\mathcal{O}}(m)} H_{i,m,m} \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{g}_m = \sum_{i \in \bar{\mathcal{O}}(m)} \mathbf{g}_{i,m} + \frac{1}{2} \sum_{i \in \bar{\mathcal{O}}(m)} \sum_{j \in \bar{\mathcal{I}}(i) \setminus \{m\}} (H'_{i,j,m} + H_{i,m,j}) \bar{\mathbf{u}}_j \quad (2.13b)$$

Para facilitar a visualização, o subproblema P_m é reescrito como:

$$P_m(\bar{\mathbf{w}}_m) : \min f_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m) \quad (2.14a)$$

$$\text{s.a.} : h_i(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m) \leq 0, \quad i \in h(m) \quad (2.14b)$$

sendo $h(m) = \{i : h_i \text{ função de } \bar{\mathbf{u}}_m\}$. Como foi utilizada uma decomposição perfeita, h_i não é função de $\bar{\mathbf{r}}_m$ para todo $i \in h(m)$, e h_i não é função de $\bar{\mathbf{u}}_m$ para todo $i \notin h(m)$.

Corolário 3. $f_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m)$ é fortemente convexa em $\bar{\mathbf{u}}_m$ (para $\bar{\mathbf{w}}_m$ fixo) e também em $(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m)$.

Seja $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_p)$ um vetor de funções com todas as restrições em P . Então, $\Omega = \{\bar{\mathbf{u}} : \mathbf{h}(\bar{\mathbf{u}}) \leq \mathbf{0}\}$ é o conjunto factível. Um vetor $\bar{\mathbf{u}}^* \in \Omega$ é um ponto fixo para o conjunto do subproblema $\{P_m\}$ se e somente se $\bar{\mathbf{u}}^*$ é uma solução ótima para $P_m(\bar{\mathbf{w}}_m^*)$ para cada m .

Sem restrições acoplando os subsistemas, tal como (2.10b) em P , pode ser mostrado que $\bar{\mathbf{u}}^*$ é um ponto fixo para $\{P_m\}$ se e somente se $\bar{\mathbf{u}}^*$ satisfaz as condições de otimalidade de primeira ordem para P , e assim condições de ótimo global, pois P é convexo (CAMPONOGARA; OLIVEIRA, 2009). Com esta propriedade, resolver $\{P_m\}$ com uma rede de agentes é visto como um jogo dinâmico, em que cada agente reage às decisões de seus vizinhos de modo a melhorar a sua função custo (TALUKDAR; CAMPONOGARA, 2001).

No entanto, a equivalência entre um ponto fixo de $\{P_m\}$ e uma solução ótima para P não é válida na presença de restrições de acoplamento, cujo processo de otimização pode chegar em pontos subótimos em alguns casos.

Para facilitar o entendimento desta observação, considere um exemplo ilustrativo apresentado em (2.15a), cuja solução ótima é dada por $\mathbf{u}^* = (4, 3)$:

$$P : \min f(u_1, u_2) = \frac{1}{2}u_1^2 - u_1u_2 + u_2^2 - 4u_2 \quad (2.15a)$$

s.a :

$$-u_1 + 2u_2 \leq 2, \quad (2.15b)$$

$$-u_1 \leq -1, \quad (2.15c)$$

$$u_1 \leq 7, \quad (2.15d)$$

$$-u_2 \leq -\frac{1}{2}. \quad (2.15e)$$

A estratégia de otimização estabelecida primeiramente foi através de um método sequencial, isto é, dado u_2 , o agente 1 ajusta u_1 para o valor de reação $r_1(u_2) = \arg \min_{u_1} \{f(u_1, u_2) : -u_1 + 2u_2 \leq 2, -u_1 \leq -1, u_1 \leq 7\}$. Similarmente, o agente 2 reage com $r_2(u_1) = \arg \min_{u_2} \{f(u_1, u_2) : -u_1 + 2u_2 \leq 2, -u_2 \leq -\frac{1}{2}\}$. Com uma estratégia deste tipo, todos os pontos no segmento de linha $\{(u_1, (2+u_1)/2) : 2 \leq u_1 \leq 7\}$ se tornam pontos fixos para $P_1(u_2)$ e $P_2(u_1)$, ou seja, o primeiro ponto fixo corresponde ao ponto onde a direção horizontal se torna tangente à curva de nível, enquanto os demais pontos apontam para o lado de fora da curva de nível, direção contrária ao sentido de minimização do problema P .

Na Figura 2 estão representadas as curvas de contorno de f , a região factível e um subconjunto de pontos fixos. Também é possível observar a trajetória $(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})$ traçada começando em $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}) = (3, 1)$, sendo $u_1^{(2i+1)} = r_1(u_2^{(2i)})$ e $u_2^{(2i+1)} = r_2(u_1^{(2i)})$ para $i = 0, 1, 2, \dots$ e $u_1^{(2i)} = u_1^{(2i-1)}$ e $u_2^{(2i)} =$

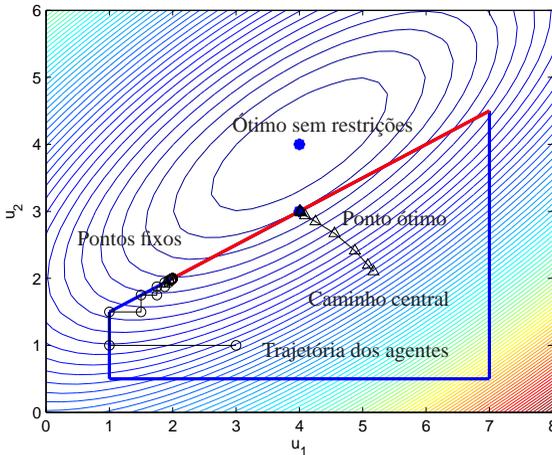


Figura 2 – Ilustração de não equivalência entre os pontos fixos e as soluções ótimas na presença de restrições de acoplamento.

$r_2(u_1^{(2i-1)})$ para $i = 1, 2, 3, \dots$. A trajetória converge para o ponto fixo $(u_1, u_2) = (2, 2)$, ou seja, converge para um ponto subótimo.

Como foi dito anteriormente, o ponto ótimo é $\mathbf{u}^* = (4, 3)$, conforme indicado pelo caminho central, que caracteriza a solução algorítmica a ser desenvolvida nesta tese.

A utilização do DMPC com estratégias de coordenação deste tipo não é aceitável, podendo o sistema operar em pontos muito distantes do ótimo. Uma alternativa para solucionar este problema foi a concepção de um algoritmo de ponto-interior distribuído, que induz um comportamento de cooperação entre os agentes da rede de tal forma que os subsistemas consigam evoluir no sentido de um ótimo global, produzindo uma trajetória similar à indicada como caminho central na Figura 2. Este algoritmo será tratado com detalhes no Capítulo 3.

2.4 SUMÁRIO

Este capítulo tratou da modelagem de sistemas dinâmicos através de redes dinâmicas lineares utilizando variáveis de estado. Foi também abordada a formulação dos problemas de controle preditivo para controlar estas

redes, tanto centralizados quanto distribuídos, manipulando os problemas até chegar a formulações quadráticas. No próximo capítulo será apresentado um algoritmo para resolver os problemas distribuídos, de tal forma que a rede de agentes consiga convergir para a solução ótima.

3 ALGORITMO DE PONTO-INTERIOR DISTRIBUÍDO

Uma das contribuições deste trabalho é o desenvolvimento de um algoritmo de otimização que utiliza o método de ponto-interior de maneira distribuída voltado à implementação da estratégia DMPC, garantindo assim que a rede de agentes consiga convergir para o resultado ótimo global.

3.1 MÉTODO DE BARREIRA DISTRIBUÍDA

Foi desenvolvido um método de barreira logarítmica distribuído para que a rede de agentes consiga resolver o conjunto de subproblemas $\{P_m\}$, que contam também com restrições de saída e entrada de controle, conforme definido nas equações (2.11a)–(2.11b). Primeiramente, o método de barreira logarítmica padrão é apresentado e, para facilitar o entendimento do trabalho desenvolvido, é aplicado ao problema MPC centralizado. O Apêndice A pode ser consultado para definições básicas de otimização convexa.

Observação 2. *As propriedades de P dadas por (2.11a)–(2.11b) são:*

- i) *P é um problema convexo porque f é convexa e seu conjunto factível Ω é um conjunto convexo;*
- ii) *$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é fortemente convexa e duas vezes continuamente diferenciável;*
- iii) *$h_1, \dots, h_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são lineares, e assim duas vezes continuamente diferenciáveis.*

Hipótese 1. *O interior do conjunto factível é não vazio, i.e., $\bar{\Omega} = \{\bar{\mathbf{u}} : h_i(\bar{\mathbf{u}}) < 0, i = 1, \dots, p\} \neq \emptyset$.*

Em Strichartz (2000), que trata de análise de convexidade, é encontrado o seguinte teorema:

Teorema 1. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida para um conjunto X compacto. A imagem $I = \{f(x) : x \in X\}$ é um conjunto compacto, portanto um intervalo fechado. Logo, a função f possui um ponto mínimo e um máximo em X .*

Conforme definido no Corolário 1, nosso estudo de caso possui um domínio compacto. A partir do Corolário 1 e o Teorema 1, conclui-se que existe uma solução ótima para o problema P .

Corolário 4. *Existe uma solução ótima $\bar{\mathbf{u}}^*$ para P .*

3.1.1 Método de Barreira Logarítmica

O objetivo da formulação é transformar o problema de otimização com restrições em um problema irrestrito no qual o método de Newton pode ser aplicado. No caso ideal, as restrições de desigualdades estariam implícitas na função objetivo (BOYD; VANDENBERGHE, 2004) podendo ser descritas como:

$$\min f(\bar{\mathbf{u}}) + \mathcal{I}(\bar{\mathbf{u}})$$

em que $\mathcal{I} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma função indicadora para os reais não positivos, dada por:

$$\mathcal{I}(\bar{\mathbf{u}}) = \begin{cases} 0 & \bar{\mathbf{u}} \leq 0 \\ \infty & \bar{\mathbf{u}} > 0. \end{cases}$$

Porém, utilizar diretamente este conjunto de desigualdades torna a função objetivo não-diferenciável, o que impede a aplicação do método de Newton.

Para contornar este problema, é utilizada uma representação das restrições na função objetivo através de uma função de barreira, que é uma função real dentro do interior do conjunto, que tende ao infinito quando a solução se aproxima da fronteira definida por alguma restrição. Uma das possibilidades é a função *barreira logarítmica*, que aplicada ao problema P fornece:

$$\phi(\bar{\mathbf{u}}) = - \sum_{i=1}^p \ln(-h_i(\bar{\mathbf{u}})) \quad (3.1)$$

com domínio $\text{dom } \phi = \bar{\Omega}$. A formulação aproximada que representa as desigualdades é chamada aqui de *problema de centralização*, matematicamente definido como:

$$P(\varepsilon) : \min_{\bar{\mathbf{u}} \in \text{dom } \theta} \theta(\bar{\mathbf{u}}) = f(\bar{\mathbf{u}}) + \varepsilon \phi(\bar{\mathbf{u}}) \quad (3.2)$$

em que $\text{dom } \theta = \bar{\Omega}$ e $\varepsilon > 0$ definem a precisão da aproximação. Independentemente do valor de ε , a barreira logarítmica $\phi(\bar{\mathbf{u}}) \rightarrow \infty$ se $h_i(\bar{\mathbf{u}}) \rightarrow 0$ para qualquer i .

Vale ressaltar que a função $\theta(\bar{\mathbf{u}})$ é duas vezes continuamente diferenciável, que aproxima o problema (2.11a)–(2.11b) como um problema irrestrito para o qual o método de gradiente descendente e o método de Newton podem ser aplicados (NOCEDAL; WRIGHT, 1999; BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

A Figura 3 representa a curva indicadora \mathcal{I} e algumas curvas da função

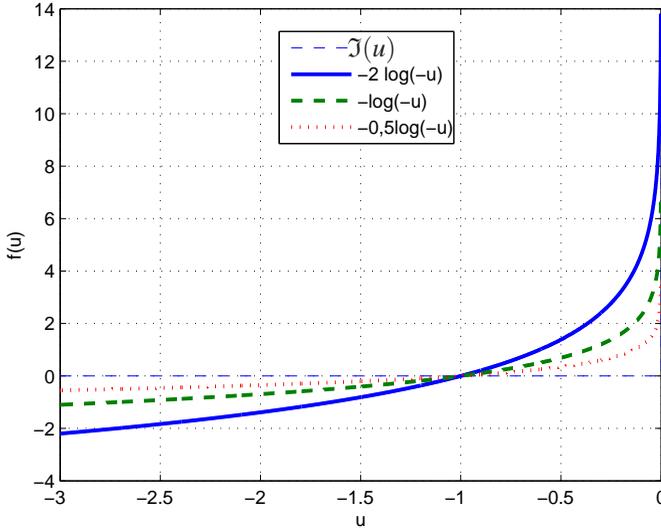


Figura 3 – Função indicadora e curvas de aproximação da função barreira logarítmica

barreira logarítmica, variando o valor de ε , sendo possível notar a qualidade da aproximação das curvas em função do parâmetro ε .

Assim, a minimização irrestrita pode obter uma solução para $P(\varepsilon)$ de precisão satisfatória com um ε suficientemente pequeno. No entanto, a função $\theta(\bar{\mathbf{u}})$ torna-se difícil de minimizar quando $\varepsilon \rightarrow 0$, porque a sua Hessiana varia rapidamente perto da fronteira da região factível.

Ao invés disso, o método de barreira resolve uma sequência de problemas irrestritos $P(\varepsilon)$ diminuindo ε a cada problema resolvido e iniciando cada minimização a partir da solução anterior, aumentando assim a precisão dos resultados. Assumindo que as restrições h_i são lineares, o gradiente da barreira logarítmica e sua Hessiana são dados por:

$$\nabla\phi(\bar{\mathbf{u}}) = -\sum_{i=1}^p \frac{\nabla h_i(\bar{\mathbf{u}})}{h_i(\bar{\mathbf{u}})}$$

$$\nabla^2\phi(\bar{\mathbf{u}}) = \sum_{i=1}^p \frac{\nabla h_i(\bar{\mathbf{u}})\nabla h_i(\bar{\mathbf{u}})'}{h_i(\bar{\mathbf{u}})^2}$$

Sabendo que $\theta(\bar{\mathbf{u}})$ é estritamente convexo, $P(\varepsilon)$ possui uma solução

única $\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)$, conhecida como *ponto central*. $\mathcal{P} = \{\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ é o *caminho central*, o qual é mostrado na Figura 2. Um ponto central $\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)$ é totalmente caracterizado pela seguinte condição de otimalidade de primeira ordem, dada por (3.3), que é necessária e suficiente:

$$\nabla \theta = \nabla f(\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)) + \varepsilon \sum_{i=1}^p \frac{1}{-h_i(\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon))} \nabla h_i(\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)) = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

Considere o Lagrangeano de P dado por:

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}, \lambda) = f(\bar{\mathbf{u}}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i h_i(\bar{\mathbf{u}}) \quad (3.4)$$

Dados quaisquer multiplicadores de Lagrange não negativos, $\lambda > \mathbf{0}$,

$$\min\{\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}, \lambda) : \bar{\mathbf{u}}\} = d(\lambda)$$

é um limite inferior para o objetivo ótimo f^* de P . Para ver isso, usamos a condição (3.3) para mostrar que cada ponto central $\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)$ rende um ponto factível dual. Associando com $\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)$ os multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda_i(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{h_i(\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon))}, \quad i = 1, \dots, p$$

Claramente, $\lambda_i(\varepsilon) > 0$ porque $h_i(\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)) < 0$ para todo i . Usando a condição de otimalidade de primeira ordem (3.3), pode ser mostrado que $(\lambda_i(\varepsilon), \bar{\mathbf{u}}(\varepsilon))$ é um par factível dual e, portanto:

$$\begin{aligned} d(\lambda(\varepsilon)) &= \min\{\mathcal{L}(\bar{\mathbf{u}}, \lambda(\varepsilon)) : \bar{\mathbf{u}}\} \\ &= f(\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)) + \varepsilon \sum_{i=1}^p -\frac{1}{h_i(\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon))} h_i(\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \\ &= f(\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)) - \varepsilon p, \end{aligned}$$

produzindo assim um limite inferior sobre o objetivo ótimo:

$$f(\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)) - f^* \leq \varepsilon p, \quad (3.5)$$

confirmando que $\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)$ converge para $\bar{\mathbf{u}}^*$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Resolver $P(\varepsilon)$ com $\varepsilon \leq \tau/p$, para uma precisão desejada τ , não é eficiente. Ao invés disto, o método de barreira resolve uma sequência de problemas de centralização decrescendo ε até que $\varepsilon \leq \tau/p$, conforme descrito no Algoritmo 1.

O método de barreira apresentado é um arcabouço geral para otimiza-

Algoritmo 1: Método de Barreira

entrada: $\bar{\mathbf{u}}$ estritamente factível, ε inicial, taxa de decrescimento

$\mu \in (0, 1)$ e tolerância τ ;

inicializar: $l := -1$ e $\varepsilon^{(0)} := \varepsilon$;

repita

$l := l + 1$;

passo de centralização: obter $\bar{\mathbf{u}}^{(l)}$ através da solução de $P(\varepsilon^{(l)})$ com solução inicial $\bar{\mathbf{u}}$;

se $\varepsilon^{(l)} > \tau/p$ **então**

$\bar{\mathbf{u}} := \bar{\mathbf{u}}^{(l)}$;
 $\varepsilon^{(l+1)} := \mu\varepsilon^{(l)}$;
 └──

até que $\varepsilon^{(l)} \leq \tau/p$;

saída: $\bar{\mathbf{u}}^{(l)}$

ção de problemas com restrições de desigualdade, que são resolvidos através da solução de uma sequência de problemas irrestritos. Questões como a escolha da taxa de decréscimo μ , a escolha da solução inicial e o parâmetro inicial ε , os quais desempenham um papel importante no desempenho do algoritmo, serão abordados mais tarde. O mesmo método é utilizado na estratégia DMPC para resolver o conjunto de subproblemas $\{P_m\}$, porém incluindo toda a questão de coordenação da rede de agentes.

3.1.2 Método do Gradiente Descendente Distribuído para a Centralização

Aqui, um método de direção descendente é desenvolvido para uma rede de agentes resolver $P(\varepsilon)$, equivalente a $\{P_m\}$, a partir de um sinal de controle $\bar{\mathbf{u}}$ estritamente factível. Os agentes produzem uma série de iterações $\bar{\mathbf{u}}^{(l)}$ que convergem para $\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)$. Dadas as variáveis da vizinhança $\bar{\mathbf{w}}_m$, o subproblema de centralização associado com o agente m é dado por:

$$P_m(\varepsilon, \bar{\mathbf{w}}_m) : \min_{\bar{\mathbf{u}}_m \in \text{dom } \theta_m} \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) = f_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m) + \varepsilon \phi_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m) \quad (3.6)$$

sendo que $\phi_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m) = -\sum_{i \in h(m)} \ln(-h_i(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m))$ é a função de barreira logarítmica das restrições que dependem de $\bar{\mathbf{u}}_m$. Dado o par $(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)}, \bar{\mathbf{w}}_m^{(l)})$, o agente m produz a próxima iteração $\bar{\mathbf{u}}_m^{(l+1)}$ dando um passo na direção do

gradiente descendente:

$$\bar{\mathbf{u}}_m^{(l+1)} = \bar{\mathbf{u}}_m^{(l)} - s_m^{(l)} \nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)}), \quad (3.7)$$

em que $s_m^{(l)} > 0$ define o tamanho do passo na direção $-\nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})$. Para simplificar a notação, o operador gradiente é calculado em relação às variáveis explicitamente enunciadas entre parênteses, considerando constantes as variáveis não enunciadas. Por exemplo, o gradiente $\nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})$ é calculado sobre $\bar{\mathbf{u}}_m$ para um vetor fixo $\bar{\mathbf{w}}_m$ definido em $P_m(\varepsilon, \bar{\mathbf{w}}_m)$ e calculado em $\bar{\mathbf{u}}_m = \bar{\mathbf{u}}_m^{(l)}$.

Um vetor $\mathbf{d}_m^{(l)}$ é uma direção de descenso se $\nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})' \mathbf{d}_m^{(l)} < 0$. Este trabalho foca na utilização da direção do gradiente, mas existem outras opções, tal como a direção de Newton, $-\nabla^2 \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})^{-1} \nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})$, em que detalhes de seu desenvolvimento e análise de convergência para o caso centralizado podem ser encontrados em Boyd e Vandenberghe (2004).

