

ANDERSON JOSÉ ANTONIETTI

**MODELO VARIACIONAL DE
ELASTOPLASTICIDADE COM
SENSIBILIDADE À TENSÃO
HIDROSTÁTICA**

FLORIANÓPOLIS

2014

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELO VARIACIONAL DE ELASTOPLASTICIDADE
COM SENSIBILIDADE À TENSÃO HIDROSTÁTICA**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a obtenção do grau de
Mestre em Engenharia Mecânica

ANDERSON JOSÉ ANTONIETTI

Florianópolis, Junho de 2014

MODELO VARIACIONAL DE ELASTOPLASTICIDADE COM SENSIBILIDADE À TENSÃO HIDROSTÁTICA

ANDERSON JOSÉ ANTONIETTI

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica, Área de concentração Análise e Projeto Mecânico, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.
Orientador

Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora:

Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.
Presidente

Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.

Paulo de Tarso R. de Mendonça, Ph.D.

Jakson Manfredini Vassoler, Dr.

À Deus que enviou seu Filho unigênito Jesus Cristo para morrer numa cruz pela humanidade proporcionando a todos a Salvação, e hoje, a oportunidade que tenho de concluir mais esta etapa.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço à Deus que me deu a vida e guiando-me pelos Seus caminhos proporcionou mais esta conquista.

Ao Prof. Eduardo Alberto Fancello pela grande capacidade de orientação, dedicação e, sobretudo, pela paciência para transmitir os ensinamentos necessários para a realização deste trabalho.

Aos demais professores, mestres e doutores que contribuíram para minha formação.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e à UFSC pela disponibilização de toda sua estrutura.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido através da bolsa de mestrado.

À minha família, noiva (Taisa Borbi), pastores e amigos que sempre oraram por mim e me apoiaram em todos os momentos.

A todos, o meu muito obrigado!!!

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

MODELO VARIACIONAL DE ELASTOPLASTICIDADE COM SENSIBILIDADE À TENSÃO HIDROSTÁTICA

Anderson José Antonietti

Junho / 2014

Orientador: Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.

Área de Concentração: Análise e Projeto Mecânico.

Palavras-chave: Elastoplasticidade, Drucker-Prager, Modelos constitutivos variacionais.

Os materiais poliméricos ocupam um espaço crescente na fabricação e projeto dos mais variados produtos tecnológicos. Particular ênfase tem sido dada ao desenvolvimento e concepção de materiais e componentes de alto desempenho mecânico, como os termoplásticos. Dentre estes, destacam-se os materiais biocompatíveis utilizados para a fabricação de diversos implantes em substituição aos implantes metálicos. Os implantes bioabsorvíveis proporcionam vantagens como a dispensação da remoção dos implantes, melhor qualidade da visualização em diagnósticos por imagens e rigidez compatível com a rigidez óssea. Aplicações deste tipo impulsionam uma forte demanda na capacidade de simulação e desenvolvimento de modelos adequados para a descrição do comportamento desses materiais frente a cargas elevadas acoplando diversos mecanismos dissipativos, como elastoplasticidade, viscoelasticidade, viscoplasticidade, dano, acoplamento termomecânico, sensibilidade à tensão hidrostática, etc. Este trabalho, tem como objetivo geral o estudo e implementação de duas abordagens para o modelo de Drucker-Prager, ambas restritas a pequenos giros e deformações. A primeira abordagem é clássica, com tratamento numérico baseado em algoritmos preditor-corretor. A segunda, proposta por Stainier (2011), é uma abordagem variacional que possui características para a obtenção de matriz tangente simétrica mesmo em casos de plasticidade não-associativa. Esta última abordagem foi revisada e a dedução da matriz tangente analítica finalizada. Ambos os modelos foram implementados em um código acadêmico de elementos finitos, o que permitiu a análise de um conjunto de exemplos que comprovam a consistência da aproximação.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Mechanical Engineering.

VARIATIONAL MODEL OF ELASTOPLASTICITY WITH SENSITIVITY TO HYDROSTATIC STRESS

Anderson José Antonietti

June / 2014

Advisor: Eduardo Alberto Fancello, D.Sc..

Area of Concentration: Mechanical Analysis and Design.

Keywords: Elastoplasticity, Drucker-Prager, Variational constitutive models.

Polymeric materials occupy a growing space in the design and manufacturing of various technological products. Particular emphasis has been given to the development and design of materials and high performance mechanical components, such as thermoplastics. Among these, it is worth mentioning the use polymeric biocompatible materials in the manufacture of implants and prostheses, substituting classical metallic ones. These type of applications stimulates the development of suitable models to describe the behavior of these materials. The aim of this work is the study and implementation of two approaches for the Drucker-Prager elastoplasticity model, both restricted to small strains and displacements. The first approach is classic, with numerical treatment based on predictor-corrector algorithms. The second is a variational approach which has the property of providing symmetrical matrix tangent even in cases of non-associative plasticity. This latter approach was reviewed and the deduction of analytical matrix tangent completed. Both models were implemented in an academic code of finite element which allowed the analysis of a set of examples showing consistency of the approximation.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Morfologia das cadeias poliméricas. a) amorfo, b) cristalino, c) esferulita.	6
3.1	Superfície de escoamento Drucker-Prager no espaço das tensões principais (Adaptado de Souza Neto, Perić e Owen (2008)).	18
3.2	Seleção do mapeamento de retorno apropriado (Adaptado de Souza Neto, Perić e Owen (2008))	21
3.3	Mapeamento de retorno ao vértice (Adaptado de Souza Neto, Perić e Owen (2008))	23
5.1	Representação da geometria de teste.	40
5.2	Comparação entre os modelos clássico (CL) e variacional (VAR) de Drucker-Prager para tração e compressão, considerando encruamento linear (L) e não linear (NL).	41
5.3	Ciclo representativo de deslocamento controlado.	42
5.4	Ciclo comparativo dos modelos clássico (CL) e variacional (VAR) de Drucker-Prager considerando encruamento nulo e linear (L).	43
5.5	Comparação entre os modelos clássico (CL) e variacional (VAR) de Drucker-Prager, associativos (A) e não-associativos (NA), para tensão cisalhante na direção do deslocamento considerando encruamento linear.	44
5.6	Demonstração do comportamento da tensão hidrostática ao longo do cone de Drucker-Prager.	45
5.7	Evolução da tensão hidrostática nos modelos clássico (CL) e variacional (VAR) de Drucker-Prager, considerando associatividade (A) e não associatividade (NA).	46
5.8	Comparação entre os resultados obtidos para 10 passos e 200 passos de deformação usando o modelo variacional de Drucker-Prager não-associativo.	47
5.9	Ilustração da deformação volumétrica pura num cubo.	48
5.10	Comparação das tensões principais no procedimento de retorno ao vértice do cone.	49
5.11	Dimensões do corpo de prova tridimensional e malha considerada nos testes.	50
5.12	Comparação dos campos de tensão σ_{yy} entre os modelos clássico (CL) e variacional (VAR) de Drucker-Prager, considerando encruamento não linear.	51

5.13	Comparação dos campos de deformação total ϵ_{yy} entre os modelos clássico (CL) e variacional (VAR) de Drucker-Prager, considerando encruamento não linear.	51
5.14	Vista em corte de um cilindro de revolução e malha considerada nos testes.	52
5.15	Campos de tensão σ_{yy} , trativo e compressivo, para o modelo variacional de Drucker-Prager considerando encruamento linear.	52
5.16	Campos de deformação plástica ϵ_{yy} , trativo (T) e compressivo (C), para o modelo variacional de Drucker-Prager considerando encruamento linear.	53
5.17	Campos de deformação plástica equivalente, trativo (T) e compressivo (C), para o modelo variacional de Drucker-Prager considerando encruamento linear.	53
A.1	Aproximação Drucker-Prager correspondente à superfície de Mohr-Coulomb em tração e compressão uniaxial (Adaptado de Souza Neto, Perić e Owen (2008))	64
A.2	Corte das superfícies de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager (Adaptado de Souza Neto, Perić e Owen (2008))	65

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{B}	Corpo
Ω	Domínio no espaço físico tridimensional
Γ	Contorno do espaço físico tridimensional
\mathbf{f}	Força de superfície
\mathbf{b}	Força de corpo
\mathbf{u}	Deslocamento
\mathcal{H}	Campo de deslocamentos cinematicamente admissíveis
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de Cauchy
$\ddot{\mathbf{u}}$	Aceleração
\mathcal{V}	Espaço das funções peso ou variações
\dot{e}	Variação temporal de energia interna
r	Calor produzido
\mathbf{q}	Fluxo de calor
θ	Temperatura
s	Densidade de entropia
d	Produção neta (local) de entropia
W	Energia interna de Helmholtz
\mathcal{D}	Potência dissipada
\mathcal{E}	Conjunto de variáveis de estado
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Deformação total
\mathbf{z}	Variáveis internas
\mathbf{Y}	Força conjugada de $\dot{\mathbf{z}}$
ψ	Potencial de dissipação
\mathcal{W}	Potencial incremental
\mathcal{R}	Tensor de retorno
k	Força conjugada de $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$
Φ	Função limite de escoamento
\mathbf{N}	Direção de fluxo
H	Módulo de encruamento
$\dot{\lambda}$	Multiplicador plástico
Ψ	Potencial de fluxo
t	Tempo
$\Delta\lambda$	Incremento plástico
\mathbf{s}	Tensão deviatórica
J_2	Invariante de tensão deviatórica
σ_m	Tensão hidrostática
η	Coefficiente de ajuste em relação ao modelo de Mohr-Coulomb

ξ	Coefficiente de ajuste em relação ao modelo de Mohr-Coulomb
c	Coesão
$\bar{\eta}$	Coefficiente de ajuste em relação ao modelo de Mohr-Coulomb (não-associativo)
$\boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr}$	Deformação elástica preditora
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Deformação plástica
$\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr}$	Deformação elástica deviatórica preditora
$\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\ tr}$	Deformação elástica volumétrica preditora
\mathbf{C}^e	Tensor de elasticidade ou Módulo tangente elástico
$\boldsymbol{\sigma}^{tr}$	Tensão preditora
G	Módulo de cisalhamento
K	Módulo de compressibilidade
E	Módulo de Young
ν	Coefficiente de Poisson
$\bar{\varepsilon}^p$	Deformação plástica equivalente
m	Expoente de encruamento
h	Módulo de encruamento nominal
α	Variável por definição
β	Variável por definição
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v^p$	Incremento de deformação plástica volumétrica
r	Função resíduo
\mathbf{l}_d	Tensor deviatórico de 4ª ordem
\mathbf{I}	Tensor identidade de 4ª ordem
\mathbf{I}	Tensor identidade de 2ª ordem
\mathbf{D}^{ep}	Módulo tangente elastoplástico
\mathbf{D}	Tensor unitário paralelo a $\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr}$
A	Variável representativa de equação
\mathbf{D}^{rv}	Módulo tangente elasto-plástico para retorno ao vértice
$\dot{\varepsilon}^p$	Taxa de deformação plástica
\dot{p}	Amplitude de fluxo plástico
\mathbf{M}	Direção de fluxo
β	Parâmetro material
σ_y	Tensão limite de escoamento
f	Função de encruamento
σ_{eq}	Tensão equivalente
C	Parâmetro material
$\tan \gamma$	Inclinação do cone
Δt	Incremento de tempo
θ	Parâmetro algoritmico

Δp	Incremento plástico
$h_{v,ar}$	Módulo de encruamento nominal
ϕ	Ângulo de atrito
f_c	Tensão de compressão
f_t	Tensão de tração
ψ	Ângulo de dilatância

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação e Objetivo	1
1.2	Organização da dissertação	2
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	5
2.1	Morfologia e comportamento mecânico de termoplásticos	5
2.2	Princípios de Conservação	7
2.3	Modelos constitutivos em materiais inelásticos	10
2.3.1	Definições Gerais	10
2.3.2	Definição de Potencial Incremental	12
2.4	Modelos constitutivos em Elastoplasticidade. Conceitos Gerais	13
3	MODELO CLÁSSICO DE DRUCKER-PRAGER.....	17
3.1	Função limite de escoamento e lei de fluxo plástico	17
3.2	Modelo incremental. Algoritmos de retorno plástico	18
3.2.1	Preditor Elástico	19
3.2.2	Corretor Plástico. Retorno à superfície do cone	20
3.2.3	Corretor Plástico. Retorno ao vértice do cone	21
3.3	Módulo Tangente	22
3.3.1	Módulo tangente elástico	23
3.3.2	Módulo tangente elastoplástico na parte suave da superfície de escoamento	24
3.3.3	Módulo tangente elastoplástico no vértice da superfície de escoamento	26
4	MODELO VARIACIONAL DE DRUCKER-PRAGER	29
4.1	Formulação em Taxas	29
4.2	Formulação Incremental	32
4.3	Módulo tangente	36
4.3.1	Módulo tangente elastoplástico na parte suave da superfície de escoamento	36
4.3.2	Módulo tangente elastoplástico no vértice da superfície de escoamento	36
5	IMPLEMENTAÇÃO E TESTES NUMÉRICOS	39
5.1	Exemplos Numéricos	40
5.1.1	Exemplo 1 - Tração e compressão	40

5.1.2	Exemplo 2 - Ciclo de deslocamento controlado . . .	41
5.1.3	Exemplo 3 - Cisalhamento	43
5.1.4	Exemplo 4 - Procedimento de retorno ao vértice do cone	45
5.1.5	Exemplo 5 - Modelo tridimensional com entalhe . .	47
5.1.6	Exemplo 6 - Modelo axissimétrico com entalhe . . .	48
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	55
6.1	Conclusões	55
6.2	Sugestões para trabalhos futuros	57
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	58
	Apêndice A	63
A.1	Modelo de plasticidade associativo e não associativo	63
A.2	Atualização da tensão deviatórica em termos de $\Delta\gamma$	64
A.3	Atualização do radical do invariante de tensão deviatórica . .	66
A.4	Atualização da tensão hidrostática em termos de $\Delta\gamma$	66
A.5	Condição de consistência para o retorno ao vértice	67
A.6	Módulo tangente elástico	68
A.7	Módulo tangente elastoplástico para superfície suave do cone	70
A.7.1	Diferencial da tensão deviatórica	70
A.7.2	Diferencial da tensão hidrostática	72
A.7.3	Diferencial do multiplicador plástico	72
A.7.4	O módulo tangente elastoplástico	74
A.8	Módulo tangente elastoplástico para retorno ao vértice . . .	76
	Apêndice B	79
B.1	Minimização do variacional em relação a M	79
B.2	Prova de que o variacional de atualização constitutiva define M	82
B.3	Minimização do potencial em relação a Δp	86
B.4	Mapeamento de retorno ao vértice	88
B.5	Módulo tangente elastoplástico na parte suave da superfície de escoamento	89
B.6	Módulo tangente elastoplástico no vértice da superfície de escoamento	96
B.6.1	Módulo tangente elastoplástico no vértice da superfície de escoamento em função de $\Delta\mathcal{E}_v^p$	98

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e Objetivo

Os materiais poliméricos ocupam um espaço crescente na fabricação e projeto dos mais variados produtos tecnológicos devido às suas propriedades como, a fácil fabricação e moldagem, resistência, propriedades isolantes, térmicas e elétricas.

Particular ênfase tem sido dada ao desenvolvimento e concepção de materiais e componentes de alto desempenho mecânico, como os termoplásticos, que possuem a capacidade de sofrer grandes deformações e elevada absorção/dissipação de energia antes de sua ruptura (componentes eletrodomésticos, eletrônicos, automotivos, tubulações de alto desempenho, pára-choques, janelas de segurança, dispositivos de dissipação energética frente a impactos, blindagens).

Outro campo de aplicação crescente é o uso de materiais poliméricos biocompatíveis para fabricação de implantes (como dispositivos de osteosíntese) em substituição a implantes metálicos. Os implantes metálicos são recomendados até a consolidação da fratura e depois removidos, porém estes podem induzir estresse ao tecido ósseo e o desenvolvimento de osteopenia cortical (BöSTMAN, 1991). Visando a diminuição dos possíveis efeitos adversos do emprego dos implantes metálicos, disponibilizaram-se recentemente implantes bioabsorvíveis que proporcionam vantagens como a dispensação da remoção dos implantes, melhor qualidade da visualização em diagnósticos por imagens, rigidez compatível com a rigidez óssea, etc.

Aplicações deste tipo impulsionam uma forte demanda na capacidade de simulação e desenvolvimento de modelos adequados para a descrição do comportamento desses materiais frente a cargas elevadas acoplando diversos mecanismos dissipativos, normalmente tratados em forma separada como: viscoelasticidade não linear, viscoplasticidade, acoplamento térmico, dano, sensibilidade a pressão, dentre outros.

Finalmente, os modelos que incorporam os fenômenos acima citados, dependem de parâmetros que descrevem o comportamento para um material específico e que devem ser obtidos a partir de dados experimentais. A identificação destes parâmetros é feita associando o modelo constitutivo proposto a dados experimentais, fazendo uso de técnicas de análise inversa (minimização de erro numérico/experimental, etc).

Posta a motivação tecnológica, o presente trabalho concentra-se em uma das características apresentadas por materiais poliméricos que é a

dependência do limite de escoamento à pressão hidrostática e ao fato de que o fluxo plástico pode não ser apenas isocórico mas, apresentar também deformações volumétricas permanentes. Assim, o objetivo geral do presente trabalho pode ser considerado como o estudo e implementação de duas abordagens distintas para o modelo de elastoplasticidade de Drucker-Prager. Em particular:

1. Estudo do modelo de elastoplasticidade de Drucker-Prager associativo e não associativo segundo sua abordagem clássica e com implementação em código de elementos finitos segundo algoritmos de tipo preditor-corretor;
2. Estudo, avaliação e implementação em código de elementos finitos da proposta apresentada por Stainier (2011), para tratamento do modelo de Drucker-Prager segundo uma abordagem variacional.
3. Realização de testes numéricos, usando exemplos que permitam a análise comparativa de resultados entre ambas as abordagens.

1.2 Organização da dissertação

A dissertação está organizada em sete capítulos incluindo a introdução, conclusão e referências bibliográficas.

No Capítulo 1 são apresentados a introdução, a motivação e os objetivos do trabalho. Apresenta a importância dos materiais poliméricos e sua aplicação, por exemplo, na produção de implantes bioabsorvíveis e a necessidade de modelos adequados para descrever o comportamento desses materiais. Com base nisso, são definidos os objetivos do trabalho.

No Capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica da dissertação. Trata da morfologia e do comportamento mecânico dos termoplásticos, apresenta uma série de referências de artigos relevantes sobre o assunto, discorre sobre os princípios de conservação da quantidade de movimento e leis da termodinâmica. Além disso, são apresentados os conceitos gerais dos modelos constitutivos em materiais inelásticos e de elastoplasticidade.

No Capítulo 3 é abordado o modelo clássico de Drucker-Prager. Considerando algoritmos de tipo preditor/corretor, são apresentados o critério de escoamento, a regra de fluxo e a regra de encruamento. O procedimento de corretor plástico é aplicado tanto para retorno a parte suave do cone quanto para o retorno ao vértice. Ainda são apresentadas as equações para determinação do módulo tangente elástico e elastoplástico.

No Capítulo 4 é apresentado a abordagem variacional do modelo de Drucker-Prager proposta em Stainier (2011). Inicialmente, é detalhado o modelo que envolve as leis de fluxo das variáveis internas em termos de suas taxas e posteriormente, o modelo ou algoritmo incremental correspondente. Segue uma estrutura na qual define-se uma função potencial (primeiramente em termos de taxas e posteriormente em termos de incrementos) para a determinação da evolução das variáveis internas.

No Capítulo 5 são apresentados alguns testes numéricos para avaliar a implementação em código de elementos finitos (usando o software Matlab) dos modelos de Drucker-Prager.

No Capítulo 6 é apresentada a conclusão da dissertação e no Capítulo 7 as referências bibliográficas utilizadas no trabalho. Ao final encontram-se os Apêndices A e B com a dedução das principais equações.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Morfologia e comportamento mecânico de termoplásticos

Os polímeros são materiais macromoleculares, resultado da ligação repetitiva de unidades moleculares menores denominadas “meros” (unidades repetidas). O processo de união destas unidades moleculares para formação da macromolécula é conhecido como polimerização. Tanto composição química como topologia das cadeias conferem propriedades particulares a cada tipo de polímero.

A forma mais usual de classificar os polímeros é dividi-los em três grupos: elastômeros, termorrígidos e termoplásticos. Canevarolo Jr. (2002) define cada um deles do seguinte modo:

- Elastômero - polímero que, à temperatura ambiente, pode ser deformado repetidamente a pelo menos duas vezes o seu comprimento. Retirado o esforço, deve voltar rapidamente ao tamanho original;
- Termorrígidos - o plástico que amolece com o aquecimento, sofre o processo de cura no qual se tem uma transformação química irreversível, com a formação de ligações cruzadas, tornando-se rígido. Aquecimentos posteriores não mais alteram seu estado físico, ou seja, não amolece mais, tornando-se infusível e insolúvel. Exemplos: baquelite, resina epóxi;
- Termoplásticos - plásticos com a capacidade de amolecer e fluir quando sujeitos a um aumento de temperatura e pressão. Quando estes são retirados, o polímero solidifica-se em um produto com formas definidas. Novas aplicações de temperatura e pressão produzem o mesmo efeito de amolecimento e fluxo. Esta alteração é uma transformação física, reversível. Quando o polímero é semicristalino, o amolecimento se dá com a fusão da fase cristalina. São fusíveis, solúveis e recicláveis. Exemplos: polietileno (PE), poliestireno (PS), poliamida (Náilon), etc.

O grupo dos termoplásticos é subdividido em função da morfologia dos arranjos poliméricos, definindo estruturas amorfas, cristalinas e combinações (semicristalina, esferulita) conforme a Fig. (2.1).

Exemplos de polímeros amorfos são o polimetacrilato de metila (PMMA) e o policarbonato (PC). O polipropileno (PP), polietileno (PE) e as poliamidas (PA) são exemplos de polímeros semicristalinos (LEMAITRE et al., 2009).

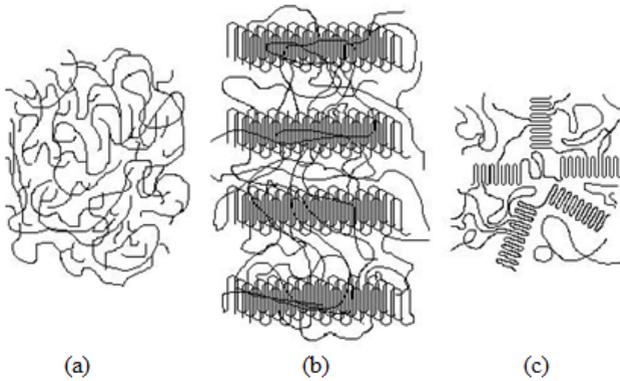


Figura 2.1: Morfologia das cadeias poliméricas. a) amorfo, b) cristalino, c) esferulita.

O comportamento mecânico dos termoplásticos é complexo e dependente de diferentes condições mecânicas, térmicas e químicas. Um mesmo material termoplástico é frequentemente representado por diferentes modelos, dependendo da faixa de atuação que se deseja observar. O trabalho de Du Bois et al. (2004), apresenta uma avaliação das técnicas constitutivas usualmente utilizadas na análise e projeto de componentes termoplásticos na indústria. Dependendo do foco de observação, utilizam-se modelos de elastoplasticidade (independentes da taxa de deformação), viscoelásticos lineares e não lineares típicos de elastômeros (materiais que não apresentam deformações permanentes), viscoplásticos (deformações permanentes dependentes da velocidade de deformação), etc. A literatura sobre modelos de representação de termoplásticos é vasta e não se pretende neste trabalho fazer uma revisão bibliográfica sobre este aspecto, citando-se apenas alguns artigos relevantes sobre o assunto.

