DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO PRIMÁRIA SETOR DE BIBLIOTECAS E AUDITÓRIOS DA SECRETARIA GERAL DE ED. E CULTURA DA PREF. DO D. FEDERAL.

O Ensino da Divisão de Inteiros

Palestra realizada pelo **Professor França Campos**

Como ensinar a tabuada de dividir? Relacionando cada um de seus elementos com os correspondentes da tabuada de multiplicar. Exemplo: $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$. Então: $12 \div 3 = 4$. Note-se que neste $12 \div 3 = 4$, o conceito de divisão, implícito, não é, a princípio, o de medida, mas o de parte. Tendo diante dos olhos $12 = 4 + 4 + 4$, a criança concebe o 4 como uma das três partes iguais em que 12 se divide ou reparte. Pouco mais tarde, o conceito de medida será também percebido. Com efeito: Em $12 \div 3 = 4$ o quociente se indica, em verdade, que o divisor 3 está contido quatro vêzes no dividendo 12, o que fica evidente quando se escreve $12 = 3 + 3 + 3 + 3$.

As multiplicações e divisões fundamentais são estudadas paralelamente, por grupos, pequenas unidades de ensino, ou famílias, em atenção aos princípios da psicologia da forma ou estrutura, segundo os quais a aprendizagem não consiste em juntar peças desgarradas, de experiências, mas em perceber relações dentro de um todo, por muito vagas que sejam a princípio.

No quadro negro, que é o caderno da classe, escrevemos, por exemplo:

$3 \times 4 = 12$, pois $4 + 4 + 4 = 12$
$4 \times 3 = 12$, pois $3 + 3 + 3 + 3 = 12$

Então: $12 \div 3 = 4$
$12 \div 4 = 3$

E' possível que alguns dos meus prezados ouvintes queiram opôr-me a seguinte objeção: Mas, professor, não é verdade que em 3×4 o multiplicador é 4, e o multiplicando 3? E não é o multiplicador que indica quantas vêzes o multiplicando é tomado como parcela? Se assim é, entendo que

$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$ e não $4 + 4 + 4$

Meus caros ouvintes, existe, de fato, a convenção de que, num produto indicado, de dois fatores, o segundo dêles é o multiplicador. Os melhores tratadistas do ensino de Aritmética, todavia, abrem exceção para o curso primário, considerando que seria confuso, para a criança, ouvir **três vêzes** 4 e ver **quatro vêzes** 3, ou quatro parcelas iguais a 3.

Ao estudarmos, paralelamente, as tabuadas de multiplicar e dividir, começamos pelos grupos, ou pelas famílias, que encerram as multiplicações e divisões fáceis. Essas famílias são as seguintes:

$2 \times 2 = 4$	$2 \times 4 = 8$	$2 \times 6 = 12$	$2 \times 8 = 16$
$4 \div 2 = 2$	$4 \times 2 = 8$	$6 \times 2 = 12$	$8 \times 2 = 16$
	$8 \div 2 = 4$	$12 \div 2 = 6$	$16 \div 2 = 8$
$2 \times 3 = 6$	$8 \div 4 = 2$	$12 \div 6 = 2$	$16 \div 8 = 2$
$3 \times 2 = 6$	$2 \times 5 = 10$	$2 \times 7 = 14$	$2 \times 9 = 18$
$6 \div 2 = 3$	$5 \times 2 = 10$	$7 \times 2 = 14$	$9 \times 2 = 18$
$6 \div 3 = 2$	$10 \div 2 = 5$	$14 \div 2 = 7$	$18 \div 2 = 9$
	$10 \div 5 = 2$	$14 \div 7 = 2$	$18 \div 9 = 2$

$5 \times 3 = 15$	$5 \times 4 = 20$	$5 \times 5 = 25$
$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$	$25 \div 5 = 5$
$15 \div 5 = 3$	$20 \div 5 = 4$	
$15 \div 3 = 5$	$20 \div 4 = 5$	

