Numeração

Prof. FRANÇA CAMPOS

Catedrático de Metodologia do Cálculo do Inst. de Educação — Prof. de Matemática no Colégio Bennett — Distrito Federal

Todos os tipos de sociedade humana, ainda mesmo os de mais rudimentar cultura, adquiriram, através dos tempos, um conceito de número e engendraram, de alguma maneira, um processo de contar.

A arte de contar e a representação simbólica do número devem ter sido imaginadas no dia em que o homem sentiu o desejo ou a necessidade de guardar uma relação dos seus bens.

De importância vital para o homem primitivo em saber que tribo dispunha de mais guerreiros, ou que exército tinha mais soldados. Assim, a necessidade de se compararem, umas às outras, as grandezas discretas, contribuiu também, e talvez, decisivamente, para o aparecimento do processo de contar.

Quando o homem não sabia contar e não podia, por isso mesmo, dispor de registro simbólico-numérico de seus bens, zelava dêles com o auxílio da correspondência biunívoca ou não, que verificava existir entre os elementos de dois conjuntos. Descobria, assim, se o número cardinal de ambos era, ou não, o mesmo. Se a cada elemento de um conjunto A correspondesse êsse um, e sòmente um, dos elementos de um conjunto B, e recìprocamente, concluía terem o mesmo número. Se isto não se desse, ficava sabendo qual dos dois era o menor, qual o maior. Com êste recurso, o pastor de ovelhas, por exemplo, podia atinar com a falta de qualquer delas. Com efeito: A cada uma que deixasse sair a pastar, pela manhã, fazia corresponder uma pedrinha, que colocava num alforje. Assim, deixada sair a última ovelha ,e posta no alforje a pedrinha respectiva, dispunha de meio com que verificar, à tarde, por nova correspondência, se todo o rebanho tinha voltado ao redil. Não só pedrinhas foram usadas para êsse tipo de correspondência, mas várias outras coisas, entre as quais estrias num tronco de árvore, ranhuras numa pedra, marcas em areia, nós em cordões e sulcos em varetas.

O homem primitivo não via nada numérico, mas podia notar mudanças que se impusessem a pequenas coleções. Distinguia grupos maiores e menores, com mais objetos ou com menos. E deve ter tido a idéia de número cardinal no dia em que porventura observou que um conjunto de três guerreiros, por exemplo, apresentava algo em comum com um conjunto de três árvores, ou três pássaros, ou três outras coisas quaisquer.

O homem aprendeu, muito cedo, a servir-se de conjuntos conhecidos, ou grupos modelos, para comparar a êles os que não eram familiares. Os olhos de um selvagem ou as asas de um pássaro podiam simbolizar o número dois; as fôlhas do trevo, três; as pernas de um quadrúpede, quatro; os dedos de uma das mãos, cinco; os de ambas, dez. Em épocas posteriores, êsses grupos e outros mais, foram cedendo lugar a expressões ou nomes, e a símbolos numéricos.

Enquanto o homem não conseguiu, pela contagem, remediar sua limitada percepção quantitativa, o número, cuja origem se desconhece, permaneceu extremamente modesto. Inventado, porém, o artifício de contar, foi possível contrapor, à noção concreta e heterogênea da pluralidade, o conceito homogêneo de número abstrato. Daí para o diante não cessou o seu desenvolvimento.

Para o processo de contar é necessário um sistema em que os conjuntos modelos, representados por seus respectivos nomes, ou símbolos, se arranjem em ordem crescente, uns após outros. E quando contamos, estamos fazendo corresponder os elementos de um conjunto desconhecido aos elementos dêsse sistema: um, dois, três, etc. Com efeito: Imaginemos que, conhecida até certo ponto, a série dos números naturais, queiramos contar os objetos de um conjunto. Procedemos assim: Apartamos um dos objetos (ou apontamos para êle, ou simplesmente o fitamos), e dizemos: **um.** Fazemos o mesmo com relação a um outro e dizemos: **dois.** E prosseguimos assim até que sejam considerados todos os objetos. Se o último nome enunciado tiver sido **vinte**, por exemplo, concluímos que há vinte objetos no conjunto dado, isto é, que seu número cardinal é vinte.

A contagem pode ser mais, ou menos, limitada. O grau de limitação depende da maior ou menor capacidade de conceber conjuntos modelos e nomeá-los com economia de nomes distintos e, consequentemente, frequência de nomes iguais. A economia de nomes liga-se diretamente a conjuntos fundamentais de unidades, cujos números constituem as bases dos sistemas em que se conta, ou caracterizam as modalidades de numeração: binária, decimal, vigesimal, etc.

As tribos mais primitivas da Austrália e da Africa usam um sistema binário. Contam assim: um, dois; dois e um; dois e dois; dois e dois e um; dois e dois e dois. Se há mais de seis coisas, então há muitos. Nem sempre existe pròpriamente um sistema. Há tribos tão atrasadas, que só contam: um, dois, muitos.

Além do sistema binário, encontradiço também no Brasil, entre os Botocudos, por exemplo, pode apontar-se o ternário, na Àfrica, e o quartenário, na América do Norte, onde os Yuki, da Califórnia, contam pelos espaços interdigitais de cada mão.

Parece ter predominado, entre os homens primitivos, como predomina hoje entre os selvagens, o sistema de numeração em que o conjunto fundamental ou básico é de cinco elementos. Êste conjunto tem sido encontrado, muitas vêzes, em relação com outro maior, de vinte elementos. A frequência de grupos quinários, todavia, maior que a de grupos de vintenas, leva à convicção de que é realmente de base cinco o sistema mais usado, e ainda em uso, entre o elemento humano não civilizado. Grande número de historiadores afirma que é o mais antigo. As expressões seguintes são mostras evidentes do emprêgo do sistema quinário: mão inteira (5), um da outra mão (6), duas mãos (10), minhas mãos e dois (12), um do outro pé (16), homem inteiro (20), quatro mãos (20), um homem e duas mãos (30), um pé do segundo homem (35). Há tribos no Brasil, como em tôdas as partes do mundo, que empregam, para os números 6, 7, 8 e 9, expressões que significam dedos da outra mão, ou da segunda mão.

O sistema decimal, usado também pelo homem primitivo, e por tribos selvagens de nossos dias, predominou, no passado, entre os povos cultos, e é hoje o sistema do mundo civilizado. Trataremos dêle oportunamente.

Há evidências de número ter sido usado como base de sistema de numeração: 12 pontos valem 1 linha, 12 linhas 1 polegada, 12 polegadas 1 pé. 12 dinheiros valem 1 shilling, 12 unidades 1 dúzia, 12 dúzias 1 groza.

A numeração dos Maias, como a dos antigos Astecas (cujo dia tinha 20 horas), era vigesimal. Uma divisão do exército asteca compunha-se de 8000 homens .... (20 x 20 x 20). Nas línguas inglêsa e francesa encontram-se vestígios de um sistema de base vinte: score (20), two-score (40), thee-score (60). Vingt (20), quatre-vingt (80), onze-vingt (220), quinze-vingt (300). Onze-vingt é o nome de uma corporação de 220 sargentos de polícia, e Quinze-vingt, o de um hospital. Nas ilhas Kurilas, do Japão, usa-se, ainda hoje, um sistema vigesimal.

A numeração pode ser falada, escrita ou mímica. O homem aprendeu a nomear uns poucos números, antes de imaginar como escrevê-los. E os nomes dêsses números estão entre aquêles que primeiro pronunciamos, quando aprendemos a falar. Vários dêles, de origem comum, indiana, mudaram relativamente pouco em milhares de anos. Considerem-se, por exemplo, os nomes dos números 1, 2, 3, 7 e 8, em português, francês, inglês, espanhol, italiano, latim, alemãoi grego, russo e sânscrito:

um	un	one	uno	uno
dois	deux	two	dos	due
três	trois	three	tres	tre
.....	......	......	.....	.....
.....	......	......	.....	.....
.....	......	......	.....	.....
sete	sept	seven	siete	sete
oito	huit	eight	ocho	oto

unus	eins	oinos	odyn	eka
duo	zwei	duo	dva	dva
tres	drei	treis	tri	tri
.....	.....	......	.....	.....
.....	.....	......	.....	.....
.....	.....	......	.....	.....
septem	sieben	hepta	sem	captam
octo	acht	okto	vosem	asta

Na numeração mímica os números são indicados por diferentes posições dos dedos e das mãos. Sua origem, provàvelmente oriental, é mal conhecida. Foi usada, até a Idade Média, por Gregos, Romanos, Árabes e Hindus, que sabiam, em geral, representar mìmicamente qualquer número inferior a 10000. Com os dedos faziam também adição, subtração, e até multiplicação de números de dois algarismos. Algumas personalidades, em antigos quadros e esculturas, são apresentadas de modo que suas mãos, ou seus dedos, indiquem ou lembrem certos números. Afirma-se, por exemplo, que os dedos das mãos de Janus, cuja estátua está no Forum, em Roma, representam o número 365. No Oriente, a numeração mímica ainda é usada. Ela facilita aos negociantes, compradores e vendedores, de línguas diferentes, efetuarem seus negócios, nos bazares. E acontece, às vêzes, que, em represália a olhares indiscretos, nos mercados públicos, escondem suas mãos sob um pano.