Anand e Gurtin (2003) desenvolveram uma teoria do contínuo para a deformação viscoelástica e viscoplástica de sólidos amorfos. Com a introdução de uma variável interna de estado, foram capazes de representar o fenômeno de amolecimento que ocorre imediatamente após a tensão limite de escoamento (cuja existência é contestada por outros autores). Esse trabalho é continuado em Anand e Ames (2006) onde se apresenta um novo modelo contínuo para a deformação viscoelástica e viscoplástica de sólidos poliméricos amorfos. Aplicaram modelos constitutivos para capturar

características salientes da resposta mecânica do polimetacrilato de metila (PMMA), considerando temperatura ambiente e um estado de tensão sob o qual este material não apresenta trincas.

Richeton et al. (2007), desenvolveram um modelo constitutivo tridimensional para descrever a resposta mecânica de polímeros amorfos sobre uma vasta gama de temperaturas e taxas de deformação. Este modelo termomecânico é baseado numa aproximação reológica elástica e viscoplástica, em que o efeito da temperatura, da taxa de deformação e da pressão hidrostática são contabilizados.

Canadija e Mosler (2011) abordam a plasticidade não isotérmica em deformações finitas. Os encruamentos, isotrópico e cinemático, são incluídos através de um modelo não associativo do tipo Armstrong-Frederick. Com base em trabalhos de outros autores, o modelo é atualizado e a capacidade de predição destes modelos é analisada criticamente.

O presente trabalho visa estudar um dos fenômenos observados nos termoplásticos, isto é, a dependência do limite de escoamento e da direção de fluxo plástico à pressão hidrostática. Em particular, esta dependência será incorporada numa abordagem denominada variacional, no sentido que o modelo constitutivo é posto como um processo de extremização, onde a minimização em relação a um conjunto de variáveis internas permite definir a evolução temporal destas e o cálculo da tensão atualizada. Essa abordagem está inserida no contexto teórico dos trabalhos de Ortiz e Stainier (1999), Radovitzky e Ortiz (1999), Weinberg, Mota e Ortiz (2005), Yang, Stainier e Ortiz (2005), Fancello, Ponthot e Stainier (2006), Mosler e Ortiz (2007), Fancello, Vassoler e Stainier (2008), Mosler e Bruhns (2009) e Brassart e Stainier (2012).

Em Vassoler (2009), é tratado o problema de dependência do fluxo plástico em relação à pressão, no contexto de uma abordagem variacional. Esta proposição tem como base teórica do conteúdo apresentado em Ortiz e Pandolfi (2004). A principal diferença dessa abordagem é que a decomposição espectral proposta levou a um completo desacoplamento das contribuições volumétricas e desviadoras. Esta não foi hipotetizada *a priori*, apenas resultou da construção dos potenciais e da escolha do tensor de fluxo plástico. Para esta proposta, foi usado um conjunto de potenciais desviadores e volumétricos (como em Ortiz e Pandolfi (2004)), adaptados para um material específico.

O modelo variacional que será estudado no presente trabalho é fundamentado no relatório de Stainier (2011), ainda em elaboração. A dedução desse modelo variacional, assim como as modificações propostas são apre-

sentados no Capítulo 4.

2.2 Princípios de Conservação

A seguir, apresenta-se um resumo dos princípios mecânicos básicos que governam o problema em estudo. Para isto admite-se trabalhar com um corpo \mathcal{B} que ocupa um domínio Ω no espaço físico tridimensional, limitado por um contorno Γ . Em \mathcal{B} atuam forças de superfície \mathbf{f} (força por unidade de área) e forças de corpo \mathbf{b} (forças por unidade de volume). Admite-se que tanto os deslocamentos quanto as deformações são suficientemente pequenos, dessa forma, as tensões se relacionam com as superfícies não deformadas e as condições de equilíbrio se apresentam também para o sistema não deformado. Assim, as diferentes medidas de deformação convergem para o tensor de deformação linearizado (MALVERN, 1969)

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$, que é o campo de deslocamentos cinematicamente admissíveis. Da mesma maneira todas as medidas de tensão convergem ao tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

A seguir apresentam-se, sumariamente, os princípios de conservação que governam o problema.

Princípio de conservação da quantidade de movimento linear e angular

A conservação da quantidade de movimento linear e angular é expressa localmente na equação de movimento, no balanço na fronteira e na simetria do tensor de tensões:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.2)$$

Por outro lado, em problemas quase-estáticos, as forças devido a aceleração $\ddot{\mathbf{u}}$ são desprezadas fornecendo a equação de equilíbrio local

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

Uma forma alternativa de apresentar esta condição de balanço é utilizar a abordagem fraca ou variacional, onde o campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ em equilíbrio

com as forças externas deve satisfazer o balanço dos trabalhos virtuais:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (2.4)$$

onde \mathcal{V} é o espaço das funções peso ou variações.

Primeiro princípio da termodinâmica

O primeiro princípio da termodinâmica postula a conservação de energia. Segundo este, em cada ponto material a variação temporal da energia interna \dot{e} deve ser igual à soma do trabalho produzido pelas tensões mais o calor produzido r junto ao divergente do fluxo de calor \mathbf{q} (sinal do operador divergente vinculado a calor entrante).

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \text{div} \mathbf{q} + r = \dot{e} \quad (2.5)$$

Segundo princípio da termodinâmica

Neste princípio, admite-se a existência de duas novas variáveis de estado de um ponto material, sejam a temperatura θ e a densidade de entropia s (entropia por unidade de volume). O segundo princípio da termodinâmica estabelece uma direcionalidade às transformações de estado, postulando que a variação temporal da entropia menos a quantidade de calor por unidade de temperatura que entra no sistema deve ser não negativa. Localmente este postulado se traduz na seguinte desigualdade:

$$d = \dot{s} - \left(\frac{r}{\theta} - \text{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) \right) \geq 0 \quad (2.6)$$

onde d é definido como produção neta (local) de entropia. Em processos conservativos (isto é, reversíveis), a igualdade é satisfeita. A combinação entre o primeiro e segundo princípios leva à equação:

$$\mathcal{D} = \theta d = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - (\dot{e} - \theta \dot{s}) - \frac{\text{grad} \theta}{\theta} \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (2.7)$$

Finalmente, definindo a energia interna de Helmholtz, $W = e - \theta s$, e substituindo, obtém-se a equação (ou inequação) de Clausius-Duhem.

$$\mathcal{D} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - (\dot{W} - s \dot{\theta})}_{\mathcal{D}_{int}} - \underbrace{\frac{\text{grad} \theta}{\theta} \cdot \mathbf{q}}_{\mathcal{D}_{term}} \geq 0 \quad (2.8)$$

onde \mathcal{D} é a potência dissipada, dada pela contribuição da dissipação térmica e de outra parcela de dissipação denominada interna. A dissipação interna está associada aos fenômenos irreversíveis, tais como plastificação, dano, etc. Admitindo que pela lei de Fourier a dissipação térmica é não negativa, a inequação conduz a conclusão de que a dissipação interna é, também não negativa. Em particular, para sistemas isotérmicos,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{int} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{W} \geq 0 \quad (2.9)$$

A interpretação desta equação, indica que o trabalho produzido pelas tensões é sempre maior ou igual do que a variação da energia livre de Helmholtz. Como em processos puramente mecânicos a variação da energia de Helmholtz é igual a variação da energia de deformação, a equação anterior define que a potência produzida pelas tensões é ocupada parcialmente para acumular energia de deformação e a outra parcela é ocupada para realizar trabalho irreversível (dissipação não negativa) no sistema.

2.3 Modelos constitutivos em materiais inelásticos

2.3.1 Definições Gerais

No contexto deste trabalho, faz-se referência às relações constitutivas como aquelas que definem a resposta de um material à história do processo termodinâmico que este material foi submetido. Na abordagem de modelos constitutivos baseados em variáveis internas, admite-se que o estado termodinâmico de um sistema em equilíbrio pode ser completamente definido pelo valor (e não pela história) de um conjunto de variáveis denominadas variáveis de estado. No presente contexto, para processos puramente mecânicos, este conjunto está dado por $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z}\}$, onde $\boldsymbol{\epsilon}$ é o estado de deformação do ponto material e \mathbf{z} simboliza as variáveis internas que tem o intuito de representar fenômenos dissipativos (plasticidade, viscosidade, dano, etc.). Admite-se que tanto a tensão $\boldsymbol{\sigma}$ quanto a energia livre W são também variáveis de estado dependentes das primeiras:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z}), \quad W = W(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{z})$$

Admitindo uma variação de estado, a variação da energia livre é dada por:

$$\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{z}} * \dot{\mathbf{z}}$$

Substituindo esta expressão em (2.9), tem-se:

$$\mathcal{D}_{int} = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{z}} * \dot{\mathbf{z}} \geq 0 \quad (2.10)$$

O procedimento proposto por Coleman-Noll (GURTIN; FRIED; ANAND, 2010) permite argumentar a existência de um processo no qual $\dot{\mathbf{z}}$ é nulo, enquanto $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pode assumir valores arbitrários (cinematicamente admissíveis), concluindo nas relações:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Y} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{z}} \quad (2.12)$$

$$\mathcal{D}_{int} = -\mathbf{Y} \cdot \dot{\mathbf{z}} \geq 0 \quad (2.13)$$

A tensão $\boldsymbol{\sigma}$ é denominada força conjugada de $\boldsymbol{\varepsilon}$ por realizar potência com esta taxa, da mesma forma que variável \mathbf{Y} é denominada força conjugada de $\dot{\mathbf{z}}$ (o produto em ambos casos possui a mesma dimensão física). A potência dissipada no instante de variação do estado fica restrita ao produto (2.13). Toda proposta de modelo constitutivo deve ser compatível com as restrições termodinâmicas e respeitar, portanto, as condições anteriores. Uma forma de garantir a satisfação *a priori*, a condição de dissipação não negativa, consiste em definir uma função denominada potencial de dissipação, $\psi = \psi(\mathbf{Y}; \mathcal{E})$, com a propriedade de ser convexo e nulo na origem e satisfazer a condição que $(-\dot{\mathbf{z}})$ pertence ao conjunto subdiferencial de $\psi(\mathbf{Y})$:

$$-\dot{\mathbf{z}} \in \partial \psi(\mathbf{Y}) \quad (2.14)$$

que equivale a $\dot{\mathbf{z}}$ satisfazer a propriedade:

$$\psi(\hat{\mathbf{Y}}) - \psi(\mathbf{Y}) \geq (-\dot{\mathbf{z}}) \cdot (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}) \quad \forall \hat{\mathbf{Y}} \quad (2.15)$$

É simples verificar que sendo $\psi(\mathbf{0}) = 0$, se tem

$$-\dot{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{Y} \geq \psi(\mathbf{Y}) \geq 0 \quad (2.16)$$

isto é, a satisfação da Eq.(2.13). Sendo $\psi(\mathbf{Y})$ uma função convexa, prova-se que existe uma função conjugada também convexa e nula na origem definida

pela transformada de Legendre, com as propriedades:

$$\psi^*(-\dot{\mathbf{z}}) = \sup_{\mathbf{Y}} \{-\dot{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{Y} - \psi(\mathbf{Y})\} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{Y} \in \partial\psi^*(-\dot{\mathbf{z}}) \quad (2.18)$$

Admitindo que a função ψ^* é diferenciável, o conjunto subdiferencial se reduz a um único elemento (derivada) e a Eq.(2.18) se reescreve:

$$\mathbf{Y} = -\frac{\partial\psi^*(\dot{\mathbf{z}})}{\partial\dot{\mathbf{z}}} \quad (2.19)$$

Finalmente, as Eqs.(2.12) e (2.19) resultam na condição:

$$\frac{\partial W(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial\psi^*(\dot{\mathbf{z}})}{\partial\dot{\mathbf{z}}} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

Desta forma, as equações de estado (2.11) e (2.12) definem o valor das forças conjugadas para um estado \mathcal{E} , enquanto a Eq.(2.20) controla a evolução das variáveis internas de maneira a satisfazer a condição de dissipação não nula.

2.3.2 *Definição de Potencial Incremental*

Mostra-se a seguir que as Eqs.(2.11), (2.12) e (2.20) podem ser reproduzidas a partir da definição de uma função potencial e condições de otimalidade. Para tal, definem-se os potenciais:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \dot{W}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\mathbf{z}}; \mathcal{E}) + \psi^*(\dot{\mathbf{z}}; \mathcal{E}) \\ &= \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} + \psi^*(\dot{\mathbf{z}}; \mathcal{E}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\mathcal{D}_{eff}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}; \mathcal{E}) = \min_{\dot{\mathbf{z}}} \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\mathbf{z}}; \mathcal{E}) \quad (2.22)$$

A condição de otimalidade, em relação à taxa da variável interna, recupera a equação de evolução (2.20) enquanto,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \mathcal{D}_{eff}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}; \mathcal{E}) = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \quad (2.23)$$

recupera a equação de estado (2.11). Assim, se pode dizer que \mathcal{D}_{eff} é uma função potencial para as tensões, tendo como argumento as taxas de

deformação.

A utilização de técnicas numéricas exige a definição de leis constitutivas incrementais do tipo

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = f(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_n, \mathbf{z}_n, \Delta t)$$

que podem ser obtidas mediante uma integração temporal da Eq.(2.22). Fazendo isto, define-se o denominado potencial incremental $\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}; \mathcal{E}_n)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \mathcal{D}_{eff} dt &\simeq \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}; \mathcal{E}_n) \\ &= \min_{\mathbf{z}_{n+1}} \left\{ \begin{aligned} &W(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \mathbf{z}_{n+1}) - W(\boldsymbol{\varepsilon}_n, \mathbf{z}_n) \\ &+ \Delta t \psi^* \left(\frac{\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{z}_n}{\Delta t} \right) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Este potencial possui as seguintes propriedades (ORTIZ; STAINIER, 1999):

- A minimização em relação à variável \mathbf{z}_{n+1} fornece a equação

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{z}_{n+1}} + \frac{\partial \psi^* \left(\frac{\Delta \mathbf{z}}{\Delta t} \right)}{\partial \left(\frac{\Delta \mathbf{z}}{\Delta t} \right)} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

consistente com a Eq.(2.20) quando $\Delta t \rightarrow 0$.

- A derivada de \mathcal{W} em relação a $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ fornece a atualização do tensor de tensões:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{\partial \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}; \mathcal{E}_n)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (2.26)$$

2.4 Modelos constitutivos em Elastoplasticidade. Conceitos Gerais

A elastoplasticidade, de acordo com Souza Neto, Perić e Owen (2008), é o estudo comportamental de materiais que, sob a ação de carregamentos, podem apresentar deformações permanentes consideradas instantâneas e não afetadas pela taxa de carregamento. Dentre os critérios de escoamento clássicos de elastoplasticidade citam-se:

- O critério de Tresca (1868): foi proposto para descrever o escoamento plástico em metais. Este critério supõe que o escoamento plástico começa quando a máxima tensão de cisalhamento atinge um valor crítico. Devido à sua definição exclusivamente em termos da tensão de cisalhamento, o critério de Tresca é insensível à tensão hidrostática.

- O critério de von Mises (1913): supõe que o escoamento plástico começa quando a energia de deformação elástica deviatórica atinge um valor crítico. Como apenas a tensão deviatórica pode influenciar no escoamento plástico, o critério de von Mises também é insensível à pressão.
- O critério de Mohr-Coulomb (1773): baseado na suposição de que o fenômeno de escoamento plástico macroscópico é, essencialmente, o resultado do deslizamento entre as partículas do material. De acordo com a lei de atrito de Coulomb, o escoamento plástico começa quando, em um plano no corpo, a tensão cisalhante e a tensão normal atingem a combinação crítica.
- O critério de Drucker-Prager (1952): foi proposto como uma aproximação da Lei de Mohr-Coulomb. Consiste numa modificação do critério de von Mises em que um termo extra é incluído para introduzir a sensibilidade à pressão. O escoamento plástico inicia quando o invariante de tensão deviatórica e a tensão hidrostática atingem a combinação crítica.

O presente estudo será particularizado para o caso de materiais que sofrem deformações plásticas e cujo endurecimento é isotrópico (depende apenas de um escalar).

No contexto de cinemática linear, admite-se a decomposição da deformação total em uma parcela elástica e outra plástica.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

A energia livre, por outro lado, adota a forma de soma de duas parcelas. A primeira, dependente da deformação elástica e a segunda de uma medida escalar da deformação plástica, denominada deformação plástica equivalente $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$.

$$W = W^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + W^p(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} dt \quad (2.27)$$

A variação da energia livre W é dada por

$$\dot{W} = \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{\partial W^p}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p \quad (2.28)$$

Substituindo a Eq.(2.28) na Eq.(2.9), tem-se:

$$\mathcal{D}_{int} = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial W}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \dot{\bar{\varepsilon}}^p \geq 0 \quad (2.29)$$

Seguindo o procedimento de Coleman-Noll, chega-se às seguintes relações:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (2.30)$$

$$\mathcal{X} = \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} = -\boldsymbol{\sigma} \quad (2.31)$$

$$k = \frac{\partial W^p}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \quad (2.32)$$

$$\mathcal{D} = -\mathcal{X} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - k \dot{\bar{\varepsilon}}^p \geq 0 \quad (2.33)$$

Como já indicado, a lei constitutiva deve assegurar expressões para a energia livre W e para as leis de evolução das variáveis internas $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ e $\bar{\varepsilon}^p$ de forma a garantir que a potência dissipada \mathcal{D} , numa mudança de estado, seja positiva.

Nos modelos de elastoplasticidade, admite-se a existência de uma região no espaço das tensões na qual o comportamento do material é dito elástico ou reversível. O critério de escoamento define essa região e é geralmente descrito mediante uma função denominada função limite de escoamento Φ , dependente das variáveis de estado (em geral as variáveis conjugadas). Neste contexto, o espaço das forças conjugadas admissíveis (elásticas) são aquelas que respeitam a restrição

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{X}, k) \leq 0 \quad (2.34)$$

A lei de escoamento ou lei de fluxo plástico, é a lei que define a evolução das variáveis internas. O conceito de máxima dissipação (SIMO; HUGHES, 2000), por exemplo, estabelece que os vetores de fluxo devem ser normais

à superfície de escoamento e satisfazer as seguintes condições:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{X}, k) \leq 0 \quad (2.35)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{X}} \quad (2.36)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = -\frac{\partial \Phi}{\partial k} \quad (2.37)$$

$$\dot{\lambda} \Phi = 0 \quad (2.38)$$

Esta condição é uma premissa do modelo que nem sempre coincide com o comportamento do material. Assim, outras leis de fluxo podem proporcionar uma dissipação não nula, mas não necessariamente normais à superfície $\Phi = 0$. Neste caso, se diz que a lei de fluxo é não-associativa e a evolução das variáveis internas está relacionada a uma função Ψ diferente de Φ , tal que:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{X}} \quad (2.39)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = -\frac{\partial \Psi}{\partial k} \quad (2.40)$$

Com o objetivo de obter equações constitutivas incrementais, passíveis de serem utilizadas em algoritmos numéricos como Elementos Finitos, o conjunto de equações apresentado anteriormente deve ser integrado no intervalo de tempo (t_n, t_{n+1}) . A regra de integração implícita de Euler resulta no seguinte sistema: Dado o estado $(\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p)$ conhecido e fornecida a deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, determinar os valores de $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$ e $\Delta \lambda$ que satisfazem o problema:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \lambda \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathcal{X}_{n+1}, k_{n+1})$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \lambda \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathcal{X}_{n+1}, k_{n+1})$$

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathcal{X}_{n+1}, k_{n+1}) \leq 0$$

$$\Delta \lambda \geq 0, \quad \Delta \lambda \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathcal{X}_{n+1}, k_{n+1}) = 0$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left. \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right|_{n+1}, \quad k_{n+1} = - \left. \frac{\partial W^p}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \right|_{n+1}$$

No Capítulo 3, este modelo de elastoplasticidade será particularizado para atender o critério de escoamento de Drucker-Prager, considerando escoamento associativo e não associativo. Para tal estudo, utilizou-se como base teórica o conteúdo apresentado em Souza Neto, Perić e Owen (2008). No Capítulo 4, o mesmo modelo será apresentado segundo uma abordagem variacional proposta em Stainier (2011).

3 MODELO CLÁSSICO DE DRUCKER-PRAGER

O presente capítulo aborda o modelo constitutivo de Drucker-Prager, tomando como base teórica e matemática o conteúdo de Souza Neto, Perić e Owen (2008). O modelo clássico de Drucker-Prager (1952) é uma extensão do modelo proposto por Mohr-Coulomb e consiste basicamente num modelo de comportamento elastoplástico, onde o escoamento é controlado por uma combinação entre a tensão hidrostática e a tensão deviatórica.

3.1 Função limite de escoamento e lei de fluxo plástico

A teoria da elastoplasticidade apresenta alguns conceitos importantes que relacionam o alcance do modelo ao tipo de comportamento do material que se pretende analisar. Em primeiro lugar, o comportamento plástico pode depender ou não da velocidade de aplicação da carga. No caso de dependência da velocidade, o comportamento plástico é denominado viscoplasticidade (o que ocorre no fenômeno de fluência). No caso da independência de velocidade o comportamento plástico é denominado de elastoplasticidade, caracterizados por produzir deformações instantâneas e irreversíveis, sendo o comportamento associado ao modelo Drucker-Prager.

No modelo de von Mises, a função limite de escoamento é dada por

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) = \sqrt{3J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} - \sigma_y \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}) = 2G\boldsymbol{\epsilon}_d$ é a tensão deviatórica e $J_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}$ representa o invariante de tensão deviatórica. Observa-se entretanto, que este modelo exclui a parcela volumétrica σ_m . Esta independência em relação a σ_m é típica de materiais metálicos, mas não representa o caso de outros materiais, como granulares ou poliméricos. O modelo de Drucker-Prager pode ser visto como uma extensão do modelo de von Mises no qual é inserido a dependência à tensão hidrostática. A representação clássica da função limite de escoamento é dada por:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} + \eta\sigma_m(\boldsymbol{\sigma}) - \xi c \quad (3.2)$$

A Fig.(3.1) representa a forma da superfície de escoamento do modelo de Drucker-Prager. Sobre a superfície de escoamento o valor da Eq.(3.2) é nulo ($\Phi = 0$).

Associado à função limite de escoamento, é preciso definir uma regra de fluxo que descreve a evolução das deformações plásticas. Para isto, define-

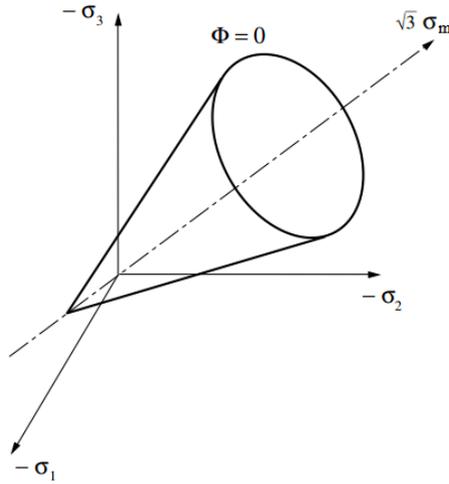


Figura 3.1: Superfície de escoamento Drucker-Prager no espaço das tensões principais (Adaptado de Souza Neto, Perić e Owen (2008)).

se a seguinte função potencial Ψ :

$$\Psi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} + \bar{\eta} \sigma_m(\boldsymbol{\sigma}) - \xi c \quad (3.3)$$

Observa-se nesta expressão que quando o coeficiente $\bar{\eta} = \eta$, então $\Psi = \Phi$. Neste caso, a direção de fluxo é normal à superfície limite de escoamento e, considerando o conceito de máxima dissipação, se diz que o modelo é associativo. Em termos gerais, a taxa das variáveis internas é dada por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad \mathbf{N} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2(\mathbf{s})}} \mathbf{s} + \frac{\bar{\eta}}{3} \mathbf{I} \quad (3.4)$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \dot{\gamma} H \quad H = -\frac{\partial \Psi}{\partial c} = \xi \quad (3.5)$$

3.2 Modelo incremental. Algoritmos de retorno plástico

O algoritmo constitutivo incremental consiste em, determinar uma função incremental do tipo $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p)$. No presente con-

texto, isto é realizado mediante um algoritmo de tipo preditor elástico/corretor plástico, comumente utilizado neste tipo de problema.