Seguindo com a direção do gradiente, duas estratégias para encontrar o passo são as seguintes:

- **Busca linear exata:** o passo induz a máxima redução de custo sobre a direção de descenso:

$$s_m^{(l)} = \arg \min_{s>0} \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)} - s \nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})), \quad (3.8)$$

que é um problema de minimização de uma variável. Como θ_m é convexo, o passo ideal pode ser calculado utilizando buscas especiais, tais como o método da bissecção (BURDEN; FAIRES, 2005).

- **Busca linear com *backtracking*:** muitas vezes uma pesquisa inexata ao longo da direção de descenso produz uma diminuição suficiente no objetivo. *Backtracking* é uma busca linear inexata que depende de dois parâmetros, α e β , em que $\alpha \in (0; 0,5)$ e $\beta \in (0; 1)$. O passo é definido como $s_m^{(l)} = \beta^t$, no qual $t \geq 0$ é o menor inteiro tal que:

$$\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)} - \beta^t \nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})) \leq \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)}) - \alpha \beta^t \|\nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})\|^2$$

Para β^t suficientemente pequeno, o *backtracking* eventualmente termina porque

$$\begin{aligned} \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)} - \beta^t \nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})) &\approx \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)}) - \beta^t \|\nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})\|^2 \\ &< \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)}) - \alpha \beta^t \|\nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})\|^2 \text{ com } \alpha < 1 \end{aligned}$$

São necessárias algumas hipóteses para a sequência $\bar{\mathbf{u}}^{(l)}$ convergir para um ponto estacionário¹ de $P(\varepsilon)$, e assim um ótimo. As hipóteses (2)–(5) são utilizadas para definir como os agentes trabalham e resolvem $P_m(\varepsilon, \bar{\mathbf{w}}_m)$.

Hipótese 2. (Trabalho Síncrono) *Se o agente m atualiza suas variáveis na iteração l , então:*

1. *o agente m usa $\bar{\mathbf{w}}_m = \bar{\mathbf{w}}_m^{(l)}$ e segue o método de descenso para obter uma solução aproximada $\bar{\mathbf{u}}_m^{(l+1)}$ para $P_m(\varepsilon, \bar{\mathbf{w}}_m)$;*
2. *$\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)}$ não é uma solução ótima para $P_m(\varepsilon, \bar{\mathbf{w}}_m)$; e*
3. *cada vizinho do agente m não itera, significando que $\bar{\mathbf{u}}_i^{(l+1)} = \bar{\mathbf{u}}_i^{(l)}$ para todo $i \in \mathcal{N}(m)$.*

Hipótese 3. (Trabalho Contínuo e Máximo) *Seja $\mathcal{J}(l) \subseteq \mathcal{M}$ o conjunto de agentes tal que $\|\nabla\theta_j(\bar{\mathbf{u}}_j^{(l)})\| = \max\{\|\nabla\theta_i(\bar{\mathbf{u}}_i^{(l)})\| : i \in \mathcal{M}\}$ para todo $j \in \mathcal{J}(l)$. Se $\bar{\mathbf{u}}^{(l)}$ não é ótimo para $P(\varepsilon)$ na iteração l , então qualquer agente $m(l) \in \mathcal{J}(l)$ realiza uma busca linear com backtracking ou busca exata, começando em $\bar{\mathbf{u}}_{m(l)}^{(l)}$, para produzir sua próxima solução $\bar{\mathbf{u}}_{m(l)}^{(l+1)}$.*

Vale ressaltar aqui que, para realizar as análises de convergência, foi assumido que todos os agentes realizam o mesmo tipo de busca. Porém, é possível realizar uma abordagem mista, com um grupo de agentes executando busca exata e outro grupo executando busca inexata, pois em ambos os casos os agentes iriam garantir um decréscimo maior ou igual ao exigido pela condição de Armijo(NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

Observação 3. $\theta(\bar{\mathbf{u}}) = \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m) + \bar{\theta}_m(\bar{\mathbf{w}}_m, \bar{\mathbf{r}}_m)$ para todo $m \in \mathcal{M}$, dada uma função apropriada $\bar{\theta}_m$.

A proposição abaixo é uma consequência da decomposição perfeita do problema, pela qual cada problema de agente $P_m(\bar{\mathbf{w}}_m)$ e problema de barreira $P_m(\varepsilon, \bar{\mathbf{w}}_m)$ englobam todos os termos e restrições do objetivo de P que dependem de $\bar{\mathbf{u}}_m$.

Proposição 2. $\bar{\mathbf{u}}^*$ é um ponto estacionário para $P(\varepsilon)$ se, e somente se, o par $(\bar{\mathbf{u}}_m^*, \bar{\mathbf{w}}_m^*)$ é um ponto estacionário para $P_m(\varepsilon, \bar{\mathbf{w}}_m^*)$ para todo $m \in \mathcal{M}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \nabla\theta(\bar{\mathbf{u}}^*) &= (\nabla_{\bar{\mathbf{u}}_1}\theta(\bar{\mathbf{u}}^*), \dots, \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_M}\theta(\bar{\mathbf{u}}^*)) \\ &= (\nabla_{\bar{\mathbf{u}}_1}\theta_1(\bar{\mathbf{u}}_1^*, \bar{\mathbf{w}}_1^*), \dots, \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_M}\theta_M(\bar{\mathbf{u}}_M^*, \bar{\mathbf{w}}_M^*)) \end{aligned}$$

¹Um vetor satisfazendo as condições de otimalidade de primeira ordem.

da Observação 3. Assim, $\bar{\mathbf{u}}^*$ é estacionário para $P(\varepsilon)$, i.e., $\nabla\theta(\bar{\mathbf{u}}^*) = \mathbf{0} \iff \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m}\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^*, \bar{\mathbf{w}}_m^*) = \mathbf{0}$ para todo $m \in \mathcal{M} \iff$ o par $(\bar{\mathbf{u}}_m^*, \bar{\mathbf{w}}_m^*)$ é estacionário para $P_m(\varepsilon, \bar{\mathbf{w}}_m^*)$ para todo $m \in \mathcal{M}$. \square

Claramente, a função $\theta(\bar{\mathbf{u}})$ é estritamente convexa já que $f(\bar{\mathbf{u}})$ é fortemente convexa e $\phi(\bar{\mathbf{u}})$ é convexa. Para o propósito da análise de convergência, a hipótese (4) é normalmente feita.

Hipótese 4. *O conjunto subnível $L = \{\bar{\mathbf{u}} \in \text{dom}\theta : \theta(\bar{\mathbf{u}}) \leq \theta(\bar{\mathbf{u}}^{(0)})\}$ é fechado para qualquer $\bar{\mathbf{u}}^{(0)} \in \text{dom}\theta$ (BOYD; VANDENBERGHE, 2004)².*

Hipótese 5. *A função $\theta(\bar{\mathbf{u}})$ é fortemente convexa em todo o domínio $\text{dom}\theta$.*

Uma vez que f é fortemente convexa em todo o domínio $\text{dom}\theta$, existem constantes positivas λ^\dagger e Λ^\dagger tal que $\lambda^\dagger I \preceq \nabla^2\theta(\bar{\mathbf{u}}) \preceq \Lambda^\dagger I$.

3.1.3 Análise de Convergência para Busca Linear Exata

A Hipótese 2 assegura que somente agentes desacoplados podem trabalhar simultaneamente, ou seja, se o agente i e j iteram então $\bar{\mathbf{u}}_i$ não é parte de $\bar{\mathbf{w}}_j$ e vice-versa. Assim, as Hipóteses 2 e 3 nos permitem, para o propósito da análise de convergência, assumir que somente o agente $m(l)$ atualiza sua decisão na iteração l , mesmo que outros agentes não vizinhos do agente $m(l)$ possam iterar e reduzir a função custo global θ . Porque θ_m é fortemente convexo em $(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m)$, uma consequência da Hipótese 5 e de acordo com a Hipótese 4, segue que:

$$\lambda I \preceq \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m}^2 \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m) \preceq \Lambda I, \quad \text{para todo } (\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{w}}_m, \bar{\mathbf{r}}_m) \in \bar{\Omega} \text{ e todo } m \in \mathcal{M} \quad (3.9)$$

Usando a notação de (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, pp. 466–469), seja $\bar{\mathbf{u}}_m = \bar{\mathbf{u}}_{m(l)}^{(l)}$ o iterando corrente e $\bar{\mathbf{u}}_m^+ = \bar{\mathbf{u}}_{m(l)}^{(l+1)}$ o iterando seguinte do agente de má-

²Esta condição garante um ponto inicial $\bar{\mathbf{u}}^{(0)}$ adequado

ximo descenso $m = m(l)$. Pela convexidade de θ_m e Hipótese 4,

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_m(s) &= \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m - s\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)) \\
&= \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - s\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)^T\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) \\
&\quad + \frac{1}{2}(-s\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m))^T\nabla^2\theta_m(\mathbf{z})(-s\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)) \\
&= \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - s\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 \\
&\quad + \frac{s^2}{2}\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)^T\nabla^2\theta_m(\mathbf{z})\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) \\
&\leq \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - s\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 + \frac{\Lambda s^2}{2}\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 \quad (3.10)
\end{aligned}$$

para $\mathbf{z} = \alpha\bar{\mathbf{u}}_m + (1 - \alpha)(\bar{\mathbf{u}}_m - s\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)) = \bar{\mathbf{u}}_m - (1 - \alpha)s\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)$ e algum $\alpha \in [0, 1]$.

O mínimo global do lado direito da desigualdade (3.10) é dado por:

$$\begin{aligned}
-\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 + \Lambda s\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 &= 0 \\
\Lambda s &= 1 \\
s &= \frac{1}{\Lambda}
\end{aligned}$$

Uma busca linear exata juntamente com $s^* = \frac{1}{\Lambda}$ irá produzir $\bar{\mathbf{u}}_m^+$ tal que:

$$\begin{aligned}
\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^+) &= \min_{s>0} \tilde{\theta}_m(s) \\
&\leq \min_{s>0} \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - s\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 + \frac{\Lambda s^2}{2}\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 \\
&= \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - \frac{1}{\Lambda}\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 + \frac{\Lambda}{2\Lambda^2}\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$= \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - \frac{1}{\Lambda}\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 + \frac{1}{2\Lambda}\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 \quad (3.12)$$

$$= \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - \frac{1}{2\Lambda}\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 \quad (3.13)$$

Sendo θ^* o valor objetivo ótimo de $P(\varepsilon)$, chega-se a

$$\begin{aligned}\theta(\bar{\mathbf{u}}^+) - \theta^* &= \bar{\theta}_m(\bar{\mathbf{w}}_m^+, \bar{\mathbf{r}}_m^+) + \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^+, \bar{\mathbf{w}}_m^+) - \theta^* \\ &\leq \bar{\theta}_m(\bar{\mathbf{w}}_m, \bar{\mathbf{r}}_m) + \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^+, \bar{\mathbf{w}}_m) - \theta^* \\ &\leq \theta(\bar{\mathbf{u}}) - \theta^* - \frac{1}{2\Lambda} \|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Da Observação 3,

$$\|\nabla\theta(\bar{\mathbf{u}})\|^2 = \|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 + \|\nabla(\theta_m(\bar{\mathbf{w}}_m) + \bar{\theta}_m(\bar{\mathbf{w}}_m))\|^2 + \|\nabla\bar{\theta}_m(\bar{\mathbf{r}}_m)\|^2,$$

logo:

$$\begin{aligned}\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 &= \|\nabla\theta(\bar{\mathbf{u}})\|^2 - \|\nabla(\theta_m(\bar{\mathbf{w}}_m) + \bar{\theta}_m(\bar{\mathbf{w}}_m))\|^2 - \|\nabla\bar{\theta}_m(\bar{\mathbf{r}}_m)\|^2 \\ &= \|\nabla\theta(\bar{\mathbf{u}})\|^2 - \sum_{i \in \mathcal{M} \setminus \{m\}} \|\nabla\theta_i(\bar{\mathbf{u}}_i)\|^2 \\ &\geq \|\nabla\theta(\bar{\mathbf{u}})\|^2 - (M-1)\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2\end{aligned}\quad (3.15)$$

cuja última desigualdade resulta da Hipótese 3, com $m = m(l)$, e assim:

$$\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 \geq \frac{1}{M} \|\nabla\theta(\bar{\mathbf{u}})\|^2. \quad (3.16)$$

Combinando (3.14) e (3.16), um limite no decrescimento do objetivo segue:

$$\theta(\bar{\mathbf{u}}^+) - \theta^* \leq \theta(\bar{\mathbf{u}}) - \theta^* - \frac{1}{2\Lambda M} \|\nabla\theta(\bar{\mathbf{u}})\|^2. \quad (3.17)$$

Uma vez que $\theta(\bar{\mathbf{u}})$ é fortemente convexo (da Hipótese 5), existe uma constante positiva λ^\dagger tal que $\lambda^\dagger I \preceq \nabla^2\theta(\bar{\mathbf{u}})$ para todo $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{\Omega}$. Utilizando um raciocínio semelhante ao das expressões (3.10)-(3.13), mostra-se no Apêndice B que $\|\nabla\theta(\bar{\mathbf{u}})\|^2 \geq 2\lambda^\dagger(\theta(\bar{\mathbf{u}}) - \theta^*)$. Este resultado é combinado com (3.17) para obter:

$$\theta(\bar{\mathbf{u}}^+) - \theta^* \leq \left(1 - \frac{\lambda^\dagger}{\Lambda M}\right)(\theta(\bar{\mathbf{u}}) - \theta^*). \quad (3.18)$$

Definindo $c = (1 - \lambda^\dagger/(\Lambda M))$ e aplicando (3.18) recursivamente,

$$\theta(\bar{\mathbf{u}}^{(l)}) - \theta^* \leq c^l(\theta(\bar{\mathbf{u}}^{(0)}) - \theta^*). \quad (3.19)$$

Esta expressão recursiva é válida porque o limite superior Λ , de acordo com (3.9), aplica-se independentemente do agente de máximo descenso $m(l)$ e

dos valores das variáveis de sua vizinhança. Tomando o limite em ambos os lados de (3.19), $(\theta(\bar{\mathbf{u}}^{(l)}) - \theta^*)$ tende para 0 quando $l \rightarrow \infty$, já que $c < 1$. Assim, as iterações $\bar{\mathbf{u}}^{(l)}$ da rede de agentes são atraídas para a solução ótima $\bar{\mathbf{u}}(\epsilon)$ de $P(\epsilon)$. A taxa de convergência c diminui com o aumento do número de agentes, sendo mais lento do que $(1 - \lambda^\dagger/\Lambda^\dagger)$, que é a taxa de convergência do método de descenso centralizado³. Este é o compromisso entre computação centralizada e distribuída. No entanto, a análise considera o pior cenário, não levando em consideração iterações em paralelo dos agentes que podem ocorrer dependendo da topologia da rede e horizonte de predição considerados.

3.1.4 Análise de Convergência para Busca Linear com *Backtracking*

Das Hipóteses 2 e 3, é assumido que somente o agente $m(l)$ atualiza suas decisões na iteração l para efeito de análise de convergência. Seja $\bar{\mathbf{u}}_m = \bar{\mathbf{u}}_{m(l)}^{(l)}$ o iterando corrente e $\bar{\mathbf{u}}_m^+ = \bar{\mathbf{u}}_{m(l)}^{(l+1)}$ o iterando seguinte do agente $m = m(l)$. Para qualquer $s \in [0, \frac{1}{\Lambda}]$,

$$0 \leq s \leq \frac{1}{\Lambda} \implies -s + \frac{\Lambda}{2}s^2 \leq -\frac{s}{2},$$

porque $g(s) = -s/2 + \Lambda s^2/2$ é convexa e suas raízes são 0 e $1/\Lambda$, portanto,

$$\begin{aligned} -\frac{s}{2} + \frac{\Lambda}{2}s^2 \leq 0 \text{ para } s \in [0, \frac{1}{\Lambda}] &\implies -\frac{s}{2} - \frac{s}{2} + \frac{\Lambda}{2}s^2 \leq -\frac{s}{2} \\ &\implies -s + \frac{\Lambda}{2}s^2 \leq -\frac{s}{2} \end{aligned}$$

De (3.10) e para qualquer $s \in [0, 1/\Lambda]$, segue que:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_m(s) &= \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m - s\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)) \\ &\leq \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - s\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 + \frac{\Lambda}{2}s^2\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 \\ &\leq \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - \frac{s}{2}\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 \\ &\leq \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - \alpha s\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2 \end{aligned}$$

já que $\alpha < 1/2$. Assim, para qualquer $s \in (0, 1/\Lambda]$, a condição de saída da

³Se $\nabla^2\theta(\bar{\mathbf{u}})$ for uma matriz constante H , então λ^\dagger and Λ^\dagger seriam o menor e o maior autovalor de H , respectivamente.

busca linear com *backtracking*

$$\tilde{\theta}_m(s) \leq \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - \alpha s \|\nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2$$

é satisfeita. Por isso, a busca linear com *backtracking* termina com $s = 1$ ou então com algum $s \geq \beta/\Lambda$, porque $\beta \in (0, 1)$. No primeiro caso, $\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^+) \leq \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - \alpha \|\nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2$ enquanto que no segundo caso, $\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^+) \leq \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - \frac{\beta\alpha}{\Lambda} \|\nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2$. Seja qual for a condição de parada,

$$\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^+) \leq \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) - \min\left\{\alpha, \frac{\beta\alpha}{\Lambda}\right\} \|\nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\|^2. \quad (3.20)$$

Um raciocínio semelhante ao da desigualdade (3.14) na busca linear exata leva à seguinte desigualdade para a busca linear inexata:

$$\theta(\bar{\mathbf{u}}^+) - \theta^* \leq \theta(\bar{\mathbf{u}}) - \theta^* - \frac{1}{M} \min\left\{\alpha, \frac{\beta\alpha}{\Lambda}\right\} \|\nabla^2 \theta(\bar{\mathbf{u}})\|^2,$$

que combinada com $\|\nabla \theta(\bar{\mathbf{u}})\|^2 \geq 2\lambda^\dagger (\theta(\bar{\mathbf{u}}) - \theta^*)$ fornece

$$\theta(\bar{\mathbf{u}}^+) - \theta^* \leq \left(1 - \frac{2\alpha\lambda^\dagger}{M\Lambda} \min\{\Lambda, \beta\}\right) (\theta(\bar{\mathbf{u}}) - \theta^*). \quad (3.21)$$

Note que $c = (1 - \frac{2\alpha\lambda^\dagger}{M\Lambda} \min\{\Lambda, \beta\}) < 1$ porque $\alpha < 1/2$, $\beta < 1$, e $\lambda^\dagger \leq \Lambda$. Como na busca linear exata, a taxa de convergência decresce quando M aumenta.

3.1.5 Esboço do Algoritmo

O Algoritmo 2 representa o método de gradiente descendente distribuído para resolver $P(\varepsilon)$ com busca linear com *backtracking*. Em cada passo l , os agentes seguem um protocolo de comunicação para assegurar que o agente de *máximo descenso*, $m(l) \in \mathcal{J}(l)$, itera em paralelo com qualquer outro conjunto de agentes mutuamente desacoplados. O conjunto $\mathcal{S}(l) \subseteq \mathcal{M}$, com os agentes que iteram, satisfaz a propriedade que $m(l) \in \mathcal{S}(l)$ e $i \notin \mathcal{N}(j)$ para todo $i, j \in \mathcal{S}(l)$.

As análises de convergência acima implicam no teorema 2.

Teorema 2. *Com as Hipóteses 2, 3, e 5, o algoritmo de gradiente descendente distribuído fornece uma sequência de iterandos $\bar{\mathbf{u}}^{(l)}$ que convergem para uma solução ótima $\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)$ para o problema de centralização $P(\varepsilon)$ usando busca exata ou busca linear com *backtracking*.*

Algoritmo 2: Gradiente Descendente Distribuído para Resolver $P(\varepsilon)$

entrada: $\bar{\mathbf{u}}$ estritamente factível, parâmetro de barreira ε ,
parâmetros de *backtracking* $\alpha \in (0, 1/2)$ e $\beta \in (0, 1)$, e
tolerância τ

inicialize: $l := 0$ e $\bar{\mathbf{u}}^{(0)} := \bar{\mathbf{u}}$

repita

- seja $\mathcal{S}(l)$ um subconjunto de agentes não vizinhos tal que
 $m(l) \in \mathcal{S}(l)$
- para cada** $m \in \mathcal{S}(l)$ *em paralelo faça*
 - obter $\bar{\mathbf{w}}_m^{(l)}$ dos agentes vizinhos $i \in \mathcal{N}(m)$
 - $s_m^{(l)} := 1$
 - repita**
 - $s_m^{(l)} := \beta s_m^{(l)}$
 - enquanto**
 $\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)} - s_m^{(l)} \nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})) > \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)}) - \alpha s_m^{(l)} \|\nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})\|^2;$
 - $\bar{\mathbf{u}}_m^{(l+1)} := \bar{\mathbf{u}}_m^{(l)} - s_m^{(l)} \nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})$
- para cada** $m \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}(l)$ *em paralelo faça*
 - $\bar{\mathbf{u}}_m^{(l+1)} := \bar{\mathbf{u}}_m^{(l)}$
- $l := l + 1$

enquanto $\|\nabla \theta(\bar{\mathbf{u}}^{(l)})\| > \tau;$

saída: $\bar{\mathbf{u}}^{(l)}$

3.2 OUTRAS QUESTÕES

Algumas questões importantes sobre a aplicação do método de barreira distribuído são discutidas na sequência. Estes pontos são importantes para tornar a implementação do método de barreira distribuído viável.

