CAPITULO VI

RAIDICAÇÃO

SUMMARIO : — Definição. — Exemplo. — Signal representativo e partes componentes. — Classificação dos radicaes. — Raiz quadrada. — Quadrado das diversas potencias de 10. — Conclusões que decorrem da analyse da tabella desses quadrados. — Distincção de dous casos na theoria da radiciação das raizes quadradas. — Primeiro caso : Numeros *menores* que 100. — Segundo caso : Numeros *maiores* que 100. — Deducção theorica da *regra geral.* — Verificação dos differentes algarismos obtidos para a raiz. — O resto de uma radiciação de raiz quadrada. — Exemplificação. — Casos em que se póde conhecer que um numero dado não é *quadrado perfeito.* — Raiz cubica. — Cubos das diversas potencias de 10. — Conclusões que decorrem da analyse da tabella desses cubos. — Distincção de dous casos na theoria da radiciação das raizes cubicas. — Primeiro caso : Numeros *menores* que 1000. — Segundo caso : Numeros *maiores* que 1000. — Deducção theorica da *regra geral.* — Verificação dos differentes algarismos obtidos para a raiz. — O resto d'uma radiciação de raiz cubica. — Exemplificação. — Provas.

§ 1.º — Preliminares

190. — **Radiciação** — *é a operação que tem por fim combinar dous numeros dados de modo a formar um terceiro que, repetido como factor tantas vezes quantas forem as unidades de um dos dous numeros dados, reproduza o outro.*

Exemplo : — Um tanque, de fórma extremamente regular e faces eguaes, contém 125 metros cubicos d'agua; para determinar-se o comprimento de qualquer das 3 arestas que, nesse tanque, convergem para qualquer dos seus angulos, é preciso determinar um numero que, repetido *tres vezes* como factor, reproduza 125; e, como $125 = 5 \times 5 \times 5$, segue-se que 5 é o resultado procurado, isto é, o terceiro numero que, repetido como factor tantas vezes quantas são as unidades de um dos dous numeros dados 3, reproduz o outro 125.

191. — Na radiciação, portanto, o numero que se procura determinar é a *raiz* [1], cuja *potencia* é um dos numeros dados e *gráo* o outro; e, por isso, póde ser definida como sendo — *a operação que tem por fim, dada uma potencia e o respectivo gráo, determinar a raiz.*

E', pois, a *radiciação* operação exactamente *inversa* á *potenciação.*

192. — Como veremos no desinvolvimento da theoria desta nova operação numerica, é ella essencialmente analoga á divisão, quer por sua propria natureza, quer pela marcha dos respectivos calculos; é, porém, muito mais complicada, por isso que, tanto o divisor como o quociente, tornados eguaes, são ambos desconhecidos.

193. — A radiciação é representenda [2] pelo signal $\sqrt{\ }$, sob cujo traço horizontal colloca-se a *potencia* dada e, na abertura do angulo, o *gráo*, ou *expoente*, da *raiz* que se

---

1. — A palavra *raiz* (em arabe *gird*, de *gard*, que significa *raiz de uma planta*) foi introduzida por *Mohammed-ben-Mousa Abou-Djefar al Khowarezmi* (em 820) nos seus *Al-gebr w'el mukabala* (Elementos de Algebra), de que Rose publicou uma traducção ingleza em 1831.

2. — O signal $\sqrt{\ }$ foi introduzido por MIGUEL STIFEL (ou STIEFEL, ou ainda STIFELIUS), illustre sabio allemão, nascido em *Esslingen* (Saxe) em 1486 e fallecido em *Iena* em 1567. Monge da Ordem dos Agostinhos, converteu-se ao *lutheranismo* e, como pastor protestante, exerceu seu ministerio em Saxe, na Austria e na Prussia. Tornou-se notavel como mathematico, deixando a respeito duas obras importantes : a *Arithmetica integra* (impressa em Nuremberg em 1544) e um tratado de *Algebra*.

trata de determinar. Assim, $\sqrt[5]{32}$ indica *o numero que, elevado a 5.ª potencia, dá 32.*

O signal $\sqrt{}$, quaesquer que sejam os numeros collocados sob o traço horizontal e na abertura do angulo, é denominado geralmente *radical*, e o numero escripto na abertura do angulo, que é o *gráo*, ou *expoente*, da *raiz* a determinar, é denominado *indice do radical*; e se diz, por exemplo, $\sqrt[5]{32}$ é um *radical do 5.º gráo*, $\sqrt[3]{27}$ é um *radical do 3.º gráo*, etc.

Nos *radicaes do 2.º gráo*, dispensa-se geralmente o *indice*; de modo que $\sqrt{25}$ indica um *radical do 2.º gráo.*

No exemplo figurado no n. 190, o numero 125 é a *potencia*, o numero 3 o *indice do radical*, e o numero 5 a *raiz*; e a operação é indicada do seguinte modo:

$$\sqrt[3]{125} = 5,$$

que se enuncia: *raiz terceira* de 125 *egual a* 5.

Esta operação, é, portanto, *inversa* á potenciação que, applicada a estes mesmos numeros, seria indicada do seguinte modo, como já vimos (170):

$$5^3 = 125.$$

194. — Os radicaes do 2.º e 3.º gráos são, geralmente, denominados *raiz quadrada* e *raiz cubica*, por analogia ás respectivas potencias denominadas, como já sabemos, *quadrado* e *cubo*.

195. — O estudo das radiciações superiores ao 3.º gráo não póde ser feito convenientemente na ARITHMETICA, por causa da extrema complicação da LEI DE FORMAÇÃO das respectivas potencias, que é aliás o ponto de partida indispensavel para a deducção das regras para as radiciações dos differentes gráos.

Por isso, trataremos apenas, no presente capitulo, do estudo da RADICIAÇÃO DAS RAIZES QUADRADA E CUBICA.

§ 2.º — Raiz quadrada

196. — Raiz quadrada — *d'um numero é o numero que, elevado ao quadrado, reproduz o numero proposto.*

Assim, a raiz quadrada de 49 ($\sqrt{49}$) é 7, porque

$7 \times 7 = 7^2 = 49$.

197. — Formando os quadrados das diversas potencias de 10, tem-se a seguinte tabella :

$1^2 =$	1,	d'onde	$\sqrt{1}$	=	1,
$10^2 =$	100,	»	$\sqrt{100}$	=	10,
$100^2 =$	10000,	»	$\sqrt{10000}$	=	100,
$1000^2 =$	1000000,	»	$\sqrt{1000000}$	=	1000.
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

E analysando-a, conclue-se :

1.º — Que os numeros comprehendidos entre 1 e 100 teem as suas raizes quadradas comprehendidas entre 1 e 10, isto é, *a raiz quadrada tem um só algarismo si a potencia dada fôr numero de 1 ou 2 algarismos;* — os numeros comprehendidos entre 100 e 10000 teem as suas raizes quadradas comprehendidas entre 10 e 100, isto é, *a raiz quadrada tem dous algarismos si a potencia dada fôr numero de 3 ou 4 algarismos;* — os numeros comprehendidos entre 10000 e 1000000 teem as suas raizes quadradas comprehendidas entre 100 e 1000, isto é, *a raiz quadrada tem tres algarismos si a potencia dada fôr numero de 5* *ou 6 algarismos;* — e assim, por deante, o que demonstra a verdade da seguinte proposição geral : — *Si fôr par o numero de algarismos de um numero dado, sua raiz quadrada terá tantos algarismos quantos forem a metade desse numero de algarismos; e si fôr impar, sua raiz quadrada terá tantos algarismos quantos forem a metade, e mais 1, desse numero de algarismos.* Assim, si a potencia dada tiver 8 algarismos, a raiz quadrada terá 4; si a potencia tiver 11 algarismos, a raiz quadrada terá 6.

2.º — Que sendo 10 a raiz quadrada de 100, a raiz quadrada de qualquer numero *menor que 100* será representada por um numero digito, isto é, *menor que 10;* e, a raiz quadrada de qualquer numero *maior que 100* será representada por um numero composto de *dezenas* e *unidades;* do que decorre, naturalmente, a distincção de *dous casos* na theoria da *radiciação quadrada.*

198. — Primeiro caso : — *O numero dado é menor que 100.* — Sendo, como vimos, 10 a raiz quadrada de 100, serão numeros digitos — isto é, de um só algarismo — as raizes quadradas dos numeros *menores* que 100; e como os quadrados dos *nove* numeros digitos

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9,

são, respectivamente,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 e 81,

segue-se que :

1.º — Só os nove numeros indicados nesta 2.ª linha teem raizes quadradas exactas que sejam numeros digitos;

2.º — Qualquer outro numero, menor que 100, que esteja comprehendido entre dous quaesquer dos *nove* ácima indicados, terá para raiz quadrada *approximada* a do menor ou a do maior desses dous numeros entre os quaes estiver comprehendido.

Assim, estando o numero 57, por exemplo, comprehendido entre os numeros 49 e 64, sua raiz quadrada *approximada* será 7 (raiz exacta de 49), ou 8 (raiz exacta de 64). A primeira, 7, será a raiz quadrada do numero proposto, 57, *a menos de uma unidade por defeito*, e a segunda, 8, será a raiz quadrada desse numero *a menos de uma unidade por excesso.*

Mais adiante veremos os processos empregados para obter maior approximação na determinação das raizes quadradas.

199. — Segundo caso : — *O numero dado é maior que 100.* — Sendo, como vimos, 10 a raiz quadrada de 100, qualquer numero *maior que 100* terá para raiz quadrada um numero *maior que 10* e composto, portanto, de *dezenas* e *unidades*. E, como um numero deve ser sempre considerado como o *quadrado* de sua *raiz quadrada*, póde-se sempre considerar o numero proposto, qualquer que elle seja maior que 100, como composto das *tres* seguintes partes (177, 1.° th., coroll.) :

1.ª — Quadrado das dezenas da sua raiz,

2.ª — Duplo producto das dezenas pelas unidades da sua raiz,

3.ª — Quadrado das unidades da sua raiz.

