CAPITULO IV

DIVISÃO

SUMMARIO : — Definição. — Exemplos. — Processo rudimentar. — Signaes representativos. — Partes componentes. — Outra definição. — A numeração contendo tambem o germen da divisão. — A divisão constituindo uma phase distincta no estudo do calculo. — Os 4 casos em que se divide a theoria da divisão. — Divisões que deixam resto. — 1.º caso : Divisor *numero simples* e dividendo *menor* que 10 vezes o divisor. — 2.º caso : Divisor *numero simples* e dividendo *maior* que 10 vezes o divisor. — 3.º caso : Divisor *numero composto* e dividendo *menor* que 10 vezes o divisor. — 4.º caso : Divisor *numero composto* e dividendo *maior* que 10 vezes o divisor. — Regra geral. — Observações. — Prova. — Prova real da multiplicação.

§ 1.º — Preliminares

141. — Divisão — *é a operação que tem por fim combinar dous numeros dados de modo a formar um terceiro que contenha tantas vezes a unidade quantas o primeiro dos dous numeros dados contiver o segundo.*

Exemplo : — Um professor precisa formar com seus 21 alumnos 3 grupos eguaes ; para isso, tirará dos 21, primeiramente, 3 (um para cada grupo), depois outros 3, depois mais outros 3, e, assim, successivamente até esgotar o numero total dos alumnos. Desse modo, tirará 7 vezes seguidamente 3 alumnos dos 21, e ficará sabendo que cada grupo conterá 7 alumnos. Este numero 7 contém, pois, tantas vezes a unidade quantas vezes o numero 21 contém o outro 3, isto é, 7 vezes.

Na DIVISÃO, portanto, o numero procurado representa o *numero de vezes que um dos dous numeros dados póde ser subtrahido do outro.*

142. — Vê-se, pois, que a *divisão* nada mais é que *um caso particular* da *subtracção*, podendo ser effectuada por meio desta; porque bastará, para obter o resultado d'uma divisão, subtrahir successivamente um dos dous numeros dados do outro tantas vezes quantas forem possiveis; o numero das subtracções effectuadas será o resultado procurado.

Semelhante processo rudimentar seria, porém, extremamente longo e susceptivel de muitos erros si tivesse de ser applicado a um numero consideravel de subtracções; como, por exemplo, si se tratasse de determinar o resultado da divisão de 2505210 por 678, em que o numero das subtracções successivas seria de 3695.

D'ahi a necessidade de um *processo especial* para effectuar — com simplicidade, rapidez e mais exactidão — essas *subtracções particulares successivas;* processo que constitue a *divisão* uma *operação distincta*.

143. — A divisão é representada pelo signal :, que significa *dividido por* [1]; os numeros dados são denominados *termos da divisão*, sendo designado por *dividendo* o que deve ser dividido e por *divisor* o que tem de dividir; e o resultado da operação é denominado *quociente*. Assim, no exemplo figurado (141), os numeros 21 e 3 são os *termos da divisão*, dos quaes 21 é o *dividendo* e 3 o *divisor;* o numero determinado 7 é o *quociente*, e a operação é indicada do seguinte modo:

$$21 : 3 = 7.$$

---

1. — Este signal, que a principio se escrevia $\div$, foi introduzido pelo Dr. John Pell, mathematico inglez que floresceu no 17.º seculo (1600).

NÓTA. — Representa-se tambem a divisão collocando o dividendo *por cima* e o divisor *por baixo* de um *traço horizontal*, assim : $\frac{21}{3} = 7$.

144. — Representando o quociente 7 o numero de vezes que o divisor 3 póde ser subtrahido do dividendo 21, é claro que representará tambem o numero de parcellas eguaes a 3 que, sommadas, dam 21 ; e, portanto,

$$21 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 7.$$

Assim, pois, na divisão, o dividendo é sempre um producto de dous factores, dos quaes um é o divisor e o outro é o quociente; e é por isso que a divisão póde ser definida tambem como sendo — *a operação que tem por fim, dados um producto de dous factores e um destes, determinar o outro.*

145. — A numeração tambem contém o germen da divisão, porém não exerce sobre esta nova operação a mesma influencia directa e immediata que sobre as tres precedentes, as quaes reduzem-se, em seus casos mais simples, a applicações especiaes do modo geral de formação dos numeros, já percorrendo a escala natural delles em ordem ascendente (*addição*), já percorrendo-a em ordem descendente (*subtracção*), já finalmente grupando-os e reunindo os diversos grupos (*multiplicação*). Reducção equivalente não póde existir quanto á divisão, senão de modo muito indirecto, transformando-a primeiramente em subtracções successivas, cujo numero é exactamente a incognita que se procura determinar, isto é, o terceiro numero que se trata de formar pela combinação dos dous conhecidos. De modo que, nas tres precedentes operações, a reducção dos casos complicados aos simples é dirigida pelos numeros dados que se trata de combinar; e, na divisão, tal reducção só póde ser dirigida, como vamos ver, pelo proprio numero que se trata de determinar.

Originando, portanto, a divisão, como origina as demais operações arithmeticas, não póde entretanto a numeração exercer sobre ella acção tão directa e decisiva como a que exerce sobre as tres precedentes.

D'ahi decorre naturalmente o facto de constituir a divisão, no estudo do CALCULO DOS VALORES, uma phase distincta, caracterizada por um accrescimo de difficuldade mais brusco que em qualquer outro caso mathematico.

A comprehensão e respectiva assimilação da theoria da divisão é — no pensar auctorizado do illustre CONDORCET [1] — um dos primeiros pontos em que o estudo da sciencia determina selecção decisiva entre os diversos espiritos; conceito que o grande AUGUSTO COMTE reforça com o assentimento de sua incontestavel auctoridade suprema, accrescentando ainda poder-se affirmar que, quem se tiver sahido bem de tal prova, é perfeitamente capaz de concluir com proveito a iniciação mathematica e mesmo a de toda a série encyclopedica da sciencia positiva [2].

146. — A theoria da divisão divide-se em *dous casos principaes*, cada um dos quaes, por sua vez, se subdivide em outros dous, como indica o seguinte quadro synoptico:

I. — DIVISOR NUMERO SIMPLES	1.° — Dividendo *menor* que 10 vezes o divisor,
	2.° — Dividendo *maior* que 10 vezes o divisor,
II. — DIVISOR NUMERO COMPOSTO	3.° — Dividendo *menor* que 10 vezes o divisor,
	4.° — Dividendo *maior* que 10 vezes o divisor.

Como facilmente se vê, no 1.° caso o divisor é *numero de um só algarismo* e o quociente tambem é *numero de um*

1. — *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité.*
2. — *Synthèse subjective.*

só algarismo, por isso que o dividendo é *menor que o divisor multiplicado por 10*; no 2.º caso, o divisor é ainda *numero de um só algarismo*, mas o quociente já é *numero composto*, por isso que o dividendo é *maior que o divisor multiplicado por 10*; no 3.º caso, o divisor é *numero composto de dous ou mais algarismos*, mas o quociente é *numero de um só algarismo*, por isso que o dividendo é *menor que o divisor multiplicado por 10*; e, no 4.º caso, finalmente, tanto o divisor como o quociente são *numeros compostos de dous ou mais algarismos*, por isso que o dividendo é *maior que o divisor multiplicado por 10*. Este ultimo é, pois, o *caso geral*.

Sendo estes quatro os *casos* em que se divide a theoria da divisão, é claro que a reducção dos mais complicados aos mais simples é dirigida, como já observámos, não por um dos dous numeros dados, como nas tres precedentes operações, mas exactamente pelo numero desconhecido que se procura determinar combinando aquelles. D'ahi provém, principalmente, a grande difficuldade, para os que encetam seus estudos de mathematica, de comprehender com facilidade e assimilar promptamente uma theoria numerica que, filiando-se ás que a precedem, d'ellas se afasta bruscamente no modo essencial de desinvolver-se, offerecendo assim aos principiantes uma complicação inesperada e que se lhes affigura maior do que na realidade é.

147. — Cumpre observar, antes de proseguir na analyse dos differentes casos distinguidos, que nem sempre o dividendo contém o divisor um *numero exacto de vezes*. Assim, si, em logar dos 21 alumnos do exemplo figurado (141), fossem elles 23, por exemplo, é claro que, subtrahindo desse numero successivamente 3, fariamos as mesmas 7 subtracções, mas ficariam ainda *de resto* 2 alumnos.

Em taes casos, diz-se que a divisão não se faz exactamente e que deixa um *resto;* e o dividendo é egual ao producto do divisor pelo quociente, accrescentado do *resto*, isto é, $23 = 3 \times 7 + 2$.

Mais tarde havemos de ver como se procede para obter, em taes casos, um quociente exacto, isto é, tal que, multiplicado pelo divisor, reproduza o dividendo.

Por emquanto, porém, tratando apenas da DIVISÃO DOS NUMEROS INTEIROS, só precisamos determinar *o maior numero de vezes* que o divisor se contém no dividendo; de modo que procurar o quociente de 23 por 3 importa simplesmente procurar o maior numero de vezes que 3 é contido em 23.

A differença entre o dividendo e o *maior multiplo do divisor*, que naquelle se contém, é egual ao *resto* da divisão; assim, sendo 21 o maior multiplo de 3 contido no dividendo 23, tem-se:

$$23 - (3 \times 7) = 23 - 21 = 2.$$

O *resto* de qualquer divisão é, portanto, *sempre menor que o respectivo divisor.*

148. — Estabelecidos estes preliminares indispensaveis á boa comprehensão da theoria da divisão, e que servirão tambem para preparar o espirito dos principiantes para um estudo que lhes vae exigir um pouco mais de attenção e de esforço intellectual; — passemos á analyse successiva dos 4 casos que distinguimos.

§ 2.º — Primeiro caso:

Divisor numero simples *e dividendo* menor *que* 10 *vezes o divisor*

149. — Sendo o divisor *numero simples*, isto é, *d'um* *só algarismo*, e o dividendo *menor que 10 vezes o divisor*, isto é, *menor que o producto do divisor por 10*, é claro que o quociente será tambem *numero d'um só algarismo*, o qual será facilmente dado pela TABOA DA MULTIPLICAÇÃO (122). Assim, si o divisor fôr, por exemplo, 6 e o dividendo 30 (que é *menor* que 6×10), bastará, para obter o quociente, procurar o numero 6 na 1.ª columna vertical á esquerda e seguir com a vista a linha horizontal, correspondente a esse numero, até nella encontrar o dividendo 30; no alto da columna vertical em que estiver este collocado estará o quociente 5 procurado. Com effeito, $30 : 6 = 5$, porque $6 \times 5 = 30$.

Mas, nem isso é preciso geralmente, porque nas *Eschoias Primarias* apprendem-se, com extrema facilidade, de cór, os quocientes de todas as divisões comprehendidas neste 1.º caso.