3.2.1 Inicialização Factível

Um fator necessário para assegurar o funcionamento do algoritmo distribuído é que o ponto inicial seja factível. Um $\bar{\mathbf{u}}$ estritamente factível existe

se, e somente se, zero é o objetivo ótimo do problema:

$$P' : \min \sum_{i=1}^p s_i \quad (3.22a)$$

$$\text{s.a: } h_i(\bar{\mathbf{u}}) \leq s_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.22b)$$

$$s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.22c)$$

que, por sua vez, pode ser aproximado como um problema de barreira:

$$P'(\epsilon) : \min \theta'(\mathbf{z}) = f'(\mathbf{s}) + \epsilon\phi'(\mathbf{z})$$

em que $\mathbf{z} = (\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{s})$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)$, $f'(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^p s_i$, e $\phi'(\mathbf{z})$ é a função de barreira logarítmica dada por:

$$\phi'(\mathbf{z}) = - \sum_{i=1}^p (\ln(s_i - h_i(\bar{\mathbf{u}})) + \ln(s_i))$$

O problema auxiliar P' dado por (3.22a)–(3.22c) é adequado para ser resolvido com uma rede de agentes, porque tem os mesmos acoplamentos e vizinhança dos subproblemas de P . Em essência, a mesma rede de agentes pode resolver ambos os problemas.

3.2.2 Projeto do Método de Barreira

A taxa de decréscimo μ pode influenciar fortemente o desempenho global do método de barreira. Sejam *iterações externas* as iterações do ciclo **repetir** do Algoritmo 1, enquanto *iterações internas* são as iterações do método iterativo que resolve o problema de centralização, dadas pelo laço mais interno do Algoritmo 2. As iterações internas para cada iteração externa tendem a diminuir quando μ aumenta, mas à custa de um aumento nas iterações externas. Por outro lado, os pontos centrais estão distantes quando μ é pequeno, reduzindo as iterações externas e aumentando as iterações internas. Estes efeitos quase anulam um ao outro para μ de 1/100 até 1/3 quando o problema de centralização é resolvido com o método de Newton amortecido (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

O método de barreira realizará menos iterações para reduzir o intervalo de dualidade (*Gap dual*) para a tolerância desejada se $\epsilon^{(0)}$ é muito pequeno, mas as iterações internas aumentarão substancialmente para resolver o primeiro problema de centralização. Assim, $\epsilon^{(0)}$ deve ser escolhido de forma que o intervalo de dualidade $\epsilon^{(0)} p \approx (f(\bar{\mathbf{u}}^{(0)}) - f^*)$, sendo p o número de restri-

ções. Uma possibilidade é definir $\varepsilon^{(0)} = \arg \min_{\varepsilon > 0} \|\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(0)}) + \varepsilon \nabla \phi(\bar{\mathbf{u}}^{(0)})\|$, que tenta satisfazer a condição de otimalidade (3.3) de um ponto central.

Uma solução ótima $\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)$ para o problema da centralização $P(\varepsilon)$ só é exigida para seguir o caminho central precisamente. A sequência $\bar{\mathbf{u}}^{(l)}$ produzida pelo método de barreira ainda converge para uma solução ótima $\bar{\mathbf{u}}^*$ de P se o problema de centralização não for resolvido exatamente. A desvantagem é que $(\bar{\mathbf{u}}^{(l)}, \lambda^{(l)})$ não é mais um par dual factível e, portanto, não induz o limite $(f(\bar{\mathbf{u}}^{(l)}) - f^*) \leq \varepsilon^{(l)} p$. No entanto, um limite válido pode ser obtido através da correção das variáveis duais $\lambda_i^{(l)}$ (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, Ex. 11.9).

3.2.3 Solução Ótima dos Problemas dos Agentes

No algoritmo de gradiente descendente distribuído, os agentes aplicam apenas uma pesquisa exata ou busca linear com backtracking para produzir a próxima iteração $\bar{\mathbf{u}}^{(l+1)}$. Essa estratégia acarreta sobrecarga de comunicação para garantir o trabalho síncrono e contínuo. Em vez disso, uma solução ótima $\bar{\mathbf{u}}_m^*(\varepsilon)$ para $P_m(\varepsilon)$ pode ser obtida por cada agente $m \in \mathcal{S}(l)$. Isso levaria à redução máxima do objetivo induzida pela solução do conjunto $\{P_m(\varepsilon) : m \in \mathcal{S}(l)\}$ dos subproblemas desacoplados na iteração l . Isto abre a possibilidade de resolver $P_m(\varepsilon)$ com outros métodos de gradiente descendente. Em particular, $P_m(\varepsilon)$ pode ser resolvido com o método de Newton amortecido, que é essencialmente o gradiente descendente com busca linear com backtracking na direção de Newton $-\nabla^2 \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})^{-1} \nabla \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)})$. O método de Newton para resolver $P_m(\varepsilon)$ é formalizado no Algoritmo 3.

3.3 SUMÁRIO

Neste capítulo foram apresentados os algoritmos desenvolvidos para utilização nos controladores preditivos distribuídos de tal maneira que a rede de agentes consiga encontrar os valores ótimos de ações de controle. Foram apresentados alguns métodos de otimização, assim como análises de convergência destes métodos. Outras questões importantes foram abordadas, como o problema de inicialização factível do algoritmo, escolha de parâmetros para o método de barreira e a solução ótima dos subproblemas.

No capítulo 4 são apresentados alguns resultados numéricos que foram obtidos utilizando a rede de subsistemas definida na Figura 1.

Algoritmo 3: Método de Newton para resolver $P_m(\varepsilon)$

entrada: o par corrente $(\bar{\mathbf{u}}_m^{(l)}, \bar{\mathbf{w}}_m^{(l)})$ na iteração l , parâmetro de barreira ε , parâmetros de backtracking $\alpha \in (0, 1/2)$ e $\beta \in (0, 1)$ e tolerância τ

inicialize: $\bar{\mathbf{u}}_m := \bar{\mathbf{u}}_m^{(l)}$

repita

 obtenha o passo de Newton: $\Delta\bar{\mathbf{u}}_m := -\nabla^2\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)^{-1}\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)$

 defina $s_m := 1$

repita

 | $s_m := \beta s_m$

enquanto $\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m + s_m\Delta\bar{\mathbf{u}}_m) > \theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m) + \alpha s_m \nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)' \Delta\bar{\mathbf{u}}_m;$

$\bar{\mathbf{u}}_m := \bar{\mathbf{u}}_m + s_m\Delta\bar{\mathbf{u}}_m$

enquanto $\|\nabla\theta_m(\bar{\mathbf{u}}_m)\| > \tau;$

saída: $\bar{\mathbf{u}}_m$

4 ANÁLISE NUMÉRICA

Para as pesquisas deste trabalho foram utilizadas diversas redes dinâmicas para a análise dos algoritmos desenvolvidos, cada uma com suas peculiaridades e objetivos do controle. Uma delas utilizava a metodologia DMPC no controle de tráfego urbano (CAMPONOVARA; SCHERER; MOURA, 2009), com controladores em cada cruzamento, que comunicavam-se com sua vizinhança para calcular os tempos de verde dos semáforos. Outro trabalho realizado com o DMPC envolvia o controle da produção de colunas de destilação (SCHERER; CAMPONOVARA; CODAS, 2011).

Para este trabalho, optou-se em restringir a apresentação dos resultados a fim de manter o texto sucinto. Os resultados que serão apresentados envolvem um caso simulado e um caso de aplicação em uma planta solar real (SCHERER et al., 2013b, 2013a). Neste capítulo será apresentada a aplicação do DMPC utilizando uma rede genérica, assim como os resultados numéricos obtidos com a aplicação da estratégia DMPC descrita no capítulo 3. No capítulo 5 será apresentada a aplicação do DMPC em uma planta solar real.

Neste capítulo são comparados os desempenhos do método de Gradiente Descendente Distribuído (DGD) com o método de Gradiente Descendente Centralizado (CGD) para resolver os problemas de centralização. Também são avaliados os desempenhos dos métodos de otimização distribuída na resolução de Problemas Quadráticos (QP), similares aos problemas de controle que devem ser resolvidos pelo DMPC na rede de agentes.

4.1 CENTRALIZAÇÃO DISTRIBUÍDA

O objetivo é comparar o CGD resolvendo o problema centralizado $P(\varepsilon)$ com o DGD resolvendo o conjunto de problemas $\{P_m(\varepsilon, \bar{\mathbf{w}}_m)\}$. Para isto, foram instanciados problemas de controle preditivo genéricos, baseando-se na rede ilustrativa representada na Figura 1. As principais características dos problemas utilizados nos experimentos são as seguintes:

- amostragem aleatória das matrizes $A_{m,i}$, $B_{m,i}$ e $C_{m,i}$ a partir de uma distribuição uniforme, variando de -1 a +1;
- as matrizes de custo foram definidas como $Q_m = \tilde{Q}'_m \tilde{Q}_m$ e $R_m = \tilde{R}'_m \tilde{R}_m$, para garantir que sejam positivas definidas, em que \tilde{Q}_m e \tilde{R}_m foram amostradas a partir de uma distribuição uniforme, variando de 0 a 1;
- os vetores $\mathbf{y}_m^{\min} = -\mathbf{1}$, $\mathbf{y}_m^{\max} = \mathbf{1}$, $\mathbf{u}_m^{\min} = -5 \times \mathbf{1}$ e $\mathbf{u}_m^{\max} = 5 \times \mathbf{1}$ repre-

sentam as restrições na saída do sistema e na aplicação dos sinais de controle respectivamente;

- o tamanho do horizonte de predição foi definido como $N = 2$, tornando todos os agentes acoplados, exceto os agentes 1 e 4;
- as dimensões dos subsistemas são as seguintes:
 - $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^1$ para $i = 1, 2, 4, 5$
 - $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^2$ para $i = 3, 6$
- ambos os métodos centralizado e distribuído de gradiente descendente utilizaram *busca linear com backtracking*, tendo parâmetros $\alpha = 0, 2$ e $\beta = 0, 7$.

Com esta abordagem, foi criado um grupo de problemas convexos quaisquer que possuíam uma estrutura em rede. Posteriormente, foram realizadas análises com sistemas representativos para abordagens de controle de tráfego urbano (CAMPONOGARA; OLIVEIRA, 2009; CAMPONOGARA; SCHERER; MOURA, 2009), controle de colunas de destilação (SCHERER; CAMPONOGARA; PLUCENIO, 2009) e controle de uma planta solar (SCHERER et al., 2013, 2013b).

As dimensões das matrizes que definem as equações dinâmicas e a função objetivo podem ser inferidas a partir das dimensões dos vetores de estados, saídas e vetores de controle.

Foi utilizado um algoritmo padrão disponível no Matlab[®] para a solução de problemas QP para resolver o problema P' , dado por (3.22a)-(3.22c), e obter uma solução inicial factível $\bar{\mathbf{u}}$ para $P(\epsilon)$ e $\{P_m(\epsilon)\}$. Neste caso, um algoritmo centralizado resolveu o problema de inicialização factível ao invés do algoritmo distribuído para reduzir o esforço de implementação.

A partir deste ponto factível, o CGD iterou até chegar a uma solução $\bar{\mathbf{u}}_{CGD}$ tal que $\|\nabla\theta(\bar{\mathbf{u}}_{CGD})\| \leq 10^{-5}$, enquanto que o DGD iterou até encontrar uma solução $\bar{\mathbf{u}}_{DGD}$ tal que $\theta(\bar{\mathbf{u}}_{DGD}) \leq \theta(\bar{\mathbf{u}}_{CGD})$ ou até exceder 12.000 passos internos.

O parâmetro de barreira assumiu valores $\epsilon \in \{0.1, 1, 10\}$ para estes experimentos. O número de passos de descida do Algoritmo 2, apresentado na Seção 3.1.5, variou nos experimentos: o corpo do ciclo *para* foi iterado $\kappa \in \{1, 10, 20\}$ vezes¹.

Os algoritmos foram implementados em Matlab[®] em um computador com um processador de 800 MHz Intel T8100 utilizando GNU-Linux. O DGD foi emulado em série e a comunicação dos agentes foi realizada com memória compartilhada para assegurar as Hipóteses 2 e 3.

¹DGD resolve $P_m(\epsilon, \bar{\mathbf{w}}_m)$ se $\kappa \rightarrow \infty$ e torna-se o Algoritmo 2 se $\kappa = 1$.

Para simplificar, o tempo de execução do DGD foi contabilizado como sendo o tempo total para executar um agente por vez, que superestima o seu tempo de funcionamento real, pois os agentes 1 e 4 poderiam iterar em paralelo.

A Tabela 1 apresenta os resultados computacionais em que cada entrada é a média de 10 experimentos independentes e aleatórios do CGD e DGD, os quais foram aplicados no mesmo problema e partindo da mesma solução inicial. A qualidade da solução produzida pelo DGD é medida pelo erro relativo em relação à solução centralizada, sendo definida como:

$$\frac{\theta(\bar{\mathbf{u}}_{DGD}) - \theta(\bar{\mathbf{u}}_{CGD})}{\theta(\bar{\mathbf{u}}_{CGD})}.$$

Quanto maior o erro, menor a qualidade do DGD. Os experimentos indicam que a qualidade do DGD degrada e o número de iterações aumenta à medida que $P(\epsilon)$ se aproxima com maior precisão de P ($\epsilon \rightarrow 0$). O DGD produz soluções de qualidade superior quando mais passos de descida de gradiente são executados em cada iteração do agente, isto é, quando κ aumenta.

4.2 BARREIRA DISTRIBUÍDA

Para a rede exemplo representada pela Figura 1, uma sequência de problemas $\{P(\epsilon^{(l)})\}$ foi resolvida através do método de barreira logarítmica, ao invés de resolver o problema centralizado P . O CGD e o método de Newton (CN) resolveram $\{P(\epsilon^{(l)})\}$ para uma sequência decrescente do parâmetro $\epsilon^{(l)}$, enquanto o DGD e o Newton Descendente Distribuído (DND) resolveram o subconjunto $\{P_m(\epsilon^{(l)})\}$ no lugar de cada $P(\epsilon^{(l)})$.

As instâncias do problema de controle preditivo P foram obtidas de forma aleatória, como descrito anteriormente. Todos os métodos resolveram o problema P' para obter uma solução estritamente factível que se tornou a primeira iteração $\bar{\mathbf{u}}$ para resolver $P(\epsilon^{(0)})$.

O parâmetro de barreira inicial foi $\epsilon^{(0)} = 10$ que diminuiu a uma taxa de $\mu = 1/30$ até $\epsilon^{(l)} < 10^{-12}$. O parâmetro μ está dentro da faixa (1/100, 1/3) sugerida em (BOYD; VANDENBERGHE, 2004). Ambos os parâmetros foram selecionados por tentativa e erro até que a solução da sequência $\{P(\epsilon^{(l)})\}$ convergisse de forma relativamente rápida para a solução de P .

Em essência, o CN é idêntico ao CGD, porém com a direção de busca $-\nabla\theta(\bar{\mathbf{u}})$ substituída pela direção de Newton $-\nabla^2\theta(\bar{\mathbf{u}})^{-1}\nabla\theta(\bar{\mathbf{u}})$ em uma *busca linear com backtracking*. O vetor gradiente e a matriz Hessiana de $\theta(\bar{\mathbf{u}})$ foram computados analiticamente a partir da estrutura da rede. Da mesma forma, o DND usa a direção de Newton $-\nabla^2\theta(\bar{\mathbf{u}}_m)^{-1}\nabla\theta(\bar{\mathbf{u}}_m)$ ao invés de $-\nabla\theta(\bar{\mathbf{u}}_m)$

Tabela 1 – Comparação entre os métodos centralizado e distribuído de gradiente descendente

ϵ	κ	Gradiente Descendente Centralizado			Gradiente Descendente Distribuído			
		iter	CPU (s)	$\theta(\bar{\mathbf{u}}_{CGD})$	iter	CPU (s)	$\theta(\bar{\mathbf{u}}_{DGD})$	erro
10	1				1722	17,70	0,61443	2,40%
	10	768	14,74	0,60000	2053	7,23	0,60717	1,19%
	20				2641	10,34	0,60000	0,00%
1	1				4305	44,55	0,34773	1,90%
	10	503	3,42	0,34125	6182	34,39	0,34204	0,23%
	20				6292	36,21	0,34125	0,00%
0,1	1				9668	128,85	0,22218	1,36%
	10	360	1,69	0,21920	7396	60,02	0,21987	0,30%
	20				6317	43,69	0,21969	0,22%

Tabela 2 – Desempenho do Gradiente Descendente Centralizado

instância	iter	CPU (s)	$f(\bar{\mathbf{u}}_{QP})$	$f(\bar{\mathbf{u}}_{CGD})$	erro
1	771	32,96	0,0657	0,0657	0,00%
2	771	33,77	0,5045	0,5045	0,00%
3	771	17,50	0,6826	0,6826	0,00%
4	771	26,84	0,1193	0,1193	0,00%
5	1548	88,51	0,2195	0,2195	0,00%
6	771	21,66	0,0946	0,0946	0,00%
7	771	19,15	0,0522	0,0522	0,00%
8	771	22,58	0,0959	0,0959	0,00%
9	771	26,70	0,1546	0,1546	0,00%
10	771	34,86	0,1189	0,1189	0,00%
média	849	32,45	0,2108	0,2108	0,00%

para realizar sua busca.

Os parâmetros para *busca linear com backtracking* foram definidos de uma maneira específica para induzir um bom desempenho dos algoritmos analisados (CGD, CN, DGD, e DND). Estes parâmetros são:

- parâmetros da *busca linear com backtracking*: $\alpha = 0,1$ e $\beta = 0,8$ para todos os algoritmos;
- a condição de parada para o problema da centralização nos métodos centralizados é dada pela solução $\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon^{(l)})$ tal que $\|\nabla \bar{\mathbf{u}}(\varepsilon^{(l)})\| \leq 10^{-5}$ ou caso o algoritmo execute mais que $3|\bar{\mathbf{u}}|^2 = 3 \times 16^2 = 768$ iterações;
- a condição de parada para o problema da centralização nos métodos distribuídos é $\|\nabla \bar{\mathbf{u}}(\varepsilon^{(l)})\| \leq 10^{-5}$ ou no máximo $4|\bar{\mathbf{u}}|^2 = 4 \times 16^2 = 1024$ iterações.