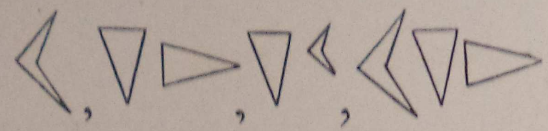
A numeração falada, e possìvelmente a numeração mímica, precedeu a numeração escrita, que só aparece, como um legítimo sistema, entre Egípcios e Sumerianos, de três mil e quinhentos anos antes de Cristo. Sumerianos eram antigos habitantes das regiões montanhosas do Iran, de onde emigraram, há cinco mil e quinhentos anos, para a antiga Mesopotâmia, no vale entre os rios Tigre e Eufrates, onde fica hoje o Iraq. A civilização a que atingiram é considerada como de alto grau. Mil e quinhentos anos mais tarde, isto é, nos dias de Abraão, o patriarca hebreu, os Babilônios tomaram o poder aos Sumerianos, cujos símbolos cuneiformes passaram a adotar. Chamamos Babilônios aos povos dos antigos impérios caldeu, assírio e babilônico.

Os antigos Sumerianos, como também os Babilônios de 2000 anos antes de Cristo, usaram um sistema decimal de numeração, substituído depois, por um outro. o sexagesimal. A razão de os Babilônios usarem tal sistema é desconhecida. O fato, porém, de dividirem o ano em 360 dias, deve tê-los levado a dividir também o círculo em 360 graus, cada grau representando a porção diária da suposta revolução anual do sol em derredor da terra. Sabiam provàvelmente que, num círculo, uma corda de comprimento igual ao raio subentende um arco igual à sexta parte da circunferência. Êsse fato pode bem ter-lhes sugerido o número 60, como uma unidade conveniente de arco, que se dividiu em 60 outras de ordem inferior (minutos), que, por sua vez, foram divididas em 60 unidades de ordem ainda inferior (segundos). Foram também os Babilônios que dividiram o dia em 24 horas, a hora em 60 minutos, e o minuto em 60 segundos.

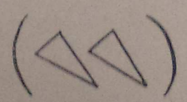
Na sua numeração escrita, os Babilônios usavam apenas símbolos cuneiformes, dados a conhecer, não por algum livro ou manuscrito, mas por textos que são, na sua maioria, simples ladrilhos ou tijolos de haro cozido, preservados durante séculos pelo sêco sol da Mesopotâmia.

Os mais antigos datam do 3.º milênio pré-cristão, outros, do tempo de Hamurábi (1950 A. C.); e ainda outros, do período compreendido entre o 6.º pré-século e o ano 300. Até hoje já foram descobertos, decifrados e catalogados cêrca de 80.000 dêsses textos cuneiformes, que têm revelado a cultura dos Babilônios. São notáveis os que foram achados em Nipur, em fins do século passado (1889) por uma expedição científica organizada pela Universidade de Pensylvania. Os de maior interêsse matemático, todavia, são os que o geólogo W. K. Loftus descobriu em Senkeret, em 1854. Parecem ter pertencido à Biblioteca de Sardanápalo (9.º séc. A. C.). O conjunto de todos êsses documentos (ladrilhos, tijolos ou cilindros, de barro cozido, e tábuas metálicas) revela, quanto à numeração dos Babilônios, o seguinte:

a) Que o símbolo dos números 1 e 60 é o mesmo;
b) Que os símbolos dos números 10, 100, 600 e 1000 são os seguintes, respectivamente:



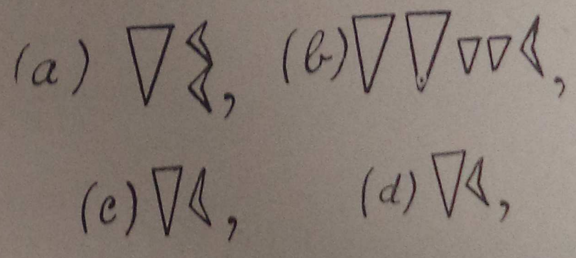
c) Que, no sistema decimal, os números inferiores a 100 são escritos em conformidade com um princípio aditivo; e os demais segundo princípios aditivo e multiplicativo.
d) Que os números maiores que 60 são escritos, quase sempre, segundo um sistema sexagesimal.
e) Que neste sistema, um símbolo escrito à esquerda de outro representa um número 60 vêzes maior do que representaria no lugar dêsse outro.
f) Que raramente é usado um símbolo



correspondente ao zero, parecendo que só fôra concebido muito tarde.

g) Que, no sistema sexagesimal não ocorrem os símbolos dos números 100 e 1000, dados no item **b**.
h) Que era raramente empregado um princípio subtrativo.

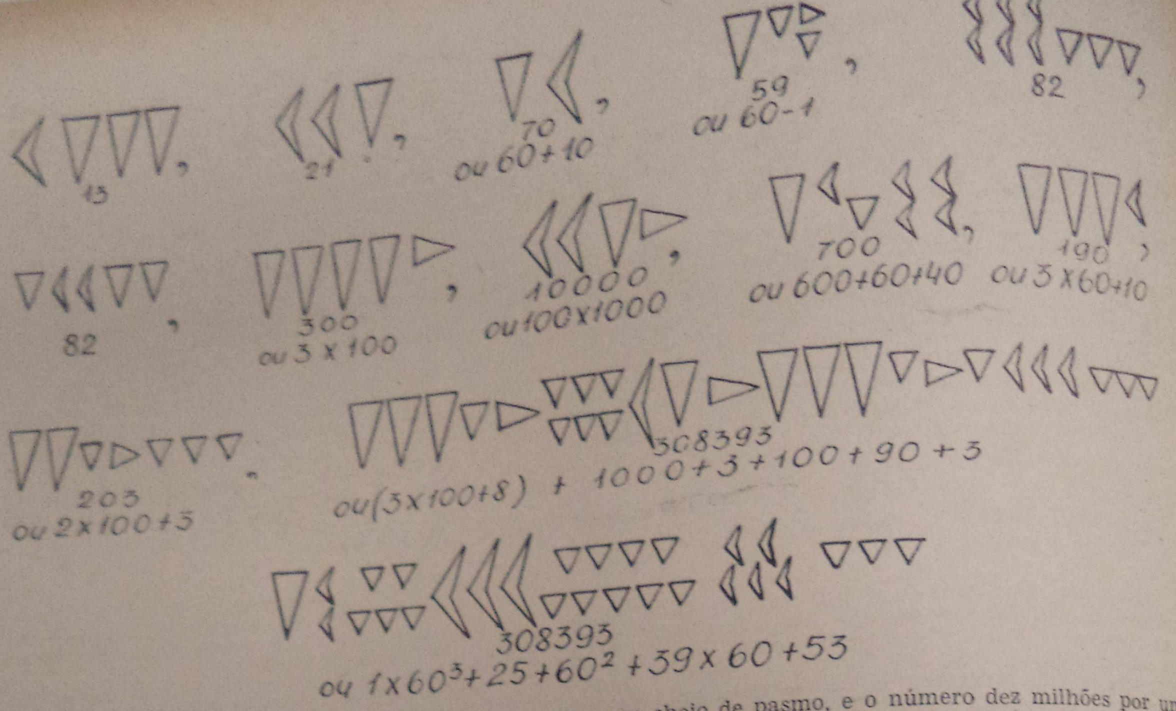
A falta de um símbolo capaz de indicar, sem confusão, a carência de unidades de uma certa ordem de um número representa grave defeito da numeração sexagesimal dos Babilônios; pois o espaço vazio, maior ou menor, ou o sinal, que, às vêzes, ocorre, correspondente ao nosso zero, mas constituído de tipos cuneiformes como os demais, não permite, em muitos casos, que se tenha a idéia de qual seja, em verdade, êste ou aquêle número, a não ser que se considere o sentido do conteúdo de que faz parte. Com efeito: Consideremos os seguintes conjuntos simbólicos, os quais, para referência, designaremos por **a**, **b**, **c** **d**.



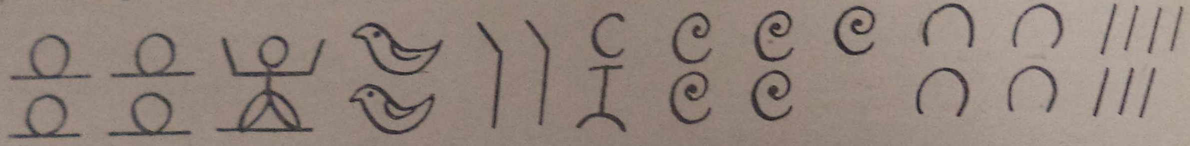
Será o número (a) $60 + 20$, ou $1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 20$?
Será o número (b) $4 \times 60 + 10$, ou $2 \times 60^2 + 0 \times 60 + 10$?
Será o número (c) $60 + 10$, ou 600 ?
Sera o número (d) $1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 10$, ou $1 \times 60^3 + 0 \times 60^2 + 0 \times 60 + 10$?