Si fôr, portanto, possivel destacar, no numero proposto, a 1.ª destas tres partes, determinando a raiz quadrada della ter-se-hão as dezenas da raiz procurada. O'ra, o quadrado das dezenas da raiz, sendo um producto de dezenas por dezenas, é um numero exacto de centenas e só póde estar contido nas centenas do numero proposto, as quaes poderão conter tambem algumas centenas provenientes das reservas feitas sobre as outras duas partes ácima indicadas. Extrahindo, pois, a raiz do maior quadrado contido nas centenas do numero proposto, o numero obtido não poderá ser *menor* que as dezenas da raiz procurada desse numero proposto, mas, tambem não poderá ser *maior*, pois, em tal caso, essa raiz do maior quadrado contido nas centenas do numero proposto excederia d'uma unidade, pelo menos, a *raiz total* deste numero, ou do maior quadrado n'elle contido, o que é absurdo [1]. Portanto, a raiz do maior quadrado contido nas centenas do numero proposto representa exactamente as dezenas da raiz desse numero.

Isto posto, si d'esse numero subtrahir-se o quadrado das dezenas de sua raiz, o resto comprehenderá apenas as outras duas partes, isto é, o duplo producto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades. Si, pois, puder-se destacar, nesse resto, a 1.ª destas duas partes, é claro que, dividindo-a pelo duplo das dezenas da raiz determinar-se-hão as unidades desta, que ficará, portanto, conhecida. O'ra, o duplo producto das dezenas da raiz pelas unidades, sendo um numero exacto de dezenas, só póde estar nas dezenas do resto em questão, as quaes poderão conter tambem algumas dezenas provenientes do quadrado das unidades. Dividindo, pois, as dezenas do resto pelo duplo das dezenas da raiz, não se poderá achar para quociente um numero *menor* que as unidades da referida raiz; mas, poder-se-ha achar um *maior*. Para verificar, escreve-se esse algarismo á direita do duplo das de-

1. — Sendo, por exemplo, 2 o numero das dezenas da raiz d'um numero dado, não poderiam ser 3 dezenas a raiz do maior quadrado contido nas centenas desse numero, por quanto, si assim fosse, a raiz desse maior quadrado contido nas centenas do numero dado excederia a raiz procurada que, na hypothese figurada, é, no maximo, egual a 29 unidades.

zenas e multiplica-se o numero, assim formado, por esse mesmo algarismo das unidades da raiz, o que dará para producto *o duplo producto das dezenas pelas unidades da raiz mais o quadrado das unidades*, resultado que se deverá poder subtrahir do resto mencionado. Si tal subtracção não fôr possivel, o algarismo achado para as unidades da raiz será forte, e, então, será mistér substituil-o por outro menor uma ou mais unidades [1].

200. — Do exposto, conclue-se a seguinte

Regra : — *Para effectuar a radiciação quadrada d'um numero maior que 100, determina-se primeiramente a raiz do maior quadrado contido nas centenas desse numero, o que dá as dezenas da raiz; subtrahe-se o quadrado dessas dezenas do numero proposto, e dividindo as dezenas do resto pelo duplo das dezenas da raiz, obteem-se as unidades desta, ou, pelo menos, um numero que não póde ser inferior a ellas. Para verificar si tal numero não é maior que as referidas unidades da raiz, basta escrevel-o á direita do duplo das dezenas e multiplicar o numero, assim formado, pelas unidades, o que deverá dar um producto menor, ou, pelo menos, egual ao resto.*

201. — Esta regra exige que se saiba effectuar a radiciação do maior quadrado contido nas centenas do numero proposto. Vejamos si, com effeito, é facil d'effectuar-se esta radiciação.

Si o numero proposto contém, no maximo, 4 algarismos, suas centenas constarão de 2 apenas; e, então, a radiciação do maior quadrado contido nessas centenas effec-

---

1. — A verificação póde ser tambem feita escrevendo-se o algarismo achado para as unidades da raiz á direita do achado para as dezenas e effectuando a potenciação quadrada do numero assim formado; o quadrado obtido deve ser, quando muito, egual ao numero proposto.

tua-se facilmente como ficou indicado no n. 198, o que dá as dezenas da raiz, cujas unidades será facilimo determinar em seguida.

Si o numero proposto contém apenas 6 algarismos, suas centenas constarão de 4; e, nesse caso, determina-se primeiramente a raiz do maior quadrado contido nessas centenas, o que dá as dezenas da raiz, e depois determinam-se as unidades.

Identico raciocinio applica-se aos numeros compostos de 8, 10, 12, etc. algarismos; de modo que a regra é *geral*.

202. — Sendo os differentes algarismos da raiz determinados, com excepção apenas do primeiro, por meio de divisões, é sempre possivel que o receio de escrever na raiz um algarismo *maior* que o verdadeiro exponha o operador a escrever um *menor* do que este. Em tal caso, porém, o resto da operação será *maior que o dobro da raiz achada mais uma unidade.*

Com effeito, sendo (177, 2.º th.) *a differença entre os quadrados de dous numeros inteiros consecutivos egual ao dobro do menor mais* 1, é claro que, desde que tomar-se para raiz d'um quadrado proposto um numero *menor d'uma unidade* que a verdadeira raiz, o quadrado proposto conterá, além do quadrado dessa raiz defeituosa, mais o seu dobro e mais 1. Subtrahindo-se, portanto, desse quadrado proposto o da raiz defeituosa, o resto conterá, pelo menos, o *dobro desta raiz mais 1*.

Assim, si, effectuando a radiciação quadrada de 617796, tomar-se para 2.º algarismo da raiz, o algarismo 7 em vez de 8, o resto que se achar, 248, é forçosamente *maior que o dobro da raiz constituida pelos dous algarismos determinados* ($77 \times 2 = 154$) mais 1; isto é,

$248 > 77 \times 2 + 1$. Escripto [1], porém, o verdadeiro algarismo 8, o resto 93 é *menor* que o dobro 156 da raiz 78 constituida pelos dous primeiros algarismos mais 1; isto é, $93 < 78 \times 2 + 1$.

Póde-se, pois, concluir que — *o resto obtido pela radiciação quadrada d'um numero inteiro qualquer é, no maximo, egual ao dobro dessa raiz.*

203. — Applicando a *regra* do n.º 200 ao numero 617796, a radiciação effectua-se de conformidade com o seguinte

TYPO DO CALCULO:

```
6 1. 7 7. 9 6       |   7 8 6
4 9                 |----------
-------------       |   1 4 8
1 2 7. 7                  8
1 1 8 4             ----------
-------------        1 1 8 4
    9 3 9. 6        ----------
    9 3 9 6          1 5 6 6
-------------              6
          0         ----------
                     9 3 9 6
```

1. — Eis os

TYPOS DO CALCULO:

```
6 1. 7 7. 9 6 | 7 7 . . .        6 1. 7 7. 9 6 | 7 8 . . .
4 9           |-----------       4 9           |-----------
------------- |   1 4 7          ------------- |   1 4 8
1 2 7. 7      |       7          1 2 7. 7      |       8
1 0 2 9       |-----------       1 1 8. 4      |-----------
-------------   1 0 2 9          -------------    1 1 8 4
  2 4 8                              9 3
  . . .                              . . .
  . . .                              . . .
```

$248 > 77 \times 2 + 1 > 155$ $\qquad$ $93 < 78 \times 2 + 1 < 157$

Com effeito, sendo o numero 617796 maior que 100, sua raiz quadrada contém *dezenas* e *unidades;* e, para obter as dezenas é mistér separar os dous primeiros algarismos (9 e 6) á direita, e effectuar a radiciação do maior quadrado contido nas 6177 centenas que restam á esquerda. Estas, porém, formam um numero maior que 100, de modo que a respectiva raiz contém tambem *dezenas* e *unidades;* e, para determinar as dezenas é mistér separar os dous primeiros algarismos (7 e 7) á direita, e effectuar a radiciação do maior quadrado contido nas 61 centenas restantes á esquerda.

O maior quadrado contido em 61 é 49, cuja raiz é 7; a raiz, portanto, de 6177 contém 7 dezenas, que podem desde logo ser escriptas no logar reservado para a raiz quadrada que se trata de determinar. Para obter as unidades da raiz de 6177, é preciso subtrahir deste numero o quadrado das 7 dezenas já obtidas, o que se reduz a subtrahir 49 centenas de 61 centenas e escrever á direita do resto 12 os dous seguintes algarismos 7 e 7 do numero indicado, o que forma o numero 1277. Dividindo-se as 127 dezenas deste numero pelo dobro 14 das 7 dezenas da raiz, o quociente 8 representa as unidades da raiz do numero 6177. Para verificar si o algarismo 8 assim obtido não é forte, basta escrevel-o á direita do dobro das dezenas da raiz, o que forma o numero 148, multiplicar este numero por 8 e subtrahir o producto 1184 de 1277, o que dá para resto 93, d'onde a conclusão de que o algarismo 8 não é *forte*. Para verificar que não é tambem *fraco* (o que poderia parecer por ser $127 = 14 \times 9 + 1$), basta observar que addicionando-se 8 a 148, tem-se 156 para dobro da raiz achada; e, como o resto 127 é *menor* que $156 + 1$, segue-se que o algarismo 8 não é *fraco*. E, como já vimos que tambem não é forte, concluimos que é *exacto;*

e que, portanto, 78 é a raiz do maior quadrado contido em 6177.

Assim, pois, a raiz quadrada do numero proposto 617796 contém 78 dezenas.