Os resultados dos experimentos computacionais aparecem nas Tabelas 2, 3, 4 e 5. As tabelas mostram o número total de iterações internas, o tempo de CPU, o valor objetivo $f(\bar{\mathbf{u}}_{QP})$ para a solução $\bar{\mathbf{u}}_{QP}$ encontrado pelo algoritmo QP disponível em Matlab[®] e o valor objetivo da solução encontrada pelos respectivos algoritmos. As tabelas também fornecem o erro relativo em relação a $\bar{\mathbf{u}}_{QP}$, dado por:

$$\frac{f(\bar{\mathbf{u}}_{\text{método}}) - f(\bar{\mathbf{u}}_{QP})}{f(\bar{\mathbf{u}}_{QP})}.$$

Concluindo sobre os resultados, era esperado que o método de Newton centralizado fosse mais rápido do que o gradiente descendente centralizado,

Tabela 3 – Desempenho do Newton Centralizado

instância	iter	CPU (s)	$f(\bar{\mathbf{u}}_{QP})$	$f(\bar{\mathbf{u}}_{CN})$	erro
1	515	4,84	0,0657	0,0657	0,00%
2	515	3,74	0,5045	0,5045	0,00%
3	515	4,27	0,6826	0,6826	0,00%
4	515	3,22	0,1193	0,1193	0,00%
5	516	6,61	0,2195	0,2195	0,00%
6	515	3,36	0,0946	0,0946	0,00%
7	515	3,44	0,0522	0,0522	0,00%
8	515	2,94	0,0959	0,0959	0,00%
9	515	3,31	0,1546	0,1546	0,00%
10	515	3,30	0,1189	0,1189	0,00%
média	515	3,90	0,2108	0,2108	0,00%

Tabela 4 – Desempenho do Gradiente Descendente Distribuído

instância	iter	CPU (s)	$f(\bar{\mathbf{u}}_{QP})$	$f(\bar{\mathbf{u}}_{DGD})$	erro
1	8239	103,22	0,0657	0,0658	0,15%
2	8287	114,80	0,5045	0,5045	0,00%
3	7290	105,58	0,6827	0,6837	0,15%
4	7276	98,89	0,1193	0,1193	0,00%
5	8875	136,49	0,2195	0,2195	0,01%
6	6247	81,80	0,0946	0,0946	0,00%
7	7396	99,28	0,0522	0,0522	0,00%
8	7304	111,32	0,0959	0,0966	0,68%
9	7276	109,29	0,1546	0,1547	0,03%
10	6216	45,90	0,1189	0,1189	0,00%
média	7441	100,66	0,2108	0,2110	0,10%

Tabela 5 – Desempenho do Newton Distribuído

instância	iter	CPU (s)	$f(\bar{\mathbf{u}}_{QP})$	$f(\bar{\mathbf{u}}_{DND})$	erro
1	7293	92,81	0,0657	0,0658	0,16%
2	6502	69,08	0,5045	0,5045	0,00%
3	7284	106,31	0,6827	0,6830	0,06%
4	7276	97,67	0,1193	0,1193	0,00%
5	8616	60,28	0,2195	0,2195	0,01%
6	6216	55,59	0,0946	0,0946	0,00%
7	7290	92,79	0,0522	0,0522	0,00%
8	7285	90,22	0,0959	0,0963	0,39%
9	7281	100,00	0,1546	0,1547	0,03%
10	6216	48,42	0,1189	0,1189	0,00%
média	7126	81,32	0,2108	0,2109	0,06%

porém com ambos produzindo as soluções ótimas. Em relação aos métodos distribuídos, verificou-se que são mais lentos que as abordagens centralizadas, devido à necessidade de comunicação entre os agentes, chegando à soluções ótimas do ponto de vista prático. Ainda sobre os métodos distribuídos, foi possível observar que o método Newton distribuído é um pouco mais rápido e mais eficaz do que o gradiente descendente distribuído.

4.3 SUMÁRIO

Neste capítulo foram apresentados os resultados de análises numéricas e simulações realizadas com os controladores preditivos distribuídos que foram desenvolvidos. Foram analisados diversos algoritmos de otimização, centralizados e distribuídos, realizando comparações de desempenho entre eles.

Os resultados obtidos até o momento foram de grande importância para verificar a aplicabilidade da teoria desenvolvida. Porém, foi apresentada uma rede genérica, que torna a visualização da utilidade do algoritmo um pouco difícil.

Mais recentemente, uma aplicação forneceu resultados interessantes, em que foram utilizadas as teorias desenvolvidas no reperto de energia em um sistema de uma planta solar. Estudos preliminares aparecem em Scherer et al. (2013), porém mais recentemente o problema foi tratado de uma maneira que se encaixa com os estudos deste trabalho. Este estudo será apresentado no capítulo 5, assim como algumas manipulações que foram necessárias para o tratamento adequado do problema.

5 DMPC APLICADO EM ALOCAÇÃO DE RECURSOS

Utilizando como base as teorias desenvolvidas neste trabalho, foi realizada a aplicação da metodologia DMPC no gerenciamento de recursos, mais especificadamente na divisão de energia de uma fonte produtora para um conjunto de sistemas consumidores (aqui denominados subsistemas). O objetivo é distribuir de maneira otimizada a energia disponível utilizando um conjunto de agentes para encontrar a solução dos problemas de controle, preferencialmente levando ao resultado ótimo global (SCHERER; CAMPONOGARA; NORMEY-RICO; ÁLVAREZ; GUZMÁN, 2013).

Neste caso, será mostrado que uma estratégia de controle totalmente descentralizada poderia resultar em casos inaceitáveis, pois sendo a fonte de energia utilizada por todo o conjunto de sistemas consumidores, uns acabam por interferir na resposta dos outros.

A estratégia DMPC da maneira que foi desenvolvida neste trabalho não se aplica diretamente neste problema, pois existe uma restrição de consumo que acopla todos os subsistemas, tornando o DMPC totalmente acoplado. Por esta razão, uma contribuição deste trabalho é a decomposição do problema de controle original em termos de variáveis de folga, convertendo o acoplamento global entre subsistemas em um conjunto de restrições locais, favorecendo a aplicação do DMPC com um elevado grau de paralelismo na ação dos agentes e garantia de convergência para o resultado ótimo global do problema de controle.

Visando investigar a eficácia da estratégia de controle proposta, foram conduzidos vários experimentos utilizando uma planta solar real, que faz parte do *Centro de Investigación de Energía Solar* (CIESOL) localizado na Universidad de Almería (sudeste da Espanha) (PASAMONTES et al., 2009), que foi adaptada neste trabalho para possibilitar a análise das principais propriedades do DMPC proposto.

Foi utilizada a metodologia *hardware-in-the-loop* para a realização de experimentos, ou seja, a planta solar foi conectada a um simulador de sistemas consumidores. O simulador recebe os valores de vazão e temperatura da planta solar e, em seguida, calcula as ações de controle e simula as saídas dos subsistemas. Os valores de saída são então realimentados na planta solar através de um simulador de carga conectado à planta solar.

Neste capítulo será apresentada a modelagem da planta solar e o modelo do conjunto de sistemas consumidores utilizado. Também será apresentado o problema de controle considerado, as manipulações utilizando variáveis de folga e o problema de controle distribuído. Por fim, são discutidos os resultados dos experimentos realizados.

5.1 A PLANTA SOLAR E SISTEMAS CONSUMIDORES

O cenário utilizado para estes estudos consiste de uma planta solar termal e quatro subsistemas consumidores, conectados conforme a estrutura apresentada na Figura 4.

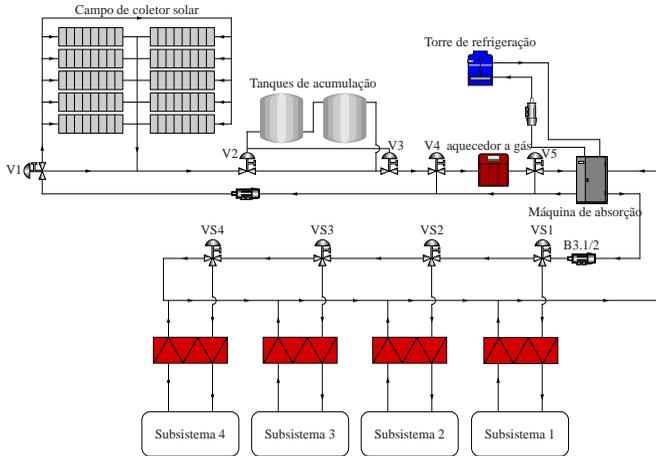


Figura 4 – Esquema de instalação solar para resfriamento ou aquecimento

Na figura podem ser observadas as duas partes: a planta solar e o conjunto de subsistemas consumidores. A planta solar captura a energia do sol através de um campo de coletores e a água quente produzida é armazenada em dois tanques de acumulação. Um sistema de controle da vazão de água pelos coletores se encarrega de manipular esta vazão para manter as condições térmicas desejadas nos tanques. A água quente (entre 70 a 80 °C) produzida alimenta uma máquina de absorção que é responsável por produzir água fria (entre 6 a 11 °C). Caso a irradiação solar não seja suficiente para atingir a temperatura desejada de água quente, uma caldeira a gás pode ser acionada para suprir a energia que falta. No caso de o sistema ser utilizado como gerador de água quente, a máquina de absorção não é utilizada. No esquema da Figura 4 se observa também uma torre de refrigeração que não se utiliza nesta configuração.

Os subsistemas consumidores representam os ambientes do edifício cuja temperatura ambiente deve ser controlada. Assim, a planta solar é responsável por alimentar com água quente ou fria o sistema de tubulações que chega a todos os ambientes. Em cada ambiente há instalado um trocador de calor que é responsável por transformar a energia térmica da água em ar

quente ou frio. Assim, o conjunto de subsistemas representam os ambientes distintos do edifício, considerados aqui sistemas de Aquecimento, Ventilação e Ar Condicionado (HVAC) (MOROŞAN et al., 2010; PÉREZ-LOMBARD; ORTIZ; POUT, 2008; YANG; YEO; KIM, 2003).

No caso real, a planta solar é responsável pelo sistema de ar condicionado do edifício CIESOL. Porém, o estudo de caso foi adaptado neste trabalho, pois as instalações ainda não permitem uma aplicação de controle totalmente distribuída, sendo utilizado um simulador de consumo para esta parte.

Como comentado, o fluido utilizado pela planta solar é água, podendo ser aquecida ou refrigerada, dependendo diretamente da estação do ano. Os estudos apresentados neste capítulo são resultado da realização de um estágio de doutorado do tipo sanduíche, finalizados na estação quente local. Sendo assim, somente o caso de água refrigerada foi analisado. Neste caso, a máquina de absorção teve que ser ativada. Esta máquina utiliza uma solução aquosa de brometo de Lítio, cuja temperatura de entrada da água deve ser entre 65 e 98 °C para um funcionamento adequado do processo.

O objetivo da estratégia de controle neste caso é gerenciar a água refrigerada produzida na planta solar, distribuindo-a entre um conjunto de sistemas HVAC, a fim de manter a temperatura do ar de saída de cada sistema de climatização de acordo com a sua referência, minimizando o consumo de energia e os custos envolvidos (ESCRIVÁ-ESCRIVÁ; SEGURA-HERAS; ALCÁZAR-ORTEGA, 2010; MIRINEJAD; WELCH; SPICER, 2012).

Na planta solar existem dois circuitos, em que o circuito primário inclui o campo coletor, tanques de armazenagem, aquecedores a gás e a máquina de absorção, enquanto que o circuito secundário inclui as válvulas VS1 a VS4, que desviam parte da vazão do circuito secundário para cada sistema HVAC, e a bomba B3.1/2, que regula a vazão do circuito primário. Detalhes físicos e operação deste sistema podem ser encontrados em Pasamontes et al. (2009), Castilla et al. (2011).

Neste caso, a temperatura de água refrigerada flutua entre 6 °C e 11 °C, devido a uma característica inerente do controlador tipo liga-desliga (*on-off*) utilizado no controle de temperatura da planta solar.

É considerado que a temperatura de referência de cada ambiente é calculada pelo seu sistema HVAC, responsável por manter o conforto térmico dos usuários. Com esta abordagem, o conforto térmico em cada ambiente e o controle de distribuição de água refrigerada possuem certo grau de independência. Sendo assim, cada subsistema é representado por uma dinâmica rápida e não linear, representando o trocador de calor, e uma dinâmica lenta e simplificada, representando a dinâmica de temperatura do ambiente.

A dinâmica da temperatura do ambiente é dada através de um modelo

com as características de um dos ambientes do edifício CIESOL utilizado para simular dinâmicas internas de temperatura (PASAMONTES et al., 2009; CASTILLA et al., 2012). Neste modelo, o volume considerado do ambiente é de $4,96 \times 5,53 \times 2,8 \text{ m}^3$, contando com um sistema complexo formado por diversos elementos, tais como paredes, janelas, condições ambientais externas, entre outras. As relações foram obtidas utilizando leis de transferência de massa e calor (condução, convecção e radiação). Um resumo das dinâmicas consideradas para a temperatura do ambiente é dado nas equações (5.1a)-(5.1g)

$$m_a \cdot C_p a \cdot \frac{dT_{air}}{dt} = Q_{conv} + Q_{wind} + Q_{HVAC} + Q_{natvent} + Q_{inf} + Q_{intGain} \quad (5.1a)$$

$$Q_{conv} = f(T_{air}, T_N, T_S, T_W, T_E, T_{gr}, T_c) \quad (5.1b)$$

$$Q_{wind} = f(T_{air}, T_{out}, I_{dr}, I_{df}, I_{rf}) \quad (5.1c)$$

$$Q_{HVAC} = f(T_{air,imp}) \quad (5.1d)$$

$$Q_{natvent} = f(T_{air}, T_{out}) \quad (5.1e)$$

$$Q_{inf} = f(T_{air}, T_{out}) \quad (5.1f)$$

$$Q_{intGain} = f(T_{air}, T_{mr}, H_r, N_p) \quad (5.1g)$$

sendo H_r a umidade relativa, as temperaturas T_N , T_S , T_W , T_E , T_{gr} e T_c se referem às temperaturas radiantes das superfícies do ambiente, I_{dr} , I_{df} e I_{rf} são irradiações, e N_p é o número de pessoas dentro do ambiente. As variáveis e parâmetros restantes estão listados na Tabela 6.

Este modelo pode ser facilmente extrapolado para qualquer ambiente do edifício, necessitando apenas de uma rede de sensores adequada e um sistema HVAC. O sistema de controle será simplificado, considerando as seguintes variáveis como perturbações: temperatura do ambiente externo (T_{out}); todas irradiações (I_x); umidade relativa (H_r); e o número de pessoas dentro do ambiente (N_p).

Foi assumido que um trocador de calor é o único atuador disponível para realizar o controle térmico dentro do ambiente. Assim, é possível controlar a temperatura dentro do ambiente, T_{air} , através do calor que o sistema HVAC troca com o ar dentro do ambiente, Q_{HVAC} , conforme as equações (5.1a) e (5.1d).

Cada um dos sistemas HVAC foi modelado como um trocador de calor de vazão paralela (veja Figura 5), em que os dois fluidos, neste caso a água refrigerada e o ar, entram no trocador de calor no mesmo lado e viajam em paralelo até a outra extremidade. A dinâmica trocador de calor é dada pelo

seguinte modelo (ÁLVAREZ; YEBRA; BERENGUEL, 2007):

$$\frac{dT_{wo}}{dt} = -\dot{q}_w \frac{T_{wo} - T_{wi}}{V_w} + \frac{1}{\tau_w} (T_{a\text{imp}} - T_{wo}) \quad (5.2a)$$

$$\frac{dT_{a\text{imp}}}{dt} = -v_a \frac{T_{a\text{imp}} - T_{a\text{ret}}}{L} - \frac{1}{\tau_a} (T_{a\text{imp}} - T_{wo}) \quad (5.2b)$$

em que os índices w e a referem-se a água e ar, respectivamente, enquanto que os índices i , o , imp e ret referem-se a entrada, saída, impulso e retorno, respectivamente.

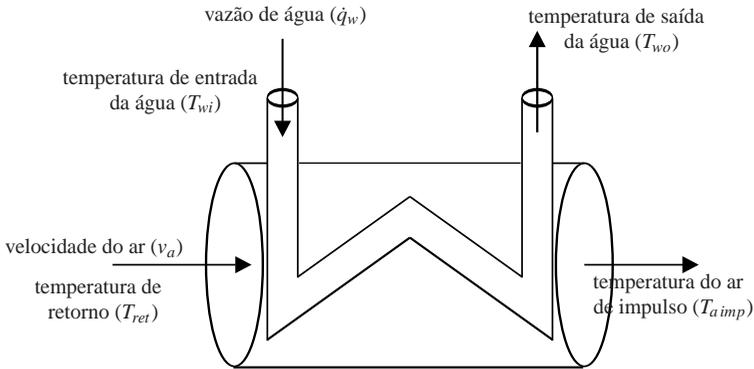


Figura 5 – Esquema de trocador de calor adotado para cada um dos subsistemas

O modelo do trocador de calor possui duas entradas utilizadas como variáveis manipuladas: a vazão de água (\dot{q}_w) e a velocidade do ar (v_a); duas outras entradas consideradas perturbações: a temperatura do ar de admissão, isto é, a temperatura de retorno (T_{ret}), e a temperatura de entrada da água (T_{wi}); e duas variáveis de saída ou variáveis controladas, a temperatura de saída da água (T_{wo}) e a temperatura de saída do ar, isto é, a temperatura do ar de impulso ($T_{a\text{imp}}$). As demais variáveis estão listadas na Tabela 6.

Neste trabalho, foi utilizado a vazão de água refrigerada para controlar a temperatura de saída do ar. A ventilação em cada ambiente é forçada e poderia ser utilizada como variável manipulada, porém decidiu-se manter a velocidade do ar constante por simplificação.

Para este estudo de caso, a temperatura de saída do ar (saída controlada) de um dado subsistema m será representada por y_m . A variável manipulada será representada por u_m , indicando a vazão de água refrigerada entrando no subsistema m , e s_m é a vazão remanescente do subsistema m para o subsistema $m + 1$. A vazão de água entregue pela planta solar e suprido através

Tabela 6 – Variáveis e parâmetros para os modelos

Parâmetros	Descrição	unidades SI
m_a	massa de ar	kg
T_{air}	temperatura do ar do ambiente	°C
T_{out}	temperatura externa do ar	°C
Q_{conv}	ganho de calor por convecção livre através de paredes	W
Q_{wind}	ganho de calor através da janela	W
Q_{HVAC}	ganho de calor por ventilação forçada	W
$Q_{natvent}$	ganho de calor por ventilação natural	W
Q_{inf}	ganho de calor por infiltrações	W
$Q_{intGain}$	ganho de calor por elementos internos (pessoas, aparelhos elétricos e luzes.)	W
A_a	Área da seção transversal para o ar	m ²
A_w	Área da seção transversal para a água	m ²
Cp_a	Capacidade de calor específico do ar	J/kg°C
Cp_w	Capacidade de calor específico da água	J/kg°C
d_a	Diâmetro do cano de ar	m
d_w	Diâmetro do cano de água	m
h_a	Coefficiente de transferência de calor do ar por convecção	W/m ² °C
h_w	Coefficiente de transferência de calor da água por convecção	W/m ² °C
L	Comprimento do ventiloconvector	m
\dot{q}	Vazão volumétrica de água	m ³ /s
ρ_a	Densidade do ar	kg/m ³
ρ_w	Densidade da água	kg/m ³
T_a	Temperatura do ar	°C
T_w	Temperatura da parede de água	°C
v_a	Velocidade de impulso do ar	m/s
V_w	Volume do cano de água	m ³
$\tau_a = \frac{A_a \rho_a C p_a}{\pi d_a h_a}$	Constante de tempo fundamental relacionando T_a contra variações de T_w	s
$\tau_w = \frac{A_w \rho_w C p_w}{\pi d_w h_w}$	Constante de tempo fundamental relacionando T_w contra variações de T_a	s

da bomba B3.1/2 é dado pela variável s_0 , enquanto s_4 é a vazão restante, no caso de a produção exceder o consumo.

No estudo de caso supõe-se que a produção de água refrigerada nem sempre é suficiente para suprir a demanda de energia de todos os subsistemas, forçando uma restrição física equivalente à restrição (5.8e), em que a soma dos consumos dos subsistemas não pode ser superior à vazão de saída da bomba B3.1/2. Esta condição torna proibitiva a aplicação de estratégias de controle desacopladas, pois a disposição física dos subsistemas (em série) implica em um esgotamento dos recursos, sendo que os primeiros subsistemas acabariam por consumir toda a energia disponível deixando os últimos subsistemas sem recursos.

Para evitar este caso, foi proposta a aplicação da metodologia DMPC. Este problema de controle de conforto térmico pode ser tratado a partir da perspectiva de um problema de otimização distribuído devido a duas razões: i) o número de variáveis de controle e sinais de sensores e atuadores podem crescer rapidamente, dependendo do número de sistemas HVAC sendo controlados simultaneamente, o que não afeta de forma significativa o tamanho dos problemas de controle distribuídos, e ii) cada HVAC é situado em um ambiente distinto, podendo ser inclusive em edifícios diferentes, contando com seu próprio sistema de controle. Estes pontos tornam o DMPC mais interessante que o MPC em termos de implementação.

5.2 PROBLEMA DE CONTROLE COM RESTRIÇÃO DE RECURSOS

Esta seção apresenta a formulação MPC para o sistema de gerenciamento de recursos, seguido por uma formulação compacta e uma reformulação em termos de variáveis de folga que irá ser útil para desenvolver uma solução utilizando DMPC.