Os Babilônios podiam conceber, mais fàcilmente que os Gregos, números relativamente grandes. Um dos textos cuneiformes revela, por exemplo, êste número 195955500000000.

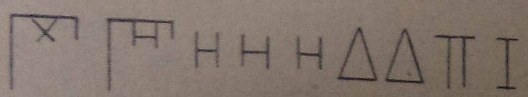
Damos, a seguir, exemplos de vários números, alguns escritos segundo o sistema decimal, e outros conforme ao sistema sexagesimal:



Os Egipcios, em sua numeração decimal hieroglífica, que data do 4.º milênio pré-cristão, representavam o número um por um traço vertical, o dez por uma ferradura, o cem por uma fôlha de palmeira enrolada em espiral, o mil por uma flor de lotus, o dez mil por um dedo indicador, o cem mil por um embrião de rã, o milhão por um homem cheio de pasmo, e o número dez milhões por um traço horizontal encimado por uma circunferência. O sistema tinha um princípio aditivo. No escrever-se um número, podiam tomar-se até nove símbolos de um mesmo valor, se necessário, dispondo-se uns sôbre os outros, ou em seguida aos outros. O número 41²21547, por exemplo, seria escrito assim:



Os Gregos tiveram três sistemas de numeração. O mais antigo, muito simples, mas paupérrimo, compunha-se das 24 letras do alfabeto em uso, às quais eram atribuidos valores numéricos. O valor prático de tal sistema era quase nenhum. Seu emprêgo ocorre, todavia, na Ilíada e na Odisséia. O segundo sistema, chamado herodiânico, tinha por símbolos as letras I, II, △, H, X e M, que, exceção feita de I, são as iniciais das palavras gregas para cinco, dez, cem, mil e dez mil. O sistema era quinário e se regia por princípios aditivo e multiplicativo. A letra II não era repetida; mas as outras podiam ser tomadas até quatro vêzes. O valor numérico de △, H, X ou M ficava multiplicado por 5, se uma dessas letras era colocada sob a letra II, junto ao traço horizontal. Nesta numeração, usada por Tales e Pitágoras, o número 5826, por exemplo, era escrito da seguinte maneira:



Foi Herodiano, gramático e historiador grego do 2.º século da era vulgar, quem reconstruiu e expôs êsse sistema de numeração, cujos símbolos aparecem também numa placa de mármore, ou ábaco, que Alfred Nagl encontrou em Salamina, em 1846.

Foi no 3.º século anterior a Cristo, e em virtude do exemplo dos Hebreus e Fenícios, que os Gregos voltaram a empregar, como símbolos numéricos, as 24 letras de seu alfabeto, às quais juntaram três outras, arcaicas, de origem semítica: o **stigma** depois do **zeta**, o **kappa** depois do **pi**, e o **sampi** depois do **ómega**. Criaram, então, um novo sistema, não quinário, mas decimal, com princípios aditivo e multiplicativo. Êste sistema de numeração, chamado greco-alexandrino, foi usado por Arquimedes, Euclides, Eratóstenes e todos os autôres clássicos de 1.ª Escola de Alexandria. Apareceu nas moedas mandadas cunhar por Ptolomeu Filadelfo e esteve em voga, por muitos séculos, ao longo do Adriático; em verdade, até o século 15, quando se findou o Império Bizantino com a queda de Constantinopla em 1453. Das 27 letras, tomadas em ordem, as nove primeiras representavam, respectivamente, os nove primeiros números naturais; as nove seguintes, as dezenas. as nove últimas, as centenas. Considerando o nosso antigo alfabeto, acrescido de um símbolo qualquer, e não o atual, que encerra digramas, em substituição ao grego, cujas letras dificultariam êste trabalho, temos:

a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	2	3	4	5	6	7	8	9
j	k	l	m	n	o	p	q	r
10	20	30	40	50	60	70	80	90
s	t	u	v	w	x	y	z	$
100	200	300	400	500	600	700	800	900

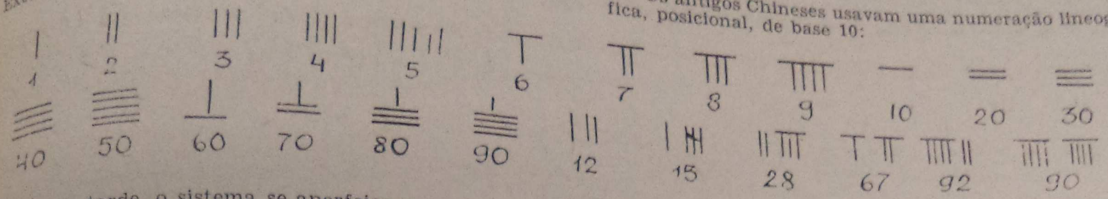
Uma letra empregada como símbolo numérico era, em geral, acentuada. Exemplos: v' (400), p' (70), c' (30). Se um conjunto literal representava um número, as letras eram tôdas acentuadas, ou encimadas por um traço único. O número 142 seria, então, s'm'b', ou $\overline{\text{smb}}$. Podia-se também permutar as letras: m'b's' é o mesmo número 142. O valor numérico de uma letra tornava-se mil vêzes maior, quando se colocava, junto ao seu pé, à esquerda, um sinal semelhante à cedilha. Exemplos: a (1000); n (50000); v (7000000). Em casos como êstes não se acentuavam as letras. A maiúscula M, colocada em meio a minúsculas, ou depois destas, tornava dez mil vêzes maior o valor numérico do símbolo literal que a precedia. Tal símbolo desempenhava, assim, a função de coeficiente de M. O número 43678, por exemplo, seria escrito da seguinte maneira: dMcxph (4 x 10000 + 3678). Em alguns casos, o coeficiente era colocado acima de M, ou sôbre M. Exemplos:

b
M
20000

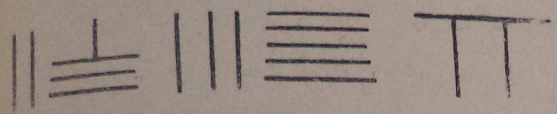
i
M
90000

c
Mdwki
34529

Os antigos Chineses usavam uma numeração lineográfica, posicional, de base 10:

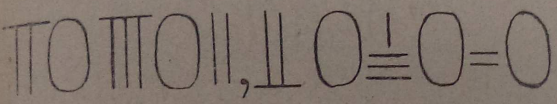


Mais tarde, o sistema se aperfeiçoou: os símbolos que ocupassem as posições correspondentes às ordens ímpares do que usamos (indo-arábico) teriam traços verticais; e os que ocupassem as outras posições seriam representados por traços horizontais. Esta regra, ligada ao cálculo executado com varetas, o qual se costumava desde séculos antes de Cristo, aparece na Aritmética de Sun-Tsu, do 3.º século cristão. O número 28357, por exemplo, seria escrito assim, segundo a regra de Sun-Tsu:



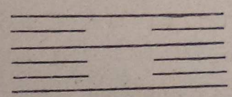
O modesto instrumento de cálculo dos antigos Chineses, um conjunto portátil de varetas, estendeu-se à Coréia e ao Japão. Os Coreanos, aliás, usavam, não raras vêzes, varetas de ossos, conhecidas como "ossos coreanos".

Quando a China e o Japão conheceram e adotaram o zero dos Hindus, puderam representar gràficamente os números, sem nenhum embaraço. No livro de Chin Chiu Shao, **Nove Secções de Matemática**, escrito em 1247, já aparece o zero. Os números 60802 e 608020, seriam, então, escritos assim:

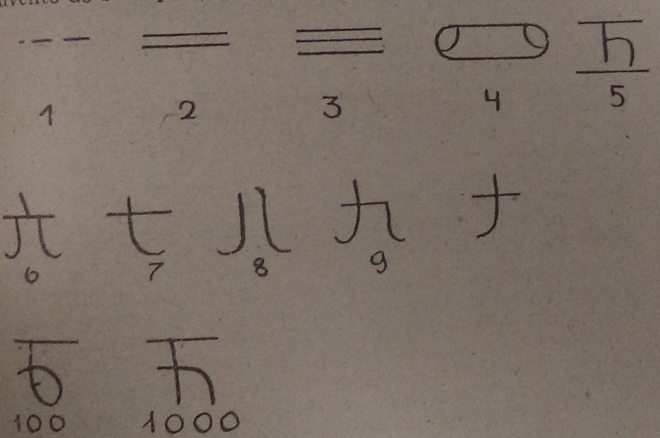


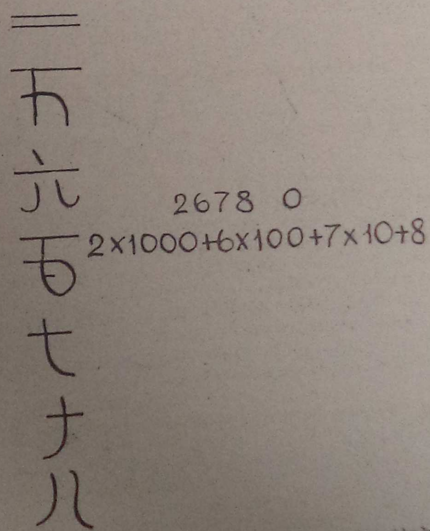
O aparecimento do zero, na China, coincide com o advento do swanpan, que, pouco a pouco, foi substituindo as varetas de calcular. O swanpan, ábaco que os Chineses vêm usando desde o século 12, foi introduzido no Japão, no século 16, e transmudado, anos depois, em um melhor instrumento, o soroban, ábaco atual dos Japoneses.