$5 \times 6 = 30$	$5 \times 7 = 35$
$6 \times 5 = 30$	$7 \times 5 = 35$
$30 \div 5 = 6$	$35 \div 5 = 7$
$30 \div 6 = 5$	$35 \div 7 = 5$
$5 \times 9 = 45$	$5 \times 8 = 40$
$9 \times 5 = 45$	$8 \times 5 = 40$
$45 \div 5 = 9$	$40 \div 5 = 8$
$45 \div 9 = 5$	$40 \div 8 = 5$

Convem reparar no seguinte: As tabuadas de multiplicar e dividir, como as de somar e subtrair, dividem-se em duas partes, uma fácil, outra difícil. Adições e subtrações fundamentais fáceis são as de soma, ou minuendo, igual ou inferior a 10. Difíceis são as de soma, ou minuendo, superior a 10. Tratando-se de multiplicação e divisão, o critério para dividir-se qualquer das duas respectivas tabuadas não é o do valor, maior ou menor, do produto ou dividendo. Multiplicações fundamentais fáceis são aquelas em que ocorre, seja como multiplicando, seja com multiplicador, ou o número 1, ou o número 2, ou o número 5. Difíceis são as demais. Do mesmo modo, são divisões fundamentais fáceis as que apresentam, como divisor, ou quociente, ou o número 1, ou o número 2, ou o número 5.

Consideremos as multiplicações fundamentais fáceis e vejamos por que são fáceis. As do tipo $1Xn$ ou $nX1$, onde $n = 1, 2, 3, \ldots 9$, são fáceis porque o resultado é sempre n. Com efeito: $1X3 = 3$, $6X1 = 6$, $1X8 = 8$ etc. Fáceis são também aquelas em que aparece o número 2. Se êste é o multiplicando, intervém, ajudando a aprender, a experiência anterior de contagem: 2, 4, 6, 8,... 18; se é o multiplicador, a noção elementar de dôbro auxilia a aprendizagem: $2X3 = 6$, $2X7 = 14$, $2X9 = 18$ etc. As multiplicações em que figura o número 5 são fáceis por duas razões igualmente: por ser comum contar-se de 5 em 5 (5, 10, 15, 20,...45) e por ser necessàriamente 0 ou 5 o algarismo das unidades do produto. E por que são fáceis as divisões fundamentais chamadas fáceis? Simplesmente porque corresponde, cada uma delas, a uma multiplicação fácil: se $5X7 = 35$, então: .... $35 \div 5 = 7$.

Com os critérios de classificação acima, seguidos pelos melhores especialistas no assunto, cada uma das quatro tabuadas fundamentais apresenta, tirante os elementos em que ocorre zero, 81 elementos, das quais 45 fáceis e 36 difíceis. Mas, não tendo sentido prático a multiplicação por 1, nem à divisão por 1, as tabuadas de multiplicar e dividir passam a apresentar, cada uma, 28 elementos apenas, os quais se podem achar entre as 15 famílias que já foram apresentadas: treze com quatro elementos e duas com dois: $13 \times 4 + 2 \times 2 \times 2 = 56 = 28 + 28$.

Estudadas as multiplicações e divisões fundamentais fáceis, por grupos ou famílias, já se podem organizar exercícios que sirvam, não só para fixá-las, mas também para iniciar o aluno na aprendizagem dos processos de multiplicar e dividir. Consideremos os seguintes exercícios de multiplicação e divisão:

753	946	832	436	278	590
2	2	2	5	5	5
521	125	512	251	215	502
8	3	6	7	9	4

642/2, 108/2, 126/2, 148/2, 164/2, 182/2
105/5, 155/5, 205/5, 255/5, 305/5, 355/5, 405/5, 455/5
636/3, 884/4, 126/6, 147/7, 168/8, 189/9
156/3, 208/4, 306/6, 357/7, 408/8, 459/9

E' evidente que êste grupo de exercícios, que constitui apenas um exemplo, conduz à prática de tôdas as multiplicações e divisões fundamentais fáceis das quinze famílias a que já nos referimos. Além disso, e tendo em vista a constituição dêles, são empregados também os seguintes elementos, que não carecem pròpriamente de prática para fixação: 5X0, 8X1, 3X1, 6X1, 7X1, 9X1, 4X0, 2/2, 5/5, 3/3, 4/4, 6/6, 7/7, 8/8, 9/9.