Quando o dividendo não fôr um producto exacto do divisor por outro numero simples inteiro, como no exemplo $\frac{35}{6}$; então, nem o dividendo póde ser encontrado na TABOA DA MULTIPLICAÇÃO, nem o quociente póde ter sido apprendido de cór. Mas, é facil de ver-se que

$$35 > 6 \times 5 \text{ e } 35 < 6 \times 6,$$

d'onde se conclue facilmente que o quociente procurado é > 5 e < 6; e, então, si tomar-se 5 para quociente, será este *approximado a menos d'uma unidade por defeito*, e, si tomar-se 6 para quociente, será este *approximado a menos d'uma unidade por excesso*.

Exemplos :

$28 : 7 = 4$, porque $7 \times 4 = 28$;
$72 : 9 = 8$, » $9 \times 8 = 72$;
$43 : 5 = 8$ *a menos d'uma unidade por defeito*,
$43 : 5 = 9$ » » » *por excesso*.

§ 3.º — Segundo caso :

Divisor numero simples *e dividendo* maior *que* 10 *vezes o divisor*

150. — Sendo o divisor *numero simples*, isto é, *d'um só algarismo*, mas o dividendo *maior que* 10 *vezes o divisor*, isto é, *maior que o producto do divisor por* 10, é claro que o quociente será *numero composto de dous ou mais algarismos*. Seja, por exemplo, 3918 a dividir por 5.

E' facil ver-se que

$$500 < 3918 < 5000,$$

isto é,

$$5 \times 100 < 3918 < 5 \times 1000;$$

e que, portanto, o quociente procurado é *maior* que 100 porém *menor* que 1000, e consta de *tres algarismos*, a saber :

1.º — o das *unidades*, que representaremos por u,
2.º — o das *dezenas*, que representaremos por d,
3.º — e o das *centenas*, que representaremos por c.

E, como o dividendo é sempre egual á somma do producto do divisor pelo quociente e do resto (si o houver), temos que, representando este por r, será :

$$3918 = (5 \times cdu) + r.$$

Sendo, porém, o resto *(r) menor* que o divisor (147), o producto $5 \times cdu$ é contido no dividendo 3918 o mesmo numero de vezes que seria si esse dividendo representasse exactamente aquelle producto, sem resto algum.

O'ra, o producto d'um numero simples por outro composto de *centenas, dezenas* e *unidades* é a somma dos *tres* productos parciaes daquelle numero por cada um dos *tres* algarismos deste. Segue-se, pois, que o dividendo 3918 contém os *tres* seguintes productos parciaes :

1.º — o do divisor 5 pelas *centenas* do quociente,
2.º — o do divisor 5 pelas *dezenas* do quociente,
3.º — e o do divisor 5 pelas *unidades* do quociente.

O 1.º desses productos parciaes, não podendo dar unidades de ordem inferior a centenas, estará contido forçosamente nas 39 centenas do dividendo que, além disso, poderão conter tambem as centenas provenientes da reserva feita sobre os 2 outros productos parciaes. Como, porém, a somma destes dous productos parciaes forma um numero *menor* que 500, isto é, *menor* que 5 × 100, a reserva de centenas feitas sobre essa somma é *menor* que 5, e, portanto, nella não podendo ser contido o divisor nem uma vez, deverá elle ser contido nas 39 centenas do dividendo o mesmo numero de vezes que si 39 fosse o producto exacto do divisor pelas centenas do quociente. A divisão, pois, dessas 39 centenas pelo divisor 5 dará o algarismo 7 das *centenas do quociente*.

Multiplicando-se este algarismo pelo divisor e subtrahindo o producto (35 *centenas*) do dividendo, o resto 418 será o 2.º *dividendo parcial* e representará a somma das tres seguintes parcellas :

1.ª — producto parcial do divisor pelas *dezenas* do quociente,

2.ª — producto parcial do divisor pelas *unidades* do quociente, e

3.ª — resto da divisão, si o houver; sendo que este em nada influe, como já mostrámos, sobre a determinação dos algarismos do quociente.

O'ra, o 1º destes *dous* productos parciaes, não podendo dar unidade de ordem inferior a *dezenas*, estará contido nas 41 dezenas do 2.º dividendo parcial 418, as quaes poderão, é certo, conter tambem a reserva proveniente do outro producto parcial; mas, como este é *menor* que $5 \times 10 = 50$, a reserva de dezenas feita sobre elle será forçosamente *menor* que 5, e, portanto, não podendo nella ser contido o divisor nem uma vez, será contido nas 41 dezenas do dividendo o mesmo numero de vezes que si 41 fosse o producto exacto do divisor pelas dezenas do quociente. A divisão, pois, dessas 41 dezenas pelo divisor 5 dará o algarismo 8 das *dezenas do quociente*.

Multiplicando-se este algarismo pelo divisor e subtrahindo o producto (40 *dezenas*) do 2.º dividendo parcial 418, o resto 18 será o 3.º *dividendo parcial* e representará a somma das *duas* seguintes parcellas :

1.ª — Producto parcial do divisor pelas unidades do quociente, e

2.ª — resto da divisão, si o houver, sendo que este em nada póde influir, como já dissemos, sobre a determinação dos algarismos do quociente.

A divisão, pois, das 18 unidades do 3.º dividendo parcial pelo divisor 5 dará o algarismo 3 das unidades do quociente, e, multiplicando-se este algarismo pelo divisor e subtrahindo o producto (15 *unidades*) do 3.º dividendo parcial 18, o resto 3, menor que o divisor 5, representará o *resto da divisão* do dividendo 3918 pelo divisor 5, cujo quociente inteiro será, portanto, 783, como indica aliás o seguinte

TYPO DO CALCULO :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3&9&1&8 & 5\\ \cline{5-5}
3&5&0&0 & 7\ 8\ 3\\ \cline{1-4}
&4&1&8 & \\
&4&0&0 & \\ \cline{2-4}
&&1&8 & \\
&&1&5 & \\ \cline{3-4}
&&&3 &
\end{array}
$$

$$3918 = 5 \times 783 + 3 = 3915 + 3$$

§ 4.º — Terceiro caso :

Divisor numero composto *e dividendo* menor *que 10 vezes o divisor*

151. — Sendo o divisor *numero composto*, mas o dividendo *menor que 10 vezes o divisor*, isto é, *menor que o divisor multiplicado por 10*, é claro que o quociente será *numero simples*, isto é, *d'um só algarismo*. Seja, por exemplo, 2640 a dividir por 364.

Como o divisor é um numero de *tres* algarismos, isto é, composto de *centenas*, *dezenas* e *unidades*, e o quociente é um numero simples, isto é, d'um só algarismo, segue-se que o dividendo 2640 é a somma das 4 seguintes parcellas :

1.ª — producto das *centenas* do divisor pelo quociente,
2.ª — producto das *dezenas* do divisor pelo quociente,
3.ª — producto das *unidades* do divisor pelo quociente,
4.ª — resto da divisão, si o houver.

O'ra, o 1.º dos tres productos parciaes indicados, não podendo dar unidades de ordem inferior a centenas, deve estar contido nas 26 *centenas* do dividendo. Mas, como estas centenas podem tambem conter reservas de centenas feitas sobre os outros dous productos parciaes, é possivel que, dividindo-as pelas 3 *centenas* do divisor, o quociente 8 seja algarismo muito forte; e, realmente, assim é no caso presente, porquanto esse algarismo multiplicado pelo divisor (364×8) dá um producto (2912) *maior* que o dividendo proposto 2640.

E' preciso, então, tomar para quociente um algarismo *menor* que 8. Póde acontecer ainda que, receiando tomar outro algarismo tambem forte tomemos um fraco de mais, como, por exemplo, 6. Nesse caso, o producto delle pelo divisor ($364 \times 6 = 2184$), subtrahido do dividendo, dará um resto ($2640 - 2184 = 456$) *maior* que o divisor.

O algarismo verdadeiro do quociente será, pois, no exemplo figurado, 7, que, multiplicado pelo divisor, dá o producto 2548, que, subtrahido do dividendo, deixa o resto 92 *menor que o divisor*, como indica o seguinte

TYPO DO CALCULO:

2 6 4 0	3 6 4
2 5 4 8	7
. . 9 2	

NÓTA. — Para verificar si o algarismo obtido pela divisão das unidades mais altas do dividendo pelas mais altas do divisor é forte, ou fraco, não é preciso effectuar a multiplicação desse algarismo por todo o divisor; basta multiplical-o pelos dous ultimos algarismos *á esquerda* do divisor. Assim, no exemplo figurado, dividindo 26 por 3 acha-se para quociente 8, e, para verificar si tal algarismo é forte, ou fraco, basta multiplical-o pelos dous algarismos 3 e 6 *á esquerda* do divisor; com effeito, $8 \times 6 = 48$, vam 4 que, sommados ao producto $8 \times 3 = 24$, elevam-no a 28, numero *maior* que 26; d'onde se conclue ser 8 algarismo muito forte. Si, ao contrario, toma-se 6, diz-se $6 \times 6 = 36$, vam 3 que, sommados ao producto $6 \times 3 = 18$, elevam-no apenas a 21, numero que subtrahido de 26, dá para resto 5, isto é, 5 *centenas;* e, como o divisor só contém 3 *centenas,* verifica-se que tal resto seria *maior* que o divisor; d'onde se conclue ser 6 algarismo muito fraco. Tomando porém, 7, diz-se: $7 \times 6 = 42$, vam 4 que, sommados ao producto $7 \times 3 = 21$, elevam-no a 25, numero que, subtrahido de 26, deixa um resto 1 visivelmente *menor* que o divisor; d'onde se conclue ser 7 o algarismo conveniente, o que, então, se verifica effectuando definitivamente sua multiplicação por todo o divisor.

§ 5.º — Quarto caso:

Divisor numero composto *e dividendo* maior *que 10 vezes o divisor*

152. — Sendo o dividendo *maior que 10 vezes o divisor,* isto é, *maior que o producto do divisor por 10,* é claro que o quociente será *numero composto de mais de um algarismo.* E' o CASO GERAL da divisão, em que, tanto os dous numeros conhecidos como o desconhecido, que se procura determinar, são numeros compostos.

Seja, por exemplo, 2505476 o numero que se trata de dividir por 3695.

E' facil ver-se que:

$$369500 < 2505476 < 3695000$$

isto é,

$$3695 \times 100 < 2505476 < 3695 \times 1000;$$

logo, o quociente procurado é *maior* que 100, porém *menor* que 1000, e consta, portanto, de *tres* algarismos, a saber:

1.º — o das *unidades,* que representaremos por u,
2.º — o das *dezenas,* que representaremos por d,
3.º — o das *centenas,* que representaremos por c.