A China faz-nos voltar ao sistema binário, tão do gôsto de Gottfried Wilhelm von Leibniz, matemático alemão do século 17, que escreveu o primeiro trabalho que se publicou sôbre tal sistema, em 1703. Foi Leibniz quem decifrou uns símbolos semi-místicos encontrados em antigo documento chinês, atribuído ao filósofo e legislador **Fo-Hi**. Concluiu que eram números escritos em um sistema binário de numeração. Os símbolos numéricos eram apenas dois; um traço contínuo, que correspondia ao nosso algarismo 1 e dois traços menores, colineares, que desempenhavam a função do zero. O número 37, por exemplo, escrito no sistema binário, em algarismos indo-arábicos, apresenta-se assim: 100101. Êste mesmo número, porém, escrito com os símbolos do documento de Fo-Hi apresentar-se-ia da seguinte maneira:

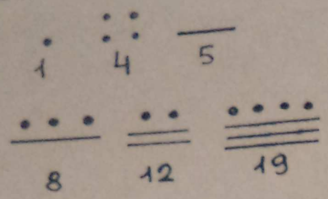


Hoje, na China e no Japão, usam-se, em larga escala, os algarismos indo-arábicos. Empregam-se, porém, paralelamente, não só os símbolos lineográficos, senão também outros, entre os quais os seguintes:



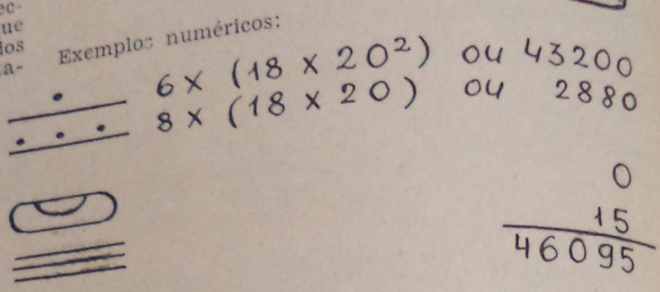


Os Maias de Yucatan, cuja escrita hieroglífica atingiu apreciável desenvolvimento, apresentavam-se com alto nível de civilização, no período compreendido entre a segunda metade do quinto século e o comêço do sétimo. Tical, em Guatemala, onde ergueram uma famosa pirâmide com 175 pés de altura, foi um dos principais centros de sua cultura. Criaram um sistema de numeração que se pode apontar como dos mais avançados. Tal sistema, com um princípio de valor de posição, tinha três símbolos apenas, um dos quais para indicar a carência de unidades de uma ou outra ordem de um número. Quanto à base, não era coerente, embora fôsse, em essência, vigesimal: O valor numérico de um símbolo que ocupasse a segunda ordem era 20 vêzes maior do que seria se estivesse na ordem das unidades simples; mas se êsse símbolo ocupasse a terceira, ou a quarta, ou uma outra das ordens subseqüentes, o seu valor, com relação ao que tivesse na primeira ordem, não era 400 vêzes maior (20^2), nem 8000 vêzes (20^3), nem outro número de vêzes representado por potência inteira de 20, mas sim, respectivamente, (18 x 20) vêzes, (18 x 20^2) vêzes, etc. É que o sistema ligava-se, de certo modo, ao fato de o ano dos Maias ter 18 meses de 20 dias, mais 5 dias complementa-

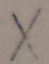
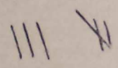
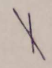
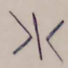
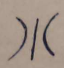


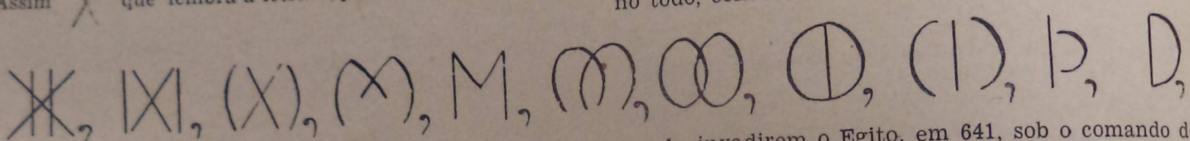
res. Os símbolos numéricos eram êstes: o ponto (1), que se podia tomar até quatro vêzes; o traço horizontal (5), que se tomava uma, duas ou três vêzes; e o sinal para o zero: 

Exemplos numéricos:



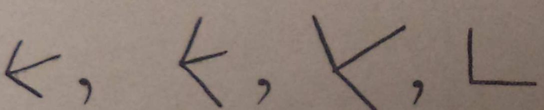
Os princípios que hoje norteiam a numeração romana datam de poucos séculos. Na Coluna Rostrata, em Roma, comemorativa da vitória dos Romanos sôbre os Cartagineses, em 260, antes de Cristo, encontra-se uma inscrição em que o número 3100000 é escrito com o símbolo de cem mil, tomado 23 vêzes. É que durante um longo período os Romanos não dispunham de símbolos para representar números superiores a 100000. O número 1 foi, a princípio, representado por um traço vertical, mais tarde substituído pela letra I. Os oito números seguintes eram representados também por traços: || (2), ||| (3), ||||||||| (9). Convencionou-se, depois, que, cortando-se um ou mais dêstes por um outro, o valor numérico primeiramente simbolizado tornar-se-ia dez vêzes maior.

Assim  que lembra a letra X, por que foi substituído, era 1 x 10, ou 10;  era 23. Cortado, por seu turno, o símbolo , obteve-se  ou 10 x 10. Êste símbolo de cem transmudou-se, com o tempo, em , em  e em , que cedeu lugar à letra C. Mil se representava, cortando-se duas vêzes o símbolo de dez. Era como que multiplicar 10 por 100, ou por 10 x 10. O novo símbolo foi-se também transformando até assemelhar-se, no todo, com M e em parte com D. Com efeito:



O símbolo do número mil foi, longo tempo, (|); o de dez mil, ((|)); e o de cem mil, (((|))). O símbolo de quinhentos era, indistintamente, (| ou |), isto é, a metade do de mil. Qualquer metade de X (v ou ∧) podia representar o número 5. Prevaleceu a da parte superior, v, que coincidia, em aparência, com a letra V. Segundo a regra dominante, para ter-se o símbolo de 50 era suficiente cortar V por um traço. E foi assim que se obteve

primeiramente , e em épocas sucessivas



Quem se inicia em numeração romana tem a tendência de se afastar das regras em vigor. E não é de estranhar. Os Romanos mesmo se afastaram ou desdenharam delas, não raras vêzes. Recentemente, em 1949, um sêlo postal emitido em homenagem ao físico Volta, trazia as datas 1799 e 1949 assim: MDCCIC e MCMIL. Damos aqui alguns exemplos, dentre muitos que temos colhido, os quais evidenciam a diversidade de modos de escrever, em numeração romana:

		6000	VIM
4	IIII	1999	$\overline{\mathrm{I}}\mathrm{IM}$
40	XXXX	80, ou 4x20	IIIIxx
400	CCCC	1690	IXIDCXC
83	XXCIII		
8	IIX	1180600	$\overline{\mathrm{IXI}}\,\overline{\mathrm{CLXXX}}\mathrm{DC}$

Pouco antes da morte de Maomé, em Medina, no ano 632, começaram os Árabes a desempenhar um papel que se tornou decisivo e notável no drama da civilização. Unidos pelo entusiasmo religioso, tornaram-se em prodigiosa fôrça e conquistaram, em menos de cem anos, a Síria, a Mesopotâmia, a Índia, a Pérsia, o Egito e grande parte da Espanha. Sob o domínio muçulmano passou a ficar, portanto, grande parte do mundo civilizado.

Ao invadirem o Egito, em 641, sob o comando do califa Omar, os Árabes atearam fogo à célebre Biblioteca da Universidade de Alexandria, a qual já tinha sofrido dois incêndios, um no tempo de Júlio César, e outro em 389, provocado pelos cristãos. Os manuscritos que escaparam ao fogo, e as cópias e traduções anteriormente feitas, reconstruiram, em grande parte, a civilização helênica. Dominado o Egito, os sábios e estudiosos de Alexandria emigraram para Constantinopla, que se tornou e permaneceu, durante 800 anos, o centro do ensino grego no Oriente. A biblioteca incendiada parece que ressurgia em outras academias, notadamente nas de Antioquia e Edessa, para onde os sábios muçulmanos foram atraídos desde 762 quando, na Pérsia e na Mesopotâmia foi restabelecida a paz pelo califa al-Mansur, que se dedicou, como os outros que o sucederam, principalmente al-Mamum, a proteger a ciência, a filosofia e as letras. Sabe-se que uma das condições de paz que al-Mamum impôs a Miguel III, imperador bizantino, foi a entrega de todos os manuscritos dos sábios gregos.