Em multiplicação, numa primeira etapa, tomando-se para multiplicandos números de dois algarismos, e repetindo-se alguns elementos de tabuada, ou usando elementos de multiplicando zero ou 1, é possível prticar as multiplicações fundamentais fáceis das 15 famílias apresentadas, com exercícios em que não haja reservas a transportar.

À medida que se vai avançando no estudo das multiplicações e divisões fundamentais, aumentam, para o professor, os recursos com que obter exercícios. E é importante ter em mente que não devem ser dados a esmo, mas organizados em grupos que servirão não só para ajudar o aluno a vencer, uma a uma, as dificuldades dos processos de multiplicação e divisão, senão também para a prática dos elementos que se desejam fixados.

Passamos a considerar, daquí para diante, só a operação de divisão e o modo de organizar os exercícios relativos aos casos que apresenta. Tratando-se de uma operação difícil de aprender, é necessário apresentá-la à maneira de escada cujos degraus se atinjam, um por um.

Casos de divisão. 1.º caso: Divisão exata, sem reservas; divisor menor que 10, contido em cada um dos números representados pelos algarismos do dividendo. Exemplo: 96/3; 486/2; 844/1; 66/6.

2.º caso: Divisão exata, sem reservas; divisor menor que 10, contido no número formado pelos dois algarismos de ordem mais elevada, do dividendo, e nos números simbolizados pelos valores absolutos dos demais algarismos. Exemplo: 357/7; 246/3; 426/6; 305/5. Exercícios, como estes, são organizados da seguinte maneira, tendo em vista a tabuada de dividir, conforme apresentada, a seguir. Para cada divisor, deve colocar-se, à direita de um dividendo de dois algarismos, um outro de um só algarismo. Os exercícios devem ser tais que, por meio deles, sejam praticadas tôdas as divisões fundamentais, notadamente as mais difíceis.

Dividendos									Divisor
2	4	6	8	10	12	14	16	18	2
3	6	9	12	15	18	21	24	27	3
4	8	12	16	20	24	28	32	36	4
5	10	15	20	25	30	35	40	45	5
6	12	18	24	30	36	42	48	54	6
7	14	21	28	35	42	49	56	63	7
8	16	24	32	40	48	56	64	72	8
9	18	27	36	45	54	63	72	81	9

3.º caso: Divisão exata; divisor menor que 10; reserva da primeira para a segunda divisão. Exemplo: 84/6; 172/4; 370/5; 512/8. Os dividendos dos exercícios relativos a êste caso, podem prepará-los assim: Dada uma linha de dividendos da tabuada fundamental, e considerando o respectivo divisor, multiplicamos êste por um número qualquer, de 1 a 9, e somamos ao produto o número representado pelo algarismo das dezenas do dividendo que pretendemos usar. À direita da soma obtida, colocamos, então, o algarismo das unidades dêsse dividendo. O dividendo do último dos exemplos dados, 512/8, foi obtido desta maneira: Multiplicamos o divisor 8 por 6. Ao produto 48 somamos 3 (do dividendo 32, a ser usado). À direita da soma 51, colocamos 2. Devem organizar-se exercícios de modo a que todos os dividendos da tabuada sejam usados, cada um com o seu divisor.

Neste terceiro caso de divisão, como em outros a estudar, ocorrem divisões fundamentais não familiares a quem inicia o estudo desta operação. São elementos de uma segunda tabuada de dividir, ou seja, de uma tabuada em que nenhuma divisão é exata. O quadro seguinte resume essa nova tabuada de dividir, que encerra 324 divisões com resto.

Divisor	Menor	Maior	N.º de divisões
2	3	19	9
3	4	29	18
4	5	39	27
5	6	49	36
6	7	59	45
7	8	69	54
8	9	79	63
9	10	89	72
			324

O quadro acima apresenta, para cada divisor, o menor e o maior dividendo. Os demais são os números compreendidos entre êstes e não múltiplos do divisor. Exemplos: Os dividendos, para o divisor 2, são os seguintes: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 e 19. Para o divisor 3, temos: 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28 e 29.