Para a aplicação no gerenciamento de recursos, a função custo teve que englobar mais elementos que no caso desenvolvido no Capítulo 2, por questões de operação do sistema. Para um dado subsistema m , a função custo escolhida foi:

$$J = \sum_{j=N_{1,m}}^{N_{2,m}} q_m [\hat{y}_m(k+j|k) - w_m(k+j)]^2 + \sum_{j=0}^{N_{u,m}-1} r_m [\Delta u_m(k+j)]^2, \quad (5.3)$$

em que $\hat{y}_m(k+j|k)$ e $w_m(k+j)$ com $j = N_{1,m}; \dots; N_{2,m}$ são, respectivamente, as previsões de saída computadas com as informações disponíveis até o tempo k e a referência. $\Delta u_m(k+j)$ é uma sequência de incrementos de controle fu-

turos, obtidos com a minimização da função custo¹, $N_{1,m}$ e $N_{2,m}$ são respectivamente o mínimo e o máximo do horizonte de predição do subsistema m , e $N_{u,m}$ é o horizonte de controle do mesmo subsistema. Estes horizontes em conjunto com os ajustes q_m e r_m são os parâmetros de sintonização do controlador, em que q_m penaliza o erro de seguimento futuro e r_m penaliza o esforço de controle para o horizonte considerado.

Para obter a sequência de controle que minimiza J , novamente o modelo de processo deve ser considerado, uma vez que impõe a relação entre as ações de controle e as saídas do modelo. Será utilizada a formulação no espaço de estados, descrita aqui através de uma formulação genérica considerando um conjunto de $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$ subsistemas dinamicamente desacoplados, em que cada subsistema m terá a seguinte equação linear de tempo discreto:

$$\tilde{\mathbf{x}}_m(k+1) = \tilde{A}_m \tilde{\mathbf{x}}_m(k) + \tilde{B}_m u_m(k) \quad (5.4a)$$

$$y_m(k) = \tilde{C}_m \tilde{\mathbf{x}}_m(k) \quad (5.4b)$$

sendo $\tilde{\mathbf{x}}_m \in \mathbb{R}^{n_m}$ o estado, $y_m \in \mathbb{R}$ é a saída, $u_m \in \mathbb{R}$ é a entrada de controle, e \tilde{A}_m , \tilde{B}_m , e \tilde{C}_m são matrizes de dimensões apropriadas.

Um modelo incremental pode ser utilizado caso a entrada de controle seja $\Delta u_m(k)$ ao invés de $u_m(k)$. Utilizando a relação $\Delta u_m(k) = u_m(k) - u_m(k-1)$ chega-se em:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_m(k+1) \\ u_m(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_m & \tilde{B}_m \\ 0_m & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_m(k) \\ u_m(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_m \\ I \end{bmatrix} \Delta u_m(k) \quad (5.5)$$

$$y_m(k) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_m & 0'_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_m(k) \\ u_m(k-1) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

com $\tilde{\mathbf{x}}_m$ sendo o estado aumentado.

Da mesma maneira que as teorias desenvolvidas no Capítulo 2, as predições de estado e saída podem ser escritas como (CAMACHO; BORDONS, 2004):

$$\hat{y}_m(k+j|k) = C_m \hat{\mathbf{x}}_m(k+j|k) \quad (5.7a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_m(k+j|k) = A_m^j \mathbf{x}_m(k) + \sum_{l=1}^j A_m^{j-l} B_m \Delta u_m(k-1+l) \quad (5.7b)$$

¹ $\Delta u_m(k) = u_m(k) - u_m(k-1)$

Assim, substituindo a expressão (5.7) na função de custo, a única variável desconhecida no problema de otimização é a sequência de controle futuro.

Para este caso, foram definidas restrições para a amplitude do sinal de controle, taxa de variação dos atuadores e sinal de saída, descritas por:

$$\begin{aligned} u_m^{\min} &\leq u_m(k) \leq u_m^{\max}; \quad \forall k \geq 0, \\ \Delta u_m^{\min} &\leq u_m(k) - u_m(k-1) \leq \Delta u_m^{\max}; \quad \forall k \geq 0, \\ y_m^{\min} &\leq y_m(k) \leq y_m^{\max}; \quad \forall k \geq 0. \end{aligned}$$

O controlador MPC centralizado concebido para coordenar as ações de controle de modo a atingir um objetivo global deve resolver o seguinte problema de otimização:

$$P : \min J = \sum_{m \in \mathcal{M}} \left(\sum_{j=N_{1,m}}^{N_{2,m}} q_m (\hat{y}_m(k+j|k) - w_m(k+j))^2 + \sum_{j=0}^{N_{u,m}-1} r_m \Delta u_m(k+j)^2 \right) \quad (5.8a)$$

$$\text{s.a : } \forall m \in \mathcal{M}, j = N_{1,m}, \dots, N_{2,m} :$$

$$y_m^{\min} \leq \hat{y}_m(k+j|k) \leq y_m^{\max} \quad (5.8b)$$

$$\forall m \in \mathcal{M}, j = 0, \dots, N_{u,m} - 1 :$$

$$\Delta u_m^{\min} \leq \Delta u_m(k+j) \leq \Delta u_m^{\max} \quad (5.8c)$$

$$u_m^{\min} \leq u_m(k-1) + \sum_{l=0}^j \Delta u_m(k+l) \leq u_m^{\max} \quad (5.8d)$$

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} \left(u_m(k-1) + \sum_{l=0}^j \Delta u_m(k+l) \right) \leq r^{\max}, \quad j = 0, \dots, N_{u,m} - 1 \quad (5.8e)$$

Aqui aparece um elemento particular deste estudo de caso, em que foi considerado que os subsistemas dinâmicos compartilham um recurso limitado para as ações de controle, definido pela restrição 5.8e, em que r^{\max} é o recurso disponível e $u_m^{\min} \geq 0$ garante o uso do recurso $u_m \geq 0$ para todos os subsistemas.

Será desenvolvida a formulação compacta do problema MPC (5.8). Isto é feito coletando as variáveis de controle em um vetor para o horizonte de controle e eliminando as predições de variáveis de estado utilizando as

equações anteriores. Para isto, serão utilizadas as seguintes matrizes:

$$\bar{C}_m = \begin{bmatrix} C_m A_m^{N_{1,m}} \\ C_m A_m^{N_{1,m}+1} \\ \vdots \\ C_m A_m^{N_{2,m}} \end{bmatrix} \quad \bar{D}_m = \begin{bmatrix} C_m A_m^{N_{1,m}-1} B_m & \cdots & C_m A_m^{N_{1,m}-N_{u,m}} B_m \\ C_m A_m^{N_{1,m}} B_m & \cdots & C_m A_m^{N_{1,m}-N_{u,m}+1} B_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_m A_m^{N_{2,m}-1} B_m & \cdots & C_m A_m^{N_{2,m}-N_{u,m}} B_m \end{bmatrix}$$

em que as matrizes A_m^i são nulas para $i < 0$, por exemplo em $A_m^{N_{1,m}-N_{u,m}}$ com $N_{u,m} > N_{1,m}$. Coletando as variáveis para o respectivo horizonte, os seguintes vetores são obtidos:

$$\bar{\mathbf{y}}_m = \begin{bmatrix} \hat{y}_m(k + N_{1,m}|k) \\ \vdots \\ \hat{y}_m(k + N_{2,m}|k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_m = \begin{bmatrix} w_m(k + N_{1,m}) \\ \vdots \\ w_m(k + N_{2,m}) \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} \Delta u_m(k) \\ \vdots \\ \Delta u_m(k + N_{u,m} - 1) \end{bmatrix}$$

Com esta notação, o problema MPC pode ser reescrito como:

$$P: \min J = \sum_{m \in \mathcal{M}} (\|\bar{C}_m \mathbf{x}_m(k) + \bar{D}_m \Delta \mathbf{u}_m - \mathbf{w}_m\|_{Q_m}^2 + \|\Delta \mathbf{u}_m\|_{R_m}^2) \quad (5.9a)$$

s.a : $\forall m \in \mathcal{M}$:

$$\mathbf{y}_m^{\min} \leq \bar{C}_m \mathbf{x}_m(k) + \bar{D}_m \Delta \mathbf{u}_m \leq \mathbf{y}_m^{\max} \quad (5.9b)$$

$$\Delta \mathbf{u}_m^{\min} \leq \Delta \mathbf{u}_m \leq \Delta \mathbf{u}_m^{\max} \quad (5.9c)$$

$$\mathbf{u}_m^{\min} \leq u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}} + T_m \Delta \mathbf{u}_m \leq \mathbf{u}_m^{\max} \quad (5.9d)$$

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} (u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}} + T_m \Delta \mathbf{u}_m) \leq \mathbf{r}^{\max} \quad (5.9e)$$

em que T_m é uma matriz triangular inferior formada por elementos unitários, \mathbf{r}^{\max} é um vetor de dimensão adequada com todos os elementos iguais ao limite de recurso r^{\max} , e Q_m (R_m) é uma matriz diagonal cujos elementos não nulos são iguais a q_m (r_m). Os vetores remanescentes são definidos de maneira similar a \mathbf{r}^{\max} .

5.2.1 MPC Utilizando Variáveis de Folga

Para o estudo de caso, foi considerado o caso particular em que os subsistemas estão arranjados em série, com o subsistema m fisicamente disposto precedendo o subsistema $m + 1$. Isto significa que o recurso é primeiramente disponibilizado para o subsistema m e o que sobra fica disponível para os subsistemas seguintes, $m + 1, \dots, M$.

Foi considerado que a produção da planta solar nem sempre seria suficiente para satisfazer todos os subsistemas, sendo assim uma estratégia descentralizada não seria adequada. Porém, a formulação tratada até este ponto não é adequada para a estratégia DMPC, pois a restrição (5.8e) resulta em um acoplamento total na formulação dos subproblemas. Sendo assim, foi estudada uma formulação alternativa, utilizando variáveis de folga representando a energia disponível ao longo do sistema.

Seja $s_{m-1}(k)$ o recurso disponível para o subsistema m no tempo k , como ilustrado na Figura 6, computado como $s_{m-1}(k) = r^{\max} - \sum_{i=1}^{m-1} (u_i(k-1) + \Delta u_i(k))$. Localmente no subsistema m , a equação de balanço de recursos $u_m(k-1) + \Delta u_m(k) + s_m(k) = s_{m-1}(k)$ deve ser satisfeita.

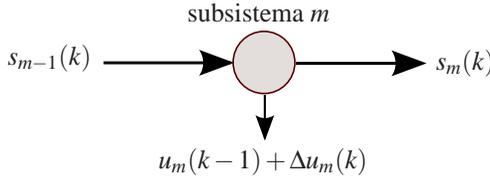


Figura 6 – Visão local do uso e vazão de recursos no subsistema m .

A restrição de recursos (5.8e) pode ser representada de maneira equivalente através de um conjunto de restrições, definidas para $j = 0, \dots, N_{u,m} - 1$ como:

$$s_0(k+j) = r^{\max} \quad (5.10a)$$

$$u_m(k-1) + \sum_{l=0}^j \Delta u_m(k+l) + s_m(k+j) = s_{m-1}(k+j), \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (5.10b)$$

$$s_m(k+j) \geq 0, \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (5.10c)$$

Proposição 3. *O sistema de desigualdades (5.10) é equivalente à desigualdade (5.8e).*

Demonstração. A seguir, define-se $u_m(k+j) = u_m(k-1) + \sum_{l=0}^j \Delta u_m(k+l)$

e omite-se o índice $(k + j)$ para simplificar a visualização do desenvolvimento. Suponha que o sistema de desigualdades (5.10) é satisfeito para vetores $\mathbf{u} = (u_m : m = 1, \dots, M)$ e $\mathbf{s} = (s_m : m = 0, \dots, M)$. Somando-se as equações (5.10b) para todo $m \in \mathcal{M}$ chegamos em

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} u_m + s_M = s_0 \implies \sum_{m \in \mathcal{M}} u_m \leq r^{\max}, \quad (5.11)$$

pois $s_M \geq 0$ e $s_0 = r^{\max}$. Agora, para mostrar a outra direção, suponha que \mathbf{u} satisfaz a restrição (5.8e). A equação (5.10a) é obviamente satisfeita e a equação (5.10b) é satisfeita definindo $s_m = s_{m-1} - u_m$ para $m = 1, \dots, M$. Assim, resta mostrar que $s_m \geq 0$ para todo $m \in \mathcal{M}$. Pela soma $s_m = s_{m-1} - u_m$ sobre $m \in \mathcal{M}$ chega-se a

$$s_M = s_0 - \sum_{m \in \mathcal{M}} u_m = r^{\max} - \sum_{m \in \mathcal{M}} u_m \geq 0 \quad (5.12)$$

pois (5.8e) é válida. Para $m = M - 1$, temos que $s_{M-1} = s_M + u_m \geq s_M \geq 0$ porque $u_m \geq 0$. Continuando até $m = 1$, é mostrado que $s_m \geq 0$ para todo $m \in \mathcal{M}$. \square

Esta representação alternativa para as restrições de recurso permite redefinir o problema MPC (5.9) em termos de variáveis de folga s_m . Sejam $\mathbf{s}_0 = \mathbf{r}^{\max}$ e $\mathbf{s}_m = (s_m(k), \dots, s_m(k + N_{u,m} - 1))$ vetores de dimensões apropriadas, então o incremento de controle pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_m &= T_m^{-1}(\mathbf{s}_{m-1} - \mathbf{s}_m - u_m(k-1)\mathbf{1}^{N_{u,m}}) \\ &= -T_m^{-1}u_m(k-1)\mathbf{1}^{N_{u,m}} + [T_m^{-1} - T_m^{-1}]\bar{\mathbf{s}}_m, \end{aligned}$$

sendo $\bar{\mathbf{s}}_m = [s'_{m-1} \ s'_m]'$ um vetor com valores atuais e passados de recursos disponíveis. Um desenvolvimento similar para os sinais de saída fornece:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}_m &= \bar{C}_m \mathbf{x}_m(k) + \bar{D}_m \Delta \mathbf{u}_m \\ &= \bar{C}_m \mathbf{x}_m(k) - \bar{D}_m T_m^{-1} u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}} + [\bar{D}_m T_m^{-1} - \bar{D}_m T_m^{-1}] \bar{\mathbf{s}}_m. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima no problema (5.9), chega-se na reformulação dada por:

$$P: \min J = \sum_{m \in \mathcal{M}} \left(\frac{1}{2} \bar{\mathbf{s}}_m' H_m \bar{\mathbf{s}}_m + \mathbf{f}_m' \bar{\mathbf{s}}_m + c_m \right) \quad (5.13a)$$

$$\text{s.a.: } \forall m \in \mathcal{M} :$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_m^{\min} &\leq \bar{C}_m \mathbf{x}_m(k) - \bar{D}_m T_m^{-1} u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}} \\ &\quad + [\bar{D}_m T_m^{-1} - \bar{D}_m T_m^{-1}] \bar{\mathbf{s}}_m \leq \mathbf{y}_m^{\max} \end{aligned} \quad (5.13b)$$

$$\Delta \mathbf{u}_m^{\min} \leq -T_m^{-1} u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}} + [T_m^{-1} - T_m^{-1}] \bar{\mathbf{s}}_m \leq \Delta \mathbf{u}_m^{\max} \quad (5.13c)$$

$$\mathbf{u}_m^{\min} \leq [I^{N_{u,m}} - I^{N_{u,m}}] \bar{\mathbf{s}}_m \leq \mathbf{u}_m^{\max} \quad (5.13d)$$

$$\mathbf{s}_m \geq \mathbf{0}^{N_{u,m}} \quad (5.13e)$$

onde:

$$\begin{aligned} H_m &= 2([\bar{D}_m T_m^{-1} - \bar{D}_m T_m^{-1}]' Q_m [\bar{D}_m T_m^{-1} - \bar{D}_m T_m^{-1}] \\ &\quad + [T_m^{-1} - T_m^{-1}]' R_m [T_m^{-1} - T_m^{-1}]) \\ \mathbf{f}_m &= 2(\bar{C}_m \mathbf{x}_m(k) - \bar{D}_m T_m^{-1} u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}} - \mathbf{w}_m)' Q_m [\bar{D}_m T_m^{-1} - \bar{D}_m T_m^{-1}] \\ &\quad - 2(T_m^{-1} u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}})' R_m [T_m^{-1} - T_m^{-1}] \\ c_m &= \|\bar{C}_m \mathbf{x}_m(k) - \bar{D}_m T_m^{-1} u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}} - \mathbf{w}_m\|_{Q_m}^2 + \|T_m^{-1} u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}}\|_{R_m}^2 \end{aligned}$$

A formulação do problema MPC dado em (5.13) é um problema de programação quadrático definido utilizando variáveis de folga \mathbf{s}_m . Neste caso, o acoplamento entre os subsistemas se torna aos pares, diferente do problema original em que todos os subsistemas estavam acoplados através da restrição (5.8e). Esta estrutura acoplada aos pares permite uma decomposição eficiente do problema de controle para a aplicação do DMPC.

5.3 DMPC COM VARIÁVEIS DE FOLGA

O desenvolvimento do DMPC se assemelha muito ao do Capítulo 2, porém será repetido aqui para facilitar a visualização da utilização das variáveis de folga na formulação do conjunto de subproblemas $\{P_m\}$. A decomposição novamente será dada de uma maneira perfeita, ou seja, a solução de $\{P_m\}$ induz a solução de P .

Neste caso foi utilizado o problema MPC (5.13), que é formado por subsistemas acoplados apenas localmente, ou seja, um dado subsistema m

está acoplado somente com os subsistemas $m - 1$ e $m + 1$, através da função objetivo e restrições (5.13b)-(5.13d) através das variáveis $\bar{\mathbf{s}}_{m-1}$ e $\bar{\mathbf{s}}_{m+1}$.