Para determinar, agora, as respectivas unidades desta raiz, é mistér subtrahir, do numero proposto, o quadrado dessas 78 dezenas. Mas, como tal quadrado é um numero exacto de centenas, basta subtrahil-o das 6177 centenas do numero proposto, e escrever á direita do resto os dous seguintes algarismos 9 e 6. Tal subtracção já foi, porém, effectuada, pois que subtrahio-se de 6177 primeiramente o quadrado das 7 dezenas da raiz, o que deu para resto 1277, e deste resto subtrahio-se depois 1184, isto é, o dobro das 7 dezenas pelas 8 unidades mais o quadrado destas. Para obter portanto, agora, as unidades da raiz quadrada do numero proposto 617796, basta escrever á direita do resto 93 os dous ultimos algarismos 9 e 6 á direita desse numero, o que forma o numero 9396, cujas 939 dezenas, divididas pelo dobro 156 das 78 dezenas achadas para a raiz procurada, dam o algarismo 6 das unidades desta raiz.

Para verificar que este algarismo não é *forte*, basta escrevel-o á direita do dobro 156 das dezenas da raiz, o que forma o numero 1566 que, multiplicado por 6, reproduz exactamente o resto 9396. E fica assim verificado tambem, não só que o referido algarismo 6 não é *fraco*, como tambem que 786 é a raiz exacta do numero proposto 617796.

204. — Como exercicio util aos principiantes convirá que verifiquem por si os calculos indicados no seguinte

TYPO DO CALCULO :

8.75.46.87.92	29588
4	49
47.5	9
441	441
344.6	585
2925	5
5218.7	2925
47264	5908
49239.2	8
473344	47264
19048	59168
	8
	473344

Por este calculo verifica-se que o numero proposto 875468792 *não é quadrado perfeito*. O numero 29588, obtido pela radiciação, é a sua raiz quadrada, *a menos d'uma unidade por defeito* (198), pois que o quadrado do numero 29589, immediatamente superior ao obtido, já é numero superior ao proposto. E' certo que se poderia tomar tambem este ultimo numero 29589 para raiz quadrada do numero proposto 875468792; mas, nesse caso, tal raiz seria approximada, *a menos d'uma unidade por excesso.*

205. — Em alguns casos conhece-se, pela simples inspecção do numero proposto, que elle não tem raiz quadrada exacta, e que, portanto, não é quadrado perfeito.

Assim,

1.° — *Si o numero proposto terminar por 2, 3, 7, ou 8, não tem raiz exacta;* porquanto, só o algarismo das unidades da raiz dá, na potenciação do quadrado, unidades, e nem um algarismo dá, no seu quadrado, as terminações 2, 3, 7 ou 8.

2.° — *Si o numero proposto terminar em numero impar de zéros, não tem tambem raiz exacta;* porquanto, si o quadrado termina em zéros, a sua raiz tambem termina, e, portanto, o numero dos zéros do quadrado deve ser o *dobro* dos da raiz, isto é, *sempre par.*

§ 3.º — Raiz cubica

206. — Raiz cubica — *d'um numero é o numero que, elevado ao cubo, reproduz o numero proposto.*

Assim, a raiz cubica de 216 ($\sqrt[3]{216}$) é 6, porque $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$.

207. — Formando os cubos das diversas potencias de 10, tem-se a seguinte tabella :

$$1^3 = 1, \quad \text{d'onde :} \quad \sqrt[3]{1} = 1,$$
$$10^3 = 1000, \quad \text{»} \quad \sqrt[3]{1000} = 10,$$
$$100^3 = 1000000, \quad \text{»} \quad \sqrt[3]{1000000} = 100,$$
$$1000^3 = 1000000000, \quad \text{»} \quad \sqrt[3]{1000000000} = 1000,$$

. . . .

. . . .

E analysando-a, conclue-se :

1.° — Que os numeros comprehendidos entre 1 e 1000 teem as suas raizes cubicas comprehendidas entre 1 e 10, isto é, *a raiz cubica tem um só algarismo si a potencia dada fôr numero de 1, 2 ou 3 algarismos;* — os numeros comprehendidos entre 1000 e 1000000 teem a sua raiz cubica entre 10 e 100, isto é, *a raiz cubica tem 2 algarismos, si a potencia dada fôr numero de 4, 5 ou 6 algarismos;* — os numeros comprehendidos entre 1000000 e 1000000000 teem as suas raizes cubicas comprehendidas entre 100 e 1000, isto é, *a raiz cubica tem 3 algarismos, si a potencia dada fôr numero* de 7, 8 *ou* 9 *algarismos;* — e, assim por deante, o que demonstra a verdade da seguinte proposição geral : — *Si o numero dos algarismos d'um numero dado fôr multiplo de 3, sua raiz cubica terá tantos algarismos quantos forem a terça parte desse numero de algarismos; e, si não fôr multiplo de 3, sua raiz cubica terá tantos algarismos quantos forem a terça parte e mais* 1 *desse numero d'algarismos.* Assim, si a potencia dada tiver 12 algarismos, a raiz cubica terá 4; e si a potencia tiver 14, a raiz terá 5.

2.° — Que, sendo 10 a raiz cubica de 1000, a raiz cubica de qualquer numero *menor que 1000* será representada por um numero digito, isto é, *menor que 10;* e, a raiz cubica de qualquer numero *maior que 1000* será representada por um numero composto de *dezenas e unidades;* do que decorre naturalmente a distincção de *dous casos* na theoria da *radiciação da raiz cubica.*

208. — Primeiro caso : — *O numero dado é menor que 1000.* — Sendo, como vimos, 10 a raiz cubica de 1000, serão numeros digitos, isto é, de um só algarismo, as raizes cubicas dos numeros menores que 1000; e, como os cubos dos *nove* numeros digitos

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9

são, respectivamente,

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, e 729,

segue-se que :

1.º — Só os nove numeros indicados nesta 2.ª linha horizontal teem raizes cubicas exactas que sejam numeros digitos;

2.º — Qualquer outro numero, menor que 1000, que esteja comprehendido entre dous quaesquer dos *nove* ácima indicados, terá para raiz cubica *approximada* a do menor, ou a do maior, desses dous numeros entre os quaes estiver comprehendido.

Assim, estando o numero 298, por exemplo, comprehendido entre os numeros 216 e 343, sua raiz cubica *approximada* será 6 (raiz exacta de 216) ou 7 (raiz exacta de 343). A primeira, 6, será a raiz cubica do numero proposto, 298, *a menos de uma unidade por defeito*, e a segunda, 7, será a raiz cubica do numero proposto, 298, *a menos de uma unidade por excesso.*

Mais adiante veremos os processos empregados para obter maior approximação das raizes cubicas.

209. — Segundo caso: — *O numero dado é maior que 1000.* — Sendo, como vimos, 10 a raiz cubica de 1000, qualquer numero *maior que 1000* terá para raiz cubica um numero *maior que 10* e composto, portanto, de *dezenas* e *unidades*. E, como um numero deve ser sempre considerado como o *cubo* de sua respectiva *raiz cubica*, poderemos sempre considerar o numero composto, qualquer que elle seja maior que 1000, como composto das 4 seguintes partes (184, 1.º th. corol.):

1.ª — Cubo das dezenas da sua raiz;

2.ª — Triplo producto do quadrado das dezenas pelas unidades da sua raiz;

3.ª — Triplo producto das dezenas pelo quadrado das unidades da sua raiz;

4.ª — Cubo das unidades de sua raiz.

Si fôr, portanto, possivel destacar do numero proposto a 1.ª destas 4 partes, determinando a raiz cubica della, ter-se-hão as dezenas da raiz cubica desse numero. O'ra, o cubo das dezenas da raiz, sendo um producto de dezenas por dezenas por dezenas, é um numero exacto de milhares e só póde estar contido nos milhares do numero proposto, os quaes poderão conter tambem alguns milhares provenientes das reservas feitas sobre as outras tres partes ácima indicadas e sobre o resto, si o houver. Radiciando, pois, o maior cubo contido nos milhares do numero proposto, o numero obtido não poderá ser *menor* que as dezenas da raiz procurada desse numero proposto; nem tão pouco poderá ser *maior*, pois, em tal caso, essa raiz do maior cubo contido nos milhares do numero proposto excederia de uma unidade pelo menos a *raiz total* deste numero ou do maior cubo nelle contido, o que é absurdo [1]. Portanto, a raiz do maior cubo contido nos milhares do numero proposto representa exactamente as dezenas da raiz cubica desse numero.

Isto posto, si desse numero subtrahir-se o cubo das dezenas da sua raiz, o resto comprehenderá apenas as outras 3 partes, isto é : — o triplo producto do quadrado das dezenas da raiz pelas unidades, mais o triplo producto das dezenas pelo quadrado das unidades, e mais o cubo das unidades; e poderá conter ainda o resto da operação, si o houver por não ser o numero proposto cubo perfeito.

Si, pois, puder-se destacar, nesse resto da subtracção effectuada, a 1.ª das indicadas 3 partes, é claro que, divi-

---

1. — Sendo, por exemplo, 4 o numero das dezenas da raiz cubica d'um numero dado, não podem ser 5 dezenas a raiz do maior cubo contido nos milhares desse numero ; porquanto, si assim fosse, a raiz desse maior cubo excederia a raiz procurada que, na hypothese figurada, é, no maximo, egual a 49 unidades.

dindo-a pelo *triplo do quadrado das dezenas da raiz*, ter-se-hão as unidades desta, que ficará, portanto, determinada. O'ra, o triplo producto do quadrado das dezenas da raiz pelas unidades, sendo um numero exacto de centenas, só póde estar nas centenas do resto em questão, as quaes poderão conter tambem reservas provenientes das outras partes e do proprio resto da operação, si o houver. Dividindo, pois, taes centenas pelo triplo quadrado das dezenas da raiz, não se póde achar para quociente um numero *menor* que as unidades da referida raiz; mas, póde-se achar um *maior*. Para verifical-o ha dous processos : — o 1.º consiste em effectuar a potenciação ao cubo do numero achado para raiz, cubo esse que deverá poder ser subtrahido do numero proposto; e o 2.º consiste em escrever o algarismo das unidades da raiz achada á direita do triplo das dezenas, multiplicar o numero assim formado por esse mesmo algarismo das unidades, o que dá para producto o triplo das dezenas pelas unidades da raiz mais o quadrado das unidades, sommar a este resultado o triplo quadrado das dezenas, e multiplicar esta somma ainda por esse mesmo algarismo das unidades da raiz, o que dá para producto o triplo quadrado das dezenas pelas unidades, mais o triplo das dezenas pelo quadrado das unidades e mais o cubo destas, producto este que deverá poder ser subtrahido do resto de cuja divisão resultou o algarismo das unidades da raiz. Si, em qualquer dos casos, não fôr possivel a subtracção, ficará verificado que o algarismo achado para as unidades da raiz é *maior* que o verdadeiro; e, então, será mistér diminuil-o d'uma, ou mais, unidades.