3.2.1 Preditor Elástico

Nesta etapa, calcula-se uma estimativa da deformação elástica pressupondo que não há deformações plásticas no intervalo de tempo Δt , ou seja, considera-se a hipótese de incremento plástico nulo. Assim, define-se

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \quad (3.6)$$

Esta estimativa de deformação pode ser decomposta em uma parte deviatórica $\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr}$ e outra volumétrica ou hidrostática $\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\ tr}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr} = \boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr} + \boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\ tr} \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\ tr} = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr} = \boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr} - \boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\ tr} \mathbf{I} \quad (3.7)$$

Admitindo comportamento elástico, a tensão preditora é calculada usando o tensor de elasticidade \mathbf{C}^e ou mediante sua decomposição volumétrica/cisalhante:

$$\boldsymbol{\sigma}^{tr} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr} = \mathbf{s}^{tr} + \boldsymbol{\sigma}_m^{tr} \mathbf{I} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{s}^{tr} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr} \quad \boldsymbol{\sigma}_m^{tr} = K\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\ tr} \quad (3.9)$$

Sendo que o módulo de cisalhamento e o módulo de compressibilidade (*bulk*), coeficientes G e K , se relacionam com os clássicos módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν , mediante

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.10)$$

$$K = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.11)$$

Esta hipótese de incremento plástico nulo ($\Delta\gamma = 0$) é testada avaliando o critério de escoamento:

$$\Phi = \sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})} + \eta \boldsymbol{\sigma}_m^{tr} - \xi c_0 \quad (3.12)$$

Se o valor de $\Phi(\mathbf{s}^{tr}) \leq 0$, a hipótese de incremento puramente elástico é ratificada e todas as variáveis são atualizadas segundo a regra:

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)^{tr}$$

Mas se $\Phi(\mathbf{s}^{tr}) > 0$, existe um $\Delta\gamma = \dot{\gamma}\Delta t > 0$ a ser determinado mediante o algoritmo denominado corretor (ou retorno) plástico.

3.2.2 Corretor Plástico. Retorno à superfície do cone

Admitindo que $\Delta\gamma > 0$, os incrementos de deformação plástica são calculados mediante a integral temporal das Eqs.(3.4) e (3.5).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\gamma \left(\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{2\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})}} + \frac{\bar{\eta}}{3}\mathbf{I} \right) \quad (3.13)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \Delta\gamma\bar{\boldsymbol{\zeta}} \quad (3.14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.15)$$

Substituindo a Eq.(3.15) no modelo de elasticidade (3.8) e separando as parcelas deviatórica e volumétrica, tem-se:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left(1 - \frac{G\Delta\gamma}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}} \right) \mathbf{s}^{tr} \quad (3.16)$$

$$\sigma_{m,n+1} = \sigma_m^{tr} - \Delta\gamma K\bar{\eta} \quad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + \sigma_{m,n+1}\mathbf{I} \quad (3.18)$$

Em (3.16) está implícita a constatação de que \mathbf{s}^{tr} e \mathbf{s}_{n+1} são tensores proporcionais.

A determinação do multiplicador plástico ($\Delta\gamma$) é feita mediante a condição de consistência:

$$\Phi_{n+1} = \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})} + \eta\sigma_{m,n+1} - \xi c(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) = 0 \quad (3.19)$$

Substituindo nesta as Eqs.(3.16), (3.17) e (3.14), se obtém uma equação escalar não linear em função do multiplicador plástico.

$$\check{\Phi}(\Delta\gamma) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})} - G\Delta\gamma + \eta(\sigma_m^{tr} - K\bar{\eta}\Delta\gamma) - \xi c(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \xi\Delta\gamma) = 0 \quad (3.20)$$

A solução da Eq.(3.20) via método de Newton envolve o cálculo de:

$$\frac{d\check{\Phi}}{d\Delta\gamma} = -G - K\eta\bar{\eta} - \xi^2 H, \quad \text{onde} \quad H = \left. \frac{dc(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)}{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \right|_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} \quad (3.21)$$

No caso particular de um encruamento do tipo lei de potências, se tem que:

$$c = c_0 + h(\bar{\epsilon}_{n+1}^p)^{\frac{1}{m}} \quad (3.22)$$

$$H = \frac{1}{m} h(\bar{\epsilon}_{n+1}^p)^{\frac{1-m}{m}} \quad (3.23)$$

3.2.3 Corretor Plástico. Retorno ao vértice do cone

A condição necessária para validar o cálculo de $\Delta\gamma$, em processo, é dada pela Eq. (3.24).

$$\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})} = \sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})} - G\Delta\gamma \geq 0 \quad (3.24)$$

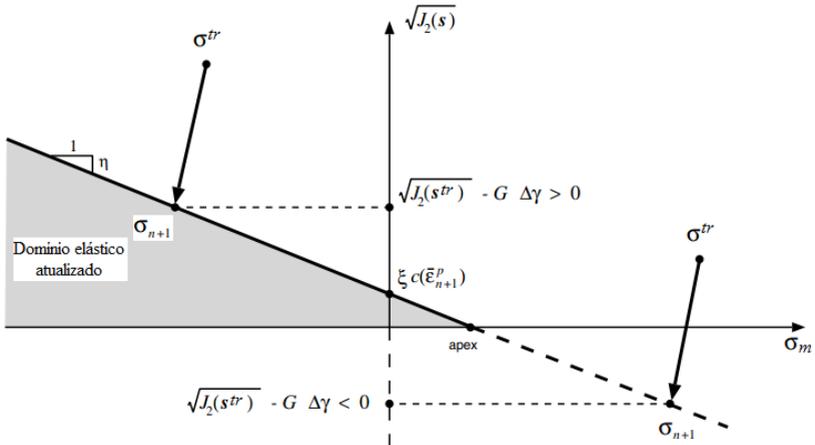


Figura 3.2: Seleção do mapeamento de retorno apropriado (Adaptado de Souza Neto, Perić e Owen (2008))

Caso este sinal não se verifique, é indicador de que a tensão $\boldsymbol{\sigma}^{tr}$ se encontra no cone complementar e o retorno deve ocorrer ao vértice do cone limite de escoamento. Neste caso, se tem que

$$\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})} = 0 \quad (3.25)$$

e a condição de consistência toma a forma:

$$\Phi_{n+1} = \eta(\sigma_m^{tr} - K\bar{\eta}\Delta\gamma) - \xi c(\bar{\epsilon}_n^p + \xi\Delta\gamma) = 0 \quad (3.26)$$

Dividindo por η , utilizando as igualdades

$$\Delta\bar{\epsilon}^p = \xi\Delta\gamma = \frac{\xi}{\bar{\eta}}\Delta\epsilon_v^p \quad \Delta\epsilon_v^p = \Delta\gamma\bar{\eta} \quad (3.27)$$

e definindo¹

$$\alpha = \frac{\xi}{\bar{\eta}}, \quad \beta = \frac{\xi}{\eta} \quad (3.28)$$

chega-se à seguinte equação, não linear em $\Delta\epsilon_v^p$:

$$r(\Delta\epsilon_v^p) = K\Delta\epsilon_v^p + \beta c(\bar{\epsilon}_n^p + \alpha\Delta\epsilon_v^p) - \sigma_m^{tr} = 0 \quad (3.29)$$

Utilizando o método de Newton-Raphson para identificação da raiz, é preciso calcular:

$$\frac{dr(\Delta\epsilon_v^p)}{d\Delta\epsilon_v^p} = K + \beta H\alpha, \quad H = \left. \frac{dc(\bar{\epsilon}^p)}{d\bar{\epsilon}^p} \right|_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p} \quad (3.30)$$

Identificado $\Delta\epsilon_v^p$, a tensão hidrostática atualizada pode ser obtida pela equação:

$$\sigma_{m,n+1} = \sigma_m^{tr} - K\Delta\epsilon_v^p \quad (3.31)$$

Finalmente, dado que a tensão deviatórica no vértice é nula, a tensão atualizada é a própria tensão hidrostática:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \sigma_{m,n+1}\mathbf{I} \quad (3.32)$$

A Fig.(3.3) apresenta esquematicamente o mapeamento de retorno ao vértice.

3.3 Módulo Tangente

Apresenta-se a seguir as equações para a determinação do módulo tangente elástico e elastoplástico.

¹Estas definições estão invertidas em Souza Neto, Perić e Owen (2008) onde aparentemente ocorreu um erro de digitação.

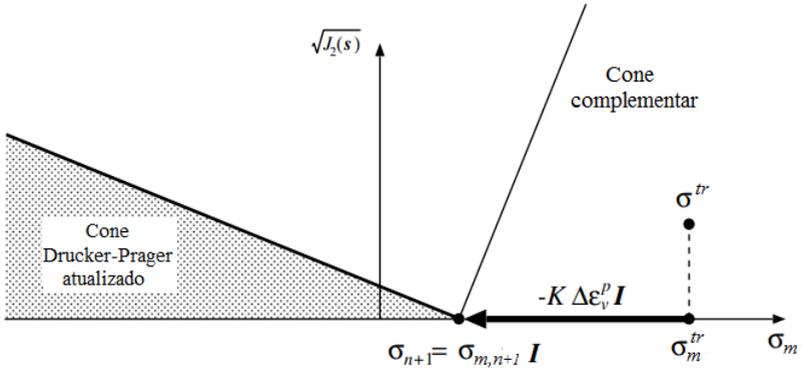


Figura 3.3: Mapeamento de retorno ao vértice (Adaptado de Souza Neto, Perić e Owen (2008))

3.3.1 Módulo tangente elástico

O módulo tangente elástico (\mathbf{C}^e) é dado pela seguinte derivada:

$$\mathbf{C}^e = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} \quad (3.33)$$

Considerando a decomposição da tensão atualizada, pode-se assumir a derivada anterior da seguinte forma:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} + \frac{\partial \sigma_{m,n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} \otimes \mathbf{I} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} = 2G \mathbf{l}_d \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \sigma_{m,n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} = K \mathbf{I}$$

Assim, o módulo tangente elástico é tido como:

$$\mathbf{C}^e = 2G \mathbf{l}_d + K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (3.36)$$

onde $\mathbf{l}_d = \mathbf{II} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ é o tensor deviatórico de 4ª ordem.

A dedução matemática detalhada do módulo tangente elástico é apresentada na Seção A.6 do Apêndice A.

3.3.2 Módulo tangente elastoplástico na parte suave da superfície de escoamento

Da mesma forma, para materiais de comportamento elastoplástico, o módulo tangente é dado pela derivada:

$$\mathbf{D}^{ep} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{d\mathbf{s}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etr}} + \frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\varepsilon^{etr}} \otimes \mathbf{I} \quad (3.37)$$

Tomando a atualização da tensão deviatórica, convertendo-a em termos de $\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr}$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left(1 - \frac{G\Delta\gamma}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}} \right) \mathbf{s}^{tr} = 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr}\|} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr} \quad (3.38)$$

e tomando o seu diferencial, temos:

$$\begin{aligned} d\mathbf{s}_{n+1} &= \frac{d\mathbf{s}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr}} d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr} + \frac{d\mathbf{s}_{n+1}}{d\Delta\gamma} d\Delta\gamma \\ &= \left[\begin{array}{c} 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr}\|} \right) d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr} \\ -2G \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr}\|} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr} - \frac{2G}{\sqrt{2}} \mathbf{D} d\Delta\gamma \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde o tensor de segunda ordem \mathbf{D} é o tensor unitário paralelo a $\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr}$.

$$\mathbf{D} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr}}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr}\|} \quad (3.40)$$

Similarmente, a atualização da tensão hidrostática é dada em termos da deformação volumétrica:

$$\sigma_{m,n+1} = 3K \left(\varepsilon_v^{etr} - \frac{\bar{\eta}}{3} \Delta\gamma \right) \quad (3.41)$$

Aplicando o diferencial, temos:

$$\begin{aligned}
d\sigma_{m,n+1} &= \frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\varepsilon_{v,n+1}^{e\ tr}} d\varepsilon_v^{e\ tr} + \frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\Delta\gamma} d\Delta\gamma \\
&= 3K d\varepsilon_v^{e\ tr} - K\bar{\eta} d\Delta\gamma
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Observa-se que, tanto o diferencial da tensão deviatórica quanto o diferencial da tensão hidrostática possuem, na sua equação, o diferencial do multiplicador plástico que necessita ser determinado. Partindo da condição de consistência da Eq.(3.20), se considera o seguinte diferencial:

$$\begin{aligned}
d\tilde{\Phi} &= \frac{d\tilde{\Phi}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr}} d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr} + \frac{d\tilde{\Phi}}{d\varepsilon_v^{e\ tr}} d\varepsilon_v^{e\ tr} + \frac{d\tilde{\Phi}}{d\Delta\gamma} d\Delta\gamma \\
&= \sqrt{2}GD d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr} + K\eta d\varepsilon_v^{e\ tr} - (G + K\eta\bar{\eta} + \xi^2 H) d\Delta\gamma
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Igualando a expressão a zero ($d\tilde{\Phi} = 0$) e isolando $d\Delta\gamma$, temos:

$$d\Delta\gamma = A \left(\sqrt{2}GD d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr} + K\eta d\varepsilon_v^{e\ tr} \right) \quad A = \frac{1}{G + K\eta\bar{\eta} + \xi^2 H}$$

Assim, pode-se obter as derivadas que compõe o módulo tangente:

$$\frac{d\mathbf{s}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr}} = \left[\begin{array}{c} 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr}\|} \right) \mathbf{I}_d - \sqrt{2}GAK\eta \mathbf{D} \otimes \mathbf{I} \\ + 2G \left(\frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr}\|} - AG \right) (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \end{array} \right] \tag{3.44}$$

$$\frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\varepsilon^{e\ tr}} = K(1 - K\eta\bar{\eta}A)\mathbf{I} - \sqrt{2}K\bar{\eta}AG\mathbf{D} \tag{3.45}$$

Conclui-se então, que o módulo tangente elastoplástico possui a seguinte forma:

$$\mathbf{D}^{ep} = \left[\begin{array}{c} 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr}\|} \right) \mathbf{I}_d + 2G \left(\frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\ tr}\|} - AG \right) (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \\ - \sqrt{2}GAK (\eta \mathbf{D} \otimes \mathbf{I} + \bar{\eta} \mathbf{I} \otimes \mathbf{D}) + K(1 - K\eta\bar{\eta}A)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{array} \right] \tag{3.46}$$

A dedução matemática detalhada do módulo tangente elastoplástico na parte suave da superfície de escoamento é apresentada na Seção A.7 do Apêndice A.

3.3.3 Módulo tangente elastoplástico no vértice da superfície de escoamento

O módulo tangente para retorno ao vértice segue o mesmo princípio anterior, com a diferença de que não há tensão deviatórica no retorno ao vértice. Assim, o diferencial de tensão é formado apenas pela parte hidrostática.

$$\mathbf{D}^{rv} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \mathbf{I} \otimes \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{m,n+1}}{d\varepsilon^{e\ tr}} \quad (3.47)$$

O diferencial da tensão hidrostática é obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma}_{m,n+1} &= \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{m,n+1}}{d\varepsilon_v^{e\ tr}} d\varepsilon_v^{e\ tr} + \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{m,n+1}}{d\Delta\varepsilon_v^p} d\Delta\varepsilon_v^p \\ &= K d\varepsilon_v^{e\ tr} - K d\Delta\varepsilon_v^p \end{aligned} \quad (3.48)$$

Agora temos a necessidade de determinar o diferencial do incremento da deformação plástica volumétrica ($d\Delta\varepsilon_v^p$). Assim, dada a condição de consistência em termos de $\Delta\varepsilon_v^p$ da Eq.(3.29), o seu diferencial é representado por:

$$\begin{aligned} dr(\Delta\varepsilon_v^p) &= \frac{dr(\Delta\varepsilon_v^p)}{d\varepsilon_v^{e\ tr}} d\varepsilon_v^{e\ tr} + \frac{dr(\Delta\varepsilon_v^p)}{d\Delta\varepsilon_v^p} d\Delta\varepsilon_v^p \\ &= K d\varepsilon_v^{e\ tr} + (\alpha\beta H + K) d\Delta\varepsilon_v^p \end{aligned} \quad (3.49)$$

Igualando a equação à zero ($dr = 0$), e pondo em evidência $d\Delta\varepsilon_v^p$ temos:

$$d\Delta\varepsilon_v^p = \frac{K}{(\alpha\beta H + K)} d\varepsilon_v^{e\ tr} \quad (3.50)$$

Substituindo $d\Delta\varepsilon_v^p$ na Eq.(3.48) e aplicando a derivada em relação a $\boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{m,n+1} &= K d\varepsilon_v^{e\ tr} - K \left(\frac{K}{\alpha\beta H + K} \right) d\varepsilon_v^{e\ tr} \\
 \frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\varepsilon_v^{e\ tr}} &= K \left(1 - \frac{K}{\alpha\beta H + K} \right) \mathbf{I}
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Dessa forma, o módulo tangente elastoplástico pode ser determinado pela Eq. (3.52).

$$\mathbf{D}^{rv} = K \left(1 - \frac{K}{\alpha\beta H + K} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \tag{3.52}$$

A dedução matemática detalhada do módulo tangente elastoplástico no vértice da superfície de escoamento é apresentada na Seção A.7 do Apêndice A.

4 MODELO VARIACIONAL DE DRUCKER-PRAGER

Apresenta-se neste capítulo a abordagem variacional do Modelo de Drucker-Prager proposta em Stainier (2011). Inicialmente, é detalhado o modelo que envolve as leis de fluxo das variáveis internas em termos de suas taxas e posteriormente, o modelo ou algoritmo incremental correspondente. A proposição segue a estrutura estabelecida na Seção 2.3.2, na qual define-se uma função potencial (primeiramente em termos de taxas e posteriormente em termos de incrementos) para a determinação da evolução das variáveis internas.

4.1 Formulação em Taxas

Da mesma forma que no modelo clássico, admite-se uma energia livre de Helmholtz dada pela contribuição de duas parcelas, uma elástica e outra plástica, sendo esta última restrita, no presente estudo, aos casos de endurecimento isotrópico:

$$W = W^e(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) + W^p(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \quad (4.1)$$

De acordo com o exposto no Capítulo 2, a tensão é dada pela derivada do potencial de energia livre em relação à deformação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.2)$$

Nesta abordagem admite-se *a priori*, uma parametrização da lei de fluxo plástico segundo a qual esta é decomposta em direção e amplitude, como segue:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{p}(\mathbf{M} + \beta \mathbf{I}), \quad \text{tr}[\mathbf{M}] = 0, \quad \mathbf{M} : \mathbf{M} = \frac{3}{2} \quad (4.3)$$

Nesta expressão, \dot{p} controla a amplitude do fluxo plástico, \mathbf{M} é um tensor simétrico e isocórico, \mathbf{I} é o tensor unitário de 2ª ordem e $\beta \geq 0$ é um parâmetro material. Note que nesta definição, o valor de β estabelece, *a priori*, a existência ou não de deformação plástica volumétrica. Com esta definição, pode-se determinar a taxa de deformação plástica acumulada da seguinte forma:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} [\dot{p}(\mathbf{M} + \beta \mathbf{I})] : [\dot{p}(\mathbf{M} + \beta \mathbf{I})]} = \dot{p} \sqrt{1 + 2\beta^2} \quad (4.4)$$

Assim, pode-se dizer que após definida a parametrização em (4.3), tanto $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ quanto $\bar{\varepsilon}^p$ passam a ser variáveis dependentes de \dot{p} e \mathbf{M} . A evolução destas variáveis será controlada pelo pseudo-potencial $\psi^*(\dot{\bar{\varepsilon}}^p)$, definido como (STAINIER, 2011):

$$\psi^*(\dot{\bar{\varepsilon}}^p) = \begin{cases} \sigma_y(\boldsymbol{\varepsilon}_v^e) \dot{p} & \text{se } \dot{p} \geq 0 \\ +\infty & \text{se } \dot{p} < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\sigma_y(\boldsymbol{\varepsilon}_v^e) = \sigma_{y0} - C \boldsymbol{\varepsilon}_v^e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_v^e = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \quad (4.6)$$

Onde σ_y indica uma tensão limite de escoamento linearmente decrescente em relação à deformação volumétrica. Com base nisso, o potencial de encruamento plástico é definido, convenientemente, como uma função convexa que satisfaz

$$\frac{\partial W^p(\bar{\varepsilon}^p)}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = \frac{f(\bar{\varepsilon}^p)}{\sqrt{1 + 2\beta^2}} \quad (4.7)$$

Assim, seguindo a estrutura formalizada na Seção 2.3.2, dado o estado material $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \bar{\varepsilon}^p\}$, a evolução do ponto material é descrito pelo seguinte problema variacional de mínimo:

$$\min_{\mathbf{M} \in \mathcal{H}, \dot{p} \in \mathbb{R}} \mathcal{D}(\mathbf{M}, \dot{p}; \mathcal{E}), \quad \mathcal{D}(\mathbf{M}, \dot{p}; \mathcal{E}) = \dot{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \bar{\varepsilon}^p) + \psi^*(\dot{\bar{\varepsilon}}^p) \quad (4.8)$$

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{M} \in \text{Sym} : \text{tr}[\mathbf{M}] = 0, \mathbf{M} : \mathbf{M} = 3/2\}$$

A condição necessária de mínimo em relação à variável \mathbf{M} , considerando as restrições de isocoricidade, é detalhada na Seção B.1 do Apêndice B e resulta na proporcionalidade clássica deste tensor e o tensor desviador $\mathbf{s} = \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)]$:

$$\mathbf{M} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \quad (4.9)$$

Definido \mathbf{M} , a condição de otimalidade da Eq.(4.8) em relação a \dot{p} , considerando a penalização imposta por ψ^* , equivale ao seguinte problema:

$$\min_{\dot{p} \geq 0} \mathcal{D}(\dot{p}; \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \bar{\varepsilon}^p)$$

$$\mathcal{D}(\dot{p}; \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \bar{\varepsilon}^p) = \dot{W}^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \dot{W}^p(\bar{\varepsilon}^p) + \sigma_y(\boldsymbol{\varepsilon}_v^e) \dot{p} \quad (4.10)$$

A condição de extremização, com restrição de sinal em \dot{p} , é alcançada pelo sistema de complementaridade a seguir:

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{p}} \dot{p} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{p}} \geq 0, \quad \dot{p} \geq 0 \quad (4.11)$$

Considerando as Eqs. (4.2), (4.5), (4.6) e (4.7), a derivada $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{p}}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{p}} &= \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\partial \dot{p}} + \frac{\partial W^p}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \frac{\partial \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p}{\partial \dot{p}} + \sigma_y (\boldsymbol{\varepsilon}_v^e) \\ &= -\boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I}) + f(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) + \sigma_y (\boldsymbol{\varepsilon}_v^e) \\ &= -\sigma_{eq} - 3\beta \sigma_m + f(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) + \sigma_y (\boldsymbol{\varepsilon}_v^e) \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{s}\|$ é a tensão equivalente e $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ a tensão hidrostática. Assim, o sistema (4.11) se reduz aos seguintes casos:

$$\dot{p} = 0 \quad \text{se} \quad \sigma_{eq} + 3\beta \sigma_m < \sigma_y (\boldsymbol{\varepsilon}_v^e) + f(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (4.13)$$

$$\dot{p} \geq 0 \quad \text{se} \quad \sigma_{eq} + 3\beta \sigma_m = \sigma_y (\boldsymbol{\varepsilon}_v^e) + f(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (4.14)$$

$$\dot{p} = +\infty \quad \text{se} \quad \sigma_{eq} + 3\beta \sigma_m > \sigma_y (\boldsymbol{\varepsilon}_v^e) + f(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (4.15)$$

Na Eq.(4.13), não existe fluxo plástico e o estado se encontra na região elástica. Em (4.14), o estado se encontra na fronteira da superfície de escoamento e há possibilidades de fluxo plástico. A terceira opção representa um caso físico não possível (fora da superfície de escoamento).