E, como o dividendo é sempre egual á somma do producto do divisor pelo quociente e do resto (si houver), tem-se que, representando por r o resto, será:

$$2505476 = (3695 \times cdu) + r.$$

Sendo, porém, o resto r sempre *menor* que o divisor (147), o producto $3695 \times cdu$ é contido no dividendo 2505476 o mesmo numero de vezes que seria si esse dividendo representasse exactamente o referido producto, sem resto algum.

O'ra, o producto de um numero composto de *centenas*, *dezenas* e *unidades* por outro qualquer é a somma dos *tres productos parciaes* do 1.º desses numeros pelos algarismos das *centenas*, das *dezenas* e das *unidades* do 2.º delles. Segue-se, pois, que o dividendo 2505476 contém os *tres* seguintes productos parciaes:

1.º — o do divisor pelas *centenas* do quociente,
2.º — o do divisor pelas *dezenas* do quociente,
3.º — o do divisor pelas *unidades* do quociente.

O 1.º destes productos parciaes, não podendo dar unidades de ordem inferior a *centenas*, está contido nas 25054 *centenas* do dividendo, as quaes podem conter tambem as reservas de centenas feitas sobre os outros dous productos parciaes. Por maiores que sejam, porém, os algarismos d e u do quociente, o numero du por elles formado será sempre *menor* que 100, e, portanto, o producto desse numero du pelo divisor 3695 será sempre *menor* que 369500; logo, a reserva de centenas feita sobre tal producto será *menor* que 3695; d'onde se conclue que o divisor 3695 é contido nas 25054 centenas do dividendo o mesmo numero de vezes que si ellas representassem o producto exacto do divisor pelas centenas do quociente.

TYPO DO CALCULO :

2505476	3695
2217000	c d u
.288476	678
258650	
.29826	
29560	
. . 266	

Dividindo, pois, 25054 por 3695, determina-se (151) o algarismo 6 das *centenas do quociente;* e, multiplicando esse algarismo pelo divisor, o que dá 2217000, e subtrahindo este producto do dividendo, o resto 288476 representará a somma dos outros productos parciaes contidos no dividendo e do resto, si o houver.

O producto do divisor pelas dezenas *d* do quociente, não podendo dar unidades de ordem inferior a *dezenas*, está contido nas 28847 *dezenas* do resto achado, as quaes constituem o 2.º *dividendo parcial.* Essas *dezenas* podem conter tambem a reserva feita sobre o outro producto parcial; como, porém, por maior que seja o algarismo *u* das unidades do quociente, é *sempre menor* que 10, seu producto pelo divisor é *sempre menor* que 36950 e a reserva de dezenas sobre elle feita é *menor* que 3695, seguese que o divisor é contido nas 28847 *dezenas* do 2.º dividendo parcial o mesmo numero de vezes que si ellas representassem o producto exacto do divisor pelas dezenas do quociente. Dividindo, pois, essas 28847 dezenas pelo divisor, determina-se (151) o algarismo 7 das *dezenas do quociente;* e, multiplicando-o pelo divisor, o que dá

258650, e subtrahindo este producto do 1.° resto 288476, o 2.° resto 29826, que será o 3.° *dividendo parcial*, representará a somma do 3.° producto parcial e do resto da divisão, si o houver.

Como, porém, este resto é, como já vimos, *sempre menor* que o divisor, não influe sobre o algarismo das unidades do quociente; dividindo, portanto, o 2.° resto 29826, que é o 3.° dividendo parcial, pelo divisor 3695, determina-se (151) o algarismo 8 das unidades do quociente; e, multiplicando-o pelo divisor, o que dá 29560, e subtrahindo este producto do 3.° dividendo parcial, tem-se o resto 266 que, sendo, com effeito, *menor* que o divisor 3695, representa o *resto da divisão effectuada;* o que quer dizer que o dividendo

$$2505476 = (3695 \times 678) + 266.$$

153. — Da analyse que acabamos de fazer, deduz-se facilmente a seguinte

Regra geral : — *Para determinar o quociente da divisão de um numero inteiro por outro, — 1.°, separa-se á esquerda do dividendo o menor numero possivel d'algarismos que formem um numero que contenha pelo menos uma vez o divisor, numero esse que constitue o 1.° dividendo parcial; — 2.°, divide-se esse 1.° dividendo parcial pelo divisor, e obtem-se o 1.° algarismo do quociente, que é o de suas mais altas unidades; — 3.°, multiplica-se esse algarismo pelo divisor, subtrahe-se o producto do 1.° dividendo parcial; e á direita do resto escreve-se o algarismo seguinte do dividendo total, formando-se assim o 2.° dividendo parcial; — 4.°, divide-se este 2.° dividendo parcial pelo divisor e obtem-se o 2.° algarismo do quociente; — 5.°, multiplica-se esse algarismo pelo divisor, subtrahe-se o producto do 2.° dividendo parcial, e á direita do resto* *escreve-se o algarismo seguinte do dividendo total, formando-se assim o 3.º dividendo parcial; — 6.º, sobre este 3.º dividendo parcial opera-se como sobre os dous primeiros, determinando-se o 3.º algarismo do quociente; — e 7.º, assim se continúa, até ter empregado o ultimo algarismo á direita do dividendo total. O ultimo resto achado será o resto da divisão; e, si elle fôr nullo, concluir-se-ha que a divisão é exacta, isto é, que o dividendo é o producto exacto do divisor pelo quociente determinado. Si um qualquer dos dividendos parciaes fôr menor que o divisor, escreve-se um zéro no quociente, e á direita do dividendo parcial escreve-se o algarismo seguinte do dividendo total, formando-se assim um novo dividendo parcial.*

NÓTA. — Como util exercicio, convirá fazer os principiantes applicarem esta regra a uma, ou mais, divisões apropriadas, em que tenha ella completa applicação. Como exemplo, offerecemos o seguinte:

$$\begin{array}{r|l}
458035946 & 506 \\ \cline{2-2}
4554 & 905209 \\ \cline{1-1}
..2635 & \\
2530 & \\ \cline{1-1}
.1059 & \\
1012 & \\ \cline{1-1}
..4746 & \\
4554 & \\ \cline{1-1}
.192 &
\end{array}$$

$$458035946 = 506 \times 905209 + 192.$$

§ 6.º — Observações

154. — Inversão da divisão relativamente á multiplicação. — Tendo a divisão por fim (144), *dado um producto de dous factores e um delles, determinar o outro*, é uma operação exactamente inversa á multiplicação. Esta combina numeros *compondo-os*, e a divisão, ao contrario, combina-os *decompondo-os;* de modo que o *dividendo*, na divisão, é um *producto* de que são *factores* o *divisor* e o *quociente.*

155. — Disposição dos termos. — E' indifferente a maneira de dispor os termos de uma divisão para effectual-a; ha, porém, toda a commodidade em dispol-os como o indicam os diversos *typos de calculo* ácima apresentados, pois, desse modo, evitam-se confusões e os calculos podem ser realizados com mais facilidade e segurança.

156. — Começo da operação da esquerda. — E' essencial começar a divisão pela esquerda do dividendo, pois é impossivel distinguir nelle o producto do divisor pelas unidades simples do quociente.

157. — Methodo empregado na divisão. — E' ainda o *methodo analytico* o empregado pelo espirito humano para separar, no dividendo, os diversos productos parciaes do divisor pelas unidades das differentes ordens do quociente, separação que permitte a determinação successiva dos diversos algarismos do quociente.

158. — Divisão de numeros terminados em zéros. — Quando tanto o dividendo como o divisor são numeros terminados em zéros, supprimem-se em ambos o mesmo numero de zéros, o que não altera o quociente; mas, o resto deve ser multiplicado pela unidade seguida de tantos zéros quantos tiverem sido supprimidos.

Assim, o quociente da divisão de 398000 por 5000 é o mesmo 79 que o da divisão de 398 por 5; mas, o resto 3000 da 1.ª dessas divisões é egual ao 3 da 2.ª multiplicado pela unidade seguida de 3 zéros, isto é, por 1000. Com effeito, si 398 *unidades simples* são eguaes a $5 \times 79 + 3$ *unidades simples*, é claro que 398 *unidades de milhar* (isto é, 398000) serão eguaes a 5 *unidades de milhar* multiplicadas por 79, mais 3 *unidades de milhar*, isto é, eguaes a $5000 \times 79 + 3000$; como, aliás, claramente o indicam os seguintes

TYPOS DO CALCULO :

398000	5000
35000	79
.48000	
45000	
.3000	

398	5
35	79
.48	
45	
3	

159. — Divisor terminado em zéros. — Quando só o divisor termina em zéros, e o dividendo não, podem-se supprimir os zéros do divisor e tantos algarismos á direita do dividendo quantos forem os zéros supprimidos no divisor; o quociente não ficará alterado, mas ao resto achado será mistér accrescentar o numero formado pelos algarismos supprimidos á direita do dividendo. Assim, o quociente da divisão do numero 239768 por 5000 é o mesmo 47 que o da divisão de 239 por 5; ao resto 4, porém, desta ultima divisão será mistér accrescentar 768 unidades para formar o resto 4768 da primeira divisão. Com effeito, si

239 *unidades simples* divididas por 5 *unidades simples* dam para quociente 47 e para resto 4 *unidades simples*, é claro que 239 *unidades de milhar* (isto é, 239000) divididas por 5 *unidades de milhar* (isto é, 5000) darão para quociente tambem 47, mas para resto 4 *unidades de milhar* (isto é, 4000); logo,

$$239000 = 5000 \times 47 + 4000,$$

e, portanto,

$$239768 = 5000 \times 47 + 4768;$$

como, aliás, o indicam claramente os seguintes

TYPOS DO CALCULO :

$$\begin{array}{r|l}
239768 & 5000 \\ \cline{2-2}
20000 & 47 \\ \cline{1-1}
.39768 & \\
35000 & \\ \cline{1-1}
.4768 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
239 & 5 \\ \cline{2-2}
20 & 47 \\ \cline{1-1}
.39 & \\
35 & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}$$

160. — Simplificação pratica da divisão quando o divisor é numero simples. — Quando o divisor de uma divisão é numero simples, não ha necessidade de escrever os differentes dividendos parciaes; faz-se a operação mentalmente escrevendo os algarismos do quociente por baixo dos do dividendo, e o resto por baixo do divisor, como indica o seguinte

TYPO DO CALCULO :

$$\begin{array}{r|l}
734684097359 & 9 \\ \hline
81631566373 & 2
\end{array}$$

no qual 7346840973 59 é o dividendo, 9 o divisor, 816315663 73 o quociente e 2 o resto.