210. — Do exposto, conclue-se a seguinte

Regra : — *Para effectuar a radiciação da raiz cubica de um numero maior que 1000, determina-se a raiz do* *maior cubo contido nos milhares desse numero, o que dá as dezenas da raiz procurada; subtrahe-se o cubo dessas dezenas do numero proposto, e, dividindo as centenas do resto assim obtido pelo triplo quadrado das dezenas da raiz, obteem-se as unidades da raiz, ou, pelo menos, um numero que não póde ser a ellas inferior. Para verificar si esse numero não é tambem superior ás unidades da raiz, que se quer determinar, ou effectua-se a potenciação ao cubo da raiz total obtida e vê-se si o respectivo cubo póde ser subtrahido do numero proposto; ou, então, á direita do triplo das dezenas da raiz escreve-se o algarismo obtido para as unidades; multiplica-se o numero assim formado por esse mesmo algarismo das unidades, ao producto addiciona-se o triplo quadrado das dezenas da raiz, multiplica-se a somma ainda pelo mesmo algarismo das unidades, e vê-se si o resultado assim obtido póde ser subtrahido do resto.*

211. — Esta regra exige que se saiba effectuar a radiciação do maior cubo contido nos milhares do numero proposto. Vejamos si, com effeito, é facil effectuar essa radiciação.

Si o numero proposto contém, no maximo, 6 algarismos, seus milhares constam de 3 apenas; e, então, a radiciação do maior cubo contido nesses milhares effectua-se facilmente, como ficou indicado no n.º 208, o que dá as dezenas da raiz, cujas unidades será facilimo determinar em seguida.

Si o numero proposto contém apenas 9 algarismos, seus milhares constam de 6; e, nesse caso, determina-se, primeiramente, a raiz do maior cubo contido nesses milhares, como si elles formassem um numero separado, o que dá as dezenas da raiz procurada, e, depois, determinam-se as unidades desta.

Identico raciocinio applica-se aos numeros compostos de 12, 15, etc., algarismos, de modo que a regra é *geral*.

212. — Como o algarismo das unidades da raiz é obtido por meio de uma divisão, é sempre possivel que o receio de escrever na raiz um algarismo *maior* que o verdadeiro exponha o operador a escrever um *menor*. Em tal caso, porém, o resto da operação será *maior que o triplo quadrado da raiz achada, mais o triplo dessa raiz, e mais um.*

Com effeito, sendo (184, 2.º th.) *a differença entre os cubos de dous numeros inteiros consecutivos egual ao triplo quadrado do menor, mais o triplo do menor, e mais* 1, — é claro que, desde que tomar-se para raiz de um cubo proposto um numero *menor de uma unidade* que a verdadeira raiz, o cubo proposto conterá, além do cubo dessa raiz defeituosa, mais o triplo do seu quadrado, mais o seu triplo, e mais 1. Subtrahindo-se, portanto, desse cubo proposto o da raiz defeituosa achada, o resto conterá, pelo menos, o *triplo quadrado dessa raiz, mais o triplo della, e mais* 1.

Assim, si, effectuando [1] a radiciação da raiz cubica de

---

1. — Eis os

TYPOS DO CALCULO :

```
198.155.287 | 57
125         |----------
-----       | 25
  731.55    |  3
  60193     |----------
-----       | 75...157
  12962     |        7
  .....     |    ------
  .....     |     1099
            |     7500
            |    ------
            |     8599
            |        7
            |    ------
            |    60193
```

$$12942 > (3 \times 57^2) + (3 \times 57) + 1$$
$$> 9747 + 171 + 1 > 9919$$

```
198.155.287 { 58
125         |----------
-----       | 25
  731.55    |  3
  70112     |----------
-----       | 75...158
   3043     |        8
  .....     |    ------
  .....     |     1264
            |     7500
            |    ------
            |     8764
            |        8
            |    ------
            |    70112
```

$$3043 < (3 \times 58^2) + (3 \times 58) + 1$$
$$< 10092 + 174 + 1 < 10267$$

198155287, toma-se para 2.° algarismo da raiz, 7, em vez de 8, o resto achado, 12962, é forçosamente MAIOR *que o triplo quadrado da raiz constituida pelos dous algarismos determinados* ($3 \times 57^2 = 9747$), *mais o triplo dessa raiz* ($3 \times 57 = 171$), *e mais* *1*, isto é,

$$12962 > 3 \times 57^2 + 3 \times 57 + 1 > 9747 + 171 + 1 > 9919.$$

Escripto, porém, o verdadeiro algarismo 8, o resto 3043 é MENOR *que o triplo quadrado da raiz constituida pelos dous algarismos determinados* ($3 \times 58^2 = 10092$), *mais o triplo dessa raiz* ($3 \times 58 = 174$), *e mais* *1*, isto é,

$$3043 < 3 \times 58^2 + 3 \times 58 + 1 < 10092 + 174 + 1 < 10267.$$

Póde-se, pois, concluir que — *o resto obtido pela radiciação da raiz cubica d'um numero inteiro qualquer é, no maximo, egual ao triplo quadrado da raiz, mais o triplo desta.*

213. — Applicando a REGRA do n.° 210 ao numero 198155287, a radiciação effectua-se de conformidade com o seguinte

TYPO DO CALCULO :

198.155.287	583			
125	$3 \times 5^2 = 75$. . .	158	$3 \times 58^2 = 10092$.	1743
731.55		8		3
701 12		1264		5229
30432.87		7500		1009200
30432 87		8764		1014429
0		8		3
		70112		3043287

Com effeito, sendo o numero 198155287 maior que 1000, sua raiz cubica contém *dezenas* e *unidades;* e, para obter as dezenas, é mistér separar os 3 primeiros algarismos á direita (2, 8 e 7) e effectuar a radiciação do maior cubo contido nos 198155 milhares que restam á esquerda. Estes formam, porém, um numero maior que 1000, de modo que a respectiva raiz cubica contém tambem, por sua vez, *dezenas e unidades*; e para determinar as dezenas, é mistér separar os 3 primeiros algarismos á direita (1, 5 e 5), e effectuar a radiciação do maior cubo contido nos 198 milhares restantes á direita. O maior cubo contido em 198 é 125, cuja raiz é 5; a raiz, portanto, de 198155 contém 5 dezenas, que podem desde logo ser escriptas no logar reservado para a raiz cubica que se trata de determinar. Para obter as unidades da raiz de 198155, é preciso subtrahir deste numero o cubo das 5 dezenas já obtidas, o que se reduz a subtrahir 125 milhares de 198 milhares e escrever á direita do resto 73 os *tres* seguintes algarismos (1, 5 e 5) do numero indicado, formando assim o numero 73155. Dividindo-se as 731 centenas deste resto pelo triplo quadrado das 5 dezenas da raiz ($3 \times 5^2 = 75$), o quociente 8 representa as unidades da raiz do numero 198155. Para verificar si o algarismo 8 assim obtido não é forte, basta escrevel-o á direita do triplo das dezenas, o que forma o numero 158, multiplicar este numero por esse mesmo algarismo 8, addicionar ao resultado 1264 as 75 centenas que representam o triplo quadrado das dezenas e multiplicar a somma 8764 ainda pelo mesmo algarismo 8 das unidades; e, como o resultado 70112 póde ser subtrahido de 73155 dando para resto 3043, conclue-se que o algarismo 8 não é *forte*. Para verificar que tambem não é *fraco* (o que poderia parecer por ser $731 = 75 \times 9 + 56$), basta observar que o resto 3043 é MENOR que *o triplo quadrado da raiz obtida* ($3 \times 58^2 = 10092$), *mais o triplo dessa raiz* ($3 \times 58 = 174$), *e mais 1*, isto é, MENOR que 10267. Não sendo, pois, nem *forte*, nem *fraco*, o algarismo 8 é exacto, e 58, representando a raiz do maior cubo contido nos 198155 milhares do numero proposto, são as dezenas da raiz procurada. Para determinar, agora, as unidades desta raiz, é mistér subtrahir do numero proposto o cubo dessas 58 dezenas. Como, porém, este cubo é um numero exacto de milhares, basta subtrahil-o dos 198155 milhares do numero proposto e escrever, á direita do resultado, os *tres* seguintes algarismos (2, 8 e 7). Semelhante subtracção já foi, porém, effectuada, porquanto de 198155 subtrahiu-se primeiramente o cubo 125 das 5 dezenas, o que deu para resto 73155, e deste resto subtrahiu-se depois 70112 que representa o triplo quadrado das 5 dezenas pelas 8 unidades, mais o triplo producto das 5 dezenas pelo quadrado das 8 unidades e mais o cubo das 8 unidades (isto é, $60000 + 9600 + 512 = 70112$).