Considerando, por simplicidade, o comportamento como elástico linear, se tem que:

$$\frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{s} + \sigma_m \mathbf{I} \quad (4.16)$$

$$\boldsymbol{s} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_d^e, \quad \sigma_m = K\boldsymbol{\varepsilon}_v^e \quad (4.17)$$

Substituindo a Eq.(4.6) em (4.14) se tem um critério de tipo Drucker-Prager:

$$\sigma_{eq} + 3(\tan \gamma) \sigma_m = \sigma_{y0} + f(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

onde a inclinação do cone é dada por:

$$\tan \gamma = \beta + \frac{C}{3K} \quad (4.18)$$

Caso $\beta = 0$, se tem uma regra de escoamento puramente isocórica (regra de fluxo não associativa, $C = 3K \tan \gamma$). Caso $\beta = \tan \gamma$, se tem uma regra de fluxo associativa, resultando em $C = 0$. Vários modelos não associativos de Drucker-Prager podem ser obtidos variando β no intervalo $[0, \tan \gamma]$.

Para que os resultados dos modelos clássico e variacional sejam comparáveis, os valores de β e C devem ser relacionados aos correspondentes parâmetros da abordagem clássica considerando as seguintes equações:

$$\beta = \frac{\sqrt{3}\bar{\eta}}{3}, \quad C = \sqrt{3}K(\eta - \bar{\eta}) \quad (4.19)$$

Na seção seguinte, este modelo é reescrito em termos de incrementos, com a finalidade de desenvolver um algoritmo para a atualização das variáveis de estado.

4.2 Formulação Incremental

Com o objetivo de desenvolver uma expressão incremental do potencial (em consonância com o exposto no Capítulo 2), integra-se o potencial \mathcal{S} num intervalo de tempo ($\Delta t = t_n - t_{n+1}$). Dado o estado inicial $\{\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p\}$ e considerando a deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, o problema incremental consiste em determinar a atualização das variáveis internas e o tensor de Cauchy. A versão incremental do potencial da Eq.(4.8) assume a expressão

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p) \equiv \min_{\mathbf{M} \in \mathcal{K}, \Delta p} \left[\begin{array}{l} (W^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) - W^e(\boldsymbol{\varepsilon}_n^e)) \\ + (W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) - W(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p)) \\ + \Delta t \psi^* \left(\frac{\Delta p}{\Delta t}; \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+\theta}^e \right) \end{array} \right] \quad (4.20)$$

onde o parâmetro algorítmico $\theta \in [0, 1]$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+\theta}^e$ foi desenvolvido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+\theta}^e &= \theta \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e] + (1 - \theta) \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_n^e] \\ &= \theta \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^{rr} - \Delta p(\mathbf{M} + \beta \mathbf{I})] + (1 - \theta) \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_n^e] \\ &= \theta \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^{rr}] - 3\theta\beta\Delta p + (1 - \theta) \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_n^e] \end{aligned} \quad (4.21)$$

A minimização da Eq.(4.20) em relação ao tensor \mathbf{M} está detalhado na Seção B.2 do Apêndice B, resultando numa expressão análoga ao caso de taxas,

h do modelo clássico é dado por:

$$h_{var} = h \xi \left(\sqrt{3} \right)^{\frac{m+1}{m}} \quad (4.28)$$

Determinado o valor de Δp , a deformação plástica é atualizada segundo a expressão

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta p (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I}) \quad (4.29)$$

enquanto a deformação plástica acumulada fica

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta p \sqrt{1 + 2\beta^2} \quad (4.30)$$

Finalmente, como se indica na Eq.(4.2), a tensão de Cauchy é obtida a partir da derivada parcial de \mathcal{W} em relação a $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} + \Delta t \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \\ &= \mathbf{C}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) - C\theta \Delta p \mathbf{I} \\ &= \mathbf{C}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \Delta p (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I})) - C\theta \Delta p \mathbf{I} \\ &= \mathbf{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr} - \mathbf{C}^e \Delta p (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I}) - C\theta \Delta p \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Este tensor também pode ser decomposto nas partes deviatórica e hidrostática:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n+1} \mathbf{I} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^{tr} + 2G\mathbf{M}\Delta p \quad (4.33)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n+1} = (\boldsymbol{\sigma}_m^{tr} - 3\beta K\Delta p) - C\theta \Delta p = \boldsymbol{\sigma}_{m,n+1} - C\theta \Delta p \quad (4.34)$$

Diferentemente da formulação em taxas, a atualização da parcela volumétrica incorpora o termo $C\theta \Delta p$, decorrente da dependência da função ψ^* com a deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$. Este termo torna a atualização inconsistente com o presuposto que

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{m,n+1} = \boldsymbol{\sigma}_m^{tr} - 3\beta K\Delta p$$

Esta inconsistência pode ser eliminada de duas formas. A primeira, considera-se o fluxo plástico como associativo, onde $C = 0$. A outra forma, é introduzir um atraso na dependência de ψ^* tomando $\theta = 0$ e portanto $\psi^* = \psi^*(\boldsymbol{\varepsilon}_{v,n}^e)$. Ou seja, considerando o intervalo de tempo Δt , o tempo

no instante n corresponde à $\theta = 0$ e o tempo no instante $n + 1$ corresponde à $\theta = 1$.

Este algoritmo incremental corresponde ao retorno à parcela regular da superfície de escoamento com formato cônico. De forma similar ao discutido no capítulo anterior, para que o cálculo de Δp seja consistente com o retorno à superfície regular, o valor de $\sigma_{eq,n+1}$ da Eq.(4.23) deve ser não negativo:

$$\sigma_{eq,n+1} = \sigma_{eq}^{tr} - 3G\Delta p \geq 0 \quad (4.35)$$

Caso resulte o contrário, a atualização no tempo $n + 1$ se encontra no vértice do cone e o cálculo da Eq.(4.23) deve considerar $\sigma_{eq,n+1} = 0$. Assim, a condição de consistência é reduzida para:

$$r(\Delta p) = \begin{bmatrix} -3\beta (\sigma_m^{tr} - 3\beta K\Delta p) + f(\bar{\epsilon}_{n+1}^p) + \sigma_{y0} \\ -\frac{C}{K} [\theta \sigma_m^{tr} + (1 - \theta) \sigma_{m,n} - 6\theta \beta K\Delta p] \end{bmatrix} = 0 \quad (4.36)$$

Para encruamento não nulo, a deformação plástica volumétrica é obtida pelo Método de Newton-Raphson que utiliza a derivada do resíduo $r(\Delta p)$:

$$\frac{d r(\Delta p)}{d \Delta p} = 9\beta^2 K + 6\beta C\theta + H\sqrt{1 + 2\beta^2}, \quad H = \left. \frac{df}{d\bar{\epsilon}^p} \right|_{\bar{\epsilon}_{n+1}^p} \quad (4.37)$$

Obtido o valor de Δp , a tensão hidrostática é atualizada como na Eq.(4.34):

$$\hat{\sigma}_{m,n+1} = (\sigma_m^{tr} - 3\beta K\Delta p) - C\theta\Delta p = \sigma_{m,n+1} - C\theta\Delta p \quad (4.38)$$

Como a tensão deviatórica para o retorno ao vértice é nula, a tensão atualizada é a própria tensão hidrostática:

$$\hat{\sigma}_{n+1} = \hat{\sigma}_{m,n+1} \mathbf{I} \quad (4.39)$$

O restante das atualizações segue a mesma formulação do caso geral.

4.3 Módulo tangente

4.3.1 Módulo tangente elastoplástico na parte suave da superfície de escoamento

O módulo tangente elastoplástico, para este caso, é dado pela derivada segunda do variacional \mathcal{W} .

$$\mathbf{D}_{var}^{ep} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^2} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \quad (4.40)$$

Onde deve ser levado em conta que o potencial incremental é definido como o resultado da minimização das variáveis internas da Eq. (4.20).

O diferencial de $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ é descrito como:

$$\begin{aligned} d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} &= \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta p} d\Delta p + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \mathbf{M}} d\mathbf{M} \\ &= \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta p} \frac{\partial \Delta p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \\ + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \mathbf{M}} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

Assim, o módulo tangente elastoplástico é dado por:

$$\mathbf{D}_{var}^{ep} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{C}^e + 4G^2 \left(\frac{\Delta p}{\sigma_{vq}^{ep}} - A_v \right) \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} - \frac{6G^2}{\sigma_{vr}^{ep}} \Delta p [\mathbf{l}_d]_{ijkl} \\ -A_v (6G\beta K + 2G\theta C) (\mathbf{M} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}) \\ -A_v \left(9\beta^2 K^2 + 6\beta K\theta C + (\theta C)^2 \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{array} \right] \quad (4.42)$$

É importante notar que este operador tangente é simétrico, uma consequência direta da estrutura variacional proposta. A dedução matemática detalhada do módulo tangente elastoplástico na parte suave da superfície de escoamento é apresentada na Seção B.5 do Apêndice B.

4.3.2 Módulo tangente elastoplástico no vértice da superfície de escoamento

O módulo tangente elastoplástico para retorno ao vértice é determinado pela seguinte derivada:

$$\mathbf{D}_{var}^{rv} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \mathbf{I} \otimes \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (4.43)$$

sendo o diferencial da tensão hidrostática $\hat{\sigma}_{m,n+1}$ definido como:

$$d\hat{\sigma}_{m,n+1} = \frac{d\hat{\sigma}_{m,n+1}}{d\varepsilon_v^{e\ tr}} d\varepsilon_v^{e\ tr} + \frac{d\hat{\sigma}_{m,n+1}}{d\Delta p} d\Delta p \quad (4.44)$$

Dessa forma, o módulo tangente elastoplástico de retorno ao vértice é dado por:

$$\mathbf{D}_{var}^{rv} = K \left(1 - \frac{3\beta K + \theta C}{(9\beta^2 K + 6\beta\theta C + \alpha H)} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (4.45)$$

A dedução matemática detalhada do módulo tangente elastoplástico no vértice da superfície de escoamento é apresentada na Seção B.6 do Apêndice B.

5 IMPLEMENTAÇÃO E TESTES NUMÉRICOS

Neste capítulo, são propostos alguns testes numéricos para avaliar a implementação em código de elementos finitos (usando o software Matlab) dos modelos de Drucker-Prager apresentados nos Capítulos 3 e 4.

As propriedades utilizadas neste trabalho não caracterizam um material específico, os resultados são apenas ilustrativos e a análise é realizada com base na teoria de elastoplasticidade. Os parâmetros materiais, considerados fixos em todos os testes, são apresentados na Tab. (5.1).

$E = 4100 \text{ MPa}$
$\nu = 0,25$
$f_t = 60,00 \text{ MPa}$
$f_c = 90,00 \text{ MPa}$
$\psi = 0.3\phi$

Tabela 5.1: Dados iniciais.

As tensões máximas de tração (f_t) e compressão (f_c) são utilizadas na determinação do ângulo de atrito (ϕ) e da coesão nominal (c_0):

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{f_c - f_t}{f_c + f_t} \right) \quad c_0 = \left(\frac{f_c f_t}{f_c - f_t} \right) \tan \phi$$

O ângulo de atrito é usado para obter as aproximações do modelo de Drucker-Prager em relação ao modelo de Mohr-Coulomb. Considerando o caso uniaxial para o modelo associativo, o critério é obtido definindo:

$$\eta = \frac{3 \sin \phi}{\sqrt{3}} \quad \xi = \frac{2 \cos \phi}{\sqrt{3}}$$

Caso o modelo seja não associativo, o ângulo de atrito ϕ é substituído pelo ângulo de dilatação ψ (menor que ϕ) e assim se tem:

$$\bar{\eta} = \frac{3 \sin \psi}{\sqrt{3}}$$

Maiores informações estão apresentados na Seção A.1 do Apêndice A.

A implementação numérica e os resultados obtidos, para cada exemplo realizado, são apresentados a seguir.

5.1 Exemplos Numéricos

5.1.1 Exemplo 1 - Tração e compressão

Neste exemplo, é apresentado o teste uniaxial para tração e compressão com os seguintes objetivos:

- verificar a equivalência entre os modelos clássico e variacional de Drucker-Prager;
- verificar se ambos os modelos de Drucker-Prager atendem aos limites de escoamento impostos para os casos de tração e compressão;
- verificar o comportamento da curva tensão *versus* deformação para os tipos de encruamento considerados.

A geometria utilizada no teste foi um bloco cúbico de dimensão $a = 2$ mm. Considera-se a geometria composta por apenas um elemento finito do tipo hexaedro, de oito nós e com oito pontos de integração. As condições de contorno são impostas na face inferior do corpo de forma a impedir o movimento vertical, e na face superior é imposto um deslocamento controlado de 0,2 mm, tanto para o caso de tração (deslocamento positivo) quanto para o caso de compressão (deslocamento negativo). Esse deslocamento é aplicado ao longo de 200 passos. Na Fig.(5.1) é mostrada a representação da geometria de teste.

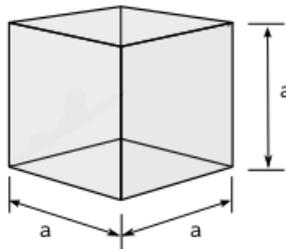


Figura 5.1: Representação da geometria de teste.

Os modelos clássico e variacional de Drucker-Prager foram tratados como associativos e analisados para encruamento linear e não linear. O coeficiente de encruamento nominal foi de $h = 100$ e o expoente de encruamento

linear e não linear dado, respectivamente, por $m = 1$ e $m = 2$. A Fig.(5.2) apresenta o gráfico de tensão *versus* deformação para este caso.

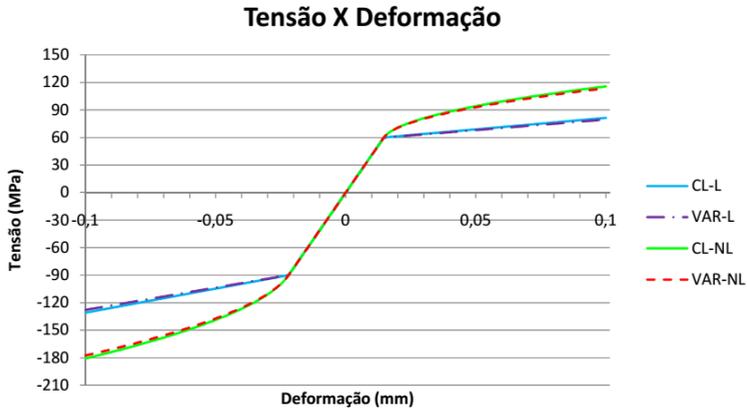


Figura 5.2: Comparação entre os modelos clássico (CL) e variacional (VAR) de Drucker-Prager para tração e compressão, considerando encruamento linear (L) e não linear (NL).

A análise das curvas tensão *versus* deformação apontaram o bom funcionamento da implementação numérica dos modelos para os limites de tração e compressão. É possível observar a equivalência dos modelos clássico e variacional. Ambos os modelos possuem o mesmo valor de tensão limite de escoamento imposto inicialmente, para tração e compressão, assim como reproduzem um comportamento linear/não linear do encruamento, como esperado.

5.1.2 Exemplo 2 - Ciclo de deslocamento controlado

Neste exemplo, é apresentado o teste cíclico de tração/compressão visando:

- verificar a expansão isotrópica do limite de escoamento mediante uma lei de encruamento linear;
- observar o limite máximo e mínimo de deformação.

A geometria utilizada no teste foi um bloco cúbico de dimensão $a = 2$ mm, composta por apenas um elemento finito do tipo hexaedro, de oito nós e com oito pontos de integração. As condições de contorno são impostas na face inferior do cubo de forma a impedir o movimento vertical, e na face superior é imposto um deslocamento controlado de 0,2 mm, tanto para o caso de tração (deslocamento positivo) quanto para o caso de compressão (deslocamento negativo). Para cada etapa de tração ou compressão do ciclo, o deslocamento considerado é aplicado ao longo de 200 passos.

Ambos os modelos de Drucker-Prager, clássico e variacional, foram tratados como associativos e analisados para um ciclo de deslocamento. Foram considerados dois tipos de encruamento, nulo e linear. Para o encruamento linear foi utilizado $h = 100$ e $m = 1$. A Fig.(5.3) apresenta o ciclo para deslocamento controlado e a Fig.(5.4) apresenta o gráfico de tensão *versus* deformação cíclico.

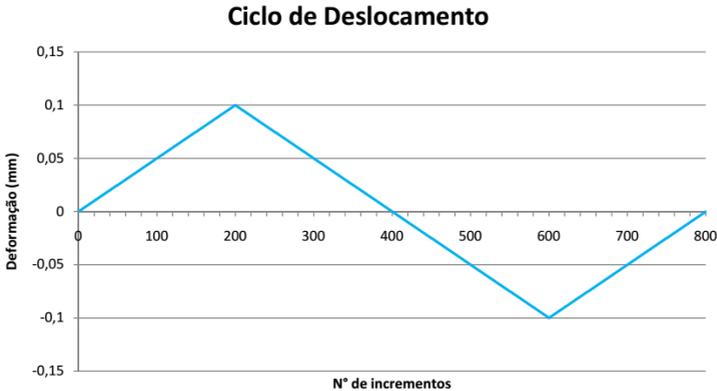


Figura 5.3: Ciclo representativo de deslocamento controlado.

Para o ciclo de controle de deslocamento, se constata o mesmo limiar de escoamento (assimétrico em tensão e compressão) considerando o caso de encruamento nulo, assim como a expansão isotrópica deste limite mediante uma lei de encruamento linear. Observou-se também a existência de deformação máxima e mínima, característica do processo de deformação controlada.

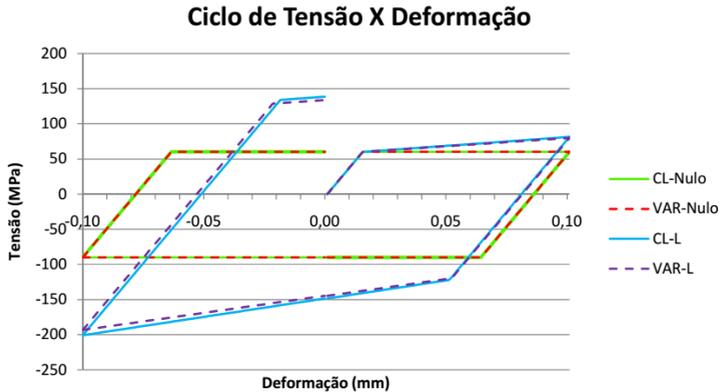


Figura 5.4: Ciclo comparativo dos modelos clássico (CL) e variacional (VAR) de Drucker-Prager considerando encruamento nulo e linear (L).

5.1.3 Exemplo 3 - Cisalhamento

Neste exemplo, é apresentado o teste de cisalhamento puro com os seguintes objetivos:

- observar o encruamento aparente causado pelo aumento da pressão (tensão hidrostática);
- verificar a influência da aplicação de um modelo não associativo na determinação da tensão hidrostática;
- verificar a influência de $\theta = 0$ considerando o número de passos utilizados.

A geometria utilizada no teste foi um bloco cúbico de dimensão $a = 2$ mm, composta por apenas um elemento finito do tipo hexaedro, de oito nós e com oito pontos de integração. As condições de contorno são impostas na face superior e inferior do corpo de modo a impedir o movimento vertical, e na face superior é imposto um deslocamento lateral controlado de 0,2 mm, de modo a provocar o cisalhamento em apenas uma direção. Este deslocamento é aplicado ao longo de 200 passos.

Os modelos de Drucker-Prager foram tratados primeiramente como associativos (A) e, posteriormente como não-associativos (NA). A análise dos modelos clássico e variacional foi realizada considerando o encruamento nulo. A Fig.(5.5) apresenta o gráfico de tensão cisalhante *versus* deformação para ambos os modelos.

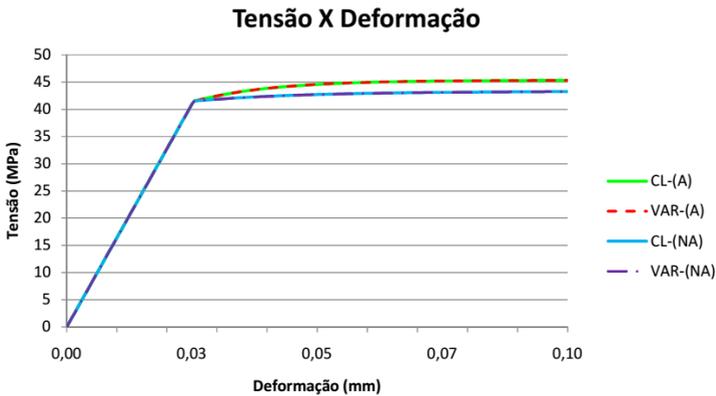


Figura 5.5: Comparação entre os modelos clássico (CL) e variacional (VAR) de Drucker-Prager, associativos (A) e não-associativos (NA), para tensão cisalhante na direção do deslocamento considerando encruamento linear.

Observa-se que o comportamento das curvas, tanto do modelo clássico como do modelo variacional associativos, apresentam um encruamento aparente. Esse encruamento aparente é devido ao aumento da pressão de compressão e à existência da deformação plástica volumétrica que modifica o estado do material ao longo do eixo do cone. Quando a pressão de compressão aumenta, o limite de escoamento também aumenta sem que haja modificação da superfície de escoamento e vice-versa, como apresenta a Fig.(5.6).

A pressão pode ser reduzida com a aplicação do modelo não associativo, que provoca uma redução da magnitude da tensão hidrostática, conforme a Fig.(5.7).

O ângulo de dilatância considerado neste exemplo, corresponde a 30% do ângulo de atrito. O ângulo de dilatância é responsável por determinar a direção de fluxo plástico e assim a magnitude da tensão hidrostática que será reduzida pela aplicação do modelo não-associativo.

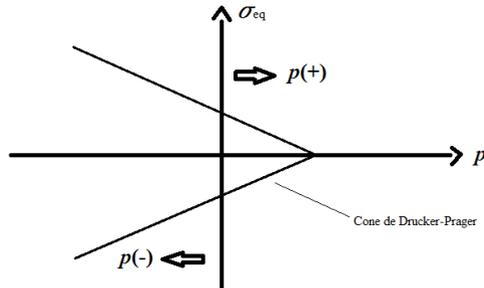


Figura 5.6: Demonstração do comportamento da tensão hidrostática ao longo do cone de Drucker-Prager.

De modo a eliminar a inconsistência na obtenção da tensão hidrostática, quando aplicado o modelo não-associativo, considera-se que $\theta = 0$. Como essa consideração promove um atraso na dependência do pseudo-potencial, é necessário avaliar o comportamento da curva tensão *versus* deformação considerando diferentes incrementos de deformação e verificar se os resultados são semelhantes. Se forem aplicados muitos passos de deformação (por exemplo, 200 passos), a diferença entre o intervalo n (que corresponde a $\theta = 0$) e $n + 1$ (que corresponde a $\theta = 1$) será menor se comparado ao caso em que considera poucos passos de deformação (por exemplo, 10 passos). A Fig.(5.8) apresenta o gráfico para o modelo variacional não-associativo, considerando o mesmo caso de cisalhamento e encruamento nulo, comparando os resultados obtidos com 10 passos e 200 passos de deformação.

Observa-se no gráfico que o comportamento das curvas tensão *versus* deformação, considerando diferentes incrementos de deformação, é semelhante e neste caso este parâmetro não teve influência significativa no resultado. A utilização de um número maior de passos tem o objetivo de tornar a curva de tensão *versus* deformação mais suave e melhor representativa da evolução das tensões com a deformação.