Abrimos um parêntese em meio à campanha muçulmana, tão ligada à numeração decimal que usamos, e aos algarismos indo-arábicos, para contar, em linhas gerais, a história de Alexandria e sua famosa Universidade: Quase três séculos depois de Tales, Alexandre Magno, filho de Filipe da Macedônia, dominava o mundo conhecido, em que o pensamento grego se tornava universal. Fundou, então, Alexandria, no Egito, formosa cidade, cuja construção confiou a Dinócrates, arquiteto do templo de Diana, em Éfeso, considerado uma das sete maravilhas. Na capital do vale do Nilo, Ptolomeu I, um dos generais de Alexandre, feito rei do Egito, fundou a Universidade, fadada a desempenhar, como de fato desempenhou, o mais importante papel na civilização helênica. A Universidade e sua Biblioteca foram o núcleo onde se desenvolveu uma escola de filosofia e matemática, conhecida, segundo dois períodos distintos em que floresceu, como 1.ª e 2.ª Escolas de Alexandria. Pertenceram à 1.ª Escola, cujo maior brilho foi o da época greco-alexandrina, que findou em 146 A. C. com a queda das nações gregas, os seguintes matemáticos, entre outros: Arquimedes, o maior gênio de todos os tempos; Apolônio, que estudou profundamente as secções cônicas; Hiparco, eminente astrônomo e criador da trigonometria; Eratóstenes, sábio enciclopedista, professor e bibliotecário; e Euclides, o autor dos **Elementos**, que são o livro de texto (Geometria) mais divulgado em todo o mundo, e a obra mais difundida, depois da Bíblia. Eratóstenes era também atleta e campeão dos cinco jogos olímpicos. Dominada a Grécia, continuou independente o Egito, por favor de Roma. Mas Otávio, o imperador, não poude, finalmente, tolerar a desorganização a que chegara o Estado do Nilo no tempo de Cleópatra. Subjugou, então, o Egito, que foi anexado ao império romano. Paralisados os estudos, durante a agitação política mais intensa, reabrem-se as portas da Universidade e tem início, no ano 30 A. C., o período que marca a existência da 2.ª Escola de Alexandria, em que durante seis séculos estudaram os mais eminentes cientistas, filósofos e literatos, não só de Grécia e Roma, mas de todo o mundo civilizado. Invadida, porém, a África, a Biblioteca foi incendiada pelos Árabes, que inicialmente manifestaram acentuado desprêzo pelos estudos. Era chegado o fim. Deviam apagar-se, para sempre, as luzes do mais altaneiro farol: aquêle que tinha iluminado, durante nove séculos, o roteiro laborioso e magnífico dos ilustrados mestres e distintos discípulos das 1.ª e 2.ª Escolas de Alexandria.

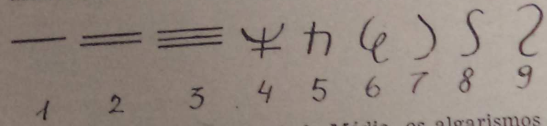
Voltemos aos Árabes. Terminadas as conquistas bélicas, e cessada a campanha político-religiosa, seguiu-se um período de florescimento cultural, que perdurou até o século 13. Em tão vasto império, porém, tornava-se fatal a divisão política, em virtude, não só, de problemas de sucessão, mas do fato de constituir a religião o único vínculo com que se pretendia unir tão grande número de súditos. E foi assim que, no ano 750, Abul-Abbas destronava Abderrame que, refugiado em Espanha, fundou, em 756, o califado de Córdova. Pouco depois, o califado do Oriente, com sede em Damasco, transferia-se para Bagdad, que al-Mansur, cujo govêrno foi de 754 a 775, fundara com as ruínas de Babilônia. Destruída a formosa cidade pelos Mongóis, em 1258, o govêrno transportou-se para o Egito, que já tinha servido de sede, de 909 a 1171, a um dos dois califados em que se desdobrara o do Oriente, em virtude de lutas partidárias.

De Bagdad, para onde al-Mansur transferira de Damasco a sede do califado, a cultura se estendeu por todo o império muçulmano. Cairo, Damasco, Alexandria, Sicília, Granada, Sevilha, Toledo, Salamanca e outras cidades tornaram-se em grandes centros intelectuais. Na Espanha, os Árabes acenderam, em verdade, o facho da civilização, que não sòmente iluminou tôda a Europa, na Idade Média, mas abriu-lhe o caminho para a renovação científica, que se inicia no século 12. Com efeito: Estabeleceu-se, na Península Ibérica, um verdadeiro e inexcedível intercâmbio científico, filosófico e literário. Traduziram-se os manuscritos clássicos dos Gregos e as obras notáveis dos Hindus, dos Árabes, dos Persas e de outros povos. No século 13, porém, com a divisão do império, a invasão mongólica e as cruzadas, apagava-se o brilho do mundo muçulmano. Neste mesmo século, todavia, os sábios europeus, principalmente os da Itália, os da Universidade de Paris, fundada em 1200, os da Universidade de Salamanca, do Oxford, de 1214, e os da Universidade de reinado de Afonso IX (1188-1239), dão início a um novo surto cultural, cujo nível, anos depois, com a invenção da imprensa em 1442, e daí para diante, supera o das escolas árabes. O império muçulmano, reduzido no século 13 ao reino de Granada, cai, finalmente, em 1492. Neste mesmo ano Colombo desembarca no Mundo Novo e tem princípio a Idade Moderna.

Entre as obras indianas, que se traduziram na Espanha Muçulmana, destacamos a Aritmética que al-Khwarizmi escreveu em 820, depois de ter voltado da Índia aonde fôra por ordem do califa al-Mamum, de quem era amigo e bibliotecário. Abu Abd Allah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, natural da Pérsia, homem culto, astrônomo e geógrafo, escreveu também, em 825, uma notável álgebra, **Hisab al-jabr wal muqabala** (transposição e remoção de têrmos numa equação), considerada, 700 anos mais tarde, e até Viéte, o livro básico nesse ramo da Matemática. Em sua Aritmética, cujo original se perdeu, al-Khwarizmi expõe e usa a numeração indiana, seus símbolos numéricos, e a maneira de calcular dos Hindus. Foi traduzida, na Espanha, no século 12, primeiro, ao que parece, por Athelard of Bath, e depois, por Juan de Sevilla. A primeira tradução acha-se na biblioteca da Universidade de Cambridge e tem o seguinte título: **Algoritmi de numero Indorum.** Suas primeiras palavras são estas: **Dixit Algoritmi** (Disse al-Khwarizmi). A tradução de Sevilla traz o título **Liber algorismi de practica arithmetica.** Os nomes algarismo e algoritmo, que usamos, são corrupções do nome al-Khwarizmi, tornado, assim, imortal. A palavra álgebra, por sua vez, se deriva de uma parte do título de sua obra sôbre o assunto. Da leitura de vários historiadores fica-nos dúvida sôbre de quem teria sido, em verdade, a tradução da Aritmética de al-Khwarizmi, que se acha na Universidade de Cambridge; pois afirmam alguns que Aben-Deuth, rabino convertido ao Catolicismo, sob o nome de João de Luna, é quem a traduziu e lhe deu o título **Algoritmi de numero Indorum.** Athelard of Bath, nesse caso, teria feito uma tradução a que dera o nome **Liber Ysagogarum Alchoarismi.** Não importa tanto o tradutor, a nosso ver, mas a obra que al-Khwarizmi escreveu em árabe. Parece, finalmente, ter havido uma outra tradução, que se afirma ter sido feita por Robert of Chester.

Outros livros, ou manuscritos, contribuíram para difundir a numeração indiana: o de John of Halifax, **Algorismus Vulgaris**; o de Alexandre de Ville Dieu, **Carmen de Algorismo** (em versos); o de **Jordanus Nemorarius, Demonstratio Jordani in Algorismo**; e o de Leonardo de Pisa, ou Fibonacci, **Liber Abaci**, em que o autor recomenda, com todo o entusiasmo, o cálculo à moda indiana (**modi indorum**), que aprendeu com professôres árabes, no norte da África, onde esteve longo tempo. Êsses quatro livros foram escritos no século 13. Outros mais foram aparecendo, em hebraico, inglês, italiano, francês, e em outras línguas. Não sòmente êsses manuscritos, mas também o comércio, interior e exterior, os viajantes, os mercadores, as folhinhas e os almanaques contribuíram para a difusão dos "algarismos".