Fique entendido que divisões indicadas, como 19/2, 28/3, 58/6, e outras em que o divisor e o quociente são números de um só algarismo, são chamados divisões fundamentais inexatas e constituem elementos de uma segunda tabuada de dividir. Assim, 58/6 não é "conta de dividir". A resposta há-de saber-se de cor: "nove, resto 4". Parece que a um bom número de professôres passa despercebida a vantagem de estudar, como elementos de tabuada, as divisões desse tipo. Entretanto, não se pode admitir que seja

perfeitamente claro aos alunos que 58 dividido por 6 dá 9, com resto 4. Eles têm, ao contrário, dificuldade em reconhecer, a princípio, que 58 está compreendido entre 54 e 63. Vale a pena, então, fazer exercícios escritos e orais para a prática de tôdas as 324 divisões fundamentais inexatas. Sem essa prática de todas as 324 divisões fundamentaisz,/a
operações de divisão, a partir do 3.º caso, serão feitas morosamente e com dificuldade.

4.º caso de divisão: Divisão exata; divisor menor que 10; reserva da primeira para a segunda divisão, ou da segunda para a terceira. Exemplo: 1968/4; 6328/8; 4272/6; 7296/8. Exercícios, como os que constituem os dois primeiros exemplos, podem ser organizados do mesmo modo que os correspondentes ao 3.º caso. Obtidos, porém, os dividendos, acrescenta-se à direita de cada um dêles, mais um algarismo, que tem de ser, necessáriamente, igual ao do divisor, se êste é 5 ou maior que 5. Quanto aos exercícios do tipo dos que apresentamos como os dois últimos exemplos, são preparados da seguinte maneira: Considerando um divisor **d.** colocamos, à direita de cada um dos dividendos, um algarismo tal, que o número por êle representado deixe resto quando dividido por **d.** Ora, como êsse resto deve representar as dezenas do último dividendo parcial, o algarismo das unidades é escolhido de modo que a última divisão se faça exatamente. Exemplificando: O dividendo do exercício 7296/8 foi achado assim: Ao lado de 72 colocamos 9. Ora, o resto de 9 por 8 é 1; portanto, para ser exata a última divisão, tivemos de pôr 6 à direita de 9. Chamamos a atenção para o seguinte: Não é possível organizar exercícios deste tipo para o divisor 9; pois, devendo ser exata a primeira divisão parcial, e devendo haver reserva da segunda para a terceira divisão, o segundo dividendo parcial deve ser maior que o divisor 9. Mas êsse segundo dividendo tem de ser, também, um número de um só algarismo. Ora, número de um só algarismo, maior que 9, não existe. Convém reparar ainda, voltando ao exemplo 7296/8, em que não poderíamos colocar, à direita de 72, nenhum algarismo de valor absoluto menor que 8, ou igual a 8; pois no primeiro caso a segunda divisão não seria possível (sob o ponto de vista de divisão de inteiros), obrigando a um zero no quociente (8.º caso de divisão), e no segundo, não haveria reserva, nem da primeira para a segunda divisão, nem desta para a última.

5.º caso: Divisão exata; divisor menor que 10; reservas consecutivas. Exemplos: 1548/4; 4781/7; 37928/8; 30879/9. O dividendo 1548 foi preparado dêste modo: Tomamos um número qualquer (15) de dois algarismos, não múltiplo de 4. E' evidente que, sendo 3 o resto de 15 por 4, e devendo a segunda divisão parcial ser também inexata, colocamos, à direita de 15, um algarismo tal (4, por exemplo) que, baixado para ficar à direita do 3, formasse com êste um segundo, dividendo não múltiplo do divisor. Ora, como o resto de 34 por 4 é 2, e como a última divisão devia ser exata, é claro que o algarismo a ser tomado como o das unidades do dividendo tinha de ser 4 ou 8. Quanto aos exercícios que constituem os dois últimos exemplos, nada há de novo, a não ser que, preparados os dividendos, como acima indicado, pusemos à direita dêles (3792 e 3087), um 5.º algarismo, obtendo, então, os números 37928 e 30879.