161. — Numero de algarismos do quociente. — Da analyse feita sobre os differentes casos da theoria da divisão conclue-se facilmente que *o numero de algarismos do quociente é egual á differença entre o numero dos do dividendo e o dos do divisor, quando o primeiro algarismo á esquerda do dividendo é menor que o primeiro á esquerda do divisor ; e é egual a essa mesma differença augmentada de uma unidade, quando aquelle algarismo é maior que este.* Assim, sendo, por exemplo, 9 o numero de algarismos do dividendo e 4 o dos do divisor, o numero dos do quociente será :

$9 - 4 = 5$, si o 1.º algarismo á esquerda do dividendo fôr *menor* que o 1.º algarismo á esquerda do divisor ; e
$(9 - 4) + 1 = 6$, si o 1.º algarismo á esquerda do dividendo fôr *maior* que o 1.º algarismo á esquerda do divisor.

162. — Processo pratico para abreviar as divisões cujos termos são muito complicados. — Quando, sendo o divisor numero composto, tem o dividendo grande numero de algarismos, e verifica-se (161) que o quociente terá tambem grande numero de algarismos, abrevia-se sensivelmente a operação organizando-se préviamente uma taboa dos productos do divisor pelos 9 primeiros numeros da série natural dos numeros inteiros, o que permitte ver facilmente qual o multiplo do divisor que é contido em cada dividendo parcial, e, portanto, qual o algarismo correspondente do quociente, como indica o exemplo figurado no seguinte

TYPO DO CALCULO :

5 3 7 9 0 4 6 8 2 7 5 0 4 5 8 3 4	7 5 8
. . 7 3 0 4	7 0 9 6 3 6 7 8 4 6 3 1 2 1
. 4 8 2 6	
. 2 7 8 8	
. 5 1 4 2	
. 5 9 4 7	$758 \times 1 = 758$
. 6 4 1 5	$758 \times 2 = 1516$
. 3 5 1 0	$758 \times 3 = 2274$
. 4 7 8 4	$758 \times 4 = 3032$
. 2 3 6 5	$758 \times 5 = 3790$
. . 9 1 8	$758 \times 6 = 4548$
. 1 6 0 3	$758 \times 7 = 5306$
. . 8 7 4	$758 \times 8 = 6064$
1 1 6	$758 \times 9 = 6822$

163. — Caso em que os termos de uma divisão são quantidades. — Dá-se frequentemente, na pratica, o caso de serem os termos de uma divisão quantidades, como, por exemplo, quando se trata de determinar qual a velocidade *por hora* d'um trem que, em 7 horas, tiver vencido a distancia de 315 kilometros, ou quando se trata de determinar por quantas pessoas se poderão partilhar 200 laranjas dando 5 a cada uma.

Em casos taes, quando o dividendo e o divisor forem quantidades de *especies diversas*, como no 1.º exemplo figurado, o *quociente será sempre quantidade da mesma especie do dividendo;* quando, porém, o dividendo e o divisor forem quantidades da *mesma especie*, como no 2.º exemplo figurado, a especie do quociente será indicada pela natureza da questão que se tratar de resolver. Assim, no exemplo figurado, o quociente é representado por um certo numero *de pessoas;* mas, si se tratasse de determinar, por exemplo, a quantidade de certa mercadoria que seria possivel comprar com 200 mil réis, sendo o preço do kilogrammo 5 mil réis, o quociente representaria *kilogrammos;* e si, finalmente, se tratasse apenas de determinar quantas vezes 5 mil réis se conteem em 200 mil réis, o quociente 40 seria simplesmente um numero.

164. — Divisão por um producto de dous, ou mais, factores. — Para determinar o quociente da divisão d'um numero por um producto de dous, ou mais, factores, é indifferente effectuar primeiramente o producto desses factores e por elle dividir o numero dado, ou então, dividir esse numero por um dos factores, o quociente achado pelo segundo factor, o quociente achado pelo terceiro factor, e, assim, successivamente, como indica o seguinte

TYPO DO CALCULO :

168	24
168	7
0	

$4 \times 3 \times 2 = 24,$
$168 : 24 = 7.$

168	4		
16	42	3	
8	3	14	2
8	12	14	7
0	12	0	
	0		

$168 : (4 \times 3 \times 2) = 7.$

§ 7.º — Prova

165. — Para verificar o resultado d'uma divisão, basta multiplicar o quociente achado pelo divisor e sommar ao producto o resto (si o houver). Si o resultado fôr egual ao dividendo póde-se considerar como *exacto* o quociente achado, pois não é nada provavel que qualquer erro commettido na divisão tenha sido compensado perfeitamente na multiplicação.

Esta prova é que se denomina, geralmente, *prova real da divisão*, para differençal-a de outro processo de prova (a *dos nove*) mais simples, que só adiante poderemos estudar, applicando-o, então, não só á divisão, como ás outras tres operações precedentes.

A disposição geralmente adoptada, por ser a mais commoda, para a *prova real da divisão* é a indicada no seguinte

TYPO DO CALCULO :

```
675846342 | 70845
 382413   |------
  281884  | 9539
   693492
    55887      70845
             -------
               47695
              38156
             76312
           667730
           ---------
           675790455
               55887
           ---------
           675846342
```

§ 8.º — Prova real da multiplicação

166. — Assim como a multiplicação do quociente pelo divisor serve de *prova* á divisão, porque o producto resultante, addicionado ao resto (si houver), deve ser egual ao dividendo, — assim tambem a divisão, que é operação inversa á multiplicação (154), serve de prova a esta, porquanto, dividindo o producto achado por um dos dous factores, deve-se achar para quociente o outro factor.

Esta prova da multiplicação pela divisão é que se denomina geralmente *prova real da multiplicação*.

Além deste processo de prova, ha ainda como já dissemos, outro mais commodo, mais rapido, e, por isso, mais usado, conhecido pela denominação de *prova dos nove*, que mais adiante estudaremos.

CAPITULO V

POTENCIAÇÃO

SUMMARIO : — Definição. — Exemplo. — Processo ordinario rudimentar. — Signal representativo e partes componentes. — Classificação das potencias. — Quadrado e cubo ; motivos de taes denominações. — A numeração contendo tambem o germen da potenciação. — Quadro das nove primeiras potencias dos numeros digitos. — Rapidez com que crescem as potencias. — *Lei de formação* das potencias. — Motivos por que as potenciações superiores ao *cubo* não podem ser estudadas na *Arithmetica*. — Quadrados dos numeros digitos. — Quadrados dos numeros compostos. — Theoremas em que se basêa a determinação delles. — Deducção da regra para a formação dos quadrados de quaesquer numeros compostos. — Sua applicação a exemplos. — Comparação do processo especial com o ordinario rudimentar. — Cubos dos numeros digitos. — Cubos dos numeros compostos. — Theoremas em que se basêa a determinação delles. — Deducção da regra para a formação dos cubos de quaesquer numeros compostos. — Sua applicação a exemplos. — Comparação do processo especial com o ordinario rudimentar.

§ 1.º — Preliminares

167. — Potenciação — *é a operação que tem por fim combinar dous numeros dados de modo a formar um terceiro, que seja o producto de tantos factores eguaes a um delles quantas forem as unidades contidas no outro.*

Exemplo : — Uma pedra de fórma extremamente regular e faces eguaes tem, em cada uma das 3 arestas que convergem para um qualquer de seus angulos, 5 metros de comprimento (fig. 1); para determinar-se o volume della, é preciso repetir esse comprimento *tres vezes* como factor, dizendo :

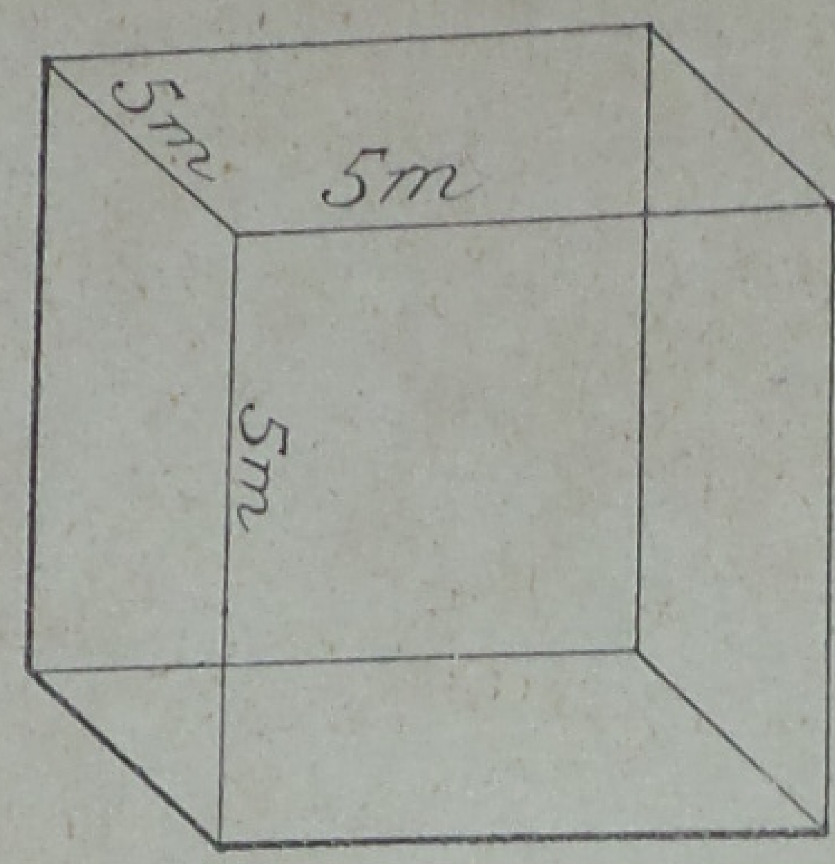


Fig. 1

Vol. da pedra ;
$5 \times 5 \times 5 = 125$

$$5 \times 5 \times 5 = 125.$$

Este numero 125, que é o resultado da operação feita, é o *producto* de *tantos* factores eguaes a um dos dous numeros dados 5, *quantas* são as unidades contidas no outro 3.

168. — Na potenciação, portanto, o numero que se procura determinar é o *producto* de tantos *factores eguaes a um dos dous numeros dados* quantas são as unidades contidas no outro; e, por isso, póde ser definida como sendo — *a operação que tem por fim, dado um factor e o numero dos factores eguaes de uma multiplicação, determinar o producto.*

169. — Vê-se, pois, que a *potenciação* nada mais é que um *caso particular da multiplicação*, podendo ser effectuada por meio desta; porque, bastará, para obter o resultado de uma potenciação, multiplicar tantos factores eguaes a um dos dous numeros dados, quantas forem as unidades do outro.

Semelhante processo rudimentar seria, porém, extremamente longo e susceptivel de innumeros erros, si tivesse de ser applicado a um numero consideravel de factores eguaes, mórmente sendo estes numeros compostos de muitos algarismos, como, por exemplo, si se tratasse de determinar o resultado da potenciação em que fosse 71608345934278 o factor dado e 5 o numero dos factores eguaes.