Basta, portanto, escrever, á direita do resto 3043, os *tres* seguintes e ultimos algarismos do numero proposto, formando assim o numero 3043287. Dividindo as 30432 centenas deste numero pelo triplo quadrado 10092 das 58 dezenas da raiz, o quociente 3 será o algarismo das unidades da raiz procurada. Que tal algarismo 3 não é *fraco*, é evidente, pois a divisão de 30432 por 10092 não admitte maior quociente. Para verificar que tambem não é *forte*, basta escrevel-o á direita do triplo das dezenas, o que forma o numero 1743, multiplicar este numero por este mesmo algarismo, addicionar o producto resultante 5229 a 10092 centenas (1009200), multiplicar a somma ainda pelo mesmo algarismo 3, e subtrahir o producto 3043287 de 3043287. E, como é nullo o resto, conclue-se, não só que 3 é o algarismo exacto das unidades da raiz procurada, como tambem que 583 é a *raiz cubica exacta* do numero proposto 198155287, que é, portanto, um *cubo perfeito*.

214. — Mui raramente obtem-se exactamente a raiz cubica de um numero proposto, pois muito poucos são os *cubos perfeitos;* assim, no primeiro milhão, por exemplo, só ha *cem* cubos perfeitos. Na maioria dos casos obtem-se a raiz cubica approximada *a menos de uma unidade por defeito, ou por excesso* [1].

215. — Como exercicio util aos principiantes, convirá que verifiquem por si os calculos indicados no seguinte

TYPO DO CALCULO :

648.423.968	865			
512				
	$3 \times 8^2 = 192$. . .	246	$3 \times 86^2 = 22188$.	2585
1364.23		6		5
1240 56				
		1476		12925
123679.68		19200		2218800
111586 25				
		20676		2231725
1209343		6		5
		124056		11158625

Por este calculo verifica-se que o numero proposto 648423968 *não é cubo perfeito*. O numero 865, obtido pela radiciação, é a sua raiz cubica *a menos de uma unidade por defeito* (208), pois que o cubo do numero 866 immediatamente superior ao obtido, já é um numero superior ao proposto. E' certo que se poderia tomar tambem este ultimo numero 866 para raiz cubica do numero proposto 648423968; mas, nesse caso, tal raiz seria approximada *a menos de uma unidade por excesso.*

---

1. — Adeante estudaremos os methodos empregados para obter as raizes quadradas e cubicas com approximação superior a 1 unidade.

§ 4.º — Prova

216. — Para verificar o resultado d'uma radiciação qualquer é mistér effectuar a operação inversa — *potenciação*. Assim, para verificar o resultado d'uma radiciação de raiz quadrada, effectua-se a potenciação ao quadrado da raiz obtida e ao resultado addiciona-se o resto, si o houver; si a somma fôr egual ao numero cuja raiz quadrada tiver sido determinada, póde-se concluir que a radiciação está certa.

Do mesmo modo, para verificar o resultado d'uma radiciação de raiz cubica, effectua-se a potenciação ao cubo da raiz obtida e ao resultado addiciona-se o resto, si o houver; si a somma fôr egual ao numero cuja raiz cubica tiver sido determinada, póde-se concluir que a radiciação está certa.

O processo geralmente conhecido por *prova dos nove* — de que opportunamente trataremos, — póde ser tambem aproveitado para a verificação das potenciações.

LIVRO II

PROPRIEDADES ELEMENTARES

PRELIMINARES

SUMMARIO : — Simplicidade da idéa de *numero*. — Inicio desorganizado das primitivas operações sobre os numeros. — Progressos determinados pela systematização da numeração. — Alto valor dado pelos mathematicos da antiguidade aos estudos relativos ás propriedades dos numeros. — Diophante e Gerbert. — A theoria dos numeros. — Sua vastidão e pouca importancia relativa. — As propriedades elementares dos numeros inteiros.

217. — Nem uma idéa ha mais simples e mais facil de conceber-se que a de *numero*. Mal começa a desinvolver-se a intelligencia d'uma criança, e já póde esta contar seus dedos, as arvores que a rodeiam, os brinquedos com que se entretem, e todos os objectos, emfim, que vê.

Nos tempos primitivos da humanidade, essas operações intuitivas iniciaram-se necessariamente sem ordem, sem methodo, e com o só auxilio da memoria; desde, porém, que a abstracção permittio representar os *numeros* por symbolos geraes, que tomaram depois valores particulares proprios a cada questão a resolver, dispoz o espirito humano de meios para desinvolvel-as e submettel-as a fórmas regulares, de accordo com um determinado systema de numeração.

A invenção da escripta determinou novo progresso; e, de desinvolvimento em desinvolvimento, attingiu o CALCULO DOS VALORES o grão de aperfeiçoamento relativo a que o conduziram os trabalhos de EULER [1] e LAGRANGE [2] no seculo passado e de LEGENDRE [3] no actual.

Entre os mathematicos da antiguidade, desde THALES DE MILETO [4] e PYTHAGORAS DE SAMOS [5], foram as *propriedades dos numeros* um dos principaes objectos das mais incansaveis e intelligentes pesquizas scientificas e das mais profundas especulações philosophicas. As dou-

---

1. — EULER (*Leonardo*), nascido aos 15 de abril de 1707 em *Basilea* (Suissa) e fallecido aos 7 de setembro de 1783 em *São-Petersburgo* (Russia), é considerado, a justo titulo, um dos mais eminentes mathematicos dos tempos modernos. « Sempre original, — diz Condorcet, — multiplicou suas producções além do que era de esperar das forças humanas; e, até o momento em que *cessou de calcular e de viver*, gozou da felicidade rara de uma vida domestica sem nuvens, alliada a uma gloria nunca disputada. » Além de valiosos trabalhos sobre o *calculo das funcções*, com especialidade o *integral*, deixou tambem uma *Arithmetica raciocinada*, publicada apoz seu fallecimento e que forma o 3.º vol. da edição belga (1839) de suas *obras completas*.

2. — LAGRANGE (*José Luis*), nascido em *Turim* (Italia), aos 25 de janeiro de 1736 e fallecido em *Paris* (França) aos 10 de abril de 1813, produziu tão numerosos, variados e importantes trabalhos sobre mathematica e adquiriu tão elevada reputação scientifica, que Napoleão 1.º designava-o *a alta pyramide das sciencias mathematicas*. Sua obra principal é a *Mechanica analytica*; mas, sua verdadeira predilecção pelas *questões arithmeticas* manifestou-se em repetidas *memorias* apresentadas á Academia de Berlim.

3. — LEGENDRE (*Adriano*), nascido em *Toulouse* (1752) e fallecido em *Paris* (1833), autor celebre de uns *Elementos de geometria*, moldados pelos de EUCLIDES, e de preciosas *memorias* sobre varias questões relativas á *theoria dos numeros*, systematizadas depois na obra que, sob o titulo de *Ensaio sobre a theoria dos numeros*, publicou em Paris.

4. — THALES DE MILETO foi o primeiro dos sete sabios da Grecia; floresceu 5 seculos antes da éra christã.

5. — PYTHAGORAS DE SAMOS, que floresceu tambem uns 5 seculos antes da éra christã, foi incontestavelmente o maior pensador da Grecia antiga, e que maior influencia exerceu sobre os progressos iniciaes da *Mathematica*, que elle considerava já então como a *base de todos os conhecimentos humanos*.

trinas, sobretudo, de PYTHAGORAS, desinvolvidas e ampliadas por PLATÃO e seus outros discipulos, deram origem a algumas theorias muito engenhosas sobre os numeros (como, por exemplo, *a dos numeros figurados*), que depois se desinvolveram dando logar a uteis applicações.

Entre os continuadores dos trabalhos da escola pythagoriana avultam DIOPHANTE, que inventou a *analyse indeterminada* e deixou entre suas obras preciosos estudos sobre as propriedades dos *numeros figurados*, e GERBERT, que depois foi Papá sob o nome de SYLVESTRE II, o qual trouxe, em 960, da Hespanha, onde dominavam então os Arabes, para o resto da Europa, os progressos que esse povo introduzira nos estudos arithmeticos.

Todos esses trabalhos eram reunidos sob a denominação geral de *theoria dos numeros*, constituindo um ramo especial e interessante da sciencia mathematica, como uma especie de *arithmetica transcendente*.

Esta *theoria*, porém, que tão ardentes enthusiastas encontrou na antiguidade, foi descurada pelos modernos, com excepção apenas de FERMAT [1] e PASCAL [2] no se-

---

1. — FERMAT (*Pedro*), nascido em *Montauban* (1601) e fallecido em *Toulouse* (1665), revelou sempre a mais irresistivel vocação pelos estudos mathematicos. Depois de PYTHAGORAS, nem um mathematico occupou-se mais que FERMAT, e com maior successo, da theoria dos numeros, assumpto em que todos os historiadores o consideram *sem egual*. Quanto ao alto valor do seu espirito philosophico, diz o eminente MONTUCLA (*Historia das Mathematicas*, Paris, 1802) que, « si DESCARTES faltasse ao espirito humano, FERMAT tel-o-hia substituido em geometria. »

2. — PASCAL (*Blaise*), nascido em *Clermont-Ferrand* (19—junho—1623) e fallecido em *Paris* (19—agosto—1662), foi um dos genios mais precoces que teem assombrado a humanidade. Sem estudo nem um prévio, demonstrou, aos 13 annos, as 32 primeiras *proposições* da *Geometria* de *Euclides*; e aos 16 publicou o seu *Essai pour les coniques*. Além de innumeros e valiosissimos trabalhos scientificos, deixou PASCAL uma obra famosa escripta, sob o titulo de *Lettres provinciales*, contra a moral e a politica dos jesuitas.

culo XVII, Euler e Lagrange no XVIII, e, finalmente, Legendre no actual, de modo que acha-se ainda relativamente muito atrazada.

Vasta e extensa por sua propria natureza, abrange a *theoria dos numeros* a descoberta e o estudo das propriedades inherentes aos differentes numeros em virtude de seus valores e independentemente de qualquer systema particular de numeração; mas, nem por isso, deixa de ser de somenos importancia no systema geral da sciencia mathematica.