6.º caso: Divisão com resto e com reservas: divisor menor que 10. Exemplos: 3757/5; 4945/6; 8792/9; 4016/7. E' fácil, já agora, descobrir como são preparados exercícios como êstes. São de tal natureza que conduzem, principalmente, à prática das divisões fundamentais inexatas. Aliás, as divisões fundamentais, própriamente ditas ou divisões fundamentais exatas, como 35/7, 64/8, 45/5, por exemplo, não são praticadas, a não ser nas operações de divisão em que ocorrem dividendos parciais múltiplos do divisor. E esta é a razão pela qual a maioria dos casos de divisão, até agora considerados, são casos de divisão exatas. O que se pretende, aliás, com os vários grupos de exercícios relativos aos casos de divisão, não é apenas a prática do processo de dividir, mas também a fixação das divisões fundamentais.

7.º caso: Divisão com um zero no fim do quociente; divisor menor que 10. Exemplos: 3926/7; 6485/8; 24571/3. Para que o algarismo das unidades do quociente seja zero, basta que seja exata a penúltima divisão parcial e que o número representado pelo algarismo das unidades do dividendo seja inferior ao divisor. Não há, pois, dificuldade em preparar exercícios relativos a este caso.

8.º caso: Divisão com zero pelo meio do quociente; divisor menor que 10. Exemplos: 5427/9; 4836/6; 35438/5; 32490/8. E' fácil de perceber que, para haver um zero pelo meio do quociente, é necessário, apenas, que, no decorrer da divisão, um dos dividendos parciais, do segundo ao penúltimo, seja um número menor que o divisor.

9.º caso: Divisão com zeros sucessivos, ou pelo meio do quociente ou no fim; divisor menor que 10. Exemplos: 49063/7; 36084/9; 57602/6; 32803/4. Percebe-se fácilmente, como se organizam exercícios como êstes. Para que ocorram dois zeros sucessivos no quociente, é necessário que, após um dividendo parcial múltiplo do divisor, haja um zero a ser baixado, e em seguida a êste um algarismo que represente, em valor absoluto, um número menor que o divisor. E para haver dois zeros consecutivos no fim do quociente, é necessário que os dois últimos dividendos parciais sejam, respectivamente, zero, e um número menor que o divisor.

A divisão de inteiros é a operação mais difícil de ensinar e de aprender. Daí a necessidade de não precipitar o seu ensino, mas conduzí-lo de modo a que os alunos vão vencendo as dificuldades, uma de cada vez, através dos exercícios relativos aos diferentes casos que a operação apresenta. E' necessário, também, que os alunos não memorizem, apenas, o processo da operação, mas o entendam. Cabe ao professor, portanto mostrar **como** e **por que.** Se existe, no programa da escola primária, alguma causa que não seja possível fazer compreender, melhor é po-la de lado, pois a pretenção de ensiná-la será nada menos que uma farsa.

Trataremos, agora, dos casos de divisão em que o divisor é número de mais de um algarismo. **10.º caso de divisão:** Divisão sem nenhum zero no quociente; dividendo e divisor maiores que 10 e múltiplos de 10; divisor de dois algarismos. Exemplos: 4560/60; ...... 73280/30. Ao fazermos divisões como estas, não devemos, de início, e sem nenhuma explicação, cortar o zero do dividendo e do divisor. Melhor é dividirmos, primeiramente, mantendo os zeros; e depois mostrarmos que, embora cortando-os, o quociente da divisão é absolutamente o mesmo. Mas não basta isto. Devemos considerar duas divisões, uma exata e outra com resto, e levar os alunos a compreenderem que o resto fica alterado (dividido por 10), quando fazemos a divisão sem levar em conta os referidos zeros, ou melhor: quando primeiro dividimos por 10 o dividendo e o divisor. Não é difícil mostrar que, dividindo-se por um mesmo número o dividendo e o divisor de uma divisão, o quociente não se altera, mas o resto fica dividido por êste número.

O quociente de 4560 por 60 é igual ao de 456 por 6. Com efeito: Se $456 = 6 \times \mathbf{76}$, então: ...... $4560 = 60 \times \mathbf{76}$. Mas se $458 = 6 \times 76 + 2$, dá então: $4580 = 10\ (6 \times 76 + 2) = 10 \times 6 \times 76 + 20 = 60 \times 76 + 20$. Assim, se dividido 458 por 6, em vez de dividir 4580 por 60, o resto achado, 2, é enganoso. O resto é, em verdade, 20.

