PRIMEIRA SECÇÃO

NUMEROS INTEIROS

LIVRO I

OPERAÇÕES

INTRODUCÇÃO

SUMMARIO : Operações arithmeticas. — Funcções elementares. — Operações directas e inversas. — Operações fundamentaes. — Prova.

61. — Para determinar os numeros *desconhecidos* por meio dos *conhecidos* é mistér *combinal-os* de accordo com as *relações precisas que os ligam uns aos outros*, de maneira a descobrir o modo de formação dos primeiros por meio dos segundos.

62. — **Operações arithmeticas** — *são as diversas maneiras distinctas de combinar os numeros, compondo-os ou decompondo-os de accordo com as relações que os ligam, de modo a deduzir os desconhecidos dos conhecidos.*

63. — As *fórmulas* que, em MATHEMATICA, exprimem as relações precisas existentes entre grandezas desconhecidas e grandezas conhecidas, chamam-se *funcções* ; e são, como é natural, em numero illimitado. Todas ellas compõem-se, porém, de um pequeno numero de *funcções elementares* que, no estado actual da sciencia, constituem apenas *cinco* grupos de duas funcções cada um, das quaes uma *directa* e a outra *inversa*.

64. — A cada *funcção* distincta corresponde, em rigor, uma *operação arithmetica*, que permitte *avalial-a;* são, portanto, *dez* as operações arithmeticas distinctas. Como, porém, as funcções dos *dous* grupos mais complicados são consideradas *transcendentes*, ficam reduzidas a *seis* apenas as *operações elementares da* ARITHMETICA ; e são :—a *Addição*, a *Subtracção*, a *Multiplicação*, a *Divisão*, a *Potenciação* e a *Radiciação*.

65. — Destas, são *directas*, isto é, referem-se á *composição dos numeros*, a *Addição*, a *Multiplicação* e a *Potenciação ;* sendo as outras tres *inversas*, isto é, referentes á *decomposição dos numeros*. Assim, a *Subtracção* é inversa á *Addição;* a *Divisão* é inversa á *Multiplicação ;* e a *Radiciação* é inversa á *Potenciação*.

66. — Accresce que, a *Multiplicação* e a *Potenciação* nada mais são, em rigor, que *casos especiaes* da *Addição*, e a *Divisão* e a *Radiciação*, *casos especiaes* da *Subtracção:* d'onde a denominação de *operações fundamentaes* dada geralmente á *Addição* e *Subtracção* [1]. Cumpre observar todavia, que, nem por serem *casos especiaes* das duas

---

1. — O estudo successivo de cada uma dessas seis operações distinctas applicadas aos *numeros inteiros* constituirá o assumpto deste LIVRO I.

Na SEGUNDA SECÇÃO estudal-as-hemos applicadas aos *numeros fraccionarios*.

primeiras, deixam as outras quatro operações de constituir *funcções distinctas;* exigindo cada uma *processo especial*, pratico e theorico, para sua respectiva *avaliação*, como estudaremos adeante.

67. — Os processos praticos de effectuar as operações são sujeitos, como é aliás natural, a enganos e trocas de algarismos, o que se procura evitar procedendo, depois de effectuada qualquer operação, á respectiva verificação ou *prova,* que consiste em uma segunda operação.

Sendo a *prova* uma nova operação, egualmente susceptivel de enganos, não póde dar *certeza* quanto ao resultado da operação primitiva; pois, póde dar-se até o caso d'um erro desta ser compensado por outro, em sentido contrario, da *prova.* O concurso, porém, das circumstancias necessarias para que uma prova seja falsa é tão difficil de dar-se, que o gráo da probabilidade obtida por esta equivale quasi a uma certeza.

Demais, sendo já raro commetter enganos em uma operação effectuada attentamente, mais raro será commettel-os em duas consecutivas, e, ainda mais, que os enganos, em uma e outra, se compensem.

CAPITULO I

ADDIÇÃO

SUMMARIO : — Definição. — Exemplo. — Signal representativo. — Partes componentes. — A numeração contendo o germen da addição. — A dupla aptidão da numeração. — Os dous casos em que se divide a theoria da addição. — Primeiro caso : *Addição de numeros menores que dez.* — Segundo caso : *Addição de numeros quaesquer.* — Regra geral. — Observações. — Próva.

§ 1.º — Preliminares

68. — Addição — *é a operação que tem por fim combinar diversos numeros dados de modo a formar um só composto de tantas unidades quantas forem as contidas em todos elles.*

Exemplo : — Um estudante obtem na 1.ª semana do mez *cinco* nótas boas, na 2.ª semana *quatro*, na 3.ª *sete* e na 4.ª *tres;* e, contando todas essas nótas boas, verifica que, durante o mez, obteve *dezenove* nótas boas. Os differentes numeros de nótas boas que obteve separadamente ficam, assim, reunidos em um só numero — *dezenove*, — que contém tantas unidades quantas são as contidas em todos os numeros que foram combinados.