D'ahi a necessidade d'um *processo especial* para effectuar —com mais simplicidade, menos morosidade e mais segurança— essas *multiplicações successivas d'um mesmo factor;* processo que constitue a *potenciação* uma *operação distincta.*

170. — A potenciação é representada collocando-se o numero dos factores a multiplicar *á direita, e um pouco elevado*, do factor dado. Este é denominado *raiz;* o numero dos factores eguaes é denominado *grão,* ou mais scientificamente *expoente;* e o resultado é denominado *potencia* [1]. Assim, no exemplo figurado (167), 5 é a *raiz,* 3 o *expoente,* 125 a *potencia,* e a operação é indicada do modo seguinte :

$$5^3 = 125.$$

171. — Chama-se *potencia perfeita* qualquer numero que possa ser produzido pela multiplicação de qualquer

---

1. — A palavra *potencia* é devida a DIOPHANTE, celebre mathematico da antiguidade, que floresceu, no 4.º seculo da éra christã, em Alexandria, e ao qual deve a humanidade os primeiros lineamentos geraes da *Algebra*, mais tarde coordenados e systematizados pelo illustre VIÈTE, no 16.º seculo.

Até DESCARTES, o eminente philosopho do 17.º seculo, nascido em *Haye* aos 31 de março de 1596, e fallecido em *Stockholmo* aos 11 de fevereiro de 1650, nem um signal era usado para indicar o *grão* de uma *potencia*, cuja *raiz* era repetida tantas vezes quantas necessarias ; assim, escrevia-se $7 \times 7 \times 7 \times 7$ para indicar a 4.ª potencia de 7. Foi DESCARTES quem simplificou essa indicação collocando o numero indicativo do *grão* da *potencia* á direita, e um pouco elevado, da *raiz*, tambem denominada ás vezes *base,* creando assim o *signal* que mais tarde recebeu a denominação de *expoente.*

Cumpre, todavia, observar que F. Hoefer (Historia das Mathematicas, Paris, 1874) diz que, em uma obra in-8, impressa em Leyde em 1585, por SIMON STEVIN, encontra-se, *pela primeira vez,* o uso dos *expoentes* das potencias. SIMON STEVIN celebrisou-se por seus importantes trabalhos sobre *Mechanica*, sciencia que lhe deve seus mais essenciaes progressos, depois de ARCHIMEDES. Nascido em *Bruges*, em 1548, falleceu STEVIN, em *Haya*, em 1629.

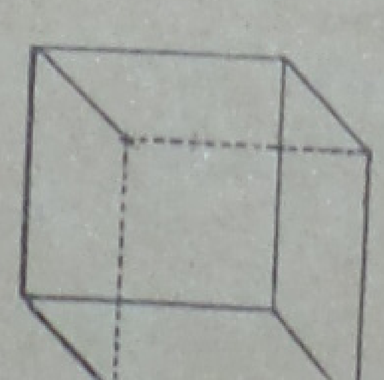
outro certo numero de vezes. Assim, 36 é uma *potencia perfeita*, porque $6 \times 6 = 36$; do mesmo modo, 729 é uma *potencia perfeita*, porque $9 \times 9 \times 9 = 729$, etc. No emtanto, 30 é uma *potencia imperfeita*, porque $30 < (6 \times 6)$ e $> (5 \times 5)$, e tambem $< (4 \times 4 \times 4)$ e $> 3 \times 3 \times 3$; do mesmo modo, 935 é uma *potencia imperfeita*, porque

$$935 < 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \text{ e } > 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3.$$

172. — As potencias tomam as denominações de *primeira potencia, segunda potencia, terceira potencia, quarta potencia, quinta potencia, etc.*, conforme é 1, 2, 3, 4, 5, etc., o *expoente* indicativo do *gráo* a que é preciso elevar a *raiz* para produzir a *potencia*. Assim, 5^2 é uma *2.ª potencia* ou uma *potencia do 2.º gráo*; 10^3 é uma *3.ª potencia* ou uma *potencia do 3.º gráo*; 7^{10} é uma *10.ª potencia* ou uma *potencia do 10.º gráo, etc.*

NÓTA. — A 2.ª potencia, ou potencia do 2.º gráo, que é o resultado da multiplicação de 2 factores eguaes á *raiz* ou *base*, é denominada geralmente QUADRADO, denominação esta derivada do facto de ter a superficie de um *quadrado* — figura geometrica de 4 lados eguaes — por medida o producto de 2 desses lados eguaes.

Do mesmo modo, a 3.ª potencia, ou potencia do 3.º gráo, que é o resultado da multiplicação de 3 factores eguaes á *raiz* ou *base*, é denominada geralmente CUBO, denominação esta derivada do facto de ter o volume de um *cubo* — corpo geometrico de 6 faces planas, quadradas e eguaes — por medida o producto de 3 arestas eguaes.



Assim, a superficie d'um *quadrado*, cujo lado tem 7 metros de comprimento, se decompõe em $7 \times 7 = 49$ pequenos quadrados de um metro de lado cada um; e o volume de um *cubo*, cuja aresta tem 10 metros, se decompõe em $10 \times 10 \times 10 = 1000$ pequenos cubos de 1 metro de aresta cada um.

173. — Sendo a potenciação uma simples multiplicação especial, como acabamos de ver, a numeração contêm forçosamente tambem o germen desta nova operação numerica; tanto mais quanto cada uma das successivas ordens de unidades, que compõem os numeros, é uma potencia da *base do systema* de numeração. Assim, sendo 10 a base do systema, *uma dezena* (2.ª ordem de unidades) é a *1.ª potencia* (10) da base, *uma centena* (3.ª ordem de unidades) é a 2.ª *potencia* ($10 \times 10 = 10^2 = 100$) da base, *uma unidade de milhar* (4.ª ordem de unidades) é a *3.ª potencia* ($10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$) da base; e, assim, por deante.

174. — O seguinte quadro mostra a rapidez com que vam crescendo progressivamente as diversas potencias mesmo dos numeros digitos, e dá, portanto, a medida de quanto seria susceptivel de erros e penosa a applicação do processo ordinario rudimentar, das multiplicações successivas, para effectuar a potenciação dos numeros compostos:

1.ª	**2.ª**	**3.ª**	**4.ª**	**5.ª**	**6.ª**	**7.ª**	**8.ª**	**9.ª**
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

175. — O desinvolvimento das potencias dos numeros compostos segue uma LEI DE FORMAÇÃO invariavel, que facilita a determinação directa de qualquer potencia sem haver necessidade de recorrer-se ao processo rudimentar; e é exactamente a applicação pratica de semelhante LEI DE FORMAÇÃO que constitue o *processo especial* da potenciação a que nos referimos atraz (169).

A complicação, porém, dessa LEI DE FORMAÇÃO [1] e, sobretudo, a difficuldade relativa de sua deducção, que exige noções algebricas, impedem que as potenciações superiores ao *cubo* (3.º grão) sejam estudadas convenientemente na ARITHMETICA.

Reservando, pois, o estudo das potenciações superiores ao *cubo* para a ALGEBRA, onde poderemos deduzir, em toda a sua generalidade, a LEI DE FORMAÇÃO das potencias, limitar-nos-hemos, por emquanto, ao estudo da POTENCIAÇÃO DAS 2.ª e 3.ª POTENCIAS, isto é, do QUADRADO e do CUBO.

---

1. — A descoberta desta LEI é devida ao immortal mathematico inglez ISAAC NEWTON, nascido aos 25 de dezembro de 1642 e fallecido aos 20 de março de 1727, com 85 annos de edade, consagrados a notabilissimas descobertas scientificas, entre as quaes a LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL, O CALCULO INFINITESIMAL, a ANALYSE DA LUZ, etc. Estudando aos 21 annos a obra de WALLIS *(Arithmetica infinitorum)*, descobriu NEWTON a celebre fórmula algebrica, conhecida por BINOMIO DE NEWTON, que dá a *lei de formação* das potencias dos numeros compostos de *dezenas* e *unidades*. NEWTON e LEIBNITZ, eguaes no genio com que impulsionaram a sciencia e nos serviços que prestaram á humanidade, fecharam, com brilho inexcedivel, o cyclo glorioso de immortaes pensadores com que o 17.º seculo illuminou a historia da civilisação. GALILEU, DESCARTES, PASCAL e FERMAT foram, na realidade, tão dignos precursores de LEIBNITZ e NEWTON quanto estes o foram de EULER, D'ALEMBERT, CLAIRAUT, CONDORCET, LAGRANGE, LAPLACE, e outros que, no 18.º seculo, prepararam os ultimos elementos indispensaveis á grandiosa elaboração que permittiu que, no seculo actual, o grande AUG. COMTE instituisse a *Philosophia positiva* pela systematização de todos os conhecimentos humanos e a concepção synthetica do universo.

§ 2.º — Quadrado

176. — Os *quadrados* dos numeros digitos, ou simples, obteem-se com extrema facilidade pela multiplicação, e nem ha quem os não retenha de cór. Demais, tanto a TABOA DA MULTIPLICAÇÃO (122), como o QUADRO DAS POTENCIAS DOS NUMEROS DIGITOS (174), conteem esses quadrados e os fornecem á mais ligeira inspecção.

177. — Quanto, porém, aos *quadrados dos numeros compostos*, a determinação directa delles, sem o auxilio do processo ordinario da multiplicação de numeros compostos, basêa-se nos seguintes THEOREMAS, que passamos a demonstrar :

1.º — Theorema. — *O quadrado da somma de dous numeros quaesquer é egual á somma do quadrado do primeiro, do duplo producto do primeiro pelo segundo, e do quadrado do segundo.*

Com effeito,

$$(5+7)^2 = (5+7) \times (5+7) = (5 \times 5) + (5 \times 7) + (7 \times 5) + (7 \times 7) =$$
$$= 5^2 + 2\,(5 \times 7) + 7^2;$$

do mesmo modo,

$$(3+9)^2 = (3+9) \times (3+9) = (3 \times 3) + (3 \times 9) + (9 \times 3) + (9 \times 9) =$$
$$= 3^2 + 2\,(3 \times 9) + 9^2;$$

ainda,

$$(18+35)^2 = (18+35) \times (18+35) =$$
$$= (18 \times 18) + (18 \times 35) + (35 \times 18) + (35 \times 35) =$$
$$= 18^2 + 2\,(18 \times 35) + 35^2;$$

e, assim *sempre do mesmo modo* quaesquer que sejam os numeros considerados, o que demonstra a verdade da proposição geral enunciada.

Corollario : — *O quadrado de um numero composto de dezenas e unidades é egual ao quadrado das dezenas, mais o duplo producto das dezenas pelas unidades, e mais o quadrado das unidades.* Porque,

$$59^2 = (50 + 9)^2 = 50^2 + 2\,(50 \times 9) + 9^2;$$

do mesmo modo,

$$385^2 = (380 + 5)^2 = 380^2 + 2\,(380 \times 5) + 5^2;$$

ainda,

$$1073^2 = (1070 + 3)^2 = 1070^2 + 2\,(1070 \times 3) + 3^2;$$

e, assim *sempre do mesmo modo* quaesquer que sejam os numeros considerados, o que demonstra, em toda a sua generalidade, a verdade do corollario enunciado.