Esta estrutura especial permite a decomposição de P em um conjunto de subproblemas $\{P_m(\mathbf{s}_{m-1}, \mathbf{s}_{m+1})\}$ em cada subsistema. O problema de um dado subsistema m pode ser definido como:

$$P_m(\mathbf{s}_{m-1}, \mathbf{s}_{m+1}) : \\ \min_{\mathbf{s}_m} J_m = \frac{1}{2} \mathbf{s}'_m \left(\sum_{i=m}^{\min(m+1, M)} H_{m,i} \right) \mathbf{s}_m + \left(\sum_{i=m}^{\min(m+1, M)} \mathbf{f}'_{m,i} \right) \mathbf{s}_m + \sum_{i=m}^{\min(m+1, M)} c_{m,i} \quad (5.14a)$$

sujeito às restrições:

$$\mathbf{y}_m^{\min} \leq \bar{C}_m \mathbf{x}_m(k) - \bar{D}_m T_m^{-1} u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}} \\ + \bar{D}_m T_m^{-1} \mathbf{s}_{m-1} - \bar{D}_m T_m^{-1} \mathbf{s}_m \leq \mathbf{y}_m^{\max} \quad (5.14b)$$

$$\mathbf{y}_{m+1}^{\min} \leq \bar{C}_{m+1} \mathbf{x}_{m+1}(k) - \bar{D}_{m+1} T_{m+1}^{-1} u_{m+1}(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m+1}} \\ - \bar{D}_{m+1} T_{m+1}^{-1} \mathbf{s}_{m+1} + \bar{D}_{m+1} T_{m+1}^{-1} \mathbf{s}_m \leq \mathbf{y}_{m+1}^{\max} \quad (5.14c)$$

$$\Delta \mathbf{u}_m^{\min} \leq -T_m^{-1} u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}} + T_m^{-1} \mathbf{s}_{m-1} - T_m^{-1} \mathbf{s}_m \leq \Delta \mathbf{u}_m^{\max} \quad (5.14d)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{m+1}^{\min} \leq -T_{m+1}^{-1} u_{m+1}(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m+1}} - T_{m+1}^{-1} \mathbf{s}_{m+1} + T_{m+1}^{-1} \mathbf{s}_m \leq \Delta \mathbf{u}_{m+1}^{\max} \quad (5.14e)$$

$$\mathbf{u}_m^{\min} \leq \mathbf{s}_{m-1} - \mathbf{s}_m \leq \mathbf{u}_m^{\max} \quad (5.14f)$$

$$\mathbf{u}_{m+1}^{\min} \leq -\mathbf{s}_{m+1} + \mathbf{s}_m \leq \mathbf{u}_{m+1}^{\max} \quad (5.14g)$$

$$\mathbf{s}_m \geq \mathbf{0}^{N_{u,m}} \quad (5.14h)$$

com matrizes definidas como:

$$H_{m,m} = 2 \left((\bar{D}_m T_m^{-1})' Q_m (\bar{D}_m T_m^{-1}) + (T_m^{-1})' R_m T_m^{-1} \right) \\ H_{m,m+1} = 2 \left((\bar{D}_{m+1} T_{m+1}^{-1})' Q_{m+1} (\bar{D}_{m+1} T_{m+1}^{-1}) + (T_{m+1}^{-1})' R_{m+1} T_{m+1}^{-1} \right)$$

vetores definidos como:

$$\mathbf{f}'_{m,m} = 2 \left(\bar{C}_m \mathbf{x}_m(k) - \bar{D}_m T_m^{-1} u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}} - \mathbf{w}_m + \bar{D}_m T_m^{-1} \mathbf{s}_{m-1} \right)' \\ Q_m (-\bar{D}_m T_m^{-1}) + 2 \left(-T_m^{-1} u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}} + T_m^{-1} \mathbf{s}_{m-1} \right)' R_m (-T_m^{-1}) \\ \mathbf{f}'_{m,m+1} = 2 \left(\bar{C}_{m+1} \mathbf{x}_{m+1}(k) - \bar{D}_{m+1} T_{m+1}^{-1} u_{m+1}(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m+1}} - \mathbf{w}_{m+1} \right. \\ \left. - \bar{D}_{m+1} T_{m+1}^{-1} \mathbf{s}_{m+1} \right)' Q_{m+1} (\bar{D}_{m+1} T_{m+1}^{-1}) \\ + 2 \left(-T_{m+1}^{-1} u_{m+1}(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m+1}} - T_{m+1}^{-1} \mathbf{s}_{m+1} \right)' R_{m+1} T_{m+1}^{-1}$$

e constantes definidas como:

$$\begin{aligned}
c_{m,m} &= \|\bar{C}_m \mathbf{x}_m(k) - \bar{D}_m T_m^{-1} u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}} - \mathbf{w}_m + \bar{D}_m T_m^{-1} \mathbf{s}_{m-1}\|_{Q_m}^2 \\
&\quad + \|T_m^{-1} u_m(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m}} + T_m^{-1} \mathbf{s}_{m-1}\|_{R_m}^2 \\
c_{m,m+1} &= \|\bar{C}_{m+1} \mathbf{x}_{m+1}(k) - \bar{D}_{m+1} T_{m+1}^{-1} u_{m+1}(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m+1}} - \mathbf{w}_{m+1} \\
&\quad - \bar{D}_{m+1} T_{m+1}^{-1} \mathbf{s}_{m+1}\|_{Q_{m+1}}^2 \\
&\quad + \|T_{m+1}^{-1} u_{m+1}(k-1) \mathbf{1}^{N_{u,m+1}} - T_{m+1}^{-1} \mathbf{s}_{m+1}\|_{R_{m+1}}^2
\end{aligned}$$

Vale a pena ressaltar que $P_m(\mathbf{s}_{m-1}, \mathbf{s}_{m+1})$ pode ser obtido do problema P ao remover todos os termos da função objetivo e restrições que não dependem das variáveis de decisão do subsistema m e seu sucessor e antecessor imediato, definida aqui como sua vizinhança $N(m) = \{(m-1), (m+1)\} \cap \mathcal{M}$.

5.4 ALGORITMO DISTRIBUÍDO

O algoritmo distribuído seguirá o método de ponto-interior, muito semelhante ao desenvolvido no Capítulo 3, porém com simplificações devido à estrutura em série dos subproblemas, que facilita a coordenação entre os agentes. Para simplificar a visualização, considere a forma do problema P dada por:

$$P: \min f_0(\mathbf{s}) \quad (5.15a)$$

$$\text{s.a. } f_j(\mathbf{s}) \leq 0, j = 1, \dots, p \quad (5.15b)$$

sendo que f_0 corresponde a (5.13a), as funções de restrição f_j correspondem a (5.13b)-(5.13e), e p é o número total de restrições. Novamente será utilizado o método de ponto-interior (BOYD; VANDENBERGHE, 2004), resolvendo uma sequência de problemas de centralização dados por:

$$P(\varepsilon): \min_{\mathbf{s} \in \text{dom } \theta} \theta(\mathbf{s}) = f_0(\mathbf{s}) + \varepsilon \phi(\mathbf{s}) \quad (5.16a)$$

em que

$$\phi(\mathbf{s}) = - \sum_{j=1}^p \ln(-f_j(\mathbf{s})) \quad (5.16b)$$

é a função barreira e $\varepsilon > 0$ é um parâmetro que controla o grau de aproximação das restrições. O domínio de θ , $\text{dom } \theta = \{\mathbf{s} : f_j(\mathbf{s}) < 0, j = 1, \dots, p\}$, é o interior do conjunto de restrições.

O método de ponto-interior é relembrado no Algoritmo 4 e garante que $\mathbf{s}(\varepsilon)$ converge para a solução ótima \mathbf{s}^* para P para uma sequência decrescente $\{\varepsilon^q\}$.

Algoritmo 4: Método de ponto-interior

Entrada: \mathbf{s}^{in} estritamente factível, $\varepsilon := \varepsilon^{(0)}$, $\mu < 1$, tolerância τ ;

repita

 Passo de centralização: encontre $\mathbf{s}(\varepsilon) := \arg \min \theta(\mathbf{s})$

 começando por \mathbf{s}^{in} ;

 Atualizar: $\mathbf{s}^{\text{in}} := \mathbf{s}(\varepsilon)$;

 Decrescer ε : $\varepsilon := \mu\varepsilon$;

até que $p\varepsilon/\mu < \tau$;

Sendo $P(\varepsilon)$ um problema irrestrito dentro do domínio, ele pode ser resolvido por um algoritmo distribuído baseado em gradiente, em que a rede de agentes resolve a decomposição $\{P_m(\varepsilon)\}$ do problema de centralização. Na decomposição, o subproblema associado a cada subsistema m é definido como:

$$P_m(\varepsilon, \mathbf{s}_{m-1}, \mathbf{s}_{m+1}) : \min_{\mathbf{s}_m \in \text{dom } \theta_m} \theta_m(\mathbf{s}_m) = J_m(\mathbf{s}_m) + \varepsilon \phi_m(\mathbf{s}_m) \quad (5.17a)$$

em que

$$\phi_m(\mathbf{s}_m) = - \sum_{j \in L_m} \ln(-f_j(\mathbf{s}_m)) \quad (5.17b)$$

é a barreira do subsistema e $L_m \subseteq \{1, \dots, m\}$ corresponde às restrições (5.14b)-(5.14h) que aparecem em $P_m(\mathbf{s}_{m-1}, \mathbf{s}_{m+1})$. O domínio de θ_m é definido como $\text{dom } \theta_m = \{\mathbf{s}_m : f_j(\mathbf{s}_m) < 0, j \in L_m\}$.

O algoritmo para resolver o conjunto de subproblemas é o mesmo desenvolvido no Capítulo 3, tratado também em (CAMPONOGARA; SCHERER, 2011). Relembando que se trata de um algoritmo iterativo que garante a convergência da solução distribuída $\{\mathbf{s}(\varepsilon)^q\}$ para a solução centralizada $\mathbf{s}(\varepsilon)$. Neste caso, um agente m produz a próxima iteração $\mathbf{s}_m(\varepsilon)^{q+1}$ resolvendo $P_m(\varepsilon, \mathbf{s}_{m-1}^q, \mathbf{s}_{m+1}^q)$ utilizando as soluções mais recentes de sua vizinhança, enquanto seus vizinhos mantêm suas decisões na iteração q .

Este estudo de caso, em que os subsistemas estão alocados fisicamente em série, facilitou a coordenação da rede de agentes. Aqui, a coordenação e convergência podem ser alcançados separando os agentes em dois grupos, $\mathcal{M}_{\text{par}} = \{m \in \mathcal{M} : m \text{ for par}\}$ e $\mathcal{M}_{\text{ímpar}} = \{m \in \mathcal{M} : m \text{ for ímpar}\}$, e permitindo que somente os agentes em \mathcal{M}_{par} revisem suas decisões quando o contador de

iterações q é par, e de maneira análoga, quando q é ímpar. Um esboço de um algoritmo distribuído utilizando gradiente para resolver $\{P_m(\varepsilon)\}$ é dado no Algoritmo 5.

Algoritmo 5: Algoritmo distribuído com gradiente.

Entrada: $\varepsilon, \mathbf{s}^0 := \mathbf{s}^{\text{in}}$ estritamente factível, tolerância η ;

$q := 0$;

repita

se q é ímpar **então**

$\mathcal{M}_q := \mathcal{M}_{\text{ímpar}}$;

senão

$\mathcal{M}_q := \mathcal{M}_{\text{par}}$;

para todo $m \in \mathcal{M}_q$ **em paralelo faça**

 Agente m recebe \mathbf{s}_{m-1}^q e \mathbf{s}_{m+1}^q de seus agentes vizinhos;

 Agente m produz \mathbf{s}_m^{q+1} resolvendo $P_m(\varepsilon, \mathbf{s}_{m-1}^q, \mathbf{s}_{m+1}^q)$

 começando de \mathbf{s}_m^q ;

para todo $m \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_q$ **em paralelo faça**

 Agente m define $\mathbf{s}_m^{q+1} := \mathbf{s}_m^q$;

$q := q + 1$;

até que $\|\nabla\theta(\mathbf{s}^q)\| < \eta$;

retorne $\mathbf{s}(\varepsilon) := \mathbf{s}^q$;

O Algoritmo 5 é um caso particular do algoritmo desenvolvido no Capítulo 3. Aqui, o problema $P_m(\varepsilon, \mathbf{s}_{m-1}^q, \mathbf{s}_{m+1}^q)$ foi resolvido aproximadamente utilizando busca linear com retrocesso ao longo de uma direção de descenso ou direção de Newton, até satisfazer a regra de Armijo (NOCEDAL; WRIGHT, 1999). No entanto, estratégias distintas podem ser utilizadas, como por exemplo a busca linear exata.

Uma implementação distribuída requer sincronização entre os agentes. Isto pode ser alcançado utilizando protocolos de troca de mensagens, discutidos em (CAMPOGARA; LIMA, 2012) cujos agentes de um grupo (por exemplo $\mathcal{M}_{\text{ímpar}}$) permanecem em espera até receber um sinal do outro grupo de agentes (neste caso $\mathcal{M}_{\text{pares}}$). Ao receberem o sinal, os agentes $m \in \mathcal{M}_{\text{ímpar}}$ revisam suas decisões resolvendo $P_m(\varepsilon)$ e enviam o sinal para os agentes \mathcal{M}_{par} , e o processo é repetido. A convergência global pode ser detectada de maneira similar, rastreando o número de iterações consecutivas em que não ocorrem mudanças na solução global \mathbf{s}^q .

5.5 RESULTADOS E ANÁLISES

Nesta seção são apresentados os resultados de experimentos e simulações realizados para avaliar a eficácia da estratégia de controle proposta. A metodologia *hardware-in-the-loop* foi utilizada para realizar os experimentos, segundo a qual a planta solar real foi ligada com um simulador de carga, que é responsável pela representação da dinâmica de um conjunto de subsistemas simulados. Neste esquema, o simulador recebe os dados da planta real e, em seguida, calcula as ações de controle e simula as saídas dos subsistemas.

Para os experimentos, alguns critérios operacionais foram definidos. Um deles define que os controladores devem aguardar no mínimo 3 minutos do início do experimento antes de entrar em operação, permitindo que a planta solar e os subsistemas cheguem a estados estacionários. O primeiro ponto de operação do controlador é definido aqui como k^0 . Foram necessários observadores de estado na implementação dos controladores (ÅSTRÖM; MURRAY, 2010; WANG, 2009), assim, este tempo de espera de 3 minutos é utilizado também para alimentar os controladores com dados consistentes.

O algoritmo distribuído utiliza o método de Newton com retrocesso para resolver cada P_m . Alguns dos parâmetros utilizados nos experimentos para o conjunto de subsistemas $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ foram:

- período de amostragem $T_s = 3$ (s);
- horizontes de controle e predição $N_{u,m} = 10$, $N_{1,m} = 1$ e $N_{2,m} = 30$ para todo $m \in \mathcal{M}$;
- tolerância do ponto-interior $\tau = 0,01/p$;
- tolerância de barreira $\eta = 0,001$;
- pólos do observadores de estado discreto em $-0,01$, $-0,02$ e $-0,021$.

O algoritmo foi implementado em Matlab[®], em um computador Intel Core 2 Duo CPU 2.13GHz.

5.5.1 Comparando Controladores Descentralizados com Distribuídos

O primeiro caso apresentado compara o funcionamento do controlador distribuído com controladores descentralizados. A ideia é demonstrar que, apesar das dinâmicas dos subsistemas serem desacopladas, a restrição física relacionada ao consumo de recursos torna o sistema fortemente acoplado, em que técnicas mais simples de controle podem levar a pontos de operação indesejáveis.

Neste caso foi utilizada uma simulação de um fornecimento fixo da planta solar, com vazão e temperatura constantes. Durante o experimento ocorrem três fases distintas:

- a fase 1 se estende do início do experimento até 3 minutos. Nesta fase os controladores estão desligados;
- a fase 2 inicia em 3 minutos e vai até 10 minutos do experimento. Nesta fase os controladores estão ligados com uma referência de 20°C para todos os subsistemas;
- a fase 3 inicia em 10 minutos e vai até 20 minutos do experimento. Nesta fase existe uma troca de referência de temperatura para 18°C em todos os subsistemas.

Para simplificar as comparações, todos os subsistemas utilizam o mesmo modelo, descrito no Apêndice C. Para os parâmetros do DMPC foram definidos os valores $\epsilon^0 = 10$, $\mu = 0, 1$ e $q^{\max} = 5$. A seleção destes parâmetros será discutida mais adiante, na seção 5.5.3.

As Figuras 7 e 8 ilustram o funcionamento das duas técnicas para o modo de operação definido. As figuras foram divididas em quatro sub figuras, representando i) as saídas dos subsistemas; ii) as ações de controle dos subsistemas; iii) a temperatura de saída da planta solar e iv) a vazão de saída da planta solar e a soma das ações de controle dos subsistemas.

Durante a primeira e a segunda fase da simulação não é possível visualizar grandes diferenças entre as abordagens, pois cada subsistema trabalha isoladamente e os recursos são suficientes para atender toda a demanda dos subsistemas, gerando uma folga na restrição acopladora.

Durante a terceira fase da simulação, é possível visualizar claramente a diferença entre as aplicações das técnicas descentralizada e distribuída, pois neste momento a produção é insuficiente para atender a demanda de todos os subsistemas. Na Figura 7, após 10 minutos é gerado um esgotamento de recursos com a técnica descentralizada, que afetou primeiramente o último subsistema e posteriormente o penúltimo subsistema. Neste caso, a técnica cooperativa entre os subsistemas gera uma distribuição igualitária dos recursos, como pode ser observado na Figura 8.

A questão seguinte a ser analisada é a proximidade do resultado obtido com controladores distribuídos em relação ao resultado ótimo, obtido com um controlador centralizado. Para isto os próximos experimentos exploram a sintonia de parâmetros.

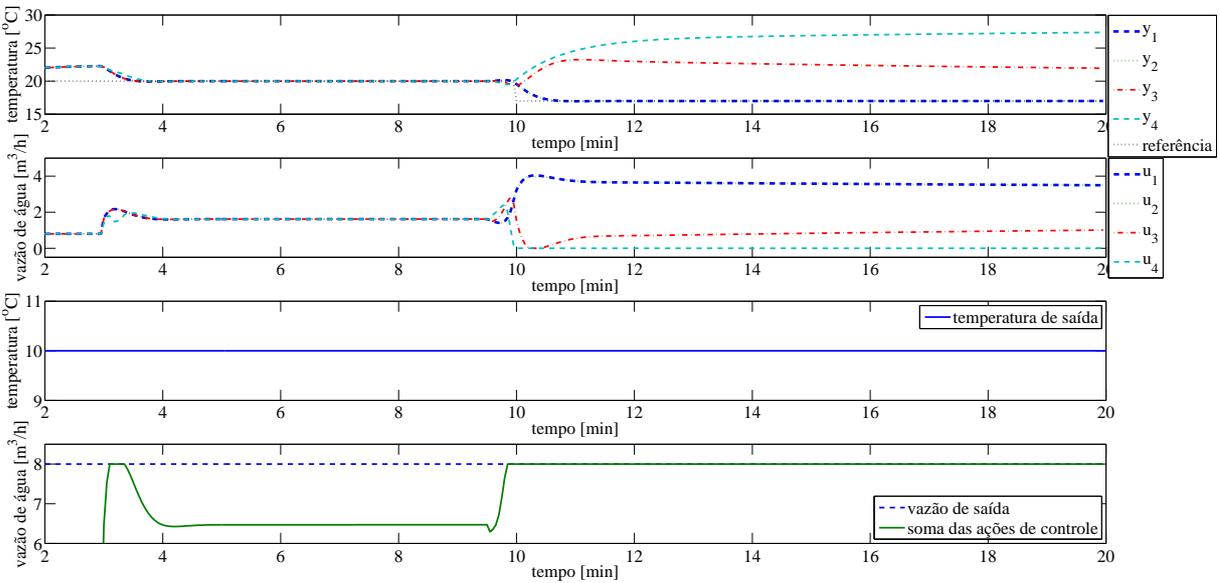


Figura 7 – Saídas e controles dos subsistemas com controle descentralizado utilizando temperatura e vazão constantes.

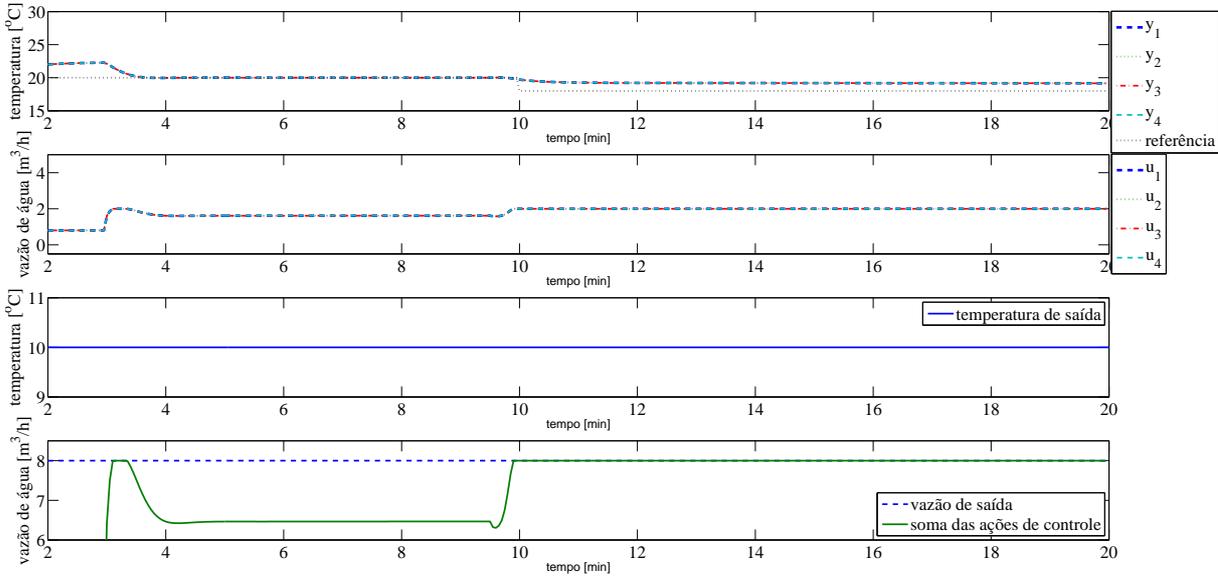


Figura 8 – Saídas e controles dos subsistemas com DMPC utilizando temperatura e vazão constantes.

5.5.2 Resultados Centralizados e Distribuídos

Alguns experimentos foram realizados visando comparar os resultados obtidos com um controlador MPC centralizado, resolvendo P , com os resultados obtidos utilizando a estratégia distribuída resolvendo $\{P_m\}$. O objetivo era verificar se a reformulação utilizando variáveis de folga s_m juntamente com o algoritmo distribuído iria convergir para o resultado ótimo.

Primeiro, foi realizado um experimento na planta solar utilizando o algoritmo centralizado, com uma referência de 18 °C para todos os subsistemas. Após, a fim de comparar as soluções obtidas com a estratégia distribuída, foram utilizados os mesmos dados de entrada coletados durante o experimento para a realização de simulações utilizando o DMPC, permitindo assim a comparação dos valores calculados para as duas abordagens.

Os valores adotados para os parâmetros do algoritmo distribuído foram $\varepsilon^0 = 50$ e $\mu = 0,4$, sem considerar um número máximo de iterações q entre os agentes.