Os símbolos numéricos indianos, 1, 2, 3, ... 9, aos quais chamaremos, daqui para diante, algarismos indo-arábicos, datam, provàvelmente, do 3.º século antes de Cristo. Quanto ao zero, investigações recentes pretendem concluir que procede do 2.º pré-século. Os eruditos em filologia sânscrita, todavia, fazem datar do 5.º século de nossa era a primeira exposição do sistema decimal indiano, com o uso metódico do zero. Revelam também que os Hindus, que se compraziam em conceber grandes números, chegavam a afirmar que a casa de Brahma se alegrava com a presença de cem milhões de filhos e que o céu era habitado por 24 milhões de milhões de deuses. Em eras mais remotas, os Hindus, à maneira dos Gregos e Hebreus, davam valor numérico às letras de seu alfabeto. Empregavam consoantes para exprimir os algarismos de 1 a 9; e depois, pela justaposição de uma vogal a cada consoante, obtinham os símbolos das diferentes unidades decimais. Com as letras de nosso alfabeto, seriam êstes os exemplos: ga (3), gi (30), gu (3000). O seu alfabeto se chamava dêvanâgari, que significava escritura dos deuses. É esta a razão por que, às vêzes, os algarismos indo-arábicos são impròpriamente chamados cifras dêvanâgari. Os Árabes também, anteriores a Maomé, representavam os números com as letras de seu alfabeto. No primeiro século pré-cristão, os algarismos, que hoje usamos, se apresentavam assim:



Nos manuscritos da Idade Média, os algarismos indo-arábicos se escreviam, como é natural, com acentuada diversidade de formas. Depois da imprensa (1442), porém, cada um dêles assume sua feição definida e definitiva. Chamamos-lhes indo-arábicos porque são de origem indiana e foram divulgados principalmente pelos Árabes. Sua primeira aparição no Ocidente, todavia, parece ter-se dado por intermédio de Boécio (Anício Mânlio Severino Boécio), romano ilustre, neo-pitagório, versado em literatura e ciência dos Gregos. A invenção do sistema decimal indiano teria sido comunicada aos sábios gregos da Escola de Alexandria, na época em que existiram intensas relações comerciais entre a Índia e o Egito. Dos manuscritos de Boécio (475-526) aprenderam outros mestres, inclusive Gerberto, eleito Papa, em 999, sob o nome de Silvestre II.

Dantzig faz considerações interessantes sôbre como poderia ter ocorrido, pela primeira vez, entre os Hindus, o símbolo zero. Imagina êle que a ocorrência poderia ter-se dado assim: Um Hindu desconhecido, ao retratar gràficamente um certo número representado pelas marcas no seu tabuleiro de areia ou pó, teria tido a genial idéia de indicar, de alguma maneira, a coluna que se apresentava vazia, evitando, assim, qualquer dúvida sôbre qual seria o número escrito. Se a coluna das unidades tivesse duas marcas (a suposição é nossa), ou dois sulcos, se a das centenas, três; e se as demais se apresentassem vazias de qualquer sinal, o número a representar por escrito devia ser 302. O vazio da coluna das dezenas talvez tivesse sido, então, indicado por algo que retratasse essa coluna: 3□2, ou 3□2, ou 3□2. Êsse retrato de coluna ter-se-ia transmudado no zero.

E' possível que os antigos Hindus, em caravanas até Babilônia, tenham encontrado ali, não só o germe do sistema posicional, senão também o do símbolo das ordens vazias. É certo, no entanto, que o zero se tornou, com êles, e sóo com êles, no mais importante protagonista da numeração. Diz Hogben que "em tôda a história da Matemática, nada foi mais revolucionário do que a invenção do zero". Quanto ao sistema que usamos, é a melhor conquista dos Hindus, e uma das mais felizes da inteligência humana. Lembra Laplace que ela "escapou ao gênio de Arquimedes e Apolônio, dois dos maiores homens produzidos pela antiguidade". E é fato incontestável que a numeração indiana facilitou de tal modo os cálculos, que permitiu à Matemática um surto assombroso de progresso. A venerável ciência tornou-se em principal instrumento de análise e predição. O homem, feito profeta, vaticinou eclipses, descobriu planetas, previu elementos químicos, profetizou acontecimentos, e abriu os pórticos misteriosos do Universo. A probabilidade de chegar aos cinqüenta anos quem hoje tem quarenta, como também a da ocorrência de um ciclone, ou de um incêndio, ou de um naufrágio, é determinada matemàticamente, e não apenas enunciada de modo vago. Importante para os exércitos de invasão do general Eisenhower, era que êle soubesse, tão precisamente quanto possível, qual era de fato, qual era exatamente, a probabilidade de ser o tempo bom ou ruim, em tal ou qual período do ano, no Mar da Mancha ou do Norte, em terra firme ou no ar. Jóias, peças de arte, mercadorias e utilidades de todo gênero, ou tipo, provindas do Oriente, da Europa, das Américas, ou de qualquer parte, podem ter nomes diferentes, fácil ou dificilmente pronunciáveis. Os números, porém, com que lhes marcam a indústria e o comércio, são escritos com os mesmos símbolos, hoje universais.

A simplicidade de um sistema de numeração é condicionada por vários fatôres: a) poucos símbolos para representar os números; b) poucas palavras para nomeá-los; densidade que torne fácil a percepção dos valores numéricos; e d) notação que facilite o cálculo. Nenhum sistema satisfaz, como o decimal indo-arábico, a estas quatro condições. Com efeito:

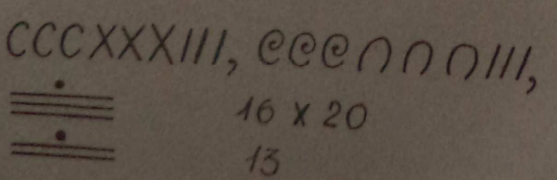
1) Com um ou mais símbolos ou algarismos, dentre dez apenas, tomado qualquer dêles, ou cada um dêles, uma ou mais vêzes, é possível representar todos os inteiros.

2) Com os mesmos dez algarismos e uns poucos sinais gráficos, representam-se as frações, os números decimais, os negativos, os irracionais e os imaginários.

3) Dada a freqüência de nomes iguais e a conseqüente economia de nomes distintos, é possível nomear com poucas palavras, um considerável número de números diferentes.

4) A distribuição dos algarismos segundo ordens, como a constituição de classes, formadas de grupos de ordens, não só permite a economia de nomes e símbolos diferentes, mas facilita a leitura dos números e torna possível ter-se a idéia imediata do valor de qualquer dêles.

5) O fato de o sistema ser decimal, posicional, e apresentar-se com símbolos próprios, independentes, para cada um dos nove primeiros números naturais, permite escrever econômicamente os números, que representam, quase sempre, somas de produtos dos inteiros 1, 2, 3, ... 9, por potências de 10. Exemplo: 300 + 30 + 3, ou 333. Esta soma, os Romanos, os Egípcios, ou os Maias apresentariam assim, respectivamente:



6) O símbolo zero (0), que indica a ausência de unidades em uma ou mais ordens, permite o cálculo gráfico-analítico, que se efetua diretamente sôbre números representados por algarismos, não sendo, portanto, necessário, nenhum instrumento mecânico de calcular.

E' comum apresentar-se, como princípio fundamental da numeração falada, a seguinte proposição: "Dez unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior." Ora, não é êste um princípio que caracterize nenhuma numeração falada, mas sim um princípio básico de qualquer sistema decimal de numeração. Princípio de numeração falada, como apresenta o sistema indo-arábico, seria êste: O princípio segundo o qual as várias ordens de unidades de um número se dividem em classes, constituída cada uma de três ordens: das unidades das dezenas, das centenas. São, em verdade, as classes que permitem nomear tão fàcilmente os números, isto é, com o emprêgo de tão poucos nomes.

O sistema decimal indo-arábico, tão simples, fácil e elegante, não teve, todavia, de início, a aceitação que era de esperar. Travou-se, em verdade, árdua luta entre algoristas e abacistas, a qual se prolongou desde o século 13 até 1826, muito embora, e felizmente, a partir do 16.º século já fôssem bem poucos os campos onde ainda se combatia. Foi realmente difícil vencer a rotina dos que, habituados aos sistemas romano e grego, principalmente o romano, não divisavam, na nova numeração, as vantagens com que se apresentava. E havia até, como quase sempre, o interêsse pessoal. A simplicidade do sistema dos algoristas constituia, de certo modo, um risco capaz de destruir o monopólio dos calculadores profissionais, receosos, sem dúvida, de perder os seus empregos. Entre os muitos fatos que assinalam o longo período em que o sistema romano lutou desesperadamente, perdendo, por fim, a batalha, apesar do poder de Roma, suas leis, sua religião e sua língua, citamos os seguintes:

a) Nos Estatutos da Arte de Câmbio, de 1299, os banqueiros de Florença foram proibidos de usar os algarismos indo-arábicos, chamados, então, "infiéis".

b) Nos arquivos italianos do século 13 encontraram-se indícios evidentes de que o uso dos algarismos foi também proibido aos mercadores, que os empregavam, no entanto, como que à maneira de códigos secretos.

c) No Oriente, no 14.º século, a numeração indo-arábica encontrava-se mesclada dos sistemas romano e grego.

d) A diretoria da Universidade de Pádua ordenou, em 1348, que não se adquirisse, para a biblioteca, nenhum livro cujo preço estivesse marcado em "cifras".

e) Nicolau Copérnico, em sua obra sôbre o sistema solar, escrita em 1520, **De revolucionibus orbium coelestium**, empregou uma estranha mistura de símbolos romanos e indo-arábicos.

f) No século 16 foram escritos, na Europa, principalmente na Áustria e na Alemanha, vários compêndios de Aritmética, nos quais se teimava em ensinar o cálculo por meio do ábaco.