69. — A addição é representada pelo signal $+$, que significa *mais*, e foi introduzido pelo illustre RUDOLFF [1], em

---

1. — RUDOLFF ou RODOLPHI *(Christovão)*, geometra allemão fallecido em 1550. Deixou uma *Algebra*, que foi publicada por *M. Stiffel* em 1553 sob o ti-

1522. Seu resultado é denominado *somma;* e os numeros que teem de ser addicionados *parcellas*. Assim, no exemplo figurado, os numeros, 5, 4, 7 e 3 são as *parcellas;* o numero 19 é a *somma;* e a operação é indicada do seguinte modo :

$$5 + 4 + 7 + 3 = 19.$$

70. — Sendo a *somma* um numero que contém tantas unidades quantas são contidas em todas as *parcellas*, é claro que, para addicionar os numeros 3 e 2, por exemplo, bastará reunir ao primeiro as *duas* unidades do segundo successivamente, dizendo : 3 e 1, 4; 4 e 1, 5; logo 3 e 2, 5.

A propria numeração contém, pois, o germen desta operação na formação dos numeros pela reunião successiva de unidades; e, desse modo poderiamos effectuar qualquer addição.

Tratando-se, porém, de numeros de muitos algarismos, esse processo rudimentar seria por demais moroso, enfadonho e susceptivel de erros; d'ahi a necessidade de um processo mais simples e expedito.

71. — Convém observar, todavia, que, por mais penoso que seja o processo rudimentar fornecido pela numeração, constitue elle a base necessaria da addição, pois os casos mais complicados, em que as parcellas são numeros de muitos algarismos, dependem sempre dos casos mais simples. Demais, a numeração, grupando os numeros em classes e em ordens de unidades, afastou a principal difficuldade das combinações numericas e facilitou, portanto, os processos praticos de realizal-as, permittindo a decomposição theorica de cada uma das operações arithmeticas

---

tulo de *Die Coss*. Tal era a reputação deste illustre geometra allemão que foi denominado — *o preceptor de toda a Allemanha, em mathematica*.

em *casos* gradualmente complicados, mas reductiveis todos ao mais elementar e directo.

72. — Assim, a theoria da *addição* póde ser decomposta nos *dous* seguintes casos, cujo estudo successivo permitte que as mais fracas intelligencias, conseguindo vencer com facilidade o primeiro passo do *calculo arithmetico*, apprendam a *avaliar* correctamente a mais elementar das combinações numericas.

73. — Originando, assim, a primeira das operações fundamentaes da *Arithmetica* [1], a numeração revéla a dupla aptidão com que foi instituida para, não só *contar*, isto é, distinguir cada numero do precedente e do seguinte, mas tambem *calcular*, isto é, avaliar as combinações numericas cujos elementos forem já todos conhecidos.

§ 2.º — Primeiro caso :

Addição de numeros menores que dez

74. — Apprendem-se, geralmente, de cór e com extrema facilidade, nas *Escholas Primarias*, os resultados das addições dos numeros menores que *dez* [2], e não ha quem os não retenha na memoria e os não possa reproduzir promptamente.

---

1. — A numeração contém em germen todas as operações arithmeticas, e, em geral, todas as combinações entre quantidades abstractas ; de sorte que taes combinações devem ser consideradas como desinvolvimentos progressivos da numeração.

2. — Estes numeros são geralmente denominados *digitos*, ou então *simples*, em opposição aos maiores que 10 que são *compostos* de unidades de diversas ordens. A palavra *digitos* provém da latina *digitus*, que quer dizer *dedo*, e indica que os numeros de 1 a 9 podem ser *contados pelos dedos*.

75. — Demais, todos esses resultados acham-se contidos no seguinte quadro, onde é facilimo encontral-os :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Para formal-o escrevem-se, na 1.ª linha horizontal, o *zéro* e os *nove* primeiros numeros ; na 2.ª, os resultados da addição d'uma unidade (1) a cada um desses nove primeiros numeros, notando que $0 + 1 = 1$; na 3.ª, os resultados da addição d'uma unidade a cada um dos numeros da 2.ª ; e, assim, por diante até a 10.ª linha horizontal, cujo primeiro numero á esquerda é 9, isto é, $8 + 1 = 9$.

Para determinar, por meio deste quadro, a *somma* de *dous numeros simples quaesquer*, procura-se um delles na 1.ª linha horizontal e desce-se a vista pela columna vertical correspondente a esse numero até encontrar a linha horizontal que começa pelo outro numero dado; o numero que se acha no encontro desta linha horizontal com a columna vertical será a *somma* procurada. Assim, dados, por exemplo, os numeros 5 e 7, procura-se, na 1.ª linha horizontal, o numero 5 e desce-se a vista pela columna vertical que a elle corresponde até encontrar a linha horizontal que começa por 7; no encontro dessas duas linhas (a vertical e a horizontal) acha-se o numero 12, que é, com effeito, a *somma* de $5 + 7$.