5.1.4 Exemplo 4 - Procedimento de retorno ao vértice do cone

Neste exemplo, é apresentado o teste para retorno ao vértice do cone. O objetivo do teste é demonstrar que para um caso de deformação volumétrica

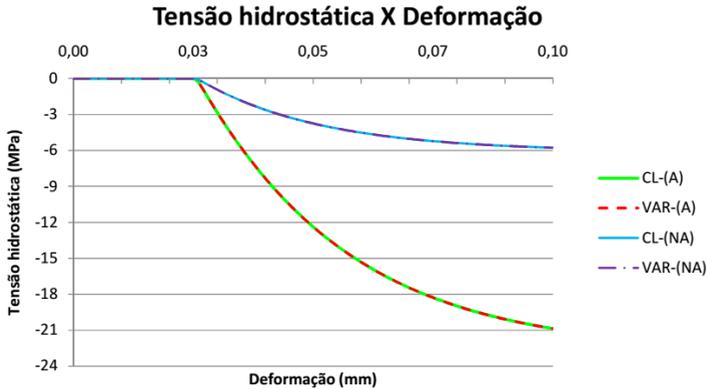


Figura 5.7: Evolução da tensão hidrostática nos modelos clássico (CL) e variacional (VAR) de Drucker-Prager, considerando associatividade (A) e não associatividade (NA).

pura, as tensões principais são iguais.

A geometria considerada foi um bloco cúbico de dimensão $a = 4$ mm. As condições de contorno são impostas de modo promover uma dilatação nas faces do cubo, onde é imposto um deslocamento controlado de 0,2 mm que é aplicado ao longo de 200 passos. O procedimento foi realizado considerando apenas 1/8 da geometria, composta por apenas um elemento do tipo hexaedro, de oito nós e com oito pontos de integração. A Fig.(5.9) ilustra a situação onde o cubo interno sofre uma deformação volumétrica pela aplicação de forças externas capazes de produzir uma dilatação no corpo.

Neste caso, considera-se o modelo variacional de Drucker-Prager associativo e aplica-se a lei de encruamento linear com $h = 100$ e $m = 1$. A Fig.(5.10) apresenta o gráfico de tensão *versus* deformação considerando as tensões principais.

Observa-se que o comportamento da curva tensão *versus* deformação que representa o retorno ao vértice do cone, considerando encruamento linear, apresenta as mesmas características do que uma curva de retorno à superfície suave do cone para o mesmo caso de encruamento. Comprova-se pela análise do gráfico que as tensões principais são iguais, ou seja, convergem para um mesmo ponto, o vértice do cone. Neste caso, as tensões cisalhantes são nulas.

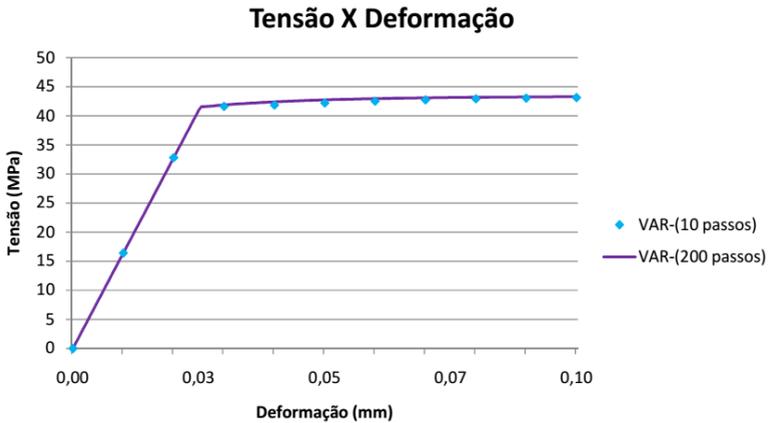


Figura 5.8: Comparação entre os resultados obtidos para 10 passos e 200 passos de deformação usando o modelo variacional de Drucker-Prager não-associativo.

5.1.5 Exemplo 5 - Modelo tridimensional com entalhe

Neste exemplo, é apresentado um teste de tração que foi realizado para uma geometria tridimensional de vários elementos de modo a:

- verificar se os campos de tensão e deformação para os modelos clássico e variacional de Drucker-Prager são semelhantes;
- assegurar que os maiores níveis de tensão e deformação total estejam concentrados na região do entalhe;
- verificar a capacidade de solução da implementação numérica para uma geometria tridimensional com vários elementos.

A geometria utilizada no teste foi um corpo de prova retangular com entalhe. O entalhe é introduzido com o objetivo de promover uma descontinuidade no "fluxo de forças", o que aumenta os níveis de tensão localmente. O procedimento foi realizado considerando apenas 1/8 da geometria, composta por elementos do tipo hexaedro de oito nós e com oito pontos de integração. As condições de contorno são impostas num plano normal ao eixo z (metade da espessura) e no plano normal ao eixo x , cortando o centro da

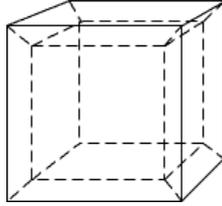


Figura 5.9: Ilustração da deformação volumétrica pura num cubo.

placa de forma a impedir o deslocamento vertical. Na face superior é imposto um deslocamento controlado de 0,3 mm, que é aplicado ao longo de 200 passos. Os dados da implementação foram importados para o programa GID 10.0.5 (versão livre) para a visualização dos resultados. As características da geometria em estudo e a malha são apresentadas na Fig.(5.11).

Ambos os modelos de Drucker-Prager foram considerados associativos e analisados para a situação de encruamento não linear. O coeficiente de encruamento nominal e o expoente de encruamento são $h = 100$ e $m = 2$, respectivamente. As Figs.(5.12) e (5.13) apresentam a comparação dos campos de tensão σ_{yy} e de deformação total ϵ_{yy} (na direção do deslocamento) para os modelos clássico e variacional.

Os campos de tensão obtidos são semelhantes, assim como os campos de deformação total, o que comprova novamente a equivalência entre os modelos. Pode-se observar que os maiores níveis de tensão e de deformação total se apresentam na região do entalhe, que é um típico concentrador de tensões. Em se tratando de uma geometria com vários elementos, a implementação numérica foi consistente proporcionando os resultados esperados em termos qualitativos.

5.1.6 Exemplo 6 - Modelo axissimétrico com entalhe

Neste exemplo são apresentados os testes de tração e compressão para uma geometria axissimétrica visando:

- comparar os campos de tensão, deformação plástica e deformação plástica equivalente para tração e compressão;
- assegurar que os maiores níveis de tensão, deformação plástica e deformação plástica equivalente estejam concentrados na região do entalhe;

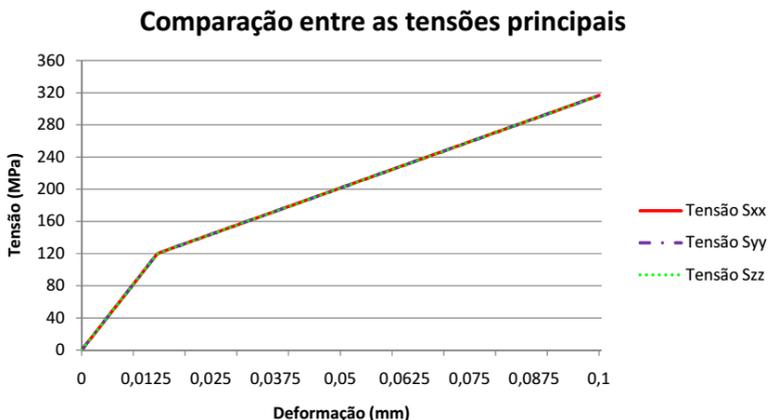


Figura 5.10: Comparação das tensões principais no procedimento de retorno ao vértice do cone.

- verificar a capacidade de solução da implementação numérica para um caso axissimétrico com vários elementos.

A geometria utilizada no teste foi um corpo de prova cilíndrico com entalhe. Devido à sua simetria axial, analisa-se apenas 1/4 da geometria que é composta por elementos bilineares de quatro nós e com quatro pontos de integração. As condições de contorno são impostas com o intuito de impedir o deslocamento vertical nas linhas de simetria. Na parte superior foi imposto um deslocamento controlado de 0,3 mm, tanto para o caso de tração (deslocamento positivo) quanto para o caso de compressão (deslocamento negativo). Esse deslocamento é aplicado de forma linear e crescente ao longo de 200 passos. Os dados da implementação foram importados para o programa GID 10.0.5 (versão livre) para a visualização dos resultados. As características da geometria em estudo e a malha são apresentadas na Fig. (5.14).

O modelo de Drucker-Prager foi tratado como associativo e analisado para encruamento linear. O coeficiente de encruamento nominal e o expoente de encruamento são $h = 100$ e $m = 1$, respectivamente. As Figs.(5.15), (5.16) e (5.17) apresentam a comparação dos campos de tensão σ_{yy} , de deformação plástica ε_{yy} (na direção do deslocamento) e de deformação plástica equivalente (escalar) para os testes de tração e compressão.

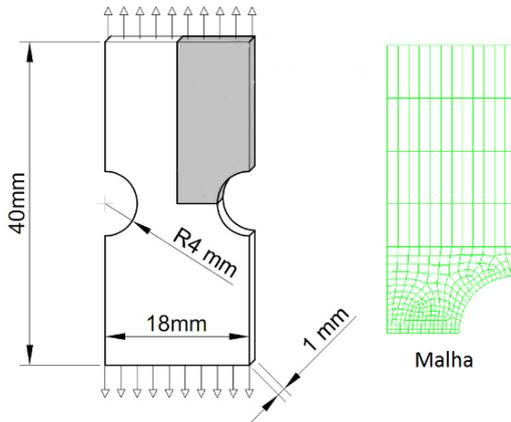


Figura 5.11: Dimensões do corpo de prova tridimensional e malha considerada nos testes.

Comparando os campos de tensão para ambos os casos de carga, torna-se evidente uma plastificação maior para o caso trativo, sendo que no caso da compressão a região de deformação plástica fica restrita à vizinhança do entalhe. Assim, pode-se afirmar que a implementação numérica foi consistente fornecendo resultados qualitativamente esperados.

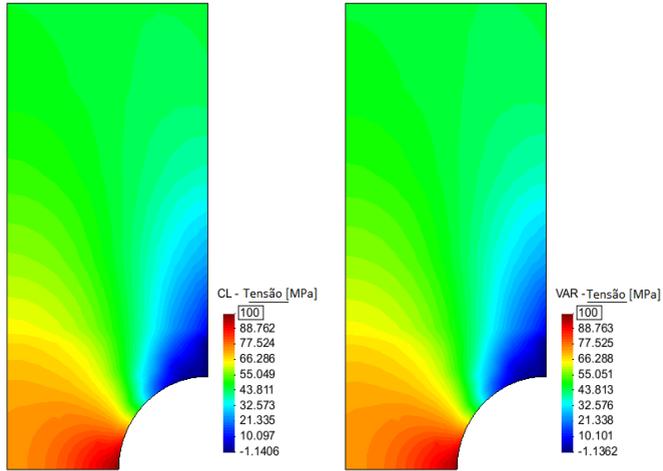


Figura 5.12: Comparação dos campos de tensão σ_{yy} entre os modelos clássico (CL) e variacional (VAR) de Drucker-Prager, considerando encruamento não linear.

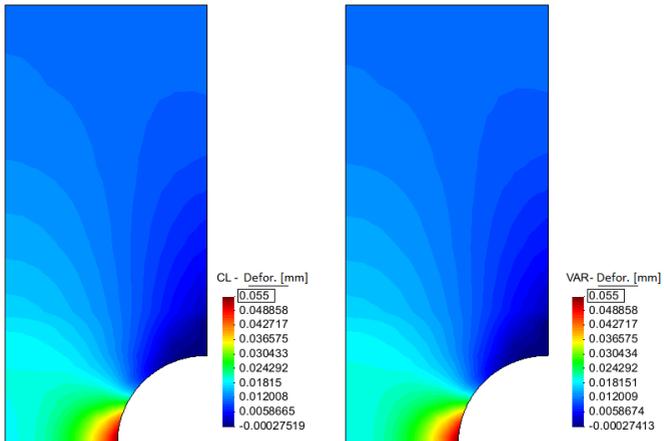


Figura 5.13: Comparação dos campos de deformação total ϵ_{yy} entre os modelos clássico (CL) e variacional (VAR) de Drucker-Prager, considerando encruamento não linear.

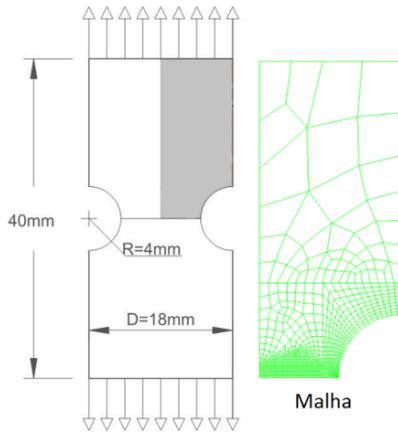


Figura 5.14: Vista em corte de um cilindro de revolução e malha considerada nos testes.

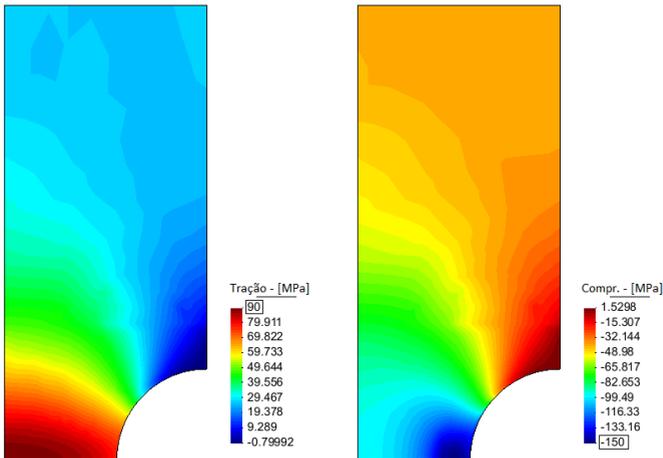


Figura 5.15: Campos de tensão σ_{yy} , trativo e compressivo, para o modelo variacional de Drucker-Prager considerando encruamento linear.

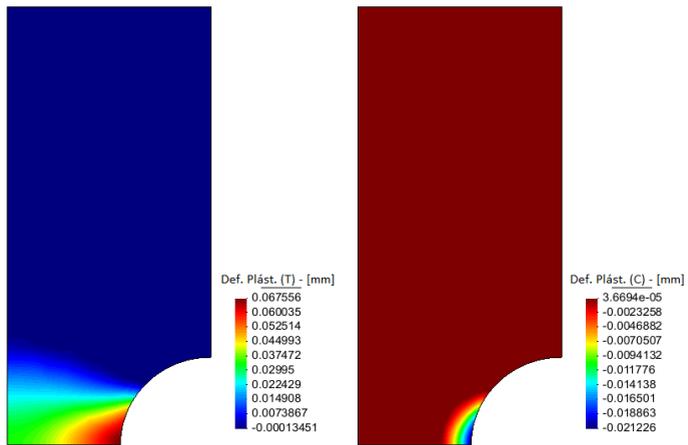


Figura 5.16: Campos de deformação plástica ε_{yy} , trativo (T) e compressivo (C), para o modelo variacional de Drucker-Prager considerando encruamento linear.

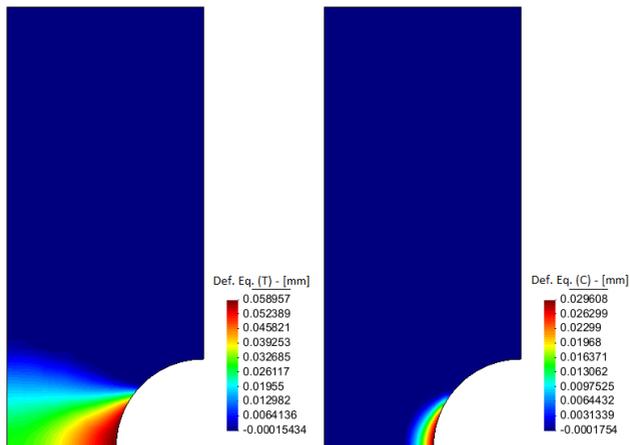


Figura 5.17: Campos de deformação plástica equivalente, trativo (T) e compressivo (C), para o modelo variacional de Drucker-Prager considerando encruamento linear.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 Conclusões

Neste trabalho, foi apresentado o estudo do modelo de elastoelasticidade de Drucker-Prager associativo e não associativo seguindo duas abordagens distintas. A abordagem clássica teve como base teórica o texto apresentado em Souza Neto, Perić e Owen (2008) e a implementação numérica foi realizada através de algoritmos do tipo preditor-corretor. O estudo, avaliação e implementação da abordagem variacional de Drucker-Prager, para este caso, foi realizado a partir do conteúdo de Stainier (2011). Nesse processo, foram executadas modificações no que diz respeito à dependência da deformação elástica no pseudo-potencial de deformação. O tratamento dado ao processo de integração numérica, em particular para os casos de fluxo não-associativo, foi satisfatório embora aponte para necessidade de estudos ulteriores. Também foi realizada a correção e a finalização de aspectos operacionais como a dedução da expressão analítica da matriz tangente, sendo a mesma implementada e testada em comparação com o modelo clássico. Uma das vantagens em se utilizar a formulação variacional é a garantia de operadores tangentes simétricos. Após a implementação dos modelos, foram realizados testes numéricos que permitiram a análise comparativa de resultados entre ambas as abordagens. A partir da análise dos resultados obtidos neste trabalho, é possível inferir as seguintes conclusões:

- No exemplo 1, a análise das curvas de tensão *versus* deformação apontaram o bom funcionamento da implementação numérica dos modelos para os limites de tração ($f_t = 60$ MPa) e compressão ($f_c = 90$ MPa). É possível observar a equivalência dos modelos clássico e variacional. Ambos modelos possuem o mesmo valor de tensão limite de escoamento, imposto para tração e compressão, assim como reproduzem um comportamento linear/não linear do encruamento, como esperado.
- No exemplo 2, para o ciclo de controle de deslocamento, se constata o mesmo limiar de escoamento (assimétrico em tensão e compressão) assim como a expansão isotrópica deste limite mediante uma lei linear. Observou-se também a existência de deformação máxima e mínima, característica do processo de deformação controlada.
- No exemplo 3, considerando cisalhamento, observou-se que o comportamento das curvas tanto do modelo clássico como do modelo va-

riacional associativos apresentam um encruamento aparente. Esse encruamento aparente é devido ao aumento da pressão de compressão e à existência da deformação plástica volumétrica que desloca o estado do material ao longo do eixo do cone. Quando a pressão de compressão aumenta, o limite de escoamento também aumenta sem que haja modificação da superfície de escoamento e vice-versa. A pressão pode ser reduzida com a aplicação do modelo não associativo, que provoca uma redução da magnitude da tensão hidrostática. Para eliminar a inconsistência na obtenção da tensão hidrostática num modelo não-associativo utiliza-se o parâmetro algorítmico $\theta = 0$, que promove um atraso na dependência do pseudo-potencial. Assim, observou-se que o comportamento das curvas tensão *versus* deformação, considerando diferentes incrementos de deformação, é semelhante.

- No exemplo 4, para o retorno ao vértice do cone, ocorre o aumento da tensão hidrostática devido a variação de volume do corpo, de modo que a tensão deviatória não apresenta mais efeito podendo ser desconsiderada. Uma das características do retorno ao vértice é que todas as tensões principais são iguais, sendo as tensões cisalhantes nulas.
- No exemplo 5, para o corpo de prova tridimensional, observou-se que o maior nível de tensão está localizado no entalhe da placa, como esperado. Assim como a tensão, a deformação total também apresenta maiores valores no entalhe. Em se tratando de uma geometria com vários elementos, a implementação numérica foi consistente proporcionando os resultados esperados em termos qualitativos.
- No exemplo 6, para o corpo de prova axissimétrico, os campos de deformação plástica equivalente obtidos no teste tornam evidente uma plastificação maior para o caso tratativo, sendo que a região de deformação plástica fica restrita à vizinhança do entalhe no caso de compressão. A implementação numérica foi consistente, proporcionando os resultados esperados.

Assim, conclui-se que os modelos implementados apresentam bons resultados tanto para geometrias simples de apenas um elemento como para geometrias mais complexas com um maior número de elementos. A implementação numérica mostrou-se consistente fornecendo resultados quantitativamente corretos (de fácil comprovação nos casos de um elemento) e qualitativamente esperados nos exemplos para o corpo de prova, sendo que nestes últimos há similaridade de resultados entre ambas as implementações.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Dentre os trabalhos a serem realizados, a partir dos resultados obtidos neste, citam-se os mais relevantes:

- Avaliação de alternativas de tratamento para a dependência do potencial de dissipação em relação à deformação volumétrica;
- Extensão do modelo e formulação variacional para caso de deformações finitas;
- Identificação de parâmetros para casos específicos a partir de dados experimentais.

REFERÊNCIAS

- ANAND, L.; AMES, N. M. On modeling the micro-indentation response of an amorphous polymer. *Elsevier - International Journal of Plasticity*, v. 22, p. 1123–1170, 2006.
- ANAND, L.; GURTIN, M. E. A theory of amorphous solids undergoing large deformations, with application to polymeric glasses. *Elsevier - International Journal of Solids and Structures*, v. 40, p. 1465–1487, 2003.
- BRASSART, L.; STAINIER, L. On convergence properties of variational constitutive updates for elasto-visco-plasticity. *Wiley-VCH*, v. 35, p. 26–42, 2012.
- BÖSTMAN, O. Absorbable implants for the fixation of fractures. *Journal of Bone and Joint Surgery*, v. 73, n. 1, p. 148–153, 1991.
- CANADIJA, M.; MOSLER, J. A variationally consistent approach for non-associative thermoplasticity at finite strain. In: *XI International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications - COMPLAS XI*. [S.l.: s.n.], 2011.
- CANEVAROLO JR., S. V. *Ciência dos polímeros: um texto básico para tecnólogos e engenheiros*. [S.l.]: Artliber Editora, 2002.
- DU BOIS, J. et al. Expanding the scope of C - H amination through catalyst design. *Journal of the American Chemical Society*, v. 126 (47), p. 15378–15379, 2004.
- FANCELLO, E.; PONTHOT, J. P.; STAINIER, L. A variational formulation of constitutive model e updates in non-linear finite viscoelasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, v. 65(11), p. 1831–1864, 2006.
- FANCELLO, E.; VASSOLER, J. M.; STAINIER, L. A variational constitutive update algorithm for a set of isotropic hyperelastic-viscoplastic material models. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 197, p. 4132–4148, 2008.
- GURTIN, M. E.; FRIED, E.; ANAND, L. *The mechanics and thermodynamics of continua*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- LEMAITRE, J. et al. *Mécanique des matériaux solides*. [S.l.]: Dunod, 2009.

- MALVERN, L. E. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., 1969.
- MOSLER, J.; BRUHNS, O. Towards variational constitutive updates for non-associative plasticity model at finite strain. *Int. J. Solid Struct.*, v. 46(7-8), p. 1676–1684, 2009.
- MOSLER, J.; ORTIZ, M. Variational h-adaption in finite deformation elasticity and plasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, v. 72(5), p. 505–523, 2007.
- ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. A variational cam-clay theory of plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 2645–2666, 2004.
- ORTIZ, M.; STAINIER, L. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates. *Comput Method Appl Meth Eng*, v. 171(3-4), p. 419–444, 1999.
- RADOVITZKY, R.; ORTIZ, M. Error estimation and adaptive meshing in strongly nonlinear dynamic problems. *Comput Method Appl Meth Eng*, v. 172(1-4), p. 203–240, 1999.
- RICHETON, J. et al. Modeling and validation of the large deformation inelastic response of amorphous polymers over a wide range of temperatures and strain rates. *Elsevier - International Journal of Solids and Structures*, v. 44, p. 7938–7954, 2007.
- SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. *Computational Inelasticity*. [S.l.]: Springer, 2000.
- SOUZA NETO, E. A. d.; PERIĆ, D.; OWEN, D. *Computational Methods for Plasticity - Theory and Applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- STAINIER, L. A variational constitutive model for pressure-dependent plasticity. *Relatório interno, Ecole Centrale de Nantes, France*, 2011.
- VASSOLER, J. M. *A Pressure Sensitive Constitutive Model Based on a Variational Framework for the Elasto-Viscoplastic Behavior and its Application to a Metallic Foam*. Tese (Doutorado) — Politecnico di Torino, Scuola di Dottorato, Ph.D. Course in Mechanics, Turin, Italy, 2009.
- WEINBERG, K.; MOTA, A.; ORTIZ, M. A variational constitutive model for porous metal plasticity. *Springer*, v. 37, p. 142–152, 2005.