Se $24 = 4 \times \mathbf{6}$, então $48 = 2 \times 24 =$ .... $2 \times 4 \times 6 = 8 \times 6$. Se dividido, portanto, 24 por 4, em vez de 48 por 8, o quociente é o mesmo: 6. Mas se $26 = 4 \times \mathbf{6} + 2$, então: $52 = 2 \times 26 = 2\ (4 \times 6 + 2) = 2 \times 4 \times 6 + 2 \times 2 = 8 \times \mathbf{6} + \mathbf{4}$. Se divido, pois, 26 por 4, em vez de dividir 52 por 8, acho o mesmo quociente 6, mas não o mesmo resto. E' evidente que o aluno só poderá compreender tal explicação se souber primeiro:

a) Que para multiplicar, por um número, um produto indicado de dois ou mais fatôres, basta multiplicar, por êsse número, um só dos fatôres;

b) Que para multiplicar, por um número, uma soma indicada de duas ou mais parcelas, é necessário multiplicar, por êsse número, cada uma das parcelas.

11.º caso: Divisão inexata, sem nenhum zero no quociente; divisor de algarismos, múltiplos de 10 e maior que 10. Exemplo: 967/30; 475/20. Os casos anteriores de divisão já devem ter concorrido, não só para fixação das tabuadas de dividir, como também para que ficassem os alunos bem familiarizados com o complexo mecanismo que esta operação envolve: determinação dos quocientes parciais, multiplicação, subtração e baixa de algarismos do dividendo. Neste caso, porém, e muito mais nos seguintes, surgem novas dificuldades, sendo evidente que entre tôcas se destaca a que diz respeito à estimativa do quociente em cada divisão parcial. Quanto aos exercícios correspondentes a êste caso, ao anterior, e aos seguintes, é certo que podem ser preparados com os elementos das tabuadas. O prepará-los assim, porém, exige, além de grande atenção, uma série de cuidados especiais. Aconselhamos, por isso e para evitar descrever o processo em cada caso, que sejam organizados indiretamente, isto é, multiplicando-se o divisor pelo quociente desejado. Nos casos em que deva haver resto, basta somar, ao produto achado, um número menor que o divisor. Seja organizar um exercício relativo a êste 11.º caso. O quociente pode ser 68, e divisor 40, e o resto 16, por exemplo. Temos: $68 \times 40 + 16 = 2720 + 16 = 2736$. O exercício é, então, o seguinte: 2736/40. Façamos, agora, esta divisão explicando o processo de dividir:

$$\begin{array}{r|l} 2736 & 40 \\ \hline 33 & 6 \end{array} \qquad \text{ou } (273 \text{ dezenas} + 6 \text{ unidades}) \div 40$$

O primeiro dividendo parcial é 273, ou melhor: 273 dezenas; pois não é possível obter-se um número inteiro de centenas (inteiro diferente de zero), dividindo-se 27 centenas por 40 ou em quarenta partes iguais. Dividindo-se, porém, 273 dezenas, por 40, ou em quarenta partes iguais, tôdas com um número inteiro de dezenas, cada uma dessas partes terá 6 dezenas; pois 6 dezenas $\times$ 40 = 240 dezenas, enquanto que 7 dezenas $\times$ 40 = 280 dezenas.

$$\begin{array}{r|l} 2736 & 40 \\ \hline 336 & 68 \\ 16 & \end{array}$$

As 33 dezenas que sobraram, feita a 1.ª divisão, são equivalentes a 330 unidades. Ora, se a essas 330 unidades são somadas as 6 outras do número 2736 (pois 2736 = 273 dezenas e 6 unidades), temos, ainda, para dividir por 40, a soma de 336 unidades, ou o número 336. Na prática, dada a disposição, ou arrumação, do dividendo, do divisor e do resto, ao baixarmos o algarismo 6, colocando-se à direita de 33, obtemos, imediatamente, o número 336 ou 336 + 6. Dividindo, finalmente, por 40, as 336 unidades, temos 8 delas por quociente, e ainda um resto constituído de 16 outras.