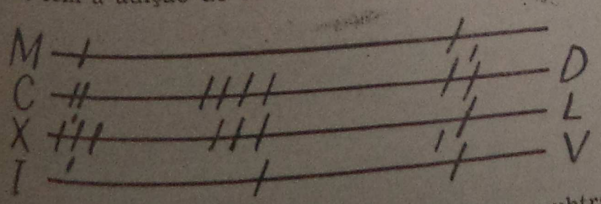
g) Na França, o Tribunal de Contas, ou Cour de Comptes, não abandonou, senão no século 18, os símbolos romanos, usados até a Revolução (1789), na contabilidade pública oficial. Em Paris, publicou-se, em 3.ª edição, em 1781, uma Aritmética (L'Arithmétique en sa perfection) cujo autor, F. le Gendre, recomendava o uso do ábaco, dizendo, entre outras coisas, ser possível, com êle, efetuarem-se todos os cálculos necessários em negócios. Dizia também que era usado, com enorme sucesso, não só no Tesouro, mas em tôdas as repartições do govêrno.

h) Na Inglaterra, no reinado de Elizabeth I (1558-1603), ainda se usava oficialmente a numeração romana, como revelam, por exemplo, registros relativos à Armada de Espanha. Neste mesmo país, o Departamento do Tesouro empregou, até princípios do século 19, o sistema de réguas dentadas. Estas réguas não eram mais que ripas, não uniformes, cujos dentes, cortes ou talhas, menores e maiores, representavam pence, shillings e diferentes unidades de libras. Tais ripas, que serviam em contratos, eram feitas em duplicatas, cabendo uma delas a cada contratante. Abolidas em 1826, no reinado de George IV, e mandadas guardar em Westminster, foram transferidas, mais tarde, para a Casa dos Lords, onde sofreram finalmente o golpe fatal, em 1834, com o incêndio das Casas do Parlamento (Senado ou Casa dos Lords e Câmara dos Comuns). Poucos anos depois, Charles Dickens descrevia sarcàsticamente o episódio e estranhava que a rotina oficial, desdenhando lápis, tinta e papel, tivesse mantido, até aquela época, "como se fôssem pilares da Constituição", aquêles velhos e sujos sarrafos que o govêrno, há muito tempo, devia ter dado aos pobres, para servirem de lenha.

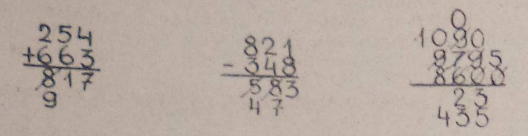
A palavra zero vem de **zephirum**, como cifra vem de sifr. Sifr é a versão árabe da palavra indiana **sunya**, que significa vazio ou vazia. Sunya é, assim, a origem do zero. Recordava aos Hindus a coluna vazia do seu tabuleiro de pó, ou instrumento de calcular. Na Europa, porém, o têrmo cifra, ou qualquer dos vocábulos cipher, ziffer, e chiffre, significou, durante longo tempo, um número escrito segundo a numeração indo-arábica. Cifras, plural de cifra, serviu, por sua vez, para designar, não apenas números em símbolos indo-arábicos, mas êstes mesmos símbolos. A gente do povo não compreendia, a princípio, os cálculos em que eram usados os "algarismos" ou "cifras". Era preciso, então, interpretá-los ou decifrá-los. Dêste estado de coisas, e do fato de os algarismos serem usados, não raras vêzes, às escondidas, em meio a lutas e proibições, é que nos vem o verbo **decifrar**, que permanece, como afirma Dantzig, qual um monumento a recordar os dias em que algoristas e abacistas se empenhavam, porfiando, uns e outros, por defenderem os seus meios de calcular. Algoristas eram os que calculavam direta e analìticamente sôbre os números escritos com os algarismos; e abacistas, os que empregavam o ábaco ou instrumento mecânico de calcular. O arranjo ou a disposição dos números para o cálculo, entre os algoristas, era chamado algorismo (hoje algorítmo).

O ábaco é formado, em geral, de um quadro, ou de uma moldura, com vários fios paralelos em que deslisam botões, anéis, ou bolas móveis. Sua origem é desconhecida e remonta à antiguidade. Observava Herodotus, no 5.º século pré-cristão, que os Gregos, ao usarem-no em seus cálculos, moviam a mão da esquerda para a direita, enquanto os Egípcios a moviam da direita para a esquerda. Existiram, e ainda existem, vários tipos de ábacos. Os primitivos eram simples tabuleiros de areia, divididos em secções correspondentes às várias ordens de unidades de um número. Foram usados na Índia, pelos Hindus, que empregavam também pranchetas cobertas de pó e pequenos quadros negros onde escreviam com tinta branca fácil de apagar. À medida que faziam os cálculos, apagavam os símbolos numéricos de que se iam servindo, deixando finalmente só o resultado. Rever os cálculos era-lhes, então, pràticamente impossível. Usavam por isso, e talvez só por isso, a prova dos nove. No tabuleiro de areia, faziam-se, com os dedos, as marcas que representavam as unidades de diferentes ordens de um número. Na prancheta, as marcas eram feitas com èstilete próprio. Entre os Romanos antigos, esteve muito em voga o ábaco de pó. Usavam também quadros retangulares, de madeira, mármore ou metal, divididos em secções onde se colocavam pedrinhas ou botões, em sulcos apropriados. Os ábacos foram-se aperfeiçoando. Surgiram os que eram formados por fios paralelos e verticais, de madeira ou metal, firmados sôbre um suporte. Nesses fios corriam conchas furadas, ou anéis de diferentes substâncias. Apareceram finalmente o swan-pan dos Chineses, o soroban dos Japoneses, e outros ábacos, usados, ainda hoje, por Russos, Turcos e Persas. São quadros ou molduras com fios paralelos em que deslisam botões móveis.

Na Europa Medieval, usou-se muito o ábaco romano, de linhas ou pautas horizontais, traçadas em papel, pano, madeira, mármore ou metal, as quais correspondiam, de baixo para cima, aos valores numéricos 1, 10, 100, 1000, 10000. Os espaços entre as pautas, por sua vez, serviam para indicar os números 5, 50, 500, 5000. Com êsse tipo de ábaco, substituiam-se, às vêzes, por sinais gráficos, os seixos, os botões, ou quaisquer outros marcadores. No seguinte ábaco, acham-se gràficamente representados os números 1285 e 431, como também o resultado (1716) obtido com a adição de ambos.



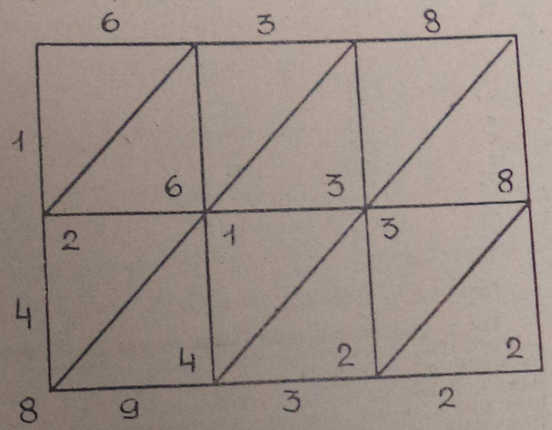
Os Hindus e os Árabes faziam a adição e a subtração, operando da esquerda para a direita, processo que continuou parcialmente em uso até cêrca de 1600. Atribui-se ao inglês Garth o método que usamos. A multiplicação, considerada laboriosa, efetuavam-na, quase sempre, com o recurso de ábacos. Quanto à divisão, era tida como tão difívil, que só os matemáticos experimentados poderiam fazê-la. Remediavam a dificuldade, com o emprêgo de tábuas de cálculo, de simples entrada. Os resultados das três primeiras operações eram verificados pela prova dos nove, de origem indiana, segundo Avicena, Árabe ilustre, e apresentada por al-Khwarizmi, em sua famosa Aritmética. Os Hindus faziam, em geral, a subtração pelo método de decomposição, ou ou "de pedir emprestado"; mas empregavam também o método de compensação. Neste método, tôdas as vêzes em que se somam ao minuendo dez unidades de uma certa ordem, soma-se também ao subtraendo uma unidade de ordem imediatamente superior. Exemplo: Em 736 — 258 diz-se: 16 menos 8 ... 8; 13 menos 6 ... 7; 7 menos 3 ... 4. Damos, em seguida, exemplos de adição, subtração e multiplicação, efetuadas à maneira dos Hindus e dos Árabes:



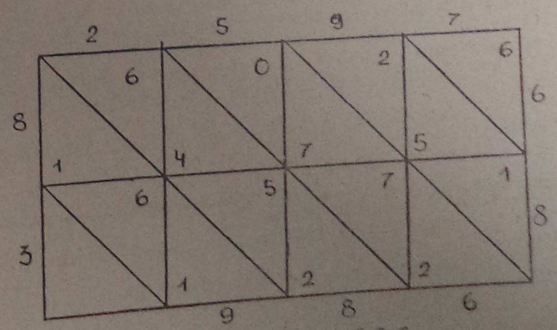
As emendas, que aqui aparecem, não apareciam no ábaco; pois, à medida que iam calculando, novos algarismos substituiam os que se apagavam. No final, aparecia sòmente o resultado:

254	821	10005
+663	—348	
917	473	23
		435

Os Hindus e os Árabes conheciam outro processo de multiplicar, **pergelosia**, empregado na Idade Média, pelos europeus, principalmente os Italianos. Damos dois exemplos do processo, deixando aos leitores descobri-lo:



638 x 14 = 8932



2597 x 38 = 98686

O povo grego, em geral, servia-se do ábaco para as quatro primeiras operações elementares. Empregavam também, não raras vêzes, tábuas de cálculo, uma para adição e subtração, outra para multiplicação e divisão. Os processos que usavam, de somar e subtrair, eram, em essência, iguais aos nossos. Os mais capazes, quando operavam sôbre símbolos numéricos, faziam a multiplicação, dispondo o multiplicador sob o multiplicando, e operando da esquerda para a direita. Exemplo:

w p h	47
m g	578
b M ç w	4046
ç t r	2312
u p f	27166
b M g s o f	

$$\begin{array}{rcrcl} 500 \times 40 + 500 \times 7 & = & 20000 + 3500 & = & 23500 \\ 70 \times 40 + 70 \times 7 & = & 2800 + 490 & = & 3290 \\ 8 \times 40 + 8 \times 7 & = & 320 + 56 & = & 376 \\ & & & & \overline{27166} \end{array}$$

Os Babilônios empregavam o ábaco para a adição e a subtração. Para a multiplicação e a divisão, porém, empregavam tábuas prèviamente preparadas. Podiam obter prontamente vários quocientes, inclusive o da divisão de 12960000 por 81.

Os Egípcios usavam, para a adição e a subtração, ou ábacos, ou tábuas de cálculo. Obtinham o produto de dois números por meio de duplicações sucessivas do multiplicando. Quanto à divisão, obtinham os quocientes com o recurso de produtos, considerando que os atos de multiplicar e dividir representavam operações inversas, uma da outra. Damos a seguir, exemplos que evidenciam os processos pelos quais obtinham os produtos e os quocientes. Seja obter o produto de 103 por 49, e o quociente de 657 por 34.

1	103
2	206
4	412
8	824
16	1648
32	3296

1	103
16	1648
32	3296
49	5047

$103 \times 49 = 5047$

1	34
2	68
4	136
8	272
16	544

657
—544, ou 34 x 16
113
—68, ou 34 x 2
45
—34, ou 34 x 1
11

$657 = 34\ (16 + 2 + 1) + 11 = 34 \times 19 + 11$

Conclusão: quociente 19; resto 11

Foi provàvelmente em Florença que se usou, pela primeira vez, o corrente método de multiplicação. E foi na Itália, em princípios do século 14, que se começou a fazer a divisão da maneira como a fazemos hoje. O método surgiu tarde. Mas não é de estranhar; pois a divisão ainda é hoje a operação mais difícil de ensinar e de aprender.

Desta história da numeração, que se liga, de certo modo, à história das quatro primeiras operações elementares, impende deduzir algumas lições, que constituem diretrizes para o ensino. Cumpre, com efeito:

a) Chamar indo-arábicos aos algarismos que usamos.

b) Representar o número **um** por um simples traço vertical.

c) Dar de mão à prova dos nove.

d) Não chamar princípio fundamental da numeração falada à seguinte proposição: "Dez unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior."

e) Ter em mente que, no sistema decimal indo-arábico, a idéia fundamental é a idéia de dezena.

f) Ensinar a numeração, desde o primeiro ano primário, servindo-se, a princípio, de um tabuleiro de areia, que tanto se presta para evidenciar a função do zero.

g) Salientar a simplicidade da numeração que usamos, confrontando-a com outras, ao menos com as dos Romanos e Egípcios.

h) Lembrar-se de que a divisão é a operação mais difícil de ensinar e de aprender. Ensiná-la por etapas, fazendo os alunos vencer uma só dificuldade de cada vez.

BIBLIOGRAFIA

1) Archibald, Raymond Clare. **Outline of the History of Mathematics**. Oberlin, Ohio: Mathematical Association of America, Inc., 1936.
2) Bakst, Aaron. **Mathematics, Its Magic and Mastery**. Toronto: D. Van Nostrand Company, Inc., 1952.
3) Bell, E. T. **The Development of Mathematics**. New York: Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1940.
4) Boyer, Lee Emerson. **An Introduction to Mathematics for Teachers**. New York: Henry Holt and Company, 1945.
5) Brueckner, Leo J. e Grossnickle, Foster. **How to Make Arithmetic Meaningful.** Philadelphia: The John C. Winston Company, 1947.
6) Cajori, Florian. **A History of Elementary Mathematics.** London: Macmillan and Co., Ltd., 1930.
7) **A History of Mathematics.** New York: The Macmillan Company, 1950.
8) Colerus, Egmont. **De Pythagore à Hilbert.** Paris: Flammarion, 1937.
9) Conant, Levi Leonard. **The Number Concept.** New York: Macmillen and Company, 1931.
10) Court, Nathan Altshiller. "Mathematics in the History of Civilization", **The Mathematics Teacher**, XLI (1948), 104-111. Washington, D. C.: The Nacional Council of Teachers of Mathematics.
NOTA: Daqui para diante, designaremos esta revista pelas iniciais M. T.
11) Covey, E. Baker. "Outgrowth of a Philosophial Approach to the Teaching of Mathematics", M. T. XLII (1949), 133-142.
12) Dantzig, Tobias. **Number the Language of Science.** New York: The Macmillan Company, 1937.
13) Hogben, Lancelot. **Mathematics for the Million.** New York: W. W. Norton and Company, Inc., 1937.
14) Jones, Phillip S. "Large Roman Numerals", M. T. XLVII (1954), 194-195.
15) "The Binary System", M. T. XLVI (1953), 575-577.
16) Karpinski, Louis Charles. **The History of Arithmetic.** Chicago: Rand McNally and Company, 1925.
17) Keith, Alexander e Robertson, James. **The Principles of Arithmetic.** London: Blackie and Son Limited, 1951.
18) Kramer, Edna E. **The Main Stream of Mathematics.** New York: Oxford University Press, 1951.
19) Loria, Gino. **Historia Sucinta de la Matemática.** Buenos Aires: Ibero-Americana, 1948.
20) Ore, Oystein. **Number Theory and its History.** New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1948.
21) Pastor, J. Rey e Babini, J. **Historia de la Matemática.** B. Aires: Espasa — Calpe Argentina S. A., 1951.
22) Perez, José Augusto Sanchez. **La Aritmetica en Babilonia y Egito.** Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, 1943.
23) **La Aritmetica en Roma, en India y en Arabia.** Madrid: 1949.
24) **La Aritmetica en Grecia.** Madrid: 1946.
25) Sanford, Vera. **A Short History of Mathematics.** Boston: Houghton Mifflin Company, 1930.
26) "Notes on the History of Mathematics", M. T., XLIV (1951), 29-30; 135-137; XLIII (1950), 368-370.
27) "Roman Numerals", MT., XLIV (1951), 403-404.
28) Smith, David Eugene. **The Wonderful Wonders of One-Two-Theee.** New York: McFarlane, 1937.
29) Smith, David Eugene e Gingburg, Jekuthial. **Numbers and Numerals.** .New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1937.
30) Spitzer, Herbert F. The **Teaching of Arithmetic.** Boston. Houghton Mifflin Company, 1948.
31) Struik, Dirk J. **A Concise History of Mathematics.** New York: Dover Publications, Inc., 1948.
32) Taton, René. **Histoire du Calcul.** Paris: Presses Universitaires de France, 1948.
33) Vasconcellos, Fernando de Almeida. **História das Matemáticas na Antiguidade.** Paris-Lisboa: Aillaud e Bertrand, 1925.
34) Vera, Francisco. **Breve Historia de la Matemática.** Buenos-Aires: Editorial Losada, S. A., 1946.
35) **La Matemática de los Musulmanos Españoles.** Buenos-Aires: Editorial Nova, 1947.
36) Wheat, Harry Grove. **How to Teach Arithmetic.** Evanston, Illinois: Row, Peterson and Company 1951.
37) Wieleitner, H. **Historia de las Matemáticas.** Barcelona-Buenos-Aires: Editorial Labor, S. A., 1932.