2.º — Theorema. — *A differença entre os quadrados de dous numeros inteiros consecutivos é egual ao dobro do menor mais 1.*

Com effeito,

$$(15 + 1)^2 - 15^2 = [15^2 + 2\,(15 \times 1) + 1^2] - 15^2 =$$
$$= 15^2 + (2 \times 15 + 1) - 15^2 = 2 \times 15 + 1;$$

do mesmo modo,

$$(23 + 1)^2 - 23^2 = [23^2 + 2\,(23 \times 1) + 1^2] - 23^2 =$$
$$= 23^2 + (2 \times 23 + 1) - 23^2 = 2 \times 23 + 1;$$

ainda,

$$(397 + 1)^2 - 397^2 = [397^2 + 2\,(397 \times 1) + 1^2] - 397^2 =$$
$$= 397^2 + (2 \times 397 + 1) - 397^2 = 2 \times 397 + 1;$$

e, assim *sempre do mesmo modo* quaesquer que sejam os numeros considerados, o que demonstra a verdade da proposição geral enunciada.

Corollario. — *Si ao quadrado de um numero inteiro addicionar-se o dobro desse numero e mais* 1, *tem-se o quadrado do numero inteiro seguinte.* Porque,

$$17^2 + (2 \times 17) + 1 = 17^2 + 2\,(17 \times 1) + 1^2 = (17 + 1)^2 = 18^2;$$

do mesmo modo,

$$304^2 + (2 \times 304) + 1 = 304^2 + 2\,(304 \times 1) + 1^2 = (304 + 1)^2 = 305^2;$$

ainda,

$$1837^2 + (2 \times 1837) + 1 = 1837^2 + 2\,(1837 \times 1) + 1^2 = (1837 + 1)^2 = 1838^2;$$

e, assim *sempre do mesmo modo* qualquer que seja o numero considerado, o que demonstra a verdade do corollario enunciado.

3.° — Theorema. — *O quadrado de um producto é egual ao producto dos quadrados dos seus factores.*

Com effeito,

$$(3 \times 7 \times 5)^2 = (3 \times 7 \times 5) \times (3 \times 7 \times 5) = 3 \times 7 \times 5 \times 3 \times 7 \times 5 = 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 5 \times 5 = 3^2 \times 7^2 \times 5^2;$$

do mesmo modo,

$$(9 \times 18 \times 25)^2 = (9 \times 18 \times 25) \times (9 \times 18 \times 25) = 9 \times 18 \times 25 \times 9 \times 18 \times 25 = 9 \times 9 \times 18 \times 18 \times 25 \times 25 = 9^2 \times 18^2 \times 25^2;$$

ainda,

$$(57 \times 804 \times 396)^2 = (57 \times 804 \times 396) \times (57 \times 804 \times 396) = 57 \times 804 \times 396 \times 57 \times 804 \times 396 = 57 \times 57 \times 804 \times 804 \times 396 \times 396 = 57^2 \times 804^2 \times 396^2;$$

e, assim *sempre do mesmo modo* quaesquer que sejam os numeros considerados, o que demonstra a verdade da proposição geral enunciada.

4.º — Theorema. — *Para formar uma potencia qualquer de* 10, 100, 1000, 10000, etc., *basta escrever á direita da unidade um numero de zéros egual ao producto do expoente da potencia pelo numero de zéros da raiz.*

Com effeito,

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000;$$

do mesmo modo,

$$100^3 = 100 \times 100 \times 100 = 1000000;$$

ainda,

$$1000^2 = 1000 \times 1000 = 1000000;$$

e, assim *sempre do mesmo modo*, o que demonstra a verdade da proposição enunciada.

5.º — Theorema. — *Para multiplicar duas, ou mais, potencias da mesma raiz, sommam-se os respectivos expoentes.*

Com effeito,

$$8^2 \times 8^3 = (8 \times 8) \times (8 \times 8 \times 8) = 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^5 = 8^{2+3};$$

do mesmo modo,

$$\begin{aligned}27^4 \times 27^5 &= (27 \times 27 \times 27 \times 27) \times (27 \times 27 \times 27 \times 27 \times 27) = \\ &= 27 \times 27 \times 27 \times 27 \times 27 \times 27 \times 27 \times 27 \times 27 = 27^9 = 27^{4+5};\end{aligned}$$

ainda,

$$\begin{aligned}4025^2 \times 4025^4 &= (4025 \times 4025) \times (4025 \times 4025 \times 4025 \times 4025) = \\ &= 4025 \times 4025 \times 4025 \times 4025 \times 4025 \times 4025 = \\ &= 4025^6 = 4025^{2+4};\end{aligned}$$

e, assim *sempre do mesmo modo* quaesquer que sejam a *raiz* e os *expoentes*, o que demonstra a verdade da proposição geral enunciada.

Reciproca : — *Para dividir duas potencias da mesma raiz, subtrahem-se os expoentes.* Porque,

si $27^9 = 27^4 \times 27^5$, é claro que $\frac{27^9}{27^4} = 27^5 = 27^{9-4}$;

do mesmo modo, si

$8^5 = 8^2 \times 8^3$, é claro que $\frac{8^5}{8^2} = 8^3 = 8^{5-2}$;

ainda, si

$4028^7 = 4028^4 \times 4028^3$, é claro que $\frac{4028^7}{4028^4} = 4028^3 = 4028^{7-4}$;

e, assim *sempre do mesmo modo* quaesquer que sejam a *raiz* e os *expoentes*, o que demonstra a verdade da reciproca enunciada.

178. — Isto posto, procuremos effectuar a potenciação ao quadrado do numero 27, por exemplo.

Este numero póde ser decomposto nas seguintes parcellas :

$$27 = 20 + 7 = (2 \times 10) + 7;$$

applicando-lhe, portanto, os theoremas precedentes, temos :

$$27^2 = \left[(2 \times 10) + 7\right]^2 = (2 \times 10)^2 + \left[2 \times (2 \times 10) \times 7\right] + 7^2 =$$
$$= 2^2 \times 10^2 + 2\,(2 \times 7) \times 10 + 7^2,$$

o que reduz a potenciação do numero composto 27 ao quadrado ás potenciações dos numeros simples 2 e 7 e do numero 10, cujos resultados já conhecemos préviamente.

179. — Seja, agora, o numero 2573, por exemplo. Decompondo-o em dezenas e unidades, temos :

$$2573 = 2570 + 3 = (257 \times 10) + 3,$$

e applicando-lhe os theoremas precedentes :

$$2573^2 = \left[(257 \times 10) + 3\right]^2 = (257 \times 10)^2 + \left[2 \times (257 \times 10) \times 3\right] + 3^2 =$$
$$= 257^2 \times 10^2 + 2\,(3 \times 257) \times 10 + 3^2;$$

mas, como tambem

$$257 = 250 + 7 = (25 \times 10) + 7,$$

temos que

$$257^2 = \left[(25 \times 10) + 7\right]^2 = (25 \times 10)^2 + \left[2 \times (25 \times 10) \times 7\right] + 7^2 =$$
$$= 25^2 \times 10^2 + 2\,(7 \times 25) \times 10 + 7^2,$$

e, substituindo-se este valor de 257^2 no valor de 2573^2, temos :

$$2573^2 = \left[25^2 \times 10^2 + 2\,(7 \times 25) \times 10 + 7^2\right] \times 10^2 + \left[2\,(3 \times 257) \times 10\right] + 3^2 =$$
$$= 25^2 \times 10^2 \times 10^2 + \left[2\,(7 \times 25) \times 10 + 7^2\right] \times 10^2 + \left[2\,(3 \times 257) \times 10\right] + 3^2 =$$
$$= 25^2 \times 10^4 + \left[2\,(7 \times 25) \times 10 + 7^2\right] \times 10^2 + \left[2\,(3 \times 257) \times 10\right] + 3^2.$$

E, como ainda

$$25 = 20 + 5 = (2 \times 10) + 5,$$

d'onde :

$$25^2 = [(2 \times 10) + 5]^2 = (2 \times 10)^2 + [2\,(2 \times 10) \times 5] + 5^2 =$$
$$= 2^2 \times 10^2 + [2\,(2 \times 5) \times 10] + 5^2,$$

temos — substituindo este valor de 25^2 no de 2573^2 — que, afinal,

$$2573^2 = [2^2.10^2 + 2(2.5)10 + 5^2]10^4 + [2(7.25)10 + 7^2]10^2 + 2(3.257)10 + 3^2 =$$
$$= 2^2.10^6 + [2(2.5)10 + 5^2]10^4 + [2(7.25)10 + 7^2]10^2 + 2(3.257)10 + 3^2.$$

180. — Analysando a formação do quadrado destes dous exemplos, deduz-se facilmente a seguinte

Regra : — *Para formar o quadrado d'um numero qualquer composto, basta addicionar as seguintes parcelas :* — 1.ª, *o quadrado do algarismo que representa as* *unidades da ordem mais alta do numero dado, multiplicado por uma potencia de* 10, *cujo expoente seja o dobro do numero de algarismos que ficam á direita desse* 1.º *algarismo considerado* (no exemplo figurado, $2^2 \times 10^6$); — 2.ª, *o duplo producto desse* 1.º *algarismo pelo seguinte á direita, multiplicado por* 10, *mais o quadrado deste* 2.º *algarismo considerado, multiplicada essa somma por uma potencia de* 10 *cujo expoente seja o dobro do numero de alg rismos que ficam á direita desse* 2.º *algarismo considerado* (no exemplo figurado $[2\,(2.5)\,10 + 5^2]\,10^4$); — 3.ª, *o duplo producto do numero formado pelos dous algarismos já considerados pelo algarismo seguinte á direita delles e por* 10, *mais o quadrado desse* 3.º *algarismo, multiplicada essa somma por uma potencia de* 10, *cujo expoente seja o dobro do numero de algarismos que ficam ainda á direita desse* 3.º *algarismo considerado* (no exemplo figurado, $[2\,(25.7)\,10 + 7^2]\,10^2$); *e, assim, por deante, até á ultima parcella, que é egual ao duplo producto do numero formado por todos os algarismos, menos o ultimo á direita, por este mesmo algarismo e por* 10, *mais o quadrado desse ultimo algarismo* (no exemplo figurado, $2\,(257.3)\,10 + 3^2$).

181. — Esta regra parece, á primeira vista, muito complicada, e, portanto, pouco pratica; e, por isso, formam-se geralmente os quadrados dos numeros pela multiplicação directa.