Uma das maiores dificuldades, com que se esbarra, ao dividir, é a estimativa dos quocientes relativos aos dividendos parciais. Alunos há, em grande número, até mesmo em curso secundário, os quais, ao dividirem, fazem duas ou mais "continhas" subsidiárias até acertarem com o quociente, algarismo por algarismo. E não se pode negar que essa falha da parte dêles é, muitas vezes, consequência de os professôres não lhes terem indicado um caminho menos árduo para a descoberta de cada um dos símbolos indo-arábicos que representam os resultados das divisões parciais que vão fazendo. Lembremo-nos do seguinte: o quociente da divisão de dois inteiros, **a** e **b**, é o mesmo que se obtêm quando se dividem, um pelo outro, os resultados prèviamente obtidos com a divisão de **a** e **b** por um mesmo divisor. Com efeito:

$$\begin{array}{rclcrcl} 60 \div 30 & = & 2 & \qquad & 6 \div 3 & = & 2 \\ 350 \div 70 & = & 5 & & 35 \div 7 & = & 5 \\ 4800 \div 800 & = & 6 & & 48 \div 8 & = & 6 \end{array}$$

Consideremos, agora, as seguintes divisões, que podemos supor parciais, portanto, ocorrentes em operações de dividir: 78/31; 92/26; 524/78. O quociente de 78 por 31 tem de ser 2, porque $31 \times 2 = 62$, enquanto que $31 \times 3 = 93$. Mas o quociente de 80 (número próximo de 78) por 30 (número próximo de 31) o qual é o mesmo quociente de 8 por 3, é também 2. Então, é melhor dividir, não 78 por 31, mas 80 por 30, ou 8 por 3. Melhor é também dividir 90 por 30, ou 9 por 3, em vez de 92 por 26; 500 por 80, ou 50 por 8, em vez de 524 por 78. Assim, para acharmos os quocientes das divisões de 78 por 31, 92 por 26, 524 por 78, os quais são 2, 3 e 6, respectivamente,

não dividimos 78 por 31, mas 80 por 30, ou 8 por 3;
não dividimos 92 por 26, mas 90 por 30, ou 9 por 3;
não dividimos 524 por 78, mas 500 por 80, ou 50 por 8.

Êsse recurso com que estimarmos o quociente, em cada divisão parcial, é o melhor que existe, embora pareça enganoso, uma ou outra vez. Na divisão de 3596 por 52, por exemplo, ao dividirmos 360 por 50, ou 36 por 5, em vez de 359 por 52, achamos 7, que não é o quociente convinhável. Com a prática, porém, chegamos a perceber, num golpe de vista, ou de cálculo, a razão pela qual um certo quociente não é o número **n**, e sim o número **n** + 1. Neste exemplo, verifica-se que 7 é "forte", porque, do produto de 2, do divisor 52, por 7, provém uma dezena, que é somada às outras trinta e cinco, do produto de 5 por 7.

Continuemos com os casos de divisão. 12.° caso: Divisão sem nenhum zero no quociente; divisor de dois algarismos, sendo 1 ou 2 o das unidades. Exemplo: 2016/32; 4792/81; 19291/51; 44186/72. Os exercícios são organizados da maneira já sugerida.

Assim é que, para obtermos o dividendo de .... 44186/72, multiplicamos 613 (quociente sem nenhum zero) por 72 e somamos 50, que será o resto da divisão.

13.° caso: Divisão sem nenhum zero no quociente; divisor de dois algarismos, sendo 8 ou 9 o das unidades. Exemplo: 2429/29; 10800/48; 2304/39; 3717/58.

14.° caso: Divisão sem nenhum zero no quociente; divisor de dois algarismos, sendo 3, 4, 5, 6 ou 7 o das unidades. Exemplos: 3866/57, 20348/73; ... 6538/14; 1782/36; 987/25.

15.° caso: Divisão com um zero no fim do quociente; divisor de dois algarismos. Exemplos: ...... 53024/57; 60863/78; 26058/42; 23217/61.

16.° caso: Divisão com um zero pelo meio do quociente; divisor de dois algarismos. Exemplos: ... 17622/29; 40348/67; 8688/42; 31476/78.