A Figura 9 representa o primeiro valor do vetor de ações de controle calculadas para o subsistema 1 (Δu_1), calculado para os três primeiros períodos de amostragem após o tempo de espera de 3 minutos, assim como o número de iterações entre os agentes para atingirem a solução $\{P_m(\varepsilon)\}$. Os resultados para os demais subsistemas será omitido por apresentarem resultados semelhantes.

Nesta figura, o índice i é utilizado para indicar o decrescimento de ε , sendo i o número de vezes que ε foi multiplicado por μ .

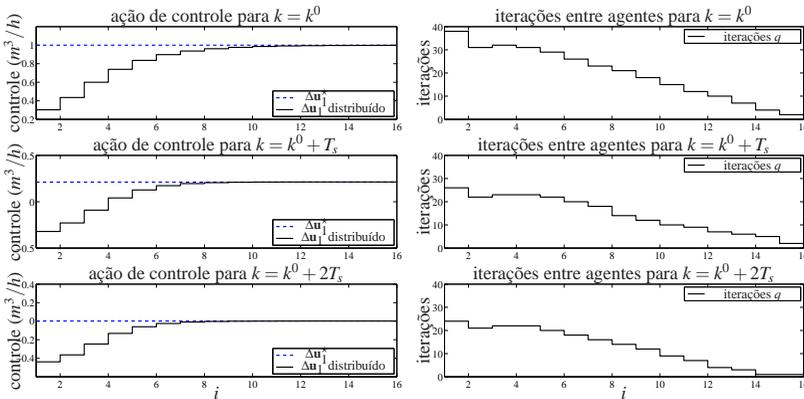


Figura 9 – Resultados comparando as abordagens centralizada e distribuída.

Nesta figura é possível observar a evolução dos valores das ações de controle calculadas pela rede de agentes, que vão gradualmente se aproximando do valor ótimo, reforçando a afirmação que a solução distribuída de $\{P_m(\varepsilon)\}$, para uma sequência decrescente de ε , converge para o resultado centralizado. Ao mesmo tempo, é possível observar que a quantidade de trocas de informações necessárias para o agente convergir em cada iteração i , reduz de maneira significativa quando é utilizada a informação da iteração anterior, tal como ocorre em $k = k^0 + T_s$ e $k = k^0 + 2T_s$.

Neste caso, os parâmetros utilizados foram conservadores, gerando um número grande iterações q . Porém, é válido enfatizar que o tempo de convergência do algoritmo distribuído sempre ficou abaixo dos 3 segundos do período de amostragem sendo iguais a 1,75; 1,13; e 1,00 segundo para os três primeiros pontos calculados.

5.5.3 Análise dos Parâmetros de Barreira

O primeiro caso analisado mostrou que a estratégia DMPC chega ao mesmo resultado obtido com o MPC centralizado. Porém, dependendo do ajuste dos parâmetros, este processo pode levar a um excesso de iterações entre os agentes.

Sabendo que o número de iterações entre agentes é um ponto importante para definir a aplicabilidade do algoritmo distribuído, foram conduzidas análises para verificar a possibilidade de modificar os parâmetros do algoritmo distribuído, de modo que os resultados fossem obtidos mais rapidamente, porém mantendo certa qualidade.

O primeiro estudo de caso centrou-se na avaliação dos parâmetros ε^0 e μ , mudando seus valores e comparando com o caso base $\varepsilon^0 = 50$ e $\mu = 0,4$. A Figura 10 representa alguns dos resultados obtidos no subsistema 1, em $k = k^0 + T_s$.

É possível observar a grande importância da sintonia do parâmetro μ , que pode reduzir de maneira significativa o número de iterações q entre os agentes. Para este sistema, o qual possui um comportamento suave e estável em malha aberta, é possível a utilização de valores pequenos para ambos os parâmetros e ainda conseguir a convergência para o resultado ótimo global.

5.5.4 Restringindo as Iterações entre os Agentes

Outra estratégia que pode ser adotada para reduzir o tempo de convergência do algoritmo distribuído é definir um número máximo de iterações q

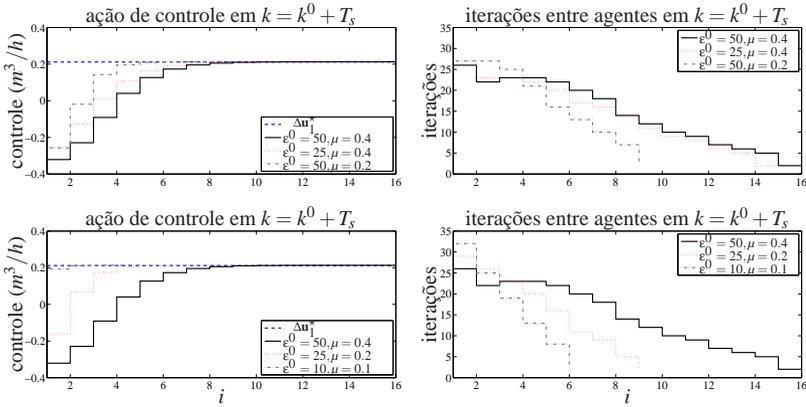


Figura 10 – Convergência de $\Delta \mathbf{u}_1$ em $k = k^0 + T_s$.

entre os agentes, dado aqui como q^{\max} . O estudo teve como objetivo avaliar a perda na qualidade dos resultados em comparação com o ganho no tempo de convergência, avaliando se essa é uma estratégia possível de ser adotada no algoritmo distribuído para a aplicação na planta solar.

A Figura 11 representa as respostas obtidas no subsistema 1 em $k = k^0 + T_s$, utilizando como caso base $\epsilon^0 = 50$ e $\mu = 0,4$, e variando o número máximo de iterações permitidas entre os agentes.

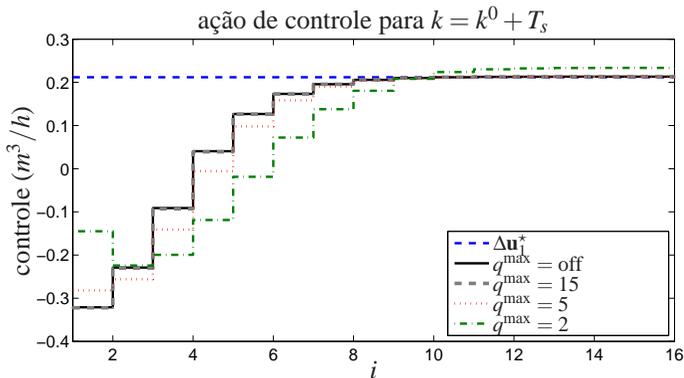


Figura 11 – Convergência de $\Delta \mathbf{u}_1$ em $k = k^0 + T_s$ limitando as iterações q .

Foi observada uma grande vantagem ao limitar o número de iterações q , especialmente para os valores iniciais de ϵ , enquanto os problemas de cen-

tralização ainda estão distantes da barreira e não necessitam apresentar um resultado ótimo.

No entanto, um número muito pequeno de iterações entre os agentes restringe o deslocamento das informações, fazendo a rede de agentes convergir para pontos afastados do ótimo. A Figura 11 também representa uma situação em que o sistema não elimina o erro em regime permanente, ocorrendo com $q^{\max} = 2$, que pode ser indesejável dependendo da aplicação.

5.5.5 Experimentos Distribuídos

Finalmente, foram realizados experimentos para avaliar o desempenho do DMPC ao controlar a distribuição de água refrigerada produzida pela planta solar. Foi utilizada uma configuração para um algoritmo rápido, com tempo de convergência bem inferior ao período de amostragem, em que o número de iterações q foi limitado em 5 e os parâmetros do algoritmo foram ajustados para $\epsilon^0 = 10$ e $\mu = 0, 1$.

A Figura 12 representa um dos resultados obtidos para um pouco mais de uma hora de experimento, sendo possível perceber as oscilações de temperatura e vazão da planta solar, provocadas pelas condições climáticas e de operação. Neste caso, as referências de todos os subsistemas foram definidas em 19 °C. Após 30 minutos, os subsistemas 2 e 4 modificavam suas referências para 16 °C, e após 20 minutos estes subsistemas retornavam suas referências para o valor de 19 °C, permanecendo com esta configuração até o fim do experimento.

O modelo considerado para o trocador de calor e ambientes é baseado nos trabalhos de Álvarez, Yebra e Berenguel (2007), Castilla et al. (2011, 2012). Neste caso, cada subsistema foi configurado para possuir um modelo não linear distinto, considerando diferenças principalmente nas velocidades e tamanhos de cada trocador de calor. No entanto, apesar das diferenças dos subsistemas, os controladores seguiram utilizando o mesmo modelo definido no Apêndice C.

Para este experimento, foi definido que os controladores só entrariam em operação após 10 minutos, pois com as modificações em cada subsistema, alguns levavam mais tempo para chegar a um regime estacionário.

A Figura 12 ilustra o comportamento dos subsistemas para este experimento.

Neste caso, é possível notar que as curvas de saída estão diferentes entre si antes dos 10 minutos, apesar de possuírem a mesma entrada, demonstrando as diferenças entre os subsistemas.

Após os 10 minutos, o que pode ser observado com este tipo de ex-

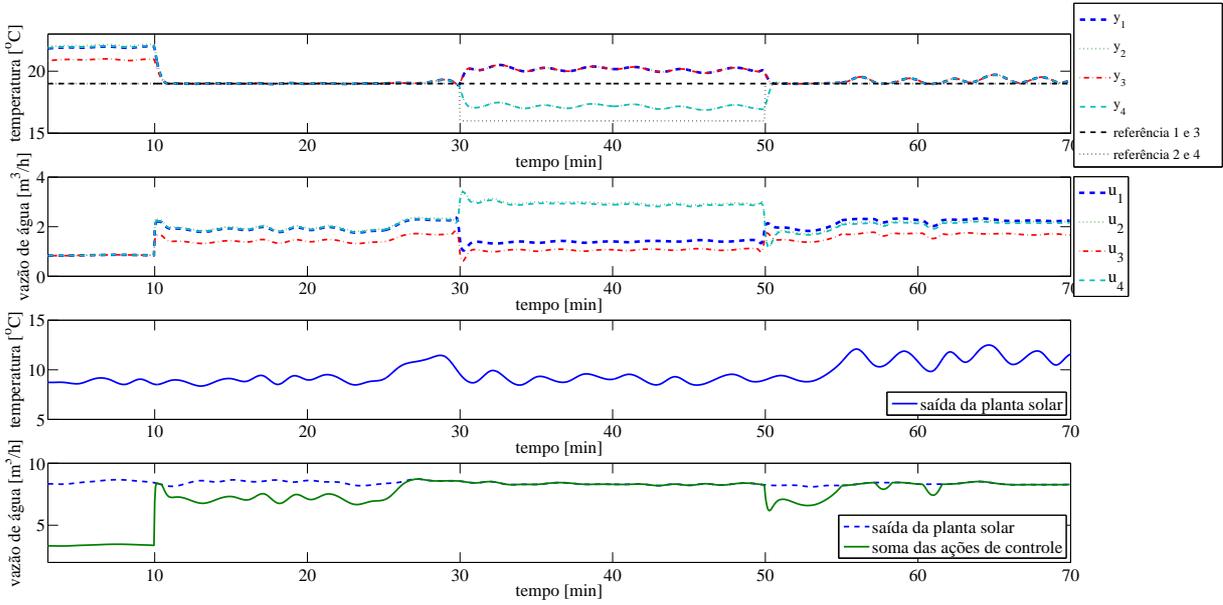


Figura 12 – Saídas e controles dos subsistemas, temperatura e vazão da planta solar com a aplicação do DMPC

perimento é o comportamento satisfatório da estratégia distribuída, em que mesmo os subsistemas possuindo modelos ligeiramente distintos, o recurso foi repartido de tal maneira que até os 30 minutos todos tinham a mesma saída para a mesma referência.

No intervalo de 30 até 50 minutos, a combinação vazão e temperatura se tornou insuficiente para atender todos os subsistemas. Porém, novamente pode ser observada uma distribuição proporcional dos recursos, de tal maneira que todos os subsistemas permaneceram próximos de suas referências.

Após 50 minutos, existem momentos em que a temperatura se eleva, tornando o recurso insuficiente para atender todas as demandas. Novamente, todos os subsistemas respondem de maneira similar, minimizando a distância entre cada subsistema e sua referência de maneira igualitária.

Para fins de comparação, os dados de entrada foram utilizados posteriormente em uma simulação com um controlador MPC centralizado. Com isto, foram calculados dois índices para quantificar as diferenças entre as abordagens (SEBORG et al., 2010):

- Integral do Erro Quadrático (IEQ), para medir o desempenho do seguimento de referência;
- Variação Total (VT), para avaliar o esforço de controle.

As fórmulas utilizadas foram as seguintes:

$$IEQ = \int_0^{T_{end}} e^2(t) dt \quad VT = \sum_{i=0}^{T_{end}} \|\mathbf{u}(i+1) - \mathbf{u}(i)\|$$

em que T_{end} se refere ao tempo final do experimento. A Tabela 7 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 7 – Resultados dos controladores centralizado e distribuído.

	IEQ ($\times 10^3$)	VT
MPC	7,9721	38,1269
DMPC	7,9745	38,1467

Com os resultados quantificados, foi possível evidenciar a pequena diferença entre as abordagens, com os dois índices praticamente iguais. Pode-se dizer que a diferença entre o resultado de um controlador centralizado e a resposta obtida com o DMPC não influencia de maneira significativa o resultado para este caso.

Mesmo com uma configuração de resposta rápida, representada na Figura 12, foi possível observar que os subsistemas repartiram de maneira adequada a água refrigerada, com tempo médio de resposta de 0,10 segundo e não superior a 0,32 segundo. Os resultados de tempo foram mensurados em um PC Intel® Core™ i5-3470 CPU 3.20GHz.

5.6 SUMÁRIO

Concluindo o capítulo, foi demonstrada a possibilidade de aplicação da estratégia de controle preditivo distribuído em sistemas reais. Neste caso, a estratégia se favoreceu da disposição física dos subsistemas, por isso não foi necessário o uso de técnicas sofisticadas para garantir a sincronização e convergência de redes.

Em resumo, a formulação DMPC apresentou as seguintes vantagens:

- cada agente se comunica apenas com seu vizinho direto (acima e abaixo da linha de vazão de água fria);
- o problema de controle a ser resolvido por cada agente é menor e mais simples, independente do número de subsistemas;
- os agentes podem ser divididos em dois grandes grupos que podem operar em paralelo (pares e ímpares), induzindo um aumento na velocidade de convergência da rede de agentes;
- apesar do problema tratado lidar com ambientes em um mesmo edifício, a abordagem DMPC pode ser extrapolada para casos em que os ambientes estão mais distantes uns dos outros e a abordagem centralizada pode não ser tão adequada.

6 CONCLUSÕES

O controle avançado de maneira geral é de suma importância para a melhoria dos processos produtivos das indústrias e para melhorar o desempenho de qualquer sistema em que seja possível aplicar controle. Dentre os tipos de controle avançado, o controle preditivo baseado em modelo (MPC) já possui grande destaque, com características de operação muito apreciadas, como a maneira sistemática que utiliza para tratar restrições do sistema, a maneira de resolver os problemas de controle que geram soluções ótimas e a utilização de um horizonte de predição que ajuda a suavizar as respostas dos sistemas, dentre outras mais.

Mais recentemente surgiu uma variação desta estratégia, que vem se tornando uma importante estratégia para casos em que a aplicação do MPC pode ficar comprometida (principalmente) quando o sistema é distribuído fisicamente, conhecida como controle preditivo distribuído (DMPC). Seu funcionamento é similar ao MPC, porém aplicado em um conjunto de controladores, cada qual com seu problema de controle, os quais devem se comunicar para resolver o problema global de maneira distribuída, preferencialmente buscando cooperar entre si.

O controle preditivo distribuído é o foco principal de estudos neste trabalho, tratado com uma revisão de seus principais conceitos, estudos sobre modelagem de redes dinâmicas lineares, algoritmos distribuídos e resultados de aplicações dos controladores preditivos distribuídos que foram abordados. Cada uma das principais contribuições desta tese é sintetizada abaixo.

Modelagem de redes dinâmicas lineares: foram desenvolvidos modelos de redes dinâmicas com restrições nas variáveis de saída do sistema, diferentemente de trabalhos anteriores que consideravam apenas restrições nas ações de controle. Este tipo de restrição torna a rede dinâmica mais acoplada, por isto o problema de controle preditivo distribuído em cada agente fica mais complexo, necessitando de mais informações sobre sua vizinhança e algoritmos específicos para encontrar a solução destes problemas.

Algoritmo de ponto-interior distribuído: sendo esta uma contribuição na parte de otimização do DMPC aplicado em redes dinâmicas lineares. O estudo envolveu diversas etapas, em que foram analisados diversos métodos de otimização, realizadas algumas análises de convergência, tratamento do problema de inicialização factível e solução do problema de centralização, entre outros tópicos. O principal resultado com este algoritmo foi a possibilidade de se obter respostas ótimas do problema de controle utilizando a rede de agentes.

Aplicação do DMPC na divisão de recursos: em que é possível des-

tacar diversos aspectos positivos desta aplicação. O caso de estudo envolvia aplicação do DMPC em alocação de recursos, cujo problema tratado possuía uma restrição de consumo que acoplava todo o sistema. Neste caso, uma contribuição paralela foi a utilização de variáveis de folga, que resultou na conversão do problema de controle de tal maneira que favoreceu a aplicação do DMPC. Além disto, vale ressaltar que o cenário de teste foi uma planta solar real, que serviu para realizar experimentos utilizando uma metodologia *hardware-in-the-loop*, validando a aplicabilidade da estratégia DMPC.

Em resumo, este trabalho tratou problemas de modelagem, passando por um tópico aprofundado sobre algoritmos distribuídos e finalizando com a aplicação do DMPC em um sistema real. As etapas do trabalho incluíram testes comparativos com algoritmos centralizados, que demonstraram o funcionamento adequado da teoria desenvolvida. Além disto, foram analisados aspectos do algoritmo distribuído, explorando questões de sintonia de parâmetros, avaliando a possibilidade de aplicação em redes dinâmicas de larga escala.

Como conclusão, pode-se afirmar que a abordagem de controle preditivo distribuído pode ser aplicada em redes maiores, desde que os tempos de processamento e de comunicação entre os subsistemas sejam considerados adequadamente. Como vantagem da aplicação do DMPC pode-se citar o custo computacional reduzido, com a rede de agentes resolvendo problemas de controle menores. Além disto, aparece a vantagem da aplicação do DMPC aparece quando a rede é modificada, sendo possível realizar uma reconfiguração dinâmica dos controladores, ao invés de reconfigurar todo o controlador centralizado.

Como sugestão de sequência deste trabalho, é possível direcionar pesquisas para os seguintes pontos:

- Algoritmos duais distribuídos para DMPC: continuando os trabalhos sobre o desenvolvimento de algoritmos para otimização distribuída, é possível que sejam realizados mais avanços explorando a utilização de algoritmos duais para resolver os problemas de otimização distribuídos, visando melhorar o desempenho da rede de agentes.
- Abordagens para tratamento de incertezas voltadas ao DMPC: as incertezas paramétricas podem dificultar a aplicação do controle preditivo distribuído em alguns sistemas. Poderiam ser explorados os aspectos de estabilidade destes sistemas quando controlados por uma rede de agentes, assim como possíveis modificações nos algoritmos utilizados.
- Para o caso de estudo com a planta solar, a teoria poderia ser estendida para redes com ramificações, verificando como isto se reflete na utilização de variáveis de folga.

- Estudo de casos com falha de comunicação entre agentes ou mesmo a falha de agentes. Estudando as maneiras que estes eventos podem ocorrer e quais seriam as estratégias que melhor se aplicariam para evitar a instabilidade do sistema.

Estudos nestas linhas de pesquisa certamente agregariam conhecimento à estratégia DMPC, possibilitando a expansão de suas aplicações.