Para quem, porém, assenhorear-se bem desta regra e procurar exercitar-se no uso della, applicando-a frequente e cuidadosamente, tornar-se-ha em pouco tempo preferivel ao processo ordinario da multiplicação, mórmente quando forem grandes os numeros que se tratar de elevar ao quadrado.

Appliquemol-a, com effeito, a alguns exemplos :

I. — Seja, primeiramente, o numero 509; applicando a *regra*, tem-se :

1.ª parcella	$5^2 \times 10^4$	$= 25 \times 10000$	$= 250000$
2.ª parcella	$\left[2\,(5 \times 0)\,10 + 0^2\right] 10^2$	$= (2 \times 0 \times 10 + 0)\,100$	$= 0$
3.ª parcella	$2\,(50 \times 9)\,10 + 9^2$	$= 900 \times 10 + 81$	$= 9081$

Quadrado . . . .

$$
\begin{aligned}
& 5^2 \times 10^4 + \\
& + \left[2\,(5 \times 0)\,10 + 0^2\right] 10^2 + \\
& + 2\,(50 \times 9)\,10 + 9^2 = \ldots\ldots\ldots = 259081.
\end{aligned}
$$

II. — Seja, agora, o numero 32687; applicando a *regra*, tem-se :

1.ª parcella	$3^2 \times 10^8$	$= 9 \times 100000000$	$= 900000000$
2.ª parcella	$\left[2\,(3 \times 2)\,10 + 2^2\right] 10^6$	$= (2 \times 60 + 4)\,1000000$	$= 124000000$
3.ª parcella	$\left[2\,(32 \times 6)\,10 + 6^2\right] 10^4$	$= (2 \times 1920 + 36)\,10000$	$= 38760000$
4.ª parcella	$\left[2\,(326 \times 8)\,10 + 8^2\right] 10^2$	$= (2 \times 26080 + 64)\,100$	$= 5222400$
5.ª parcella	$2\,(3268 \times 7)\,10 + 7^2$	$= 2 \times 228760 + 49$	$= 457569$

Quadrado . . . .

$$
\begin{aligned}
& 3 \times 10^8 + \\
& + \left[2\,(3 \times 2)\,10 + 2^2\right] 10^6 + \\
& + \left[2\,(32 \times 6)\,10 + 6^2\right] 10^4 + \\
& + \left[2\,(236 \times 8)\,10 + 8^2\right] 10^2 + \\
& + 2\,(3268 \times 7)\,10 + 7^2 = \ldots\ldots\ldots = 1068439969.
\end{aligned}
$$

NOTA. — Como verificação destes dous resultados, eis os *quadrados* obtidos pelo processo ordinario da multiplicação :

I.

$$\begin{array}{r} 509\\ 509\\ \hline 4581\\ 25450\\ \hline 259081 \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{r} 32687\\ 32687\\ \hline 228809\\ 261496\\ 196122\\ 65374\\ 98061\\ \hline 1068439969 \end{array}$$

Comparando o processo da potenciação ao quadrado por meio da regra, que deduzimos, com o processo ordinario rudimentar da potenciação por meio da multiplicação, verifica-se, como nos exemplos figurados, que, tanto por um como pelo outro desses processos, é sempre o mesmo o numero das multiplicações parciaes; os productos parciaes são, porém, muito mais simples no processo especial que no da multiplicação directa.

Accresce, ainda, que semelhante regra, além da sua importancia theorica e pratica, offerece a utilissima vantagem de facilitar a deducção da regra para a determinação das *raizes quadradas* dos numeros, como mais adeante veremos.

182. — Como o quadrado de um numero composto de *dezenas* e *unidades* termina *sempre* pelo mesmo algarismo que o *quadrado das suas unidades* (177, 1.º th., corol.), conclue-se, da inspecção das duas primeiras columnas do QUADRO do n. 174, que :

1.º — *Os quadrados dos numeros inteiros terminados por* 1 *ou* 9 *terminam sempre por* 1 ;

2.º — *Os quadrados dos numeros inteiros terminados por 2 ou 8 terminam sempre por 4;*

3.º — *Os quadrados dos numeros inteiros terminados por 3 ou 7 terminam sempre por 9;*

4.º — *Os quadrados dos numeros inteiros terminados por 4 ou 6 terminam sempre por 6;*

5.º — *Os quadrados dos numeros inteiros terminados por 5 terminam tambem sempre por 5.*

D'aqui se conclue que — *os numeros inteiros terminados por 2, 3, 7, ou 8 não podem ser* QUADRADOS PERFEITOS.

§ 3.º — Cubo

183. — Os *cubos* dos numeros digitos, ou simples, obteem-se facilmente pela multiplicação repetida, e nem ha quem os não retenha de cór. O QUADRO DAS POTENCIAS DOS NUMEROS DIGITOS (174) contém esses cubos e os fornece á mais simples inspecção.

184. — Quanto, porém, aos *cubos dos numeros compostos*, a determinação directa delles, sem o auxilio do processo ordinario das multiplicações repetidas, basêa-se nos seguintes THEOREMAS, que passamos a demonstrar:

1.º — Theorema. — *O cubo da somma de dous numeros quaesquer é egual á somma do cubo do primeiro, mais o triplo producto do quadrado do primeiro pelo segundo, mais o triplo producto do primeiro pelo quadrado do segundo, mais o cubo do segundo.*

Com effeito,

$$
\begin{aligned}
(5+3)^3 &= (5+3)(5+3)(5+3) = (5+3)^2 \times (5+3) = \\
&= [5^2 + 2(5\times3) + 3^2] \times (5+3) = (5^2\times5) + (2\times5\times3)\times5 + \\
&+ (3^2\times5) + (5^2\times3) + (2\times5\times3)\times3 + (3^2\times3) = \\
&= 5^3 + 2(5^2\times3) + (3^2\times5) + (5^2\times3) + 2(3^2\times5) + 3^3 = \\
&= 5^3 + 3(5^2\times3) + 3(3^2\times5) + 3^3;
\end{aligned}
$$

do mesmo modo,

$$(6+7)^3 = (6+7)(6+7)(6+7) = (6+7)^2 \times (6+7) =$$
$$= [6^2 + 2(6\times7) + 7^2] \times (6+7) = 6^3 \times 2(6^2\times7) + (6\times7^2) +$$
$$+ (6^2\times7) + 2(6\times7^2) + 7^3 =$$
$$= 6^3 + 3(6^2\times7) + 3(6\times7^2) + 7^3;$$

ainda,

$$(15+43)^3 = (15+43)(15+43)(15+43) = (15+43)^2 \times (15+43) =$$
$$= [15^2 + 2(15\times43) + 43^2] \times (15+43) =$$
$$= 15^3 + 2(15^2\times43) + (43^2\times15) + (15^2\times43) + 2(15\times43^2) + 43^3 =$$
$$= 15^3 + 3(15^2\times43) + 3(15\times43^2) + 43^3;$$

e, assim *sempre do mesmo modo* quaesquer que sejam os numeros considerados, o que demonstra a verdade da proposição geral enunciada.

Corollario: — *O cubo de um numero composto de dezenas e unidades é egual ao cubo das dezenas, mais o triplo producto do quadrado das dezenas pelas unidades, mais o triplo producto das dezenas pelo quadrado das unidades, mais o cubo das unidades.*

Porque,

$$78^3 = (70+8)^3 = 70^3 + 3(70^2\times8) + 3(70\times8^2) + 8^3;$$

do mesmo modo,

$$587^3 = (580+7)^3 = 580^3 + 3(580^2\times7) + 3(580\times7^2) + 7^3;$$

ainda,

$$2685^3 = (2680+5)^3 = 2680^3 + 3(2680^2\times5) + 3(2680\times5^2) + 5^3;$$

e, assim *sempre do mesmo modo* quaesquer que sejam os numeros considerados, o que demonstra, em toda a sua generalidade, a verdade do corollario enunciado.

2.º — Theorema. — *A differença entre os cubos de dous numeros inteiros consecutivos é egual ao triplo quadrado do menor, mais o triplo do menor e mais* 1.

Com effeito,

$$(26+1)^3-26^3=\left[26^3+3\,(26^2\times 1)+3\,(26\times 1^2)+1^2\right]-26^3=$$
$$=3\times 26^2+3\times 26+1;$$

do mesmo modo,

$$(105+1)^3-105^3=[105^3+3\,(105^2\times 1)+3\,(105\times 1^2)+1^2]-105^3=$$
$$=3\times 105^2+3\times 105+1;$$

ainda,

$$(3809+1)^3-3809^3=[3809^3+3\,(3809^2\times 1)+3\,(3809\times 1^2)+1^2]-3809^3=$$
$$=3\times 3809^2+3\times 3809+1;$$

e, assim *sempre do mesmo modo* quaesquer que sejam os numeros considerados, o que demonstra, em toda a sua generalidade, a verdade da proposição enunciada.

Corollario : — *Si ao cubo de um numero inteiro qualquer addicionar-se o triplo quadrado desse numero, mais o triplo desse mesmo numero e mais* 1, *tem-se o cubo do numero inteiro immediatamente superior.*

Porque,

$$16^3+(3\times 16^2)+(3\times 16)+1=16^3+(3\times 16^2\times 1)+(3\times 16\times 1^2)+$$
$$+1^3=(16+1)^3=17^3;$$

do mesmo modo,

$$65^3+(3\times 65^2)+(3\times 65)+1=65^3+(3\times 65^2\times 1)+(3\times 65\times 1^2)+$$
$$+1^3=(65+1)^3=66^3;$$

ainda,

$$704^3+(3\times 704^2)+(3\times 704)+1=704^3+(3\times 704^2\times 1)+(3\times 704\times 1^2)+$$
$$+1^3=(704+1)^3=705^3;$$

e, assim *sempre do mesmo modo* qualquer que seja o numero considerado, o que demonstra a verdade do corollario enunciado.

3.° — Theorema. — *O cubo de um producto é egual ao producto dos cubos dos factores.*

Com effeito,

$$(5\times7\times6)^3=(5\times7\times6)\times(5\times7\times6)\times(5\times7\times6)=$$
$$=5\times7\times6\times5\times7\times6\times5\times7\times6=$$
$$=5\times5\times5\times7\times7\times7\times6\times6\times6=5^3\times7^3\times6^3;$$

do mesmo modo,

$$(15\times27\times88)^3=(15\times27\times88)\times(15\times27\times88)\times(15\times27\times88)=$$
$$=15\times27\times88\times15\times27\times88\times15\times27\times88=$$
$$=15\times15\times15\times27\times27\times27\times88\times88\times88=$$
$$=15^3\times27^3\times88^3;$$

ainda,

$$(385\times9\times17\times1804)^3=$$
$$=(385.9.17.1804)\times(385.9.17.1804)\times(385.9.17.1804)=$$
$$=385\times9\times17\times1804\times385\times9\times17\times1804\times385\times9\times17\times1804=$$
$$=385\times385\times385\times9\times9\times9\times17\times17\times17\times1804\times1804\times1804=$$
$$=385^3\times9^3\times17^3\times1804^3;$$

e, assim *sempre do mesmo modo* quaesquer que sejam os numeros considerados, o que demonstra a verdade da proposição geral enunciada.