-
- YANG, Q.; STAINIER, L.; ORTIZ, M. A variational formulation of the coupled thermo-mechanical boundary-value problem for general dissipative solids. *Elsevier*, v. 54, p. 401–424, 2005.

APÊNDICE A

A.1 Modelo de plasticidade associativo e não associativo

Um modelo de plasticidade é classificado como associativo se a função de escoamento é tomada como potencial de fluxo.

$$\Phi \equiv \Psi \quad (\text{A.1})$$

Sendo o modelo associativo, considera-se o ângulo de atrito:

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{f_c - f_t}{f_c + f_t} \right) \quad (\text{A.2})$$

onde, f_c é a tensão de compressão e f_t a tensão de tração.

Se o modelo for não associativo é utilizado o ângulo de dilatância (ψ). Nesse caso, o ângulo de dilatância é sempre menor do que o ângulo de atrito.

Através de f_t , f_c e ϕ pode-se determinar a coesão, que é uma espécie de resistência interna do material à deformação. A coesão nominal é obtida através da Eq.(A.3).

$$c_0 = \left(\frac{f_c f_t}{f_c - f_t} \right) \tan \phi \quad (\text{A.3})$$

Por ser uma aproximação do modelo de Mohr-Coulomb, o modelo de Drucker-Prager necessita de alguns critérios de adequação. Considerando carregamento ou deslocamento uniaxial, o critério é obtido definindo:

$$\eta = \frac{3 \sin \phi}{\sqrt{3}} \quad \xi = \frac{2 \cos \phi}{\sqrt{3}} \quad \bar{\eta} = \frac{3 \sin \psi}{\sqrt{3}} \quad (\text{A.4})$$

Outra aproximação utilizada é para a tensão plana, onde o cone de Drucker-Prager coincide com a superfície de Mohr-Coulomb em tração (f_{bt}) e em compressão (f_{bc}) biaxial.

$$\eta = \frac{3 \sin \phi}{2\sqrt{3}} \quad \xi = \frac{2 \cos \phi}{\sqrt{3}} \quad \bar{\eta} = \frac{3 \sin \psi}{2\sqrt{3}} \quad (\text{A.5})$$

A Fig.(A.1) representa esquematicamente as aproximações uniaxial e biaxial.

A Fig.(A.2) representa mais duas aproximações que são obtidas coincidindo as superfícies de escoamento dos critérios de Mohr-Coulomb

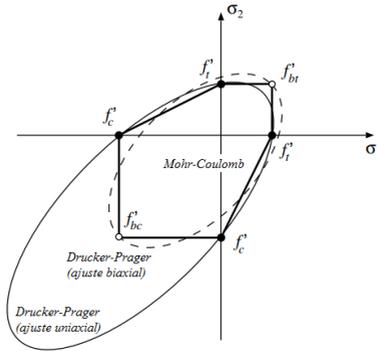


Figura A.1: Aproximação Drucker-Prager correspondente à superfície de Mohr-Coulomb em tração e compressão uniaxial (Adaptado de Souza Neto, Perić e Owen (2008))

e Drucker-Prager. Uma aproximação faz referência às arestas exteriores da superfície de Mohr-Coulomb

$$\eta = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad \xi = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad \bar{\eta} = \frac{6 \sin \psi}{\sqrt{3}(3 - \sin \psi)} \quad (\text{A.6})$$

e a outra às arestas interiores:

$$\eta = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad \xi = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad \bar{\eta} = \frac{6 \sin \psi}{\sqrt{3}(3 + \sin \psi)} \quad (\text{A.7})$$

A.2 Atualização da tensão deviatórica em termos de $\Delta\gamma$

Considerando a atualização da tensão deviatórica como

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^{tr} - 2G\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^e \quad (\text{A.8})$$

sendo que,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^e - \Delta\varepsilon_d \quad \Delta\varepsilon_d = \mathbf{N}_d \Delta\gamma \quad \mathbf{N}_d = \frac{1}{2\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}} \mathbf{s}^{tr} \quad (\text{A.9})$$

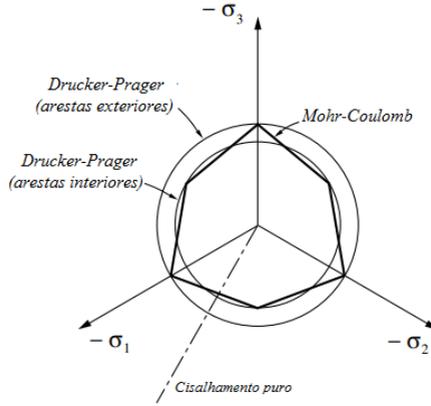


Figura A.2: Corte das superfícies de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager (Adaptado de Souza Neto, Perić e Owen (2008))

Temos uma nova representação:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}^{tr} - 2G\Delta\gamma \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}} \mathbf{s}^{tr} \right) = \left(1 - \frac{G\Delta\gamma}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}} \right) \mathbf{s}^{tr} \quad (\text{A.10})$$

Agora em termos de $\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1} &= 2G \left(1 - \frac{G\Delta\gamma}{\sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{s}^{tr} : \mathbf{s}^{tr}}} \right) \boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr} \\ &= 2G \left(1 - \frac{G\Delta\gamma}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[4G^2 (\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr})^2 \right]}} \right) \boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr} \\ &= 2G \left(1 - \frac{G\Delta\gamma}{G\sqrt{2 (\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr})^2}} \right) \boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr} \\ &= 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr}\|} \right) \boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A.3 Atualização do radical do invariante de tensão deviatórica

Iniciando pela tensão deviatórica:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left(1 - \frac{G\Delta\gamma}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}} \right) \mathbf{s}^{tr} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\mathbf{s}^{tr}} = 1 - \frac{G\Delta\gamma}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}} \quad (\text{A.13})$$

Multiplicando ambos os lados da Eq.(A.13) por $\left(\frac{1}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})}} \right)$, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})}} \right) \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\mathbf{s}^{tr}} &= \left(\frac{1}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})}} \right) \left(1 - \frac{G\Delta\gamma}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}} \right) \\ \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})}} \frac{1}{\mathbf{s}^{tr}} &= \frac{1}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})}} - \frac{G\Delta\gamma}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})}\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}} \\ \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})}} \frac{1}{\mathbf{s}^{tr}} &= \frac{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})} - G\Delta\gamma}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})}\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}} \end{aligned}$$

considerando que,

$$\frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})}} = \frac{\mathbf{s}^{tr}}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}}$$

A atualização $\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})}$ pode ser obtida como:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{s}^{tr}}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}} \frac{1}{\mathbf{s}^{tr}} &= \frac{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})} - G\Delta\gamma}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})}\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}} \\ \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})} &= \sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})} - G\Delta\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

A.4 Atualização da tensão hidrostática em termos de $\Delta\gamma$

Considerando a atualização da tensão hidrostática como:

$$\sigma_{m,n+1} = \sigma_m^{tr} - 3K\epsilon_{v,n+1}^e \quad (\text{A.15})$$

sendo que,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_v^{etr} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v^e \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v^e = \Delta \gamma N_v \quad N_v = \frac{\bar{\eta}}{3} \quad (\text{A.16})$$

Assim, temos uma nova representação, agora em função de $\Delta \gamma$:

$$\begin{aligned} \sigma_{m,n+1} &= \sigma_m^{tr} - 3K(\Delta \gamma N_v) \\ &= \sigma_m^{tr} - 3K \left(\frac{\bar{\eta}}{3} \Delta \gamma \right) \\ &= \sigma_m^{tr} - K \bar{\eta} \Delta \gamma \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A.5 Condição de consistência para o retorno ao vértice

Sabe-se que a parte deviatórica da condição de consistência para o retorno ao vértice do cone é considerada nula.

$$\Phi_{n+1} = \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})} + \eta \sigma_{m,n+1} - \xi c(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) \quad \sqrt{J_2(\mathbf{s}_{n+1})} = 0 \quad (\text{A.18})$$

Assim, pode-se escrever a condição de consistência para o retorno ao vértice como:

$$\Phi_{n+1} = \eta \sigma_{m,n+1} - \xi c(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) = 0 \quad (\text{A.19})$$

Dividindo ambos os lados da Eq.(A.19) por η , temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} (\eta \sigma_{m,n+1} - \xi c(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p)) &= 0 \\ \sigma_{m,n+1} - \beta c(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) &= 0 \\ \sigma_m^{tr} - K \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v^p - c(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \beta &= 0 \quad \beta = \frac{\xi}{\eta} \end{aligned}$$

Sendo o incremento da deformação plástica acumulada

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \xi \dot{\gamma} \quad \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \xi \int_t \dot{\gamma} dt \quad \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \xi \Delta \gamma \quad (\text{A.20})$$

e a taxa de deformação plástica volumétrica para modelo não associativo,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p = \dot{\gamma} \bar{\boldsymbol{\eta}} \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v^p = \bar{\boldsymbol{\eta}} \int_t \dot{\gamma} dt \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v^p = \bar{\boldsymbol{\eta}} \Delta \gamma \quad (\text{A.21})$$

Combinando as Eqs.(A.20) e (A.21):

$$\frac{\Delta \bar{\epsilon}^p}{\xi} = \frac{\Delta \epsilon_v^p}{\bar{\eta}} \Rightarrow \Delta \bar{\epsilon}^p = \frac{\xi}{\bar{\eta}} \Delta \epsilon_v^p \Rightarrow \Delta \bar{\epsilon}^p = \alpha \Delta \epsilon_v^p \quad \alpha = \frac{\xi}{\bar{\eta}}$$

Dessa forma, a condição de consistência para o retorno ao vértice do cone é dada por:

$$r(\Delta \epsilon_v^p) = c(\bar{\epsilon}_n^p + \alpha \Delta \epsilon_v^p) \beta - \sigma_m^{tr} + K \Delta \epsilon_v^p \quad (\text{A.22})$$

A.6 Módulo tangente elástico

O módulo tangente elástico é dado pela seguinte derivada:

$$\mathbf{C}^e = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} \quad (\text{A.23})$$

onde a tensão atualizada é dada por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1} + \sigma_{m,n+1} \mathbf{I} \\ \mathbf{s}_{n+1} &= 2G \boldsymbol{\epsilon}_{d,n+1}^e \quad \sigma_{m,n+1} = 3K \boldsymbol{\epsilon}_{v,n+1}^e \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Considerando a decomposição da Eq.(A.24), a derivada pode ser admitida como:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} + \frac{\partial \sigma_{m,n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} \mathbf{I} \quad (\text{A.25})$$

Onde a parte deviatórica é deduzida do seguinte modo:

$$\frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} = \frac{\partial 2G \boldsymbol{\epsilon}_{d,n+1}^e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{d,n+1}^e} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{d,n+1}^e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} \quad \boldsymbol{\epsilon}_{d,n+1}^e = \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} \quad (\text{A.26})$$

A derivada $\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{d,n+1}^e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}}$, em forma indicial, é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\boldsymbol{\epsilon}_{d,n+1}^e \right)_{ij}}{\partial \left(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \right)_{kl}} &= \frac{\partial \left(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \right)_{ij}}{\partial \left(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \right)_{kl}} - \frac{1}{3} \mathbf{I}_{rs} \left(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \right)_{rs} \mathbf{I}_{ij} \\ &= \mathbf{I}_{ik} \mathbf{I}_{jl} - \frac{1}{3} \mathbf{I}_{ij} \mathbf{I}_{kl} \end{aligned}$$

Podemos então definir,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \mathbf{II} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} = \mathbf{l}_d$$

e obter a parte deviatórica da Eq.(A.25),

$$\frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = 2G \mathbf{l}_d \quad (\text{A.27})$$

A parte hidrostática da Eq.(A.25) pode ser deduzida como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{m,n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} &= \frac{\partial 3K \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^e} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^e &= \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) = \frac{1}{3} \mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \end{aligned}$$

A derivada $\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}$ pode ser obtida como segue:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{1}{3} \mathbf{I} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{1}{3} \mathbf{I}$$

Portanto, a parte hidrostática da derivada de tensão é dada por:

$$\frac{\partial \sigma_{m,n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = K \mathbf{I} \quad (\text{A.28})$$

Substituindo as Eq.(A.27) e (A.28) na Eq.(A.23), obtemos o módulo tangente elástico, também chamado de tensor de 4ª ordem de Hooke.

$$\mathbf{C}^e = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = 2G \mathbf{l}_d + K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{A.29})$$

A.7 Módulo tangente elastoplástico para superfície suave do cone

A.7.1 Diferencial da tensão deviatórica

O diferencial de tensão deviatórica é obtido através da Eq.(A.11), que na sua forma indicial é apresentada como:

$$s_{ij} = 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr}\|} \right) \boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr}$$

$$ds_{ij} = \underbrace{\frac{ds_{ij}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr}} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr}}_{(1)} + \underbrace{\frac{ds_{ij}}{d\Delta\gamma} d\Delta\gamma}_{(2)} \quad (\text{A.30})$$

Desenvolvendo (1), em duas etapas:

$$\begin{aligned} (1.1) &= \left[2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr}\|} \right) \right] \frac{d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr}} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} \\ &= \left[2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr}\|} \right) \right] \frac{(\mathbf{I}_{ik}\mathbf{I}_{jl} + \mathbf{I}_{il}\mathbf{I}_{jk})}{2} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} \\ &= \left[2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr}\|} \right) \right] \frac{(d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr} + d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ji}^{etr})}{2} \\ &= \left[2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr}\|} \right) \right] d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr} \\ (1.2) &= \frac{2G\Delta\gamma}{\sqrt{2}} \frac{\partial (\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr} : \boldsymbol{\epsilon}_d^{etr})^{-\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr}} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} \boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr} \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2} \frac{2G\Delta\gamma}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr} : \boldsymbol{\epsilon}_d^{etr})^{-\frac{3}{2}}}_{(1.2A)} \underbrace{\frac{\partial (\boldsymbol{\epsilon}_{d,rs}^{etr} : \boldsymbol{\epsilon}_{d,rs}^{etr})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr}}}_{(1.2B)} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} \boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr} \end{aligned}$$

onde,

$$(1.2A) = -\frac{G\Delta\gamma}{\sqrt{2}} \frac{1}{\|\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr}\| \|\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr}\| \|\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr}\|}$$

e

$$\begin{aligned} (1.2B) &= \frac{\partial \left(d\boldsymbol{\epsilon}_{d,rs}^{etr} : d\boldsymbol{\epsilon}_{d,rs}^{etr} \right)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr}} \left[d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} \boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr} \right] \\ &= 2 \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{d,rs}^{etr}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr}} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,rs}^{etr} \left[d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} \boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr} \right] \\ &= 2 \left(\frac{\mathbf{I}_{rk}\mathbf{I}_{sl} + \mathbf{I}_{rl}\mathbf{I}_{sk}}{2} \right) d\boldsymbol{\epsilon}_{d,rs}^{etr} \left[d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} \boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr} \right] \\ &= 2 \left(\frac{\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} + \boldsymbol{\epsilon}_{d,lk}^{etr}}{2} \right) d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} \boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr} \\ &= 2\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} \boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr} \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} (1.2) &= -\frac{G\Delta\gamma}{\sqrt{2}} \frac{1}{\|\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr}\| \|\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr}\| \|\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr}\|} \left(2\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} \boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr} \right) \\ &= -\frac{2G}{\sqrt{2}} \frac{\Delta\gamma}{\|\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr}\|} \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr}}{\|\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr}\|} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr}}{\|\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr}\|} \\ &= -2G \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr}\|} \mathbf{D}_{ij} \mathbf{D}_{kl} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} \quad \mathbf{D}_{ij} = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr}}{\|\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr}\|} \end{aligned}$$

Assim, (1) é definido como:

$$\frac{ds_{ij}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr}} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} = \begin{bmatrix} 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr}\|} \right) d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr} \\ -2G \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr}\|} \mathbf{D}_{ij} \mathbf{D}_{kl} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,kl}^{etr} \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

Desenvolvendo (2) de uma maneira simples, obtemos:

$$\frac{ds_{ij}}{d\Delta\gamma} d\Delta\gamma = -\frac{2G\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{etr}}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\epsilon}_d^{etr}\|} d\Delta\gamma = -\frac{2G}{\sqrt{2}} \mathbf{D}_{ij} d\Delta\gamma \quad (\text{A.32})$$

Juntando as partes (1) e (2),

$$ds_{ij} = \begin{bmatrix} 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{d,ij}^{etr}\|} \right) d\boldsymbol{\varepsilon}_{d,ij}^{etr} - \frac{2G}{\sqrt{2}} \mathbf{D}_{ij} d\Delta\gamma \\ -2G \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr}\|} \mathbf{D}_{ij} \mathbf{D}_{kl} d\boldsymbol{\varepsilon}_{d,kl}^{etr} \end{bmatrix}$$

Pode-se considerar que,

$$\mathbf{D}_{ij} \mathbf{D}_{kl} = (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D})_{ijkl}$$

e assim determinar $d\mathbf{s}$:

$$d\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr}\|} \right) d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr} - \frac{2G}{\sqrt{2}} \mathbf{D} d\Delta\gamma \\ -2G \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr}\|} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{etr} \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

A.7.2 Diferencial da tensão hidrostática

Sabe-se que a atualização da tensão hidrostática é dada por:

$$\sigma_{m,n+1} = 3K \left(\varepsilon_v^{etr} - \frac{\bar{\eta}}{3} \Delta\gamma \right) \quad (\text{A.34})$$

Aplicando o diferencial de uma forma direta, temos:

$$\begin{aligned} d\sigma_{m,n+1} &= \frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\varepsilon_{v,n+1}^e} d\varepsilon_v^{etr} + \frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\Delta\gamma} d\Delta\gamma \\ &= 3K d\varepsilon_v^{etr} - K\bar{\eta} d\Delta\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

A.7.3 Diferencial do multiplicador plástico

Pode-se observar que tanto o diferencial da tensão deviatórica quanto o diferencial da tensão hidrostática possuem em comum o diferencial do multiplicador plástico, que necessita ser determinado. Partindo da condição de consistência,

$$\tilde{\Phi}(\Delta\gamma) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})} - G\Delta\gamma + \eta(\sigma_m^{tr} - K\bar{\eta}\Delta\gamma) - \xi c(\bar{\varepsilon}_n^p + \xi\Delta\gamma) \quad (\text{A.36})$$

considera-se o diferencial:

$$d\check{\Phi} = \underbrace{\frac{d\check{\Phi}}{d\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr}} d\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr}}_{(1)} + \underbrace{\frac{d\check{\Phi}}{d\boldsymbol{\epsilon}_v^{e\,tr}} d\boldsymbol{\epsilon}_v^{e\,tr}}_{(2)} + \underbrace{\frac{d\check{\Phi}}{d\Delta\gamma} d\Delta\gamma}_{(3)} \quad (\text{A.37})$$

Desenvolvendo (1) na forma indicial,

$$\begin{aligned} \frac{d\check{\Phi}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr}} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr} &= \frac{d\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr}} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr} \\ &= \frac{1}{2} (J_2(\mathbf{s}^{tr}))^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial J_2(\mathbf{s}^{tr})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})}} \frac{\partial J_2(\mathbf{s}^{tr})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr}} \end{aligned}$$

onde,

$$\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{tr})} = \sqrt{2G} \|\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr}\| = \frac{1}{2} \mathbf{s}^{tr} : \mathbf{s}^{tr} \quad \mathbf{s}^{tr} = 2G \boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr}$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\check{\Phi}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr}} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr} &= \frac{1}{2\sqrt{2G} \|\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr}\|} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial (2G\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr} : 2G\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr}} \right) d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2G} \|\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr}\|} \left(4G^2 \boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr} \right) d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr} \\ &= \frac{2G}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr}\|} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr} \\ &= \sqrt{2G} D_{ij} d\boldsymbol{\epsilon}_{d,ij}^{e\,tr} \end{aligned}$$

E portanto,

$$\frac{d\check{\Phi}}{d\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr}} d\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr} = \sqrt{2G} \mathbf{D} d\boldsymbol{\epsilon}_d^{e\,tr} \quad (\text{A.38})$$

De uma forma simples, desenvolvendo (2)

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{\Phi}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}} d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr} &= \eta \frac{d\boldsymbol{\sigma}_m^{tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}} d\boldsymbol{\varepsilon}_v^e \\
 &= \eta \frac{d(K\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr})}{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}} d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr} \\
 &= \eta \frac{d(K\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr})}{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}} d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr} \\
 &= K\eta d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}
 \end{aligned} \tag{A.39}$$

e (3)

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{\Phi}}{d\Delta\gamma} d\Delta\gamma &= \frac{d(-G\Delta\gamma - K\eta\bar{\eta}\Delta\gamma - c\xi)}{d\Delta\gamma} d\Delta\gamma \\
 &= -(G + K\eta\bar{\eta} + \xi^2 H) d\Delta\gamma
 \end{aligned} \tag{A.40}$$

Juntando os termos, o diferencial da condição de consistência é dado por:

$$d\tilde{\Phi} = \sqrt{2}G\mathbf{D}_{ij} d\boldsymbol{\varepsilon}_{d,ij}^{e\,tr} + K\eta d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr} - (G + K\eta\bar{\eta} + \xi^2 H) d\Delta\gamma \tag{A.41}$$

Igualando a expressão a zero $d\tilde{\Phi} = 0$ e isolando $d\Delta\gamma$, temos:

$$d\Delta\gamma = \frac{1}{G + K\eta\bar{\eta} + \xi^2 H} \left(\sqrt{2}G\mathbf{D}_{ij} d\boldsymbol{\varepsilon}_{d,ij}^{e\,tr} + K\eta d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr} \right)$$

Dessa forma,

$$d\Delta\gamma = A \left(\sqrt{2}G\mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr} + K\eta d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr} \right) \quad A = \frac{1}{G + K\eta\bar{\eta} + \xi^2 H} \tag{A.42}$$

A.7.4 O módulo tangente elastoplástico

A derivada que fornece o módulo tangente elastoplástico é dada por:

$$\mathbf{D}^{ep} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \underbrace{\frac{d\boldsymbol{s}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}}}_{(A)} + \mathbf{I} \otimes \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\sigma}_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}}}_{(B)} \tag{A.43}$$

Desenvolvendo (A),

$$\frac{d\mathbf{s}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} = \underbrace{\frac{d\mathbf{s}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}}}_{(A1)} + \underbrace{\frac{d\mathbf{s}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}}}_{(A2)} \quad (\text{A.44})$$

em sua parte (A1)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{s}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} &= \left[\begin{array}{c} 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}\|} \right) \\ + 2G \left(\frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}\|} - AG \right) (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \end{array} \right] \mathbf{l}_d \\ &= \left[\begin{array}{c} 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}\|} \right) \mathbf{l}_d \\ + 2G \left(\frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}\|} - AG \right) (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) : \mathbf{l}_d \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c} 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}\|} \right) \mathbf{l}_d \\ + 2G \left(\frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}\|} - AG \right) (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \end{array} \right] \end{aligned}$$

e (A2),

$$\frac{d\mathbf{s}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} = -\sqrt{2}GAK\eta \mathbf{D} \otimes \mathbf{I}$$

Então, (A) resulta em:

$$\frac{d\mathbf{s}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} = \left[\begin{array}{c} 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}\|} \right) \mathbf{l}_d - \sqrt{2}GAK\eta \mathbf{D} \otimes \mathbf{I} \\ + 2G \left(\frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}\|} - AG \right) (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \end{array} \right] \quad (\text{A.45})$$

Agora desenvolvendo (B),

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} = \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\sigma}_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}}}_{(B1)} + \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\sigma}_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}}}_{(B2)} \quad (\text{A.46})$$

em sua parte (B1),

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} &= -\sqrt{2}K\bar{\eta}AG\mathbf{D} \otimes \mathbf{l}_d & \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} &= \mathbf{l}_d \\ &= -\sqrt{2}K\bar{\eta}AG\mathbf{D} & \mathbf{D} \otimes \mathbf{l}_d &= \mathbf{D} \end{aligned}$$

e (B2),

$$\frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} = K(1 - K\eta\bar{\eta}A)\mathbf{I} \quad \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} = \mathbf{I}$$