As *propriedades elementares dos numeros inteiros* pertencem, de rigor, a essa theoria especial; mas, como ella não póde deixar de ser considerada parte integrante do calculo dos valores, ou arithmetica, cabe, neste logar, o seu estudo que não depende de conhecimentos transcendentes.

CAPITULO I

THEOREMAS RELATIVOS ÁS OPERAÇÕES

SUMMARIO : — Preliminares. — Theoremas relativos á addição. — Theoremas relativos á subtracção. — Theoremas relativos á multiplicação. — Theoremas relativos á divisão. — Theoremas relativos á potenciação. — Theoremas relativos á radiciação.

§ 1.º — Theoremas relativos á addição

218. — Theorema I. — *Para addicionar a um numero a somma de muitos outros, basta addicionar-lhe successivamente cada um destes.*

Seja, com effeito, 275 o numero ao qual se tem de addicionar a somma dos numeros 15, 23 e 57, isto é, $15+23+57$. Quer-se demonstrar que

$$275+(15+23+57)=275+15+23+57.$$

O'ra, tanto n'um como no outro caso, o resultado obtido será composto de todas as unidades contidas nos numeros 275, 15, 23 e 57; logo, a egualdade é verdadeira, e verdadeiro tambem é, portanto, o enunciado do theorema.

219. — Theorema II. — *Para addicionar a um numero a differença de dous outros, basta addicionar a esse numero o maior dos dous e subtrahir da somma o menor.*

Seja, com effeito, o numero 47 a parcella a que se quer addicionar a differença entre 25 e 9. Si a 47 addicionar-se

25, a somma $47 + 25$ excederá de 9 a que se quer obter, por isso que devia-se ter addicionado a 47 apenas a differença entre 25 e 9; para ter, pois, a somma procurada, basta subtrahir 9 de $47 + 25$. Logo

$$47 + (25 - 9) = 47 + 25 - 9,$$

o que demonstra a verdade do theorema.

220. — **Theorema III**. — *Addicionando-se um numero qualquer a uma das parcellas d'uma somma, esta fica augmentada desse numero.*

Seja, com effeito,

$$32 = 12 + 7 + 13.$$

Si addicionar-se o numero 4, por exemplo, á parcella 7, o 2.° membro desta egualdade fica (218) augmentado de 4; e, para que a egualdade subsista, é mistér que o 1.° membro fique tambem *augmentado* do mesmo numero 4, isto é :

$$32 + 4 = 12 + (7 + 4) + 13,$$

o que demonstra a verdade do theorema.

221. — **Theorema IV**. — *Subtrahindo-se um numero qualquer de uma das parcellas d'uma somma, esta fica diminuida desse numero.*

Seja, com effeito,

$$43 = 18 + 15 + 10.$$

Si subtrahir-se o numero 7 da parcella 18, por exemplo, o 2.° membro desta egualdade fica *diminuido* de 7; e, para que a egualdade subsista, é mistér que o 1.° membro fique tambem *diminuido* do mesmo numero 7, isto é,

$$43 - 7 = (18 - 7) + 15 + 10,$$

o que demonstra a verdade do theorema enunciado.

222. — Theorema V. — *Uma somma não se altera quando a uma das suas parcellas se addiciona, e da outra se subtrahe, o mesmo numero.*

Seja, com effeito,

$$19 = 3 + 9 + 7.$$

Si á parcella 3 addicionar-se o numero 5, por exemplo, a somma ficará *augmentada* de 5; mas, si da outra parcella 9 subtrahir-se esse numero 5, a somma ficará *diminuida* de 5. O augmento é, portanto, nullificado pela egual diminuição; logo, a somma não soffre alteração, e

$$19 = (3 + 5) + (9 - 5) + 7 = 8 + 4 + 7,$$

o que demonstra o theorema enunciado.

§ 2.º — Theoremas relativos á subtracção

223. — Theorema VI. — *Para subtrahir de um numero a somma de muitos outros, basta subtrahir delle, successivamente, cada um destes.*

Seja, com effeito, 183 o numero de que se tem de subtrahir a somma dos numeros 21, 17 e 54, isto é, $21 + 17 + 54$. Quer-se demonstrar que

$$183 - (21 + 17 + 54) = 183 - 21 - 17 - 54.$$

O'ra, addicionando-se $(21 + 17 + 54)$, tanto ao 1.º membro desta egualdade, como ao 2.º, os resultados serão, em ambos os casos, 183; logo, a egualdade é verdadeira, e verdadeiro tambem é, portanto, o enunciado do theorema.

224. — Theorema VII. — *Para subtrahir de um numero a differença entre dous outros, basta addicionar a esse numero o menor destes e delle subtrahir o maior.*

Isto é, deve ser

$$89 - (28 - 13) = 89 - 28 + 13.$$

Com effeito, subtrahindo 28 de 89 augmenta-se o subtractor de 13, porque devia elle ser 28 — 13; e fica a differença 89 — 28 *diminuida* desse mesmo numero 13. Para ter, pois, a differença exacta procurada, é mistér addicionar 13 ao resultado 89 — 28, o que dá 89 — 28 + 13. O enunciado do theorema é, portanto, verdadeiro.

225. — Theorema VIII. — *Para subtrahir de um numero dous, ou mais, outros, basta effectuar a addição destes e subtrahir a respectiva somma daquelle.*

Isto é, deve ser

$$35 - 15 - 9 - 7 = 35 - (15 + 9 + 7) = 35 - 31.$$

Com effeito, sendo, em virtude do VI theorema (223), 35 — (15 + 9 + 7) = 35 — 15 — 9 — 7, é claro que, reciprocamente, é tambem,

$$35 - 15 - 9 - 7 = 35 - (15 + 9 + 7) = 35 - 31.$$

226. — Theorema IX. — *Para effectuar muitas addições e subtracções successivas, basta addicionar todos os numeros addictivos, addicionar depois todos os subtractivos, e da 1.ª somma subtrahir a 2.ª*

Isto é, deve ser

$$207 - 35 + 108 - 59 - 18 = (207 + 108) - (35 + 59 + 18).$$

Com effeito (76),

$$207 - 35 + 108 - 59 - 18 = (207 + 108) - 35 - 59 - 18,$$

e (225)

$$(207 + 108) - 35 - 59 - 18 = (207 + 108) - (35 + 59 + 18);$$

portanto,

$$207 - 35 + 108 - 59 - 18 = (207 + 108) - (35 + 59 + 18),$$

o que demonstra a verdade do theorema enunciado.

§ 3.º — Theoremas relativos á multiplicação

227. — Theorema X. — *Um producto de factores inteiros é independente da ordem desses factores.*

Este theorema já foi demonstrado (123) para o caso de *dous factores;* a demonstração geral deduz-se da analyse dos dous seguintes casos :

1.º — Um producto de 3 factores não se altera quando é invertida a ordem dos 2 ultimos factores, isto é,

$$8 \times 5 \times 4 = 8 \times 4 \times 5.$$

Com effeito,

$$8 \times 5 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8,$$

e, portanto,

$$(8 \times 5) \times 4 = (8 \times 4) + (8 \times 4) + (8 \times 4) + (8 \times 4) + (8 \times 4);$$

mas, o 2.º membro desta egualdade é o producto de 8×4 repetido 5 vezes, isto é, $8 \times 4 \times 5$; logo, é verdadeira a egualdade,

$$8 \times 5 \times 4 = 8 \times 4 \times 5.$$

D'aqui resulta que — *um producto de qualquer numero de factores não se altera quando é invertida a ordem dos dous ultimos factores;* porque o producto

$$5 \times 8 \times 3 \times 7 \times 4,$$

por exemplo, é (138) o producto dos 3 seguintes factores: $(5 \times 8 \times 3)$, 7, e 4; e, em virtude da proposição que acaba de ser demonstrada,

$$(5 \times 8 \times 3) \times 7 \times 4 = (5 \times 8 \times 3) \times 4 \times 7,$$

d'onde resulta

$$5 \times 8 \times 3 \times 7 \times 4 = 5 \times 8 \times 3 \times 4 \times 7.$$

2.º *Um producto de diversos factores não se altera quando é invertida a ordem de dous quaesquer factores consecutivos.*

Quer-se demonstrar que, por exemplo,

$$5 \times 7 \times 3 \times 8 \times 9 = 5 \times 7 \times 8 \times 3 \times 9.$$

O'ra, em virtude da proposição anterior,

$$5 \times 7 \times 3 \times 8 = 5 \times 7 \times 8 \times 3;$$

mas, como, multiplicando estes dous numeros *eguaes* pelo mesmo factor 9, resultam productos *eguaes*, segue-se que

$$5 \times 7 \times 3 \times 8 \times 9 = 5 \times 7 \times 8 \times 3 \times 9.$$

D'aqui resulta que — *sem alterar o valor de um producto, é sempre possivel alterar á vontade a collocação de um qualquer de seus factores;* porque, para isso, bastará trocar, o numero de vezes que se quizer, o logar desse factor com o que o estiver precedendo ou seguindo. Assim, no producto

$$7 \times 5 \times 8 \times 4 \times 2 \times 6,$$

póde-se fazer o factor 2, por exemplo, occupar o 2.º logar, porque póde-se, sem alterar esse producto, escrevel-o successivamente :

$$7 \times 5 \times 8 \times 2 \times 4 \times 6$$
$$7 \times 5 \times 2 \times 8 \times 4 \times 6,$$
$$7 \times 2 \times 5 \times 8 \times 4 \times 6.$$

D'aqui resulta, finalmente, que — *sem alterar o valor de um producto, é sempre possivel escrever seus factores na ordem arbitraria que se quizer;* porque, cada um delles póde ser escripto arbitrariamente no logar que se quizer.