185. — Isto posto, procuremos effectuar directamente a potenciação ao cubo [1] do numero 45, por exemplo.

Este numero póde ser decomposto nas duas seguintes parcellas :

$$45=40+5=(4\times10)+5;$$

---

1. — A potenciação ao cubo é geralmente denominada *cubação*.

applicando-lhe, portanto, os *theoremas* do numero precedente e bem assim os 4.º e 5.º do n. 177, tem-se :

$$45^3 = (4.10+5)^3 = (4.10)^3 + [3\times(4.10)^2\times 5] + [3\times(4.10)\times 5^2] + 5^3 =$$
$$= 4^3\times 10^3 + [3\times(4^2.5)\times 10^2] + [3\times(4.5^2)\times 10] + 5^3,$$

o que reduz a potenciação do numero composto 45 ao cubo ás potenciações ao quadrado e ao cubo dos numeros simples 4 e 5 e do numero 10, cujos resultados já conhecemos préviamente.

186. — Seja, agora, o numero 5796, por exemplo. Decompondo-o em dezenas e unidades, tem-se :

$$5796 = 5790 + 6 = (579 \times 10) + 6,$$

e applicando-lhe os theoremas precedentes,

$$5796^3 = (579.10+6)^3 =$$
$$= (579.10)^3 + [3\,(579.10)^2\times 6] + [3\,(579.10)\times 6^2] + 6^3 =$$
$$= 579^3\times 10^3 + [3\,(579^2.6)\times 10^2] + [3\,(579.6^2)\times 10] + 6^3;$$

mas, como tambem

$$579 = 570 + 9 = (57 \times 10) + 9,$$

tem-se que :

$$579^3 = (57.10+9)^3 =$$
$$= (57.10)^3 + [3\,(57.10)^2\times 9] + [3\,(57.10)\times 9^2] + 9^3 =$$
$$= 57^3\times 10^3 + [3\,(57^2.9)\times 10^2] + [3\,(57.9^2)\times 10] + 9^3;$$

e, substituindo este valor de 579^3 no de 5796^3, tem-se :

$$5796^3 =$$
$$= [57^3\times 10^3 + 3\,(57^2.9)\times 10^2 + 3\,(57.9^2)\times 10 + 9^3]\times 10^3 + 3\,(579^2.6)\times 10^2 +$$
$$+ 3\,(579.6^2)\times 10 + 6^3 =$$
$$= 57^3\times 10^6 + [3\,(57^2.9)\times 10^2 + 3\,(57.9^2)\times 10 + 9^3]\times 10^3 +$$
$$+ 3\,(579^2.6)\times 10^2 + 3\,(579.6^2)\times 10 + 6^3.$$

E, como ainda,

$$57 = 50 + 7 = (5 \times 10) + 7,$$

d'onde :

$$57^3 = (5.10 + 7)^3 = (5.10)^3 + 3\,(5.10)^2 \times 7 + 3\,(5.10) \times 7^2 + 7^3 =$$
$$= 5^3 \times 10^3 + 3\,(5^2.7) \times 10^2 + 3\,(5.7^2) \times 10 + 7^3;$$

tem-se — substituindo este valor de 57^3 no de 5796^3 — que, afinal,

$$\begin{aligned}
5796^3 &= \\
&= [5^3.10^3 + 3\,(5^2.7) \times 10^2 + 3\,(5.7^2) \times 10 + 7^3] \times 10^6 + \\
&+ [3\,(57^2.9) \times 10^2 + 3\,(57.9^2) \times 10 + 9^3] \times 10^3 + \\
&+ 3\,(579^2.6) \times 10^2 + 3\,(579.6^2) \times 10 + 6^3 = \\
&= 5^3.10^9 + [3\,(5^2.7) \times 10^2 + 3\,(5.7^2) \times 10 + 7^3] \times 10^6 + \\
&+ [3\,(57^2.9) \times 10^2 + 3\,(57.9^2) \times 10 + 9^3] \times 10^3 + \\
&+ 3\,(579^2.6) \times 10^2 + 3\,(579.6^2) \times 10 + 6^3.
\end{aligned}$$

187. — Analysando a formação do cubo neste exemplo, deduz-se facilmente a seguinte

Regra : — *Para formar o cubo d'um numero composto qualquer, basta addicionar as seguintes parcellas :*

1.ª — *o cubo do 1.º algarismo á esquerda, multiplicado por uma potencia de 10 cujo expoente seja o triplo do numero d'algarismos que ficam á direita desse 1.º algarismo considerado* (no exemplo figurado, $5^3 \times 10^9$) ;

2.ª — *o triplo producto do quadrado desse 1.º algarismo á esquerda multiplicado pelo algarismo immediato á direita e pelo quadrado de 10, mais o triplo producto desse mesmo 1.º algarismo pelo quadrado do immediato á sua direita e por 10, e mais o cubo desse 2.º algarismo considerado, multiplicada toda essa somma por uma potencia de 10 cujo expoente seja o triplo do numero d'algarismos que ainda* *restarem á direita dos dous já considerados* (no exemplo figurado, $[3(5^2.7)10^2 + 3(5.7^2)10 + 7^3] \times 10^6$);

3.ª — *o triplo producto do quadrado do numero formado pelos dous algarismos já considerados á esquerda pelo 3.º algarismo immediato á direita e pelo quadrado de 10, mais o triplo producto desse mesmo numero pelo quadrado do mencionado 3.º algarismo e por 10, e mais o cubo desse 3.º algarismo considerado, multiplicada toda essa somma por uma potencia de 10 cujo expoente seja o triplo do numero de algarismos que ainda restarem á direita dos 3 já considerados* (no ex. fig., $[3(57^2.9)10^2 + 3(57.9^2)10 + 9^3] \times 10^3$); — *e, assim por diante, até as tres ultimas parcellas constituidas pelo triplo producto do quadrado do numero formado por todos os algarismos menos o ultimo á direita multiplicado por este algarismo e pelo quadrado de 10, mais o triplo producto desse mesmo numero pelo quadrado do mencionado ultimo algarismo á direita e por 10, e mais, finalmente, o cubo deste ultimo algarismo* (no exemplo figurado, $[3(579^2.6)10^2 + 3(579.6^2)10 + 6^3]$.

188. — O que dissemos, no n.º 181, relativamente á regra para a potenciação ao quadrado dos numeros compostos quaesquer, tem inteira applicação á regra, que acabamos de deduzir, para a cubação dos mesmos numeros.

A facilidade com que, por meio desta regra, eleva-se ao cubo qualquer numero composto que seja proposto, não póde ser posta em duvida por quem comparar o processo applicado nesse caso com o processo ordinario por meio de duas multiplicações successivas, demasiado penosas e muito mais susceptiveis d'enganos; do que dam, aliás, testemunho os exemplos constantes das duas seguintes paginas :

I.

Seja, primeiramente, o numero 785; applicando-lhe a REGRA, tem-se:

1.ª parcella. $7^3 \times 10^6 = 343 \times 1000000 = 343000000$

2.ª parcella. $\left[(3\times7^2\times8\times10^2) + (3\times7\times8^2\times10) + 8^3\right]\times10^3 = (117600 + 13440 + 512)\times1000 = 131552000$

3.ª parcella. $(3\times78^2\times5\times10^2) + (3\times78\times5^2\times10) + 5^3 = 9126000 + 58500 + 125 = 9184625$

Cubo . . . $7^3 \times 10^6 +$

$+ \left[(3\times7^2\times8\times10^2) + (3\times7\times8^2\times10) + 8^3\right] \times 10^3 +$

$+ (3\times78^2\times5\times10^2) + (3\times78\times5^2\times10) + 5^3$ . . . . $= 483736625$

II.

Seja, agora, o numero 25487; applicando-lhe a REGRA, tem-se:

1.ª parc.	$2^3 \times 10^{12}$	$= 8 \times 1000000000000$	$= 8000000000000$
2.ª parc.	$\left[(3\times 2^2\times 5\times 10^2) + (3\times 2\times 5^2\times 10) + 5^3\right]\times 10^9$	$= (6000 + 1500 + 125)\times 1000000000$	$= 7625000000000$
3.ª parc.	$\left[(3\times 25^2\times 4\times 10^2) + (3\times 25\times 4^2\times 10) + 4^3\right]\times 10^6$	$= (750000 + 12000 + 64)\times 1000000$	$= 762064000000$
4.ª parc.	$\left[(3\times 254^2\times 8\times 10^2) + (3\times 254\times 8^2\times 10) + 8^3\right]\times 10^3$	$= (154838400 + 487680 + 512)\times 1000$	$= 155326592000$
5.ª parc.	$(3\times 2548^2\times 7\times 10^2) + (3\times 2548\times 7^2\times 10) + 7^3$	$= 13633838400 + 3745560 + 343$	$= 13637584303$

Cubo . . $2^3 \times 10^{12} +$

$+\left[(3\times 2^2\times 5\times 10^2) + (3\times 2\times 5^2\times 10) + 5^3\right]\times 10^9 +$

$+\left[(3\times 25^2\times 4\times 10^2) + (3\times 25\times 4^2\times 10) + 4^3\right]\times 10^6 +$

$+\left[(3\times 254^2\times 8\times 10^2) + (3\times 254\times 8^2\times 10) + 8^3\right]\times 10^3 +$

$+ (3\times 2548^2\times 7\times 10^2) + (3\times 2548\times 7^2\times 10) + 7^3$ . . . . $= 16556028176303$

NÓTA. — Como verificação destes dous resultados, eis os cubos obtidos pelo processo ordinario das duas multiplicações successivas :

I.

```
      785
      785
   ------
     3925
    6280
   5495
   ------
   616225
      785
 --------
  3081125
 4929800
4313575
---------
483736625
```

II.

```
             25487
             25487
            ------
            178409
           203896
          101948
         127435
        50974
        ---------
         649587169
             25487
       -----------
        4547110183
       5196697352
      2598348676
     3247935845
    1299174338
    --------------
    16556028176303
```

Além da sua importancia theorica e pratica, tem tambem esta regra, para a cubação de quaesquer numeros compostos, como a da potenciação ao quadrado, a utilissima vantagem de facilitar, como adiante veremos, a deducção da regra para a radiciação cubica dos numeros compostos.

§ 4.º — Prova

189. — Para verificar o resultado de uma potenciação qualquer é mistér effectuar a operação inversa — *radiciação*, — de que nos occuparemos no seguinte capitulo.

O processo geralmente conhecido por *prova dos nove* — de que tambem opportunamente trataremos, — póde ser egualmente aproveitado para a verificação das potenciações.