Então, o termo (B) resulta em:

$$\frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} = K(1 - K\eta\bar{\eta}A)\mathbf{I} - \sqrt{2}K\bar{\eta}AG\mathbf{D} \quad (\text{A.47})$$

Dessa forma, pode-se afirmar que o módulo tangente elastoplástico pode ser escrito como:

$$\mathbf{D}^{ep} = \left[\begin{array}{l} 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}\|} \right) \mathbf{l}_d + 2G \left(\frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}\|} - AG \right) (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \\ -\sqrt{2}GAK\eta\mathbf{D} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \left[K(1 - K\eta\bar{\eta}A)\mathbf{I} - \sqrt{2}K\bar{\eta}AG\mathbf{D} \right] \end{array} \right]$$

De um modo simplificado,

$$\mathbf{D}^{ep} = \left[\begin{array}{l} 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}\|} \right) \mathbf{l}_d + 2G \left(\frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\|\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,tr}\|} - AG \right) (\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}) \\ -\sqrt{2}GAK(\eta\mathbf{D} \otimes \mathbf{I} + \bar{\eta}\mathbf{I} \otimes \mathbf{D}) + K(1 - K\eta\bar{\eta}A)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{array} \right] \quad (\text{A.48})$$

A.8 Módulo tangente elastoplástico para retorno ao vértice

Da definição de módulo tangente e considerando que para retorno ao vértice a tensão deviatórica é nula, tem-se:

$$\mathbf{D}^{rv} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \mathbf{I} \otimes \frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} \quad (\text{A.49})$$

Sabe-se que a atualização da tensão hidrostática é dada por:

$$\sigma_{m,n+1} = \sigma_m^{tr} - K\Delta\varepsilon_v^p \quad \sigma_m^{tr} = K\varepsilon_v^{e\,tr}$$

Assim, o diferencial da tensão hidrostática é obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d\sigma_{m,n+1} &= \frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\varepsilon_v^{e\,tr}} d\varepsilon_v^{e\,tr} + \frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\Delta\varepsilon_v^p} d\Delta\varepsilon_v^p \\ &= K d\varepsilon_v^{e\,tr} - K d\Delta\varepsilon_v^p \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

O diferencial do incremento da deformação plástica volumétrica ($d\Delta\varepsilon_v^p$) pode ser determinado considerando a condição de consistência para retorno ao vértice,

$$\begin{aligned} r(\Delta\varepsilon_v^p) &= c(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)\beta - \sigma_{m,n+1} \\ &= c(\bar{\varepsilon}_n^p + \alpha\Delta\varepsilon_v^p)\beta - K\varepsilon_v^{e\,tr} + K\Delta\varepsilon_v^p \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

onde seu diferencial é representado por:

$$dr(\Delta\varepsilon_v^p) = \underbrace{\frac{dr(\Delta\varepsilon_v^p)}{d\varepsilon_v^{e\,tr}} d\varepsilon_v^{e\,tr}}_{(1)} + \underbrace{\frac{dr(\Delta\varepsilon_v^p)}{d\Delta\varepsilon_v^p} d\Delta\varepsilon_v^p}_{(2)} \quad (\text{A.52})$$

Desenvolvendo (1)

$$\frac{dr(\Delta\varepsilon_v^p)}{d\varepsilon_v^{e\,tr}} d\varepsilon_v^{e\,tr} = K d\varepsilon_v^{e\,tr}$$

e (2)

$$\frac{dr(\Delta\varepsilon_v^p)}{d\Delta\varepsilon_v^p} d\Delta\varepsilon_v^p = (\alpha\beta H + K) d\Delta\varepsilon_v^p$$

Juntando as partes,

$$dr(\Delta\varepsilon_v^p) = K d\varepsilon_v^{e\,tr} + (\alpha\beta H + K) d\Delta\varepsilon_v^p = 0 \quad (\text{A.53})$$

e pondo em evidência $d\Delta\varepsilon_v^p$, temos:

$$d\Delta\varepsilon_v^p = \frac{K}{(\alpha\beta H + K)} d\varepsilon_v^{e\,tr} \quad (\text{A.54})$$

Substituindo na Eq.(A.50), tem-se:

$$d\sigma_{m,n+1} = K d\varepsilon_v^{e\,tr} - K \left(\frac{K}{\alpha\beta H + K} \right) d\varepsilon_v^{e\,tr} \quad (\text{A.55})$$

Aplicando a derivada em relação a $\boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr}$

$$\frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr}} = \frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\varepsilon_v^{e\ tr}} \frac{d\varepsilon_v^{e\ tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr}}$$

obtem-se o módulo tangente elastoplástico para o retorno ao vértice do cone:

$$\mathbf{D}^{rv} = K \left(1 - \frac{K}{\alpha\beta H + K} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{A.56})$$

APÊNDICE B

B.1 Minimização do variacional em relação a \mathbf{M}

O seguinte problema variacional,

$$\min_{\mathbf{M}, \dot{p}} \left[\dot{W}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \right] \quad (\text{B.1})$$

define:

$$\mathbf{M} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \quad (\text{B.2})$$

Dado a energia livre e sua taxa,

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -\boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I}) \dot{p} \\ &= -(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}) \dot{p} - (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) \beta \dot{p} \end{aligned}$$

deriva-se a taxa de energia livre em relação a \mathbf{M}

$$\frac{\partial \dot{W}}{\partial \mathbf{M}} = -\dot{p} \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.4})$$

Aplica-se à derivada o lagrangeano,

$$\mathcal{L}(\mathbf{M}, \lambda_1, \lambda_2) = \dot{W}(\mathbf{M}) + \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 \quad (\text{B.5})$$

sujeito às seguintes restrições:

$$Z_1 = \text{tr}[\mathbf{M}] \quad (\text{B.6})$$

$$Z_2 = \mathbf{M} : \mathbf{M} - \frac{3}{2} \quad (\text{B.7})$$

Assim, o lagrangeano pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{M}, \lambda_1, \lambda_2) = \dot{W}(\mathbf{M}) + \lambda_1 \text{tr}[\mathbf{M}] + \lambda_2 \left(\mathbf{M} : \mathbf{M} - \frac{3}{2} \right) \quad (\text{B.8})$$

As derivadas do lagrangeano por λ_1 , λ_2 e por \mathbf{M} , são respectivamente,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = \text{tr}[\mathbf{M}] = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = \mathbf{M} : \mathbf{M} - \frac{3}{2} = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{M}} = \underbrace{\frac{\partial \dot{W}}{\partial \mathbf{M}}}_{(1)} + \lambda_1 \underbrace{\frac{\partial \text{tr}[\mathbf{M}]}{\partial \mathbf{M}}}_{(2)} + \lambda_2 \underbrace{\frac{\partial (\mathbf{M} : \mathbf{M} - \frac{3}{2})}{\partial \mathbf{M}}}_{(3)} = 0 \quad (\text{B.11})$$

Sendo as partes (1), (2) e (3)

$$(1) = -\dot{p}\boldsymbol{\sigma} \quad (2) = \frac{\partial (\mathbf{I} : \mathbf{M})}{\partial \mathbf{M}} = \mathbf{I} \quad (3) = \frac{\partial (\mathbf{M} : \mathbf{M})}{\partial \mathbf{M}} = 2\mathbf{M}$$

Assim a Eq.(B.11) torna-se,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{M}} = -\dot{p}\boldsymbol{\sigma} + \lambda_1 \mathbf{I} + \lambda_2 2\mathbf{M} = 0 \quad (\text{B.12})$$

Através do conjunto de derivadas, pode-se determinar as variáveis λ_1 e λ_2 .

Determinando λ_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{M}} : \mathbf{I} &= 0 \\ (-\dot{p}\boldsymbol{\sigma} + \lambda_1 \mathbf{I} + \lambda_2 2\mathbf{M}) : \mathbf{I} &= 0 \\ -\dot{p}(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) + \lambda_1 (\mathbf{I} : \mathbf{I}) + 2\lambda_2 (\mathbf{M} : \mathbf{I}) &= 0 \\ -\dot{p}\text{tr}[\boldsymbol{\sigma}] + 3\lambda_1 + 2\text{tr}[\mathbf{M}]\lambda_2 &= 0 \\ -\dot{p}\text{tr}[\boldsymbol{\sigma}] + 3\lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

Isolando λ_1 , temos:

$$\lambda_1 = \dot{p} \frac{\text{tr}[\boldsymbol{\sigma}]}{3} \quad (\text{B.13})$$

Determinando λ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{M}} : \mathbf{M} &= 0 \\ (-\dot{p}\boldsymbol{\sigma} + \lambda_1 \mathbf{I} + \lambda_2 2\mathbf{M}) : \mathbf{M} &= 0 \\ -\dot{p}(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}) + \frac{\dot{p}\text{tr}[\boldsymbol{\sigma}]}{3}(\mathbf{I} : \mathbf{M}) + 2\lambda_2(\mathbf{M} : \mathbf{M}) &= 0 \\ -\dot{p}(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}) + \frac{\dot{p}\text{tr}[\boldsymbol{\sigma}]}{3}(\text{tr}[\mathbf{M}]) + 2\lambda_2\left(\frac{3}{2}\right) &= 0 \\ -\dot{p}(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M}) + 3\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Isolando λ_2 , obtém-se

$$\lambda_2 = \dot{p} \frac{(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M})}{3} \quad (\text{B.14})$$

Substituindo as Eqs.(B.13) e (B.14) na Eq. (B.11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{M}} &= 0 \\ -\dot{p}\boldsymbol{\sigma} + \dot{p} \frac{\text{tr}[\boldsymbol{\sigma}]}{3} \mathbf{I} + \dot{p} \frac{(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M})}{3} 2\mathbf{M} &= 0 \\ -3\boldsymbol{\sigma} + \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}]\mathbf{I} + 2(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M})\mathbf{M} &= 0 \\ -3\left(\mathbf{s} + \frac{1}{3}\text{tr}[\boldsymbol{\sigma}]\mathbf{I}\right) + \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}]\mathbf{I} + 2(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M})\mathbf{M} &= 0 \\ -3\mathbf{s} + 2(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M})\mathbf{M} &= 0 \\ -3\mathbf{s} + 2\left(\left[\mathbf{s} + \frac{1}{3}\text{tr}[\boldsymbol{\sigma}]\mathbf{I}\right] : \mathbf{M}\right)\mathbf{M} &= 0 \\ -3\mathbf{s} + 2(\mathbf{s} : \mathbf{M})\mathbf{M} &= 0 \\ [-3\mathbf{s} + 2(\mathbf{s} : \mathbf{M})\mathbf{M}] : \mathbf{s} &= 0 \\ -3(\mathbf{s} : \mathbf{s}) + 2(\mathbf{s} : \mathbf{M})(\mathbf{M} : \mathbf{s}) &= 0 \\ -\frac{3}{2}(\mathbf{s} : \mathbf{s}) + (\mathbf{s} : \mathbf{M})^2 &= 0 \end{aligned}$$

Separando as partes:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{s} : \mathbf{M})^2 &= \frac{3}{2} (\mathbf{s} : \mathbf{s}) \\
(\mathbf{s} : \mathbf{M}) &= \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{s} : \mathbf{s})} \\
\mathbf{M} &= \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{s} : \mathbf{s})} \frac{1}{\mathbf{s}} \\
\mathbf{M} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}}{\mathbf{s}} \frac{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}}{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}} \\
\mathbf{M} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s} : \mathbf{s}}{\mathbf{s} \sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}} \\
\mathbf{M} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Assim podemos dizer que o mínimo define \mathbf{M} .

B.2 Prova de que o variacional de atualização constitutiva define \mathbf{M}

O seguinte variacional de atualização constitutiva

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}; \boldsymbol{\epsilon}_n, \boldsymbol{\epsilon}_n^p) \equiv \min_{\mathbf{M}, \Delta p} \left[\begin{array}{c} W(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e) - W(\boldsymbol{\epsilon}_n^e) \\ + \Delta t \psi^* \left(\frac{\Delta p}{\Delta t}; \text{tr}[\boldsymbol{\epsilon}^e]_{n+\theta} \right) \end{array} \right] \tag{B.16}$$

define

$$\mathbf{M} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}^{tr}}{\|\mathbf{s}^{tr}\|}$$

Admitindo que ψ^* depende apenas de $\Delta t \dot{p} = \Delta p$ e é independente de \mathbf{M} .

$$\arg \min_{\mathbf{M}} \left[W(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e) - W(\boldsymbol{\epsilon}_n^e) + \Delta t \psi^* \left(\frac{\Delta p}{\Delta t}; \text{tr}[\boldsymbol{\epsilon}^e]_{n+\theta} \right) \right] = \arg \min_{\mathbf{M}} [W(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e)]$$

Então, encontra-se \mathbf{M} que minimiza $W(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)$. Portanto:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) = \frac{1}{2} \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \quad (\text{B.17})$$

Tomando o lagrangeano,

$$\mathcal{L}(\mathbf{M}, \lambda_1, \lambda_2) = W(\mathbf{M}) + \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 \quad (\text{B.18})$$

sujeito às seguintes restrições,

$$Z_1 = \text{tr}[\mathbf{M}] \quad (\text{B.19})$$

$$Z_2 = \mathbf{M} : \mathbf{M} - \frac{3}{2} \quad (\text{B.20})$$

temos,

$$\mathcal{L}(\mathbf{M}, \lambda_1, \lambda_2) = W(\mathbf{M}) + \lambda_1 \text{tr}[\mathbf{M}] + \lambda_2 \left(\mathbf{M} : \mathbf{M} - \frac{3}{2} \right) \quad (\text{B.21})$$

As derivadas do lagrangeano por λ_1 , λ_2 e por \mathbf{M} , são respectivamente,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = \text{tr}[\mathbf{M}] = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = \mathbf{M} : \mathbf{M} - \frac{3}{2} = 0 \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{M}} = \underbrace{\frac{\partial W}{\partial \mathbf{M}}}_{(1)} + \lambda_1 \underbrace{\frac{\partial \text{tr}[\mathbf{M}]}{\partial \mathbf{M}}}_{(2)} + \lambda_2 \underbrace{\frac{\partial (\mathbf{M} : \mathbf{M} - \frac{3}{2})}{\partial \mathbf{M}}}_{(3)} = 0 \quad (\text{B.24})$$

Desenvolvendo (1)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{M}} &= \frac{1}{2} \mathbf{C}^e : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e}{\partial \mathbf{M}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \frac{1}{2} \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e}{\partial \mathbf{M}} \\
 &= \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e}{\partial \mathbf{M}} \\
 &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e}{\partial \mathbf{M}} \\
 &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \frac{\partial [\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \Delta p (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I})]}{\partial \mathbf{M}} \\
 &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \frac{\partial [\boldsymbol{\varepsilon}^{e\text{tr}} - \Delta p (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I})]}{\partial \mathbf{M}} \\
 &= -\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \Delta p
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

e determinando também os termos (2) e (3)

$$\frac{\partial \text{tr}[\mathbf{M}]}{\partial \mathbf{M}} = \frac{\partial (\mathbf{I} : \mathbf{M})}{\partial \mathbf{M}} = \mathbf{I} \tag{B.26}$$

$$\frac{\partial (\mathbf{M} : \mathbf{M} - \frac{3}{2})}{\partial \mathbf{M}} = \frac{\partial (\mathbf{M} : \mathbf{M})}{\partial \mathbf{M}} = 2\mathbf{M} \tag{B.27}$$

temos, na junção dos mesmos na Eq.(B.24):

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{M}} = -\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \Delta p + \lambda_1 \mathbf{I} + \lambda_2 2\mathbf{M} = 0 \tag{B.28}$$

Através do conjunto de derivadas, pode-se determinar as variáveis λ_1 e λ_2 .

Determinando λ_1 :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{M}} : \mathbf{I} &= 0 \\
 (-\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \Delta p + \lambda_1 \mathbf{I} + \lambda_2 2\mathbf{M}) : \mathbf{I} &= 0 \\
 -\Delta p (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{I}) + \lambda_1 (\mathbf{I} : \mathbf{I}) + 2\lambda_2 (\mathbf{M} : \mathbf{I}) &= 0 \\
 -\Delta p \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}] + 3\lambda_1 + 2\text{tr}[\mathbf{M}] \lambda_2 &= 0 \\
 -\Delta p \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}] + 3\lambda_1 &= 0
 \end{aligned}$$

Isolando λ_1 , temos:

$$\lambda_1 = \Delta p \frac{\text{tr}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}]}{3} \tag{B.29}$$

Determina-se λ_2 :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{M}} : \mathbf{M} &= 0 \\
 (-\Delta p \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \lambda_1 \mathbf{I} + \lambda_2 2\mathbf{M}) : \mathbf{M} &= 0 \\
 -\Delta p (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{M}) + \frac{\Delta p \operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}]}{3} (\mathbf{I} : \mathbf{M}) + 2\lambda_2 (\mathbf{M} : \mathbf{M}) &= 0 \\
 -\Delta p (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{M}) + \frac{\Delta p \operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}]}{3} (\operatorname{tr}[\mathbf{M}]) + 2\lambda_2 \left(\frac{3}{2}\right) &= 0 \\
 -\Delta p (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{M}) + 3\lambda_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Isolando λ_2 , obtemos:

$$\lambda_2 = \Delta p \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{M})}{3} \quad (\text{B.30})$$

Substituindo as Eqs.(B.29) e (B.30) na Eq. (B.28), comprova-se que a Eq. (B.16) define \mathbf{M} .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{M}} &= 0 \\
 -\Delta p \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \Delta p \frac{\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}]}{3} \mathbf{I} + \Delta p \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{M})}{3} 2\mathbf{M} &= 0 \\
 -3\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}] \mathbf{I} + 2(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{M}) \mathbf{M} &= 0 \\
 -3 \left(\mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3} \operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}] \mathbf{I} \right) + \operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}] \mathbf{I} + 2(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{M}) \mathbf{M} &= 0 \\
 -3\mathbf{s}_{n+1} + 2(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \mathbf{M}) \mathbf{M} &= 0 \\
 -3\mathbf{s}_{n+1} + 2 \left(\left[\mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3} \operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}] \mathbf{I} \right] : \mathbf{M} \right) \mathbf{M} &= 0 \\
 -3\mathbf{s}_{n+1} + 2(\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{M}) \mathbf{M} &= 0 \\
 [-3\mathbf{s}_{n+1} + 2(\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{M}) \mathbf{M}] : \mathbf{s}_{n+1} &= 0 \\
 -3(\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}) + 2(\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{M})(\mathbf{M} : \mathbf{s}_{n+1}) &= 0 \\
 -\frac{3}{2}(\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}) + (\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{M})^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Separando as partes:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{M})^2 &= \frac{3}{2} (\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}) \\
 (\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{M}) &= \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1})} \\
 \mathbf{M} &= \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1})} \frac{1}{\mathbf{s}_{n+1}} \\
 \mathbf{M} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}}}{\mathbf{s}_{n+1}} \frac{\sqrt{\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}}}{\sqrt{\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}}} \\
 \mathbf{M} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}}{\mathbf{s}_{n+1} \sqrt{\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}}} \\
 \mathbf{M} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|} = \frac{\mathbf{s}^{tr}}{\|\mathbf{s}^{tr}\|}
 \end{aligned}$$

Assim podemos dizer que o variacional de atualização constitutiva define \mathbf{M} , pois temos que:

$$\mathbf{M} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}^{tr}}{\|\mathbf{s}^{tr}\|} \quad (\text{B.31})$$

B.3 Minimização do potencial em relação a Δp

Definido \mathbf{M} , busca-se encontrar a seguinte condição de otimalidade em relação a Δp :

$$\underbrace{\frac{\partial W^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)}{\partial \Delta p}}_{(A)} + \underbrace{\frac{\partial W^p(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p)}{\partial \Delta p}}_{(B)} + \Delta t \underbrace{\frac{\partial \psi^*(\Delta p / \Delta t)}{\partial \Delta p}}_{(C)} = 0 \quad (\text{B.32})$$

Desenvolvendo (A)

$$\frac{\partial W^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)}{\partial \Delta p} = \underbrace{\frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e}}_{(A1)} : \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e}{\partial \Delta p}}_{(A2)}$$

nas suas partes (A1), (A2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e} &= \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e}{\partial \Delta p} &= \frac{\partial}{\partial \Delta p} (\boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr} - \Delta p (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I})) = -(\mathbf{M} + \beta \mathbf{I})\end{aligned}$$

e substituindo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial W^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)}{\partial \Delta p} &= -\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I}) \\ &= -(\mathbf{s}_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_{m,n+1} \mathbf{I}) : (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I}) \\ &= -(\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{M}) - 3\beta \boldsymbol{\sigma}_{m,n+1} \\ &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1} - 3\beta \boldsymbol{\sigma}_{m,n+1} \\ &= -\sigma_{eq,n+1} - 3\beta \boldsymbol{\sigma}_{m,n+1}\end{aligned}\tag{B.33}$$

Desenvolvendo (B), da definição de (4.7), se tem:

$$\frac{\partial W^p(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p)}{\partial \Delta p} = f(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p)\tag{B.34}$$

Desenvolvendo (C)

$$\begin{aligned}\Delta t \frac{\partial \psi^*(\Delta p)}{\partial \Delta p} &= \frac{\partial}{\partial \Delta p} \{ [\sigma_{y0} - C \operatorname{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}_{n+\theta}^e]] \Delta p \} \\ &= \frac{\partial}{\partial \Delta p} \{ [\sigma_{y0} - C (\theta \operatorname{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr}] - 3\beta \theta \Delta p + (1 - \theta) \operatorname{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}_n^e])] \Delta p \} \\ &= \sigma_{y0} - C [\theta \operatorname{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr}] - 6\beta \theta \Delta p + (1 - \theta) \operatorname{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}_n^e]]\end{aligned}\tag{B.35}$$

Juntando os termos se obtém a condição de otimalidade:

$$r(\Delta p)|_{\Delta p=0^+} = \begin{bmatrix} -\sigma_{eq,n+1} - 3\beta \boldsymbol{\sigma}_{m,n+1} + \sigma_{y0} + f(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) \\ -C [\theta \operatorname{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}^{e\ tr}] - 6\beta \theta \Delta p + (1 - \theta) \operatorname{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}_n^e]] \end{bmatrix} = 0\tag{B.36}$$

e o residuo

$$r(\Delta p)|_{\Delta p=0^+} = \left[\begin{array}{l} -3\beta (\sigma_m^{tr} - 3\beta K \Delta p) + f(\bar{\epsilon}_{n+1}^p) + \sigma_{y0} \\ -\frac{C}{K} [\theta \sigma_m^{tr} + (1 - \theta) \sigma_{m,n} - 6\theta \beta K \Delta p] \end{array} \right] = 0 \quad (\text{B.42})$$

Reescrevendo em termos do incremento de deformação plástica volumétrica $\Delta \epsilon_v^p$

$$r(\Delta \epsilon_v^p) = \left[\begin{array}{l} -3\beta (\sigma_m^{tr} - K \Delta \epsilon_v^p) + f(\bar{\epsilon}_{n+1}^p) + \sigma_{y0} \\ -\frac{C}{K} [\theta \sigma_m^{tr} + (1 - \theta) \sigma_{m,n} - 2\theta K \Delta \epsilon_v^p] \end{array} \right] = 0 \quad (\text{B.43})$$

onde,

$$\begin{aligned} \epsilon_v^p &= \sqrt{3} (\bar{\eta} \dot{p}) \\ \Delta \epsilon_v^p &= \sqrt{3} \bar{\eta} \int_t \dot{p} dt = \sqrt{3} \bar{\eta} \Delta p = 3\beta \Delta p \quad \beta = \frac{\sqrt{3} \bar{\eta}}{3} \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

e a constante material C calculada através da Eq. (B.45).