E fica, assim, demonstrada a verdade do theorema enunciado, isto é, que — *um producto de factores inteiros é independente da ordem desses factores.*

228. — Deste theorema decorrem os seguintes — COROLLARIOS :

I. — *Um producto de varios factores não se altera quando dous ou mais factores são substituidos pelo respectivo producto effectuado.*

Assim,

$$3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 2 \times 4 = 3 \times 5 \times 56 \times 9;$$

porquanto, em virtude do theorema precedente,

$$3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 2 \times 4 = 7 \times 2 \times 4 \times 3 \times 5 \times 9,$$

e (138)

$$7 \times 2 \times 4 \times 3 \times 5 \times 9 = (7 \times 2 \times 4) \times 3 \times 5 \times 9;$$

d'onde :

$$3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 2 \times 4 = (7 \times 2 \times 4) \times 3 \times 5 \times 9 =$$
$$= 56 \times 3 \times 5 \times 9 = 3 \times 5 \times 56 \times 9.$$

II. — *Para multiplicar um producto de diversos factores* *por um numero, basta multiplicar por este numero um só dos factores desse producto.*

Assim,

$$(5 \times 3 \times 7) \times 4 = (5 \times 7) \times (3 \times 4) = 5 \times 7 \times 12;$$

porquanto,

$$(5 \times 3 \times 7) \times 4 = 5 \times 3 \times 7 \times 4 = 5 \times 7 \times 3 \times 4 =$$
$$= (5 \times 7) \times (3 \times 4) = 5 \times 7 \times 12.$$

III. — *Para multiplicar um numero por um producto de varios factores, basta multiplicar esse numero por cada factor successivamente.*

Assim, para multiplicar, por exemplo, 8 por $60 = 3 \times 5 \times 4$, basta multiplicar 8 por 3, o producto por 5, e o producto por 4, o que se indica :

$$8 \times 3 \times 5 \times 4.$$

Com effeito, sendo (123 e 227) :

$$8 \times 60 = 60 \times 8,$$

tem-se (138) :

$$8 \times 60 = (3 \times 5 \times 4) \times 8 = 3 \times 5 \times 4 \times 8 =$$
$$= 8 \times 3 \times 5 \times 4.$$

IV. — *Para multiplicar entre si dous, ou mais, productos de diversos factores, basta multiplicar todos os factores, que elles conteem, em uma ordem qualquer arbitraria.*

Assim,

$$(3 \times 5 \times 2) \times (4 \times 3 \times 5 \times 7) \times (15 \times 8) =$$
$$= 3 \times 5 \times 2 \times 4 \times 3 \times 5 \times 7 \times 15 \times 8;$$

porquanto, sem alterar o valor do producto indicado pelo

2.º membro desta egualdade, póde-se substituir dous ou mais dos seus factores pelo respectivo producto effectuado *(1.º corollario)*, e escrevel-o, portanto, sob a fórma indicada no 1.º membro; o que demonstra a exactidão da egualdade e, portanto, a verdade da proposição enunciada.

229. — Theorema XI. — *Para multiplicar uma somma por um numero, basta multiplicar cada uma das parcellas da somma por esse numero e addicionar os productos obtidos.*

Assim,

$$(15 + 8 + 6) \times 3 = (15 \times 3) + (8 \times 3) + (6 \times 3),$$

porquanto, multiplicar $15 + 8 + 6$ por 3 importa addicionar 3 parcellas eguaes a $15 + 8 + 6$, isto é,

$$\begin{gathered} 15 + 8 + 6, \\ 15 + 8 + 6, \\ 15 + 8 + 6, \end{gathered}$$

o que, por sua vez, importa repetir 15 tres vezes, mais 8 tres vezes e mais 6 tres vezes, o que se indica escrevendo

$$(15 \times 3) + (8 \times 3) + (6 \times 3).$$

Logo:

$$(15 + 8 + 6) \times 3 = (15 \times 3) + (8 \times 3) + (6 \times 3).$$

230. — Theorema XII. — *Para multiplicar duas sommas entre si, basta addicionar os productos de cada parcella de uma dellas por cada uma das da outra.*

Assim, por exemplo,

$$(5+8+4)\times(3+6)=(5\times3)+(8\times3)+(4\times3)+(5\times6)+(8\times6)+(4\times6);$$

porquanto, em virtude do theorema antecedente (229),

$$(5+8+4)\times(3+6)=[(5+8+4)\times 3]+[(5+8+4)\times 6],$$

e, por sua vez,

$$\begin{aligned}[(5+8+4)\times 3]+[(5+8+4)\times 6]&=\\ &=(5\times 3+8\times 3+4\times 3)+(5\times 6+8\times 6+4\times 6)=\\ &=(5\times 3)+(8\times 3)+(4\times 3)+(5\times 6)+(8\times 6)+(4\times 6).\end{aligned}$$

231. — Theorema XIII. — *Para multiplicar uma differença por um numero, basta multiplicar cada um dos termos da differença por esse numero e subtrahir o menor producto do maior.*

Assim, por exemplo,

$$(15-9)\times 3=(15\times 3)-(9\times 3);$$

porquanto, sendo $(15-9)\times 3$ a somma de 3 numeros eguaes á differença $15-9$, tem-se que

$$(15-9)+(15-9)+(15-9)=(15\times 3)-(9\times 3).$$

Corollario I. — *O producto da somma de dous numeros pela differença entre elles é egual á differença entre os respectivos quadrados desses dous numeros.*

Assim, por exemplo,

$$(7+3)\times(7-3)=7^2-3^2=49-9=40;$$

porquanto, em virtude do theorema ácima,

$$(7+3)\times(7-3)=\left[(7+3)\times 7\right]-\left[(7+3)\times 3\right],$$

e, em virtude do XI theorema (229),

$$\begin{aligned}\left[(7+3)\times 7\right]-\left[(7+3)\times 3\right]&=\left[(7\times 7)+(3\times 7)\right]-\left[(7\times 3)+(3\times 3)\right]=\\ &=7^2+(3\times 7)-(3\times 7)-3^2=7^2-3^2.\end{aligned}$$

Corollario II. — *Quando se augmenta, ou diminue, de um numero um dos factores d'um producto, este augmenta, ou diminue, do producto do outro factor por esse mesmo numero.*

Assim, por exemplo, si

$$5 \times 6 = 30, (5 \pm 3) \times 6 = 30 \pm (6 \times 3),$$

isto é :

$$(5 + 3 = 8) \times 6 = 30 + (6 \times 3 = 18) = 48,$$

e

$$(5 - 3 = 2) \times 6 = 30 - (6 \times 3 = 18) = 12;$$

porquanto :

1.º $(5 + 3) \times 6 = (5 \times 6) + (3 \times 6) = 30 + (6 \times 3)$,
2.º $(5 - 3) \times 6 = (5 \times 6) - (3 \times 6) = 30 - (6 \times 3)$,

que é o que se queria demonstrar.

§ 4.º — Theoremas relativos á divisão

232. — Theorema XIV. — *Para dividir um numero por um producto de muitos factores, basta dividil-o por cada factor successivamente.*

Seja 3780 o numero que se tem de dividir pelo producto de $5 \times 12 \times 7$; quer-se demonstrar que basta dividir 3780 por 5, o quociente obtido por 12, e, finalmente, o segundo quociente obtido por 7. Com effeito, sendo o dividendo egual ao producto do divisor pelo quociente, tem-se, dividindo 3780 por 5, o que dá para quociente 756 :

$$3780 = 5 \times 756; \qquad (a)$$

dividindo, agora, este quociente 756 por 12, o que dá para 2.º quociente 63, tem-se :

$$756 = 12 \times 63; \qquad (b)$$

e, dividindo, finalmente, este 2.º quociente por 7, o que dá para 3.º quociente 9, tem-se :

$$63 = 7 \times 9. \qquad (c)$$

Si, na 1.ª egualdade (a) substituir-se 756 pelo seu valor dado pela 2.ª egualdade (b), tem-se :

$$3780 = 5 \times 12 \times 63; \qquad (d)$$

e, si, nesta egualdade (d) substituir-se 63 pelo seu valor dado pela 3.ª egualdade (c), tem-se :

$$3780 = (5 \times 12 \times 7) \times 9;$$

d'onde se conclue que é verdadeira a proposição enunciada.

NÓTA. — A verdade da proposição constante deste theorema resulta egualmente da analyse de um exemplo qualquer em que as divisões successivas não se façam exactamente : assim, por exemplo, no caso de ser 827 o numero a dividir pelo producto $3 \times 6 \times 7$. Com effeito, dividindo 827 por 3, o que dá para quociente 275 e para resto 2, tem-se :

$$827 = 3 \times 275 + 2; \qquad (a)$$

dividindo 275 por 6, o que dá para quociente 45 e para resto 5, tem-se :

$$275 = 6 \times 45 + 5; \qquad (b)$$

e dividindo, finalmente, 45 por 7, o que dá para quociente 6 e para resto 3, tem-se :

$$45 = 7 \times 6 + 3. \qquad (c)$$

Substituindo, agora, na egualdade (a) o valor de 275 dado pela egualdade (b), tem-se :

$$\begin{aligned} 827 &= 3 \times (6 \times 45 + 5) + 2 = \\ &= 3 \times 6 \times 45 + (3 \times 5) + 2 ; \qquad \text{(d)} \end{aligned}$$

e, nesta egualdade (d) o valor de 45 dado pela egualdade (c), tem-se :

$$\begin{aligned} 827 &= (3 \times 6) \times (7 \times 6 + 3) + (3 \times 5) + 2 = \\ &= 3 \times 6 \times 7 \times 6 + (3 \times 6 \times 3) + (3 \times 5) + 2 = \\ &= 3 \times 6 \times 7 \times 6 + 54 + 15 + 2 = \\ &= 3 \times 6 \times 7 \times 6 + 71 = 756 + 71 = 827. \end{aligned}$$

233. — Theorema XV. — *Para dividir um producto de muitos factores por um numero, basta dividir por esse numero um dos factores, conservando os outros.*

Assim, para dividir $(5 \times 48 \times 17)$ por 12, basta dividir por 12 um dos factores, por exemplo 48, conservando os outros, isto é :

$$\frac{5 \times 48 \times 17}{12} = 5 \times 17 \times \frac{48}{12} = 5 \times 17 \times 4.$$

Com effeito,

$$5 \times 48 \times 17 = 12 \times (5 \times 17 \times 4)$$

ou :

$$4080 = 12 \times 340 = 4080.$$

Corollario. — *Para dividir um producto de varios factores por um d'estes, basta supprimil-o.*

Assim :

$$\frac{17 \times 38 \times 7^3}{38} = 17 \times 7^3.$$

234. — Theorema XVI. — *Quando se multiplica, ou divide, o dividendo e o divisor por um mesmo numero,* *o quociente não muda, porém o resto fica multiplicado, ou dividido, por esse numero.*

Seja, por exemplo :

$$46 = (6 \times 7) + 4. \qquad \text{(a)}$$

Multiplicando ambos os membros desta egualdade por 3, por exemplo, tem-se :

$$46 \times 3 = (6 \times 7 \times 3) + (4 \times 3),$$

isto é :

$$138 = 18 \times 7 + 12,$$

o que demonstra a 1.ª parte do enunciado do theorema.