Para conhecimento, durante o doutorado foram escritos alguns artigos com a temática de controle preditivo distribuído. Estes artigos são relacionados e descritos na sequência:

- Camponogara, E.; Scherer, H.F., (2011): Este artigo estende o modelo dinâmico para subsistemas acrescentando restrições em suas saídas, além de permitir que a dinâmica de cada subsistema possa dependa dos estados e sinais de controle de seus vizinhos. Além disto, um algoritmo de ponto interior é desenvolvido para resolver problemas de otimização utilizando uma rede de agentes, cujo resultado converge para a solução ótima.
- Scherer, H. F.; Pasamontes, M.; Guzmán, J. L.; Álvarez, J. D.; Camponogara, E.; Normey-Rico, J. E., (2013): É apresentado um esquema DMPC para uma distribuição eficiente de energia dentro de edifícios. Algumas extensões são propostas para superar dificuldades que aparecem com a aplicação direta do DMPC. Simulações e experimentos foram obtidos em um centro de pesquisa de energia solar localizado em Almería, Espanha.
- Scherer, H.F.; Camponogara, E.; Normey-Rico, J.E.; Álvarez, J.D.; Guzmán, J.L., (2013): Uma metodologia DMPC para gerenciamento de recursos de energia é apresentado. A metodologia proposta fornece uma solução que converge para o mesmo resultado que seria encontrado por um controlador centralizado. Este desempenho ótimo é alcançado com a utilização de variáveis de folga, expressando uma restrição acopladora como um conjunto de restrições locais. Experimentos foram realizados em uma planta solar localizada em Almería, Espanha.

REFERÊNCIAS

ALVARADO, I.; LIMON, D.; PEÑA, D. M. de la; MAESTRE, J.; RIDAO, M.; SCHEU, H.; MARQUARDT, W.; NEGENBORN, R.; SCHUTTER, B. D.; VALENCIA, F.; ESPINOSA, J. A comparative analysis of distributed MPC techniques applied to the HD-MPC four-tank benchmark. *Journal of Process Control*, v. 21, n. 5, p. 800 – 815, 2011.

ÁLVAREZ, J. D.; YEBRA, L. J.; BERENGUEL, M. Repetitive control of tubular heat exchangers. *Journal of Process Control*, v. 17, p. 689–701, 2007.

ARAUJO, O. Q. F. *MPC - Model Predictive Control*. [S.l.], jan 2008.
<http://www.eq.ufrj.br/links/h2cin/eqe768/AULA_7/MPC.doc>.

ÅSTRÖM, K. J.; MURRAY, R. M. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. [S.l.], 2010.

BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. 8. ed. [S.l.]: Thompson, 2005.

CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. *Model Predictive Control*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2004.

CAMPONOVARA, E.; JIA, D.; KROGH, B. H.; TALUKDAR, S. N. Distributed model predictive control. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 22, n. 1, p. 44–52, February 2002.

CAMPONOVARA, E.; LIMA, M. L. Distributed optimization for MPC of linear networks with uncertain dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, p. 894–809, 2012.

CAMPONOVARA, E.; OLIVEIRA, L. B. de. Distributed optimization for model predictive control of linear dynamic networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part A*, v. 39, n. 6, p. 1331–1338, 2009.

CAMPONOVARA, E.; SCHERER, H. F. Distributed optimization for model predictive control of linear dynamic networks with control-input and output constraints. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, v. 8, n. 1, p. 233–242, jan. 2011.

CAMPONOGARA, E.; SCHERER, H. F.; MOURA, L. V. Distributed optimization for predictive control with input and state constraints: preliminary theory and application to urban traffic control. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 3726–3732.

CAMPONOGARA, E.; TALUKDAR, S. N. Designing communication networks to decompose network control problems. *INFORMS Journal on Computing*, v. 17, n. 2, p. 207–223, 2005.

CASTILLA, M.; ALVAREZ, J.; NORMEY-RICO, J. E.; RODRÍGUEZ, F. A nonlinear model based predictive control strategy to maintain thermal comfort inside a bioclimatic building. In: *Proceedings of the 20th IEEE Mediterranean Conference on Control Automation (MED)*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 665–671.

CASTILLA, M.; ÁLVAREZ, J. D.; BERENGUEL, M.; RODRÍGUEZ, F.; GUZMÁN, J. L.; PÉREZ, M. A comparison of thermal comfort predictive control strategies. *Energy and Buildings*, v. 43, n. 10, p. 2737–2746, 2011.

CHEN, C.-T. *Linear System Theory and Design*. 3rd. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 1999.

CHENG, R.; FORBES, J.; YIP, W. Price-driven coordination method for solving plant-wide {MPC} problems. *Journal of Process Control*, v. 17, n. 5, p. 429 – 438, 2007. Selected papers presented at the 2005 {IFAC} World Congress 2005 {IFAC} World Congress.

CHRISTOFIDES, P. D.; SCATTOLINI, R.; PEÑA, D. M. de la; LIU, J. Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions. *Computers & Chemical Engineering*, v. 51, n. 0, p. 21–41, 2013.

CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. In: *Proceedings of the AIChE 86th National Meeting*. Houston, Texas, EUA: [s.n.], 1979.

DOLD, J.; STURSBERG, O. Distributed predictive control of communicating and platooning vehicles. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 561 –566.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Modern Control Systems*. 12th. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2010.

DUNBAR, W. B. Distributed receding horizon control of dynamically coupled nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 7, p. pp. 1249–1263, 2007.

ESCRIVÁ-ESCRIVÁ, G.; SEGURA-HERAS, I.; ALCÁZAR-ORTEGA, M. Application of an energy management and control system to assess the potential of different control strategies in HVAC systems. *Energy and Buildings*, v. 42, n. 11, p. 2258–2267, 2010.

FARINA, M.; SCATTOLINI, R. Distributed predictive control: A non-cooperative algorithm with neighbor-to-neighbor communication for linear systems. *Automatica*, v. 48, n. 6, p. 1088–1096, 2012.

FERRAMOSCA, A.; LIMON, D.; ALVARADO, I.; CAMACHO, E. F. Cooperative distributed MPC for tracking. *Automatica*, v. 49, n. 4, p. 906–914, 2013.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, D. J.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 6th. ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall PTR, 2009.

GRÜNE, L.; PANNEK, J.; GRÜNE, L.; PANNEK, J. Nonlinear model predictive control. In: *Nonlinear Model Predictive Control*. [S.l.]: Springer London, 2011, (Communications and Control Engineering). p. 43–66.

HINES, P.; JIA, D.; TALUKDAR, S. *Distributed Model Predictive Control for Electric Grids*. [S.l.], 2004. Technical Report. <http://www.cems.uvm.edu/~phines/pdfs/2004/Hines_2004_CMU.pdf>.

LEE, J. Model predictive control: Review of the three decades of development. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Institute of Control, Robotics and Systems and The Korean Institute of Electrical Engineers, v. 9, n. 3, p. 415–424, 2011.

MAYNE, D. Q.; SERON, M. M.; RAKOVIĆ, S. V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. *Automatica*, Pergamon Press, Inc., v. 41, n. 2, p. 219–224, fev. 2005.

MERCANGÖZ, M.; DOYLE III, F. J. Distributed model predictive control of an experimental four-tank system. *Journal of Process Control*, v. 17, p. 297–308, March 2007.

MINH, V. T.; MUHAMAD, W. M. W. Model predictive control of a condensate distillation column. *International Journal of Systems Control*, v. 1, n. 1, p. 4–12, 2010.

MIRINEJAD, H.; WELCH, K.; SPICER, L. A review of intelligent control techniques in HVAC systems. In: *Proceedings of the Energytech, 2012 IEEE*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1–5.

- MORARI, M.; LEE, J. Model predictive control: past, present and future. *Computers and Chemical Engineering*, v. 23, p. 667–682, 1999.
- MOROŞAN, P. D.; BOURDAIS, R.; DUMUR, D.; BUISSON, J. Building temperature regulation using a distributed model predictive control. *Energy and Buildings*, v. 42, p. 1445–1452, 2010.
- NEGENBORN, R. R.; SCHUTTER, B. D.; HELLENDOORN, J. Multi-agent model predictive control for transportation networks: serial versus parallel schemes. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 21, n. 3, p. 353–366, 2008.
- NEGENBORN, R. R.; SCHUTTER, B. D.; HELLENDOORN, J. Multi-agent model predictive control: A survey. *CoRR*, abs/0908.1076, 2009.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1999.
- NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. *Control of Dead-time Processes*. [S.l.]: Springer, 2007.
- OLIVEIRA, L. B. de; CAMPONOGARA, E. Multi-agent model predictive control of signaling split in urban traffic networks. *Transportation Research. Part C*, v. 18, n. 1, p. 120–139, February 2010.
- PANNOCCHIA, G.; WRIGHT, S. J.; STEWART, B. T.; RAWLINGS, J. B. Efficient cooperative distributed MPC using partial enumeration. In: *Proceedings of ADCHEM 2009, International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 637–642.
- PARTAN, J.; KUROSE, J.; LEVINE, B. N. A survey of practical issues in underwater networks. *SIGMOBILE Mob. Comput. Commun. Rev.*, ACM, New York, NY, USA, v. 11, n. 4, p. 23–33, out. 2007. ISSN 1559-1662.
- PASAMONTES, M.; ÁLVAREZ, J. D.; GUZMÁN, J. L.; BERENGUEL, M. Hybrid modeling of a solar cooling system. In: *Proceedings of the IFAC International Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems, ADHS09. Zaragoza, Spain*. [S.l.: s.n.], 2009.
- PÉREZ-LOMBARD, L.; ORTIZ, J.; POUT, C. A review on buildings energy consumption information. *Energy and Buildings*, v. 40, p. 394–398, 2008.
- QIN, S.; BADGWELL, T. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, v. 11, n. 7, p. 733–764, 2003.

- RAWLINGS, J. B.; STEWART, B. T. Coordinating multiple optimization-based controllers: New opportunities and challenges. *Journal of Process Control*, v. 18, n. 9, p. 839 – 845, 2008.
- RICHALET, J.; RAULT, A.; TESTUD, J. L.; PAPONA, J. Algorithmic control of industrial processes. In: *Proceedings of the 4th IFAC symposium on identification and system parameter estimation*. [S.l.: s.n.], 1976. p. 1119–1167.
- RICHALET, J.; RAULT, A.; TESTUD, J. L.; PAPONA, J. Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. *Automatica*, v. 14, n. 5, p. 413–428, 1978.
- RIVERSO, S.; FERRARI-TRECCATE, G. Tube-based distributed control of linear constrained systems. *Automatica*, v. 48, n. 11, p. 2860–2865, 2012.
- SCATTOLINI, R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control - a review. *Journal of Process Control*, v. 19, n. 5, p. 723–731, 2009.
- SCHERER, H.; CAMPONOGARA, E.; CODAS, A. Transfer function modeling of linear dynamic networks for distributed MPC. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 613 –618.
- SCHERER, H.; CAMPONOGARA, E.; NORMEY-RICO, J.; ÁLVAREZ, J.; GUZMÁN, J. Distributed MPC for a resource constrained control system. Submetido para *Optimal Control Applications and Methods*, 2013.
- SCHERER, H.; PASAMONTES, M.; GUZMÁN, J.; ÁLVAREZ, J.; CAMPONOGARA, E.; NORMEY-RICO, J. Efficient building energy management using distributed model predictive control. *Journal of Process Control*, 2013.
- SCHERER, H. F.; CAMPONOGARA, E.; PLUCENIO, A. Distributed optimization for predictive control with output and control-input constraints of a distillation column. In: *Proceedings of the IFAC International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 423–428.
- SCHERER, H. F.; PASAMONTES, M.; ÁLVAREZ, J. D.; GUZMÁN, J. L.; CAMPONOGARA, E.; NORMEY-RICO, J. E. Distributed model predictive control for energy distribution. In: *Proceedings of the European Control Conference*. Zurich, Switzerland: [s.n.], 2013. p. 2770–2776.

- SEBORG, D. E.; MELLICHAMP, D. A.; EDGAR, T. F.; Doyle III, F. J. *Process Dynamics and Control*. 3rd. ed. [S.l.]: Wiley, 2010.
- STEWART, B. T.; VENKAT, A. N.; RAWLINGS, J. B.; WRIGHT, S. J.; PANNOCCHIA, G. Cooperative distributed model predictive control. *Systems & Control Letters*, v. 59, n. 8, p. 460 – 469, 2010.
- STRICHARTZ, R. S. *The Way of Analysis*. [S.l.]: Jones & Bartlett, 2000.
- TALUKDAR, S. N.; CAMPONOGARA, E. Network control as a distributed, dynamic game. In: *Proceedings of the 34th Hawaii International Conference on System Sciences*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 678–681.
- TRODDEN, P.; RICHARDS, A. Robust distributed model predictive control using tubes. In: *Proceedings of American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 2034–2039.
- VENKAT, A. N.; HISKENS, I. A.; RAWLINGS, J. B.; WRIGHT, S. J. Distributed MPC strategies with application to power system automatic generation control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 16, n. 6, p. 1192–1206, 2008.
- VENKAT, A. N.; RAWLINGS, J. B.; WRIGHT, S. J. Stability and optimality of distributed model predictive control. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 6680–6685.
- WANG, L. *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB®*. 1st. ed. [S.l.]: Springer, 2009.
- YANG, I. H.; YEO, M. S.; KIM, K. W. Application of artificial neural network to predict the optimal start time for heating system in building. *Energy Conversion and Management*, v. 44, p. 2791–2809, 2003.
- ZHAO, D.; DAI, Y.; ZHANG, Z. Computational intelligence in urban traffic signal control: A survey. *Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on*, v. 42, n. 4, p. 485–494, 2012.

APÊNDICE A – Definições

A.1 CONJUNTOS

A.1.1 Conjunto Convexo

Definição 1. Um conjunto C é convexo se para todo ponto $x, y \in C$ e qualquer $\alpha \in [0, 1]$ temos

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C. \quad (\text{A.1})$$

A.1.2 Conjuntos Abertos e Fechados

Um dado elemento $x \in C \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de ponto *interior* de C se existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{y \mid \|y - x\|_2 \leq \varepsilon\} \subseteq C,$$

isto é, existe uma bola centrada em x que fica inteiramente dentro de C . O conjunto de todos os pontos no interior de C é chamado de *interior* de C , denotado aqui por $\text{int } C$.

Um conjunto é dito *aberto* se $\text{int } C = C$, i.e., todo ponto em C é um ponto interior.

Um conjunto é dito *fechado* se seu complemento $\mathbb{R}^n \setminus C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin C\}$ é aberto.

O *fechamento* de um conjunto C ou complemento do interior de um conjunto C é definido como

$$\text{cl } C = \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus C).$$

A *fronteira* de um conjunto C é dado por

$$\text{bd } C = \text{cl } C \setminus \text{int } C.$$

A.2 CONVEXIDADE DE FUNÇÕES

Definição 2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa se o domínio de f , $\text{dom } f$, for um conjunto convexo e para todo $x, y \in \text{dom } f$ e $\alpha \in [0, 1]$

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \quad (\text{A.2})$$

Uma função f é dita estritamente convexa se a desigualdade (A.2) for

estrita para todo $x \neq y$ e $\alpha \in (0, 1)$.

Proposição 4. *Se f é diferenciável, então f é convexa se e somente se $\text{dom } f$ é convexo e para todo $x, y \in \text{dom } f$*

$$f(y) \geq \nabla f(x)^T (y - x). \quad (\text{A.3})$$

A condição (A.3) é conhecida como condição de otimalidade de primeira ordem.

Proposição 5. *Se f é duas vezes diferenciável, ou seja, a Hessiana ou derivada segunda $\nabla^2 f$ existe em todo o ponto de $\text{dom } f$, que é aberto, então f é convexa se e somente se $\text{dom } f$ é convexo e sua Hessiana é positiva semidefinida:*

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0, \quad \text{para todo } x \in \text{dom } f. \quad (\text{A.4})$$

A Condição (A.4) é conhecida como condição de segunda Ordem.

Definição 3. *Uma função f diferenciável é fortemente convexa com parâmetro λ se para todo $x, y \in \text{dom } f$*

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x - y) \geq \lambda \|x - y\|^2.$$

Uma condição equivalente para todo $x, y \in \text{dom } f$ é a seguinte:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x - y) + \frac{\lambda}{2} \|y - x\|^2.$$

Proposição 6. *Uma função f duas vezes diferenciável é fortemente convexa com parâmetro λ se e somente se para todo $x \in \text{dom } f$*

$$\nabla^2 f(x) \succeq \lambda I.$$

Proposição 7. *Se f é duas vezes diferenciável e fortemente convexa, então para todo $x, y \in \text{dom } f$*

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{1}{2} (x - y)^T \nabla^2 f(z) (x - y)$$

para algum z no segmento de x para y .

APÊNDICE B – Prova de Convergência

Para quaisquer $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}' \in \bar{\Omega}$, temos

$$\theta(\hat{\mathbf{u}}') = \theta(\hat{\mathbf{u}}) + \nabla\theta(\hat{\mathbf{u}})^T(\hat{\mathbf{u}}' - \hat{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{u}}' - \hat{\mathbf{u}})^T \nabla^2\theta(\hat{\mathbf{u}})(\hat{\mathbf{u}}' - \hat{\mathbf{u}})$$

para algum $\tilde{\mathbf{u}}$ no segmento $[\hat{\mathbf{u}}', \hat{\mathbf{u}}]$.

Por convexidade forte, $\nabla^2\theta(\tilde{\mathbf{u}}) \succeq \lambda^\dagger I$ para todo $\tilde{\mathbf{u}} \in \bar{\Omega}$, assim:

$$\begin{aligned} \theta(\hat{\mathbf{u}}') &\geq \theta(\hat{\mathbf{u}}) + \nabla\theta(\hat{\mathbf{u}})^T(\hat{\mathbf{u}}' - \hat{\mathbf{u}}) + \frac{\lambda^\dagger}{2} \|\hat{\mathbf{u}}' - \hat{\mathbf{u}}\|^2 \\ &\geq \min_{\tilde{\mathbf{u}}} \theta(\hat{\mathbf{u}}) + \nabla\theta(\hat{\mathbf{u}})^T(\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}) + \frac{\lambda^\dagger}{2} \|\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}\|^2 \\ &= \theta(\hat{\mathbf{u}}) + \nabla\theta(\hat{\mathbf{u}})^T(\hat{\mathbf{u}} - \frac{1}{\lambda^\dagger} \nabla\theta(\hat{\mathbf{u}}) - \hat{\mathbf{u}}) + \frac{\lambda^\dagger}{2} \|\hat{\mathbf{u}} - \frac{1}{\lambda^\dagger} \nabla\theta(\hat{\mathbf{u}}) - \hat{\mathbf{u}}\|^2 \\ &= \theta(\hat{\mathbf{u}}) - \frac{1}{\lambda^\dagger} \|\nabla\theta(\hat{\mathbf{u}})\|^2 + \frac{1}{2\lambda^\dagger} \|\nabla\theta(\hat{\mathbf{u}})\|^2 \\ &= \theta(\hat{\mathbf{u}}) - \frac{1}{2\lambda^\dagger} \|\nabla\theta(\hat{\mathbf{u}})\|^2. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Sendo B.1 válida para qualquer $\hat{\mathbf{u}}'$, temos que:

$$\theta^* \geq \theta(\hat{\mathbf{u}}) - \frac{1}{2\lambda^\dagger} \|\nabla\theta(\hat{\mathbf{u}})\|^2$$

implicando em

$$\|\nabla\theta(\hat{\mathbf{u}})\|^2 \geq 2\lambda^\dagger(\theta(\hat{\mathbf{u}}) - \theta^*). \tag{B.2}$$

Combinando este resultado com 3.17 temos um limite no decréscimo do objetivo dado por:

$$\begin{aligned} \theta(\hat{\mathbf{u}}^+) - \theta^* &\leq \theta(\hat{\mathbf{u}}) - \theta^* - \frac{1}{2\Lambda M} \|\nabla\theta(\hat{\mathbf{u}})\|^2 \\ &\leq \theta(\hat{\mathbf{u}}) - \theta^* - \frac{2\lambda^\dagger}{2\Lambda M} (\theta(\hat{\mathbf{u}}) - \theta^*) \\ &= (1 - \frac{\lambda^\dagger}{\Lambda M})(\theta(\hat{\mathbf{u}}) - \theta^*). \end{aligned} \tag{B.3}$$

APÊNDICE C – Modelo Linear de Trocadores de Calor

É representado aqui o modelo linear atribuído aos controladores preditivos utilizados no capítulo 5.

No caso, existe uma dinâmica rápida relacionada ao trocador de calor e uma dinâmica lenta, referente à variação de temperatura do ambiente. Para o controlador, foi utilizada somente a dinâmica do trocador de calor, cujos parâmetros definidos para a obtenção do modelo são os seguintes:

- período de amostragem de 3 s;
- fluxo constante de entrada $2,5 \text{ m}^3/\text{s}$;
- temperatura constante de entrada 8°C .

O ponto de operação para a linearização foi obtido após 100 segundos do início da simulação, para garantir um ponto em regime estacionário. O modelo obtido no espaço de estados foi o seguinte:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0,2679 & 0,2385 & -0,09612 \\ 0,8369 & -0,932 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$