17.° caso: Divisão com zeros consecutivos pelo meio do quociente ou no fim; divisor de dois algarismos. Exemplos: 115079/23; 343098/49; 240837/56; 129614/18.

18.° caso: Divisão em que o dividendo e o divisor são números quaisquer. E' o caso geral. Vencidas, etapa por etapa, segundo os casos anteriores, as várias dificuldades que a operação de dividir apresenta, julgamos estarem os alunos capacitados a dividir dois números inteiros quaisquer, um pelo outro. E' claro que êsses números não serão iguais; e nem será o dividendo menor que o divisor. O razoável é apresentar exercícios em que o divisor seja número de mais de dois algarismos. Exemplos: 240731/517; 1240426/6080; 70083/384; 681700/8029.

Caso especial de divisão: Divisão em que o divisor — é 10, 100, 1000 etc. Exemplos: 348/10; .... 50683/100; 29665/1000. Nestes exemplos, os quocientes, sob o ponto de vista de divisão de inteiros, são 34, 506 e 29, respectivamente; pois o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente, mais o resto. E temos realmente:

$$348 = 10 \times 34 + 8$$

$$50683 = 100 \times 506 + 83$$

$$29665 = 1000 \times 29 + 665$$

Não é possível fazer-se uma divisão, com desejável rapidez, ainda mesmo com o divisor menor que 10, sem o domínio das subtrações complementares. Chamamos subtrações complementares às subtrações que se efetuam mediante o raciocínio "s para m...r", onde **s**, subtraendo e **m**, minuendo, são nkmeros de dois algarismos, e **r** = 1,2, 3,...9.

O resto **r** só varia de 0 a 9 nas divisões em que o divisor tem dois ou mais algarismos. Se o divisor é número de um só algarismo, o maior resto é, evidentemente, igual ao divisor diminuído de 1. Com o subtraendo 28, por exemplo, pode ocorrer, numa divisão em que o divisor é maior que 10, qualquer uma das seguintes complementares: 28 para 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37. Se o divisor, porém, é de um só algarismo, o maior resto é 6 (de 28 para 34). Com efeito. Obtem-se o subtraendo 28, multiplicando-se um quociente parcial 7 por um divisor 4, ou um quociente parcial 4 por um divisor 7. Ora, no caso de o divisor ser o maior dos dois fatôres em que se decompõe 28, como convém supor, o maior resto, se o houver, será 6.

Note-se que o subtraendo de uma subtração complementar capaz de ocorrer numa divisão é ,necessàriamente, um número decomponível em dois fatôres, **cada um de um só algarismo,** os quais representam, respectivamente, um divisor e um quociente parcial. Assim, qualquer subtração complementar, dentre as que podem ocorrer, ao dividir-se um número por outro, tem de ter, para subtraendo, um dos 27 seguintes números: 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40 42, 45, 48, 49, 54, 56, 63, 64, 72, 81. Considerando que o maior resto é 9, verifica-se como é fácil praticar tôdas elas. Exemplo: Com o número 35, devemos ter desde 35 para 36 até 35 para 44. Com êste subtraendo 35, porém, as difíceis começam com 35 para 41. Embora tôdas mereçam ser praticadas, convém insistir nas que são difíceis, isto é, nos que correspondem às subtrações fundamentais difíceis. São as 84 seguintes, cujos subtraendos e minuendos indicamos, respectivamente, por S e por M:

S = 12, M = 21
S = 14, M = 21, 22, 23
S = 15, M = 21, 22, 23, 24
S = 16, M = 21, 22, 23, 24, 25
S = 18, M = 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27
S = 24, M = 31, 32, 33
S = 25, M = 31, 32, 33, 34
S = 27, M = 31, 32, 33, 34, 35, 36
S = 28, M = 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37
S = 32, M = 41
S = 35, M = 41, 42, 43, 44
S = 36, M = 41, 42, 43, 44, 45
S = 42, M = 51
S = 45, M = 51, 52, 53, 54
S = 48, M = 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57
S = 49, M = 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58
S = 54, M = 61, 62, 63
S = 56, M = 61, 62, 63, 64, 65
S = 63, M = 71, 72
S = 64, M = 71, 72, 73
S = 72, M = 81