$$\begin{aligned} 3 \tan \gamma &= 3\beta + \frac{C}{K} \\ 3 \left(\frac{\sqrt{3} \eta}{3} \right) &= 3 \left(\frac{\sqrt{3} \bar{\eta}}{3} \right) + \frac{C}{K} \\ \sqrt{3} \eta &= \sqrt{3} \bar{\eta} + \frac{C}{K} \\ C &= \sqrt{3} K (\eta - \bar{\eta}) \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

B.5 Módulo tangente elastoplástico na parte suave da superfície de escoamento

A tensão é calculada segundo a expressão

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} = \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} + \Delta t \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} \\ &= \mathbf{C}^e (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p) - C \theta \Delta p \mathbf{I} \\ &= \mathbf{C}^e (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^p - \Delta p (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I})) - C \theta \Delta p \mathbf{I} \\ &= \mathbf{C}^e \boldsymbol{\epsilon}^{e\,tr} - \mathbf{C}^e \Delta p (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I}) - C \theta \Delta p \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

O diferencial de $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ é descrito como:

$$d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \left[\begin{array}{c} \underbrace{\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}_{(1)} \\ + \underbrace{\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta p} \frac{\partial \Delta p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}_{(2) \quad (5)} \\ + \underbrace{\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \mathbf{M}} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}_{(3) \quad (4)} \end{array} \right] \quad (\text{B.47})$$

Desenvolvendo o termo (1),

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \mathbf{C}^e \quad (\text{B.48})$$

O termo (2),

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta p} = -\mathbf{C}^e (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I}) - \mathbf{C} \boldsymbol{\theta} \mathbf{I} \quad (\text{B.49})$$

O termo (3),

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,rs}}{d\mathbf{M}_{ij}} &= -\mathbf{C}_{rsuv}^e \Delta p \frac{d\mathbf{M}_{uv}}{d\mathbf{M}_{ij}} = -\mathbf{C}_{rsuv}^e \Delta p \mathbf{I}_{ui} \mathbf{I}_{vj} = -\mathbf{C}_{rsij}^e \Delta p \\ &\Rightarrow \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \mathbf{M}} = -\mathbf{C}^e \Delta p \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

O termo (4),

$$\frac{d\mathbf{M}_{ij}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1,kl}} = \underbrace{\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{ds_{ij}^{tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1,kl}} \frac{1}{\|\mathbf{s}^{tr}\|}}_{(4A)} + \underbrace{\sqrt{\frac{3}{2}} s_{ij}^{tr} \frac{d\left(\frac{1}{\|\mathbf{s}^{tr}\|}\right)}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1,kl}}}_{(4B)} \quad (\text{B.51})$$

Já o termo (4A)

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{s}_{ij}^{tr}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1,kl}} &= \frac{d}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1,kl}} [2G \operatorname{dev}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^p)]_{ij} \\
 &= 2G \frac{d}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1,kl}} \left[(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^p) - \frac{1}{3} [(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^p) : \mathbf{I}] \mathbf{I} \right]_{ij} \\
 &= 2G \frac{d}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1,kl}} \left[\left(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1,ij} - \boldsymbol{\epsilon}_{n,ij}^p \right) - \left(\frac{1}{3} (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^p)_{mm} \right) : \mathbf{I}_{ij} \right] \\
 &= 2G \frac{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1,ij}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1,kl}} - \frac{2G}{3} \mathbf{I}_{kl} \mathbf{I}_{ij} \\
 &= 2G \left[\mathbf{II}_{ijkl} - \frac{1}{3} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{ijkl} \right] \\
 &= 2G [\mathbf{I}_d]_{ijkl}
 \end{aligned}$$

e (4B):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\left(\frac{1}{\|\mathbf{s}^{tr}\|}\right)}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1,kl}} &= \frac{d\left(\frac{1}{\|\mathbf{s}^{tr}\|}\right)}{d\mathbf{s}_{ij}^{tr}} \frac{d\mathbf{s}_{ij}^{tr}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1,kl}} = \frac{d(\mathbf{s}^{tr} : \mathbf{s}^{tr})^{-\frac{1}{2}}}{d\mathbf{s}_{ij}^{tr}} \frac{d\mathbf{s}_{ij}^{tr}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1,kl}} \\
 &= -\frac{1}{2} (\mathbf{s}^{tr} : \mathbf{s}^{tr})^{-\frac{3}{2}} \frac{d(\mathbf{s}^{tr} : \mathbf{s}^{tr})}{d\mathbf{s}_{ij}^{tr}} \frac{d\mathbf{s}_{ij}^{tr}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1,kl}} \\
 &= -\frac{1}{2} (\mathbf{s}^{tr} : \mathbf{s}^{tr})^{-\frac{3}{2}} (2\mathbf{s}_{ij}^{tr}) \frac{d\mathbf{s}_{ij}^{tr}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1,kl}} \\
 &= -2G \mathbf{s}_{ij}^{tr} (\mathbf{s}^{tr} : \mathbf{s}^{tr})^{-\frac{3}{2}} \left[\mathbf{II}_{ijkl} - \frac{1}{3} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{ijkl} \right] \\
 &= -2G \frac{\mathbf{s}_{ij}^{tr}}{\|\mathbf{s}^{tr}\|^3} \left[\mathbf{II}_{ijkl} - \frac{1}{3} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{ijkl} \right] \\
 &= -2G \frac{\mathbf{s}_{ij}^{tr}}{\|\mathbf{s}^{tr}\|^3} [\mathbf{I}_d]_{ijkl} \quad \mathbf{s}_{ij}^{tr} [\mathbf{I}_d]_{ijkl} = \mathbf{s}_{kl}^{tr} \\
 &= -2G \frac{\mathbf{s}_{kl}^{tr}}{\|\mathbf{s}^{tr}\|^3}
 \end{aligned}$$

Substituindo os termos (4A) e (4B) na Eq.(B.51), o termo (4):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{M}_{ij}}{d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1,kl}} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2G}{\|\mathbf{s}^{tr}\|} [\mathbf{L}_d]_{ijkl} - \sqrt{\frac{3}{2}} 2G \frac{1}{\|\mathbf{s}^{tr}\|^3} \mathbf{s}_{ij}^{tr} \mathbf{s}_{kl}^{tr} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{3/2}}{\sqrt{3/2}} \frac{2G}{\|\mathbf{s}^{tr}\|} [\mathbf{L}_d]_{ijkl} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{3/2}}{\sqrt{3/2}} \frac{2G}{\|\mathbf{s}^{tr}\|} \frac{\mathbf{s}_{ij}^{tr}}{\|\mathbf{s}^{tr}\|} \frac{\mathbf{s}_{kl}^{tr}}{\|\mathbf{s}^{tr}\|} \\
 &= \frac{3G}{\sigma_{eq}^{tr}} [\mathbf{L}_d]_{ijkl} - \frac{3G}{\sigma_{eq}^{tr}} \left(\frac{2}{3} \mathbf{M}_{ij} \mathbf{M}_{kl} \right) \\
 &= \frac{3G}{\sigma_{eq}^{tr}} [\mathbf{L}_d]_{ijkl} - \frac{2G}{\sigma_{eq}^{tr}} \mathbf{M}_{ij} \mathbf{M}_{kl} \\
 &\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} = \frac{3G}{\sigma_{eq}^{tr}} [\mathbf{L}_d] - \frac{2G}{\sigma_{eq}^{tr}} \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} \tag{B.52}
 \end{aligned}$$

O cálculo do termo (5) é executado diferenciando a condição de consistência da Eq.(B.39):

$$\begin{aligned}
 dr &= \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} + \frac{\partial r}{\partial \Delta p} d\Delta p = 0 \\
 &= \frac{\partial r}{\partial \sigma_{eq}^{tr}} \frac{\partial \sigma_{eq}^{tr}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} : d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} + \frac{\partial r}{\partial \sigma_m^{tr}} \frac{\partial \sigma_m^{tr}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} : d\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} + \frac{\partial r}{\partial \Delta p} d\Delta p \tag{B.53}
 \end{aligned}$$

Determinando cada um dos termos separadamente,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r}{\partial \sigma_{eq}^{tr}} &= -1 \\
 \frac{\partial \sigma_{eq}^{tr}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} &= 2G\mathbf{M} \\
 \frac{\partial r}{\partial \sigma_m^{tr}} &= - \left(3\beta + \theta \frac{C}{K} \right) \\
 \frac{\partial \sigma_m^{tr}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} &= K\mathbf{I}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \Delta p} = \left(3G + 9\beta^2 K + 6\beta C\theta + H\sqrt{1+2\beta^2} \right) d\Delta p$$

e substituindo na Eq.(B.53), temos:

$$dr = \left[\begin{array}{l} - [2\mathbf{GM} + 3K(\beta + \theta \frac{C}{3K}) \mathbf{I}] : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \\ + [3G + 9\beta^2 K + 6\beta C\theta + H\sqrt{1 + 2\beta^2}] d\Delta p \end{array} \right] = 0 \quad (\text{B.54})$$

Assim, o termo (5), pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} &= \frac{2\mathbf{GM} + 3K(\beta + \theta \frac{C}{3K}) \mathbf{I}}{3G + 9\beta^2 K + 6\beta C\theta + H\sqrt{1 + 2\beta^2}} \\ &= \left[2\mathbf{GM} + 3K \left(\beta + \theta \frac{C}{3K} \right) \mathbf{I} \right] A_v \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

onde

$$A_v = \frac{1}{3G + 9\beta^2 K + 6\beta C\theta + H\sqrt{1 + 2\beta^2}} \quad (\text{B.56})$$

Juntando os termos (3) e (4),

$$\begin{aligned} &\frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,rs}}{d\mathbf{M}_{ij}} \frac{d\mathbf{M}_{ij}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1,kl}} \\ &= - (\mathbf{C}_{rsij}^e \Delta p) \left(\frac{3G}{\sigma_{eq}^{tr}} [\mathbf{l}_d]_{ijkl} - \frac{2G}{\sigma_{eq}^{tr}} \mathbf{M}_{ij} \mathbf{M}_{kl} \right) \\ &= - \underbrace{\frac{3G}{\sigma_{eq}^{tr}} \mathbf{C}_{rsij}^e \Delta p [\mathbf{l}_d]_{ijkl}}_{(A)} + \underbrace{\frac{2G}{\sigma_{eq}^{tr}} \mathbf{C}_{rsij}^e \Delta p \mathbf{M}_{ij} \mathbf{M}_{kl}}_{(B)} \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

sendo

$$\mathbf{C}_{rsij}^e = 2G [\mathbf{l}_d]_{rsij} + K \mathbf{I}_{rs} \mathbf{I}_{ij} \quad (\text{B.58})$$

Substituindo a Eq.(B.58) na Eq.(B.57) e resolvendo os termos (A) e (B) separadamente

$$\begin{aligned}
 (A) &= \left(K [\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}]_{rsij} + 2G [\mathbf{l}_d]_{rsij} \right) \left(-\frac{3G}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p [\mathbf{l}_d]_{ijkl} \right) \\
 &= -\frac{6G^2}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p [\mathbf{l}_d]_{rsij} : [\mathbf{l}_d]_{rskl} - \frac{3GK}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p [\mathbf{l}_d]_{ijkl} [\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}]_{rsij} \\
 &= -\frac{6G^2}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p [\mathbf{l}_d]_{ijkl}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (B) &= \left(K [\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}]_{ijrs} + 2G [\mathbf{l}_d]_{ijrs} \right) \left(\frac{2G}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p \mathbf{M}_{rs} \mathbf{M}_{kl} \right) \\
 &= \frac{4G^2}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p \mathbf{M}_{rs} \mathbf{M}_{kl} [\mathbf{l}_d]_{ijrs} + \frac{2GK}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p \mathbf{M}_{rs} \mathbf{M}_{kl} [\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}]_{ijrs} \\
 &= \frac{4G^2}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p \mathbf{M}_{rs} \mathbf{M}_{kl}
 \end{aligned}$$

tem-se finalmente a nova expressão do termo (B.57):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,rs}}{d\mathbf{M}_{ij}} \frac{d\mathbf{M}_{ij}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1,kl}} &= \frac{4G^2}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p \mathbf{M}_{rs} \mathbf{M}_{kl} - \frac{6G^2}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p [\mathbf{l}_d]_{ijkl} \\
 \Rightarrow \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \mathbf{M}} : \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} &= \frac{4G^2}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} - \frac{6G^2}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p [\mathbf{l}_d]
 \end{aligned} \tag{B.59}$$

Operando as partes (2) e (5):

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta p} \frac{\partial \Delta p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \\
 &= -(\mathbf{C}^e (\mathbf{M} + \beta \mathbf{I}) + C\theta \mathbf{I}) [2G\mathbf{M} + (3\beta K + \theta C) \mathbf{I}] A_v \\
 &= -(\mathbf{C}^e \mathbf{M} + \mathbf{C}^e \beta \mathbf{I} + C\theta \mathbf{I}) [2G\mathbf{M} + (3\beta K + \theta C) \mathbf{I}] A_v
 \end{aligned}$$

Na forma inicial:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,ij}}{\partial \Delta p} \frac{\partial \Delta p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1,kl}} \\
 &= -(2G\mathbf{M}_{ij} + 3\beta K\mathbf{I}_{ij} + C\theta\mathbf{I}_{ij}) [2G\mathbf{M}_{kl} + (3\beta K + \theta C)\mathbf{I}_{kl}] A_v \\
 &= \left(\begin{array}{c} [-4G^2\mathbf{M}_{ij}\mathbf{M}_{kl} - 2G(3\beta K + \theta C)\mathbf{M}_{ij}\mathbf{I}_{kl}] A_v \\ + [-6G\beta K\mathbf{I}_{ij}\mathbf{M}_{kl} - 3\beta K(3\beta K + \theta C)\mathbf{I}_{ij}\mathbf{I}_{kl}] A_v \\ + [-2G\theta C\mathbf{I}_{ij}\mathbf{M}_{kl} - \theta C(3\beta K + \theta C)\mathbf{I}_{ij}\mathbf{I}_{kl}] A_v \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c} -4G^2\mathbf{M}_{ij}\mathbf{M}_{kl} - 2G(3\beta K + \theta C)\mathbf{M}_{ij}\mathbf{I}_{kl} \\ -6G\beta K\mathbf{I}_{ij}\mathbf{M}_{kl} - 3\beta K(3\beta K + \theta C)\mathbf{I}_{ij}\mathbf{I}_{kl} \\ -2G\theta C\mathbf{I}_{ij}\mathbf{M}_{kl} - \theta C(3\beta K + \theta C)\mathbf{I}_{ij}\mathbf{I}_{kl} \end{array} \right) A_v \\
 &= \left(\begin{array}{c} -4G^2\mathbf{M}_{ij}\mathbf{M}_{kl} - [6G\beta K + 2G\theta C]\mathbf{M}_{ij}\mathbf{I}_{kl} \\ \quad \quad \quad - [6G\beta K + 2G\theta C]\mathbf{I}_{ij}\mathbf{M}_{kl} \\ - [9\beta^2 K^2 + 6\beta K\theta C + (\theta C)^2]\mathbf{I}_{ij}\mathbf{I}_{kl} \end{array} \right) A_v \\
 &= \left(\begin{array}{c} -4G^2\mathbf{M}_{ij}\mathbf{M}_{kl} - 6G\beta K\mathbf{M}_{ij}\mathbf{I}_{kl} - 2G\theta C\mathbf{M}_{ij}\mathbf{I}_{kl} \\ -6G\beta K\mathbf{I}_{ij}\mathbf{M}_{kl} - 9\beta^2 K^2\mathbf{I}_{ij}\mathbf{I}_{kl} - 6\beta K\theta C\mathbf{I}_{ij}\mathbf{I}_{kl} \\ \quad \quad \quad - (\theta C)^2\mathbf{I}_{ij}\mathbf{I}_{kl} \end{array} \right) A_v
 \end{aligned}$$

Assim, pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \Delta p} \frac{\partial \Delta p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \\
 &= \left(\begin{array}{c} -4G^2\mathbf{M} \otimes \mathbf{M} - 6G\beta K\mathbf{M} \otimes \mathbf{I} - 2G\theta C\mathbf{M} \otimes \mathbf{I} \\ -6G\beta K\mathbf{I} \otimes \mathbf{M} - 2G\theta C\mathbf{I} \otimes \mathbf{M} - 9\beta^2 K^2\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \\ \quad \quad \quad - 6\beta K\theta C\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - (\theta C)^2\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{array} \right) A_v \\
 &= \left(\begin{array}{c} -4G^2\mathbf{M} \otimes \mathbf{M} \\ - (6G\beta K + 2G\theta C)\mathbf{M} \otimes \mathbf{I} \\ - (6G\beta K + 2G\theta C)\mathbf{I} \otimes \mathbf{M} \\ - (9\beta^2 K^2 + 6\beta K\theta C + (\theta C)^2)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{array} \right) A_v \tag{B.60}
 \end{aligned}$$

Agrupando as Eqs.(B.48), (B.59) e (B.60) na Eq.(B.47) obtemos a

seguinte expressão para o diferencial de tensão:

$$d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^e + \frac{4G^2}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} \\ -\frac{6G^2}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p [\mathbf{l}_d] - A_v (4G^2 \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}) \\ -A_v (6G\beta K + 2G\theta C) \mathbf{M} \otimes \mathbf{I} \\ -A_v (6G\beta K + 2G\theta C) \mathbf{I} \otimes \mathbf{M} \\ -A_v (9\beta^2 K^2 + 6\beta K\theta C + (\theta C)^2) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (\text{B.61})$$

que dá origem ao operador tangente \mathbf{D}^{ep} :

$$\mathbf{D}^{ep} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^e + 4G^2 \left(\frac{\Delta p}{\sigma_{eq}^{tr}} - A_v \right) \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} - \frac{6G^2}{\sigma_{eq}^{tr}} \Delta p [\mathbf{l}_d]_{ijkl} \\ -A_v (6G\beta K + 2G\theta C) (\mathbf{M} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{M}) \\ -A_v (9\beta^2 K^2 + 6\beta K\theta C + (\theta C)^2) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{B.62})$$

B.6 Módulo tangente elastoplástico no vértice da superfície de escoamento

Para retorno ao vértice do cone, o diferencial de tensão é considerado como:

$$d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n+1} \mathbf{I} \quad (\text{B.63})$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n+1} = \sigma_m^{tr} - 3\beta K \Delta p - C\theta \Delta p \quad (\text{B.64})$$

$$\sigma_m^{tr} = K \varepsilon_{v,n+1}^{etr} \quad (\text{B.65})$$

O diferencial da tensão hidrostática é obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n+1} &= \frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n+1}}{d\varepsilon_v^{etr}} d\varepsilon_v^{etr} + \frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n+1}}{d\Delta p} d\Delta p \\ &= K d\varepsilon_v^{etr} - 3\beta K d\Delta p \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

Tomando o resíduo (Eq.(B.43)) e aplicando o diferencial

$$dr = \underbrace{\frac{dr}{d\varepsilon_v^{etr}} d\varepsilon_v^{etr}}_{(1)} + \underbrace{\frac{dr}{d\Delta p} d\Delta p}_{(2)} \quad (\text{B.67})$$

Desenvolvendo os termos (1) e (2)

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}} d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr} &= -(3\beta K + \theta C) d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr} \\ \frac{dr}{d\Delta p} d\Delta &= (9\beta^2 K + 6\beta\theta C + \alpha H) d\Delta p \quad \alpha = \sqrt{1 + 2\beta^2} \end{aligned}$$

reagrupando,

$$dr = -(3\beta K + \theta C) d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr} + (9\beta^2 K + 6\beta\theta C + \alpha H) d\Delta p = 0 \quad (\text{B.68})$$

e isolando $d\Delta p$, obtém-se:

$$d\Delta p = \frac{3\beta K + \theta C}{(9\beta^2 K + 6\beta\theta C + \alpha H)} d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr} \quad (\text{B.69})$$

Substituindo $d\Delta p$ na Eq. (B.66),

$$d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n+1} = K d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr} - \left(\frac{(3\beta K + \theta C)^2}{(9\beta^2 K + 6\beta\theta C + \alpha H)} \right) d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}$$

resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} &= \frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,tr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} \\ &= \left(K - \frac{(3\beta K + \theta C)^2}{(9\beta^2 K + 6\beta\theta C + \alpha H)} \right) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

Dessa forma, o módulo tangente elastoplástico para retorno ao vértice é tido como:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{rv} &= \mathbf{I} \otimes \frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{e\,tr}} \\ &= \left(K - \frac{(3\beta K + \theta C)^2}{(9\beta^2 K + 6\beta\theta C + \alpha H)} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

B.6.1 Módulo tangente elastoplástico no vértice da superfície de escoamento em função de $\Delta\varepsilon_v^p$

Para retorno ao vértice do cone, o diferencial de tensão é considerado como:

$$d\hat{\sigma}_{n+1} = d\hat{\sigma}_{m,n+1}\mathbf{I}$$

$$\hat{\sigma}_{m,n+1} = \sigma_m^{tr} - 3\beta K\Delta p - C\theta\Delta p \quad \sigma_m^{tr} = K \varepsilon_{v,n+1}^{e\ tr}$$

O diferencial da tensão hidrostática é obtido da seguinte forma:

$$d\hat{\sigma}_{m,n+1} = \frac{d\hat{\sigma}_{m,n+1}}{d\varepsilon_v^{e\ tr}} d\varepsilon_v^{e\ tr} + \frac{d\hat{\sigma}_{m,n+1}}{d\Delta\varepsilon_v^p} d\Delta\varepsilon_v^p$$

$$= K d\varepsilon_v^{e\ tr} - \left(K + \frac{C\theta}{3\beta} \right) d\Delta\varepsilon_v^p \quad (\text{B.72})$$

Tomando o resíduo da Eq.(B.43) e aplicando o diferencial temos:

$$dr(\Delta\varepsilon_v^p) = \underbrace{\frac{dr(\Delta\varepsilon_v^p)}{d\varepsilon_v^{e\ tr}} d\varepsilon_v^{e\ tr}}_{(1)} + \underbrace{\frac{dr(\Delta\varepsilon_v^p)}{d\Delta\varepsilon_v^p} d\Delta\varepsilon_v^p}_{(2)} \quad (\text{B.73})$$

Desenvolvendo os termos (1) e (2)

$$(1) = -(3\beta K + \theta C) d\varepsilon_v^{e\ tr}$$

$$(2) = (3\beta K + C(2\theta) + \alpha H) d\Delta\varepsilon_v^p \quad \alpha = \frac{\sqrt{1+2\beta^2}}{3\beta}$$

reagrupando,

$$dr(\Delta\varepsilon_v^p) = -(3\beta K + \theta C) d\varepsilon_v^{e\ tr} + (3\beta K + C(2\theta) + \alpha H) d\Delta\varepsilon_v^p = 0$$

e isolando $d\Delta\varepsilon_v^p$, obtém-se:

$$d\Delta\varepsilon_v^p = \frac{3\beta K + \theta C}{(3\beta K + C(2\theta) + \alpha H)} d\varepsilon_v^{e\ tr} \quad (\text{B.74})$$

Substituindo $d\Delta\varepsilon_v^p$ na Eq. (B.72),

$$d\sigma_{m,n+1} = K d\varepsilon_v^{e\ tr} - \left(K + \frac{C\theta}{3\beta} \right) \left(\frac{3\beta K + \theta C}{(3\beta K + C(2\theta) + \alpha H)} \right) d\varepsilon_v^{e\ tr}$$

resulta em:

$$\frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etr}} = \frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\varepsilon_v^{etr}} \frac{d\varepsilon_v^{etr}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etr}} = \left(K - \frac{(3\beta K + \theta C)^2}{3\beta(3\beta K + C(2\theta) + \alpha H)} \right) \mathbf{I} \quad (\text{B.75})$$

Dessa forma, o módulo tangente elastoplástico para retorno ao vértice é tido como:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{rv} &= \mathbf{I} \otimes \frac{d\sigma_{m,n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{etr}} \\ &= \left(K - \frac{(3\beta K + \theta C)^2}{3\beta(3\beta K + C(2\theta) + \alpha H)} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$