Dividindo, agora, ambos os membros da egualdade (a) pelo mesmo numero 2, por exemplo, tem-se :

$$\frac{46}{2} = \frac{6 \times 7}{2} + \frac{4}{2},$$

isto é :

$$23 = 3 \times 7 + 2,$$

o que demonstra a 2.ª parte do enunciado do theorema, cuja verdade fica assim evidenciada, porquanto em ambos os casos, o quociente 7 não ficou alterado, mas o resto 4 ficou multiplicado por 3 no primeiro caso e dividido por 2 no segundo caso.

235. — Theorema XVII. — *Para dividir uma somma por um numero, basta dividir cada parcella da somma por esse numero e addicionar os quocientes.*

Assim,

$$\frac{15 + 18 + 27 + 12}{3} = \frac{15}{3} + \frac{18}{3} + \frac{27}{3} + \frac{12}{3};$$

isto é :

$$\frac{72}{3} = 24 = 5 + 6 + 9 + 4;$$

o que demonstra o enunciado.

236. — Theorema XVIII. — *Para dividir uma differença por um numero, basta dividir cada termo da differença por esse numero e subtrahir o menor quociente do maior.*

Assim :

$$\frac{18 - 12}{3} = \frac{18}{3} - \frac{12}{3},$$

isto é :

$$\frac{6}{3} = 6 - 4 = 2,$$

o que demonstra o enunciado.

Corollario. — *Si ao dividendo addicionar-se, ou delle subtrahir-se, um certo numero de vezes o divisor, o resto da divisão não fica alterado, mas o quociente apparece augmentado, ou diminuido, desse numero.*

Assim, sendo, por exemplo :

$$29 = 3 \times 9 + 2,$$

tem-se que :

1.°.... $29 + (4 \times 3) = 3 \times (4 + 9) + 2,$

pois, com effeito,

$$29 + 12 = 41 = 3 \times 13 + 2 = 39 + 2;$$

e 2.°.... $29 - (4 \times 3) = 3 \times (9 - 4) + 2,$

pois, com effeito,

$$29 - 12 = 17 = 3 \times 5 + 2 = 15 + 2;$$

o que demonstra a verdade do enunciado.

§ 5.º — Theoremas relativos á potenciação

237. — Theorema XIX. — *O producto de duas, ou mais, potencias de um numero é uma potencia desse numero de gráo egual á somma dos expoentes das potencias dadas.*

Assim, por exemplo,

$$7^2 \times 7^3 \times 7^4 = 7^{2+3+4} = 7^9;$$

porquanto, sendo :

$$7^2 = 7 \times 7,$$
$$7^3 = 7 \times 7 \times 7,$$
$$7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7;$$

segue-se que

$$7^2 \times 7^3 \times 7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^9;$$

o que demonstra a proposição enunciada.

Corollario. — *Para effectuar a potenciação a um certo gráo da potencia de um numero, basta multiplicar o expoente da potencia dada pelo gráo da que se quer potenciar.*

Assim, por exemplo,

$$(5^3)^5 = 5^{15};$$

pois que

$$(5^3)^5 = 5^3 \times 5^3 \times 5^3 \times 5^3 \times 5^3 = 5^{3+3+3+3+3} =$$
$$= 5^{5 \times 3} = 5^{15}.$$

238. — Theorema XX. — *O quociente de duas potencias de um mesmo numero é uma potencia desse nu-*

mero, cujo grão é egual á differença entre os expoentes das potencias dadas.

Assim, por exemplo,

$$\frac{8^5}{8^3} = 8^{5-3} = 8^2;$$

porquanto, sendo :

$$8^5 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$$

e

$$8^3 = 8 \times 8 \times 8,$$

segue-se que :

$$\frac{8^5}{8^3} = \frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{8 \times 8 \times 8} = 8 \times 8 = 8^2 = 8^{5-3};$$

o que demonstra a proposição enunciada.

239. — Theorema XXI. — *O quociente de duas potencias do mesmo grão de dous numeros differentes é egual á potencia desse mesmo grão do quociente da divisão dos dous numeros dados.*

Assim, por exemplo :

$$\frac{18^4}{6^4} = \left(\frac{18}{6}\right)^4 = 3^4;$$

porquanto, sendo :

$$18^4 = 18 \times 18 \times 18 \times 18$$

e

$$6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6$$

segue-se que :

$$\frac{18^4}{6^4} = \frac{18 \times 18 \times 18 \times 18}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{18}{6} \times \frac{18}{6} \times \frac{18}{6} \times \frac{18}{6} =$$

$$= \left(\frac{18}{6}\right)^4 = 3^4,$$

o que demonstra a proposição enunciada.

240. — Theorema XXII. — *Para effectuar a potenciação a um certo grão de um producto de varios factores, basta effectuar a potenciação de cada um desses factores.*

Assim, por exemplo :

$$(3 \times 7 \times 5 \times 9)^3 = 3^3 \times 7^3 \times 5^3 \times 9^3;$$

porquanto :

$$\begin{aligned}(3\times7\times5\times9)^3 &= (3\times7\times5\times9) \times (3\times7\times5\times9) \times (3\times7\times5\times9) = \\ &= 3\times7\times5\times9\times3\times7\times5\times9\times3\times7\times5\times9 = \\ &= 3\times3\times3\times7\times7\times7\times5\times5\times5\times9\times9\times9 = \\ &= 3^3\times7^3\times5^3\times9^3,\end{aligned}$$

o que demonstra a proposição enunciada.

Corollarios : — I. — *O producto de varias potencias do mesmo grão, de raizes differentes, é egual á potencia desse mesmo grão do producto das raizes.*

Assim, por exemplo :

$$4^3 \times 5^3 \times 7^3 \times 6^3 = (4 \times 5 \times 7 \times 6)^3;$$

porquanto, em virtude do theorema ácima :

$$(4 \times 5 \times 7 \times 6)^3 = 4^3 \times 5^3 \times 7^3 \times 6^3.$$

II. — *Para effectuar a potenciação, a um certo grão, de um producto de muitas potencias, basta multiplicar o expoente de cada factor pelo da potencia.*

Assim, por exemplo :

$$(5^2 \times 3^4 \times 7^3)^3 = 5^{2\times3} \times 3^{4\times3} \times 7^{3\times3};$$

porquanto :

$$\begin{aligned}(5^2\times3^4\times7^3)^3 &= (5^2\times3^4\times7^3) \times (5^2\times3^4\times7^3) \times (5^2\times3^4\times7^3) = \\ &= 5^2\times3^4\times7^3\times5^2\times3^4\times7^3\times5^2\times3^4\times7^3 = \\ &= 5^2\times5^2\times5^2\times3^4\times3^4\times3^4\times7^3\times7^3\times7^3 = \\ &= (5^2)^3\times(3^4)^3\times(7^3)^3 = \\ &= 5^{2\times3}\times3^{4\times3}\times7^{3\times3}.\end{aligned}$$

§ 6.º — Theoremas relativos á radiciação

241. — Theorema XXIII. — *Para effectuar a radiciação da raiz de qualquer grão de um numero affecto de expoente, divide-se o expoente do numero pelo indice da raiz.*

Assim por exemplo :

$$\sqrt[3]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{3}} = 5^4;$$

porquanto, em virtude do XIX theorema (237, cor.),

$$\left(5^{\frac{12}{3}}\right)^3 = 5^{\frac{12}{3} \times 3} = 5^{12},$$

e, por definição,

$$\left(\sqrt[3]{5^{12}}\right)^3 = 5^{12} = 5^{\frac{12}{3} \times 3};$$

d'onde se segue que :

$$\left(\sqrt[3]{5^{12}}\right)^3 = \left(5^{\frac{12}{3}}\right)^3$$

e, portanto :

$$\sqrt[3]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{3}} = 5^4;$$

como se queria demonstrar.

242. — Theorema XXIV. — *Para effectuar a radiciação da raiz de qualquer grão de um producto de varios* *factores, basta effectuar a radiciação da raiz do mesmo grão de cada um dos factores.*

Assim, por exemplo :

$$\sqrt[3]{5\times7\times8} = \sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{8};$$

porquanto, sendo, por definição,

$$\left(\sqrt[3]{5\times7\times8}\right)^3 = 5\times7\times8$$

e

$$\left(\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{8}\right)^3 = 5\times7\times8,$$

segue-se que :

$$\left(\sqrt[3]{5\times7\times8}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{8}\right)^3,$$

e, portanto,

$$\sqrt[3]{5\times7\times8} = \sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{8};$$

o que demonstra a proposição enunciada.