76. — Analysando este quadro, verifica-se que:

1.° — A somma de dous numeros quaesquer não se altera qualquer que seja a ordem por que se os addicione, isto é: $5 + 7 = 7 + 5$, $4 + 9 = 9 + 4$, etc.; o que se exprime pela seguinte proposição axiomatica: — *A ordem das parcellas não altera a somma.*

2.° — A mesma somma póde resultar da addição de differentes numeros; assim,

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3,$$
$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5,$$

. . . .

77. — Sabendo-se addicionar dous numeros menores que *dez*, é facil addicionar tres, quatro, ou mais, para o que basta decompor a somma dos dous primeiros em suas *dezenas* e *unidades*, e sommar a estas o terceiro numero dado; decompor esta nova somma tambem em suas *dezenas* e *unidades* e sommar a estas o quarto numero dado; e, assim, por diante.

Sejam, por exemplo, 7, 6, 8 e 5 os numeros que é preciso addicionar. A somma dos dous primeiros $(7 + 6)$ é 13, isto é, 1 *dezena* mais 3 *unidades*; sommando a estas o terceiro numero 8, o resultado será $3 + 8 = 11$, isto é, 1 *dezena* mais 1 *unidade*, ou, sommando a *dezena* á da primeira somma, 2 *dezenas* mais 1 *unidade;* e, sommando, finalmente, esta unidade ao quarto numero dado 5, o resultado será 6 *unidades*, que, com as 2 *dezenas*, formarão o resultado final 26, que é, com effeito, a somma de $7+6+8+5$.

Do mesmo modo, para effectuar a addição dos numeros 8, 6, 5 e 9, diriamos, abreviando os calculos: $8+6=14$, $14+5=19$, e $19+9=28$; logo:

$$8+6+5+9=28.$$

Conhecido assim o processo para addicionar muitos numeros simples, o habito de calcular encarrega-se de permittir que a operação seja effectuada, mesmo mentalmente, com extrema promptidão.

78. — Processo analogo, egualmente simples e expedito, permitte a addição de um numero digito a outro composto.

Sejam, por exemplo, 5 e 238 esses dous numeros. O segundo é formado de 23 *dezenas* e 8 *unidades;* addicionando a estas as 5 que constituem o primeiro numero, o resultado será $8+5=13$ *unidades*, ou 1 *dezena* e 3 *unidades*. A somma procurada conterá, portanto, 23 *dezenas*, mais 1 *dezena* e mais 3 *unidades*, ou 24 *dezenas* mais 3 *unidades;* será, portanto, $=243$.

Como no caso precedente, o habito de calcular encarrega-se de facilitar a determinação mental — prompta e certa — dos resultados de taes addições.

§ 3.º — Segundo caso:

Addição de numeros quaesquer

79. — A addição de dous numeros quaesquer reduz-se á de numeros menores que *dez*, em virtude do seguinte demonstração : — *Para addicionar dous numeros póde-se, depois de tel-os decomposto em muitas partes (unidades, dezenas, centenas, etc.), addicionar successivamente essas partes, umas ás outras, e reunir depois as sommas resultantes.*

80. — Sejam 8149 e 6214 os dous numeros a addicionar. Cada um delles póde ser decomposto em 4 partes : *unidades, dezenas, centenas* e *milhares;* e, em virtude do *principio*, cuja evidencia é tal que dispensa qualquer principio precedente, podemos addicionar separada e successivamente os numeros que constituem cada uma dessas 4 ordens de unidades, reunindo depois as sommas parciaes em uma somma total.

Dispondo, pois, para mais facilidade, os dous numeros um por baixo do outro e correspondendo-se, em columnas verticaes, as unidades de cada ordem, como indica o seguinte

TYPO DO CALCULO :

$$\begin{array}{r} 8\;1\;4\;9 \\ 6\;2\;1\;4 \\ \hline 1\;4\;3\;6\;3, \end{array}$$

dizemos : $9+4$ fazem 13 unidades, ou 1 dezena e 3 unidades; podemos, portanto, escrever 3 como algarismo das unidades da *somma* e reservar a 1 dezena para addicionar ás demais dezenas das parcellas. Passando, em seguida, á columna das dezenas, dizemos : $4+1=5$, que, reunidas á dezena *reservada*, fazem 6 dezenas; será, pois, 6 o algarismo das dezenas da *somma*. Do mesmo modo, dizemos : $1+2=3$ centenas; e será 3 o algarismo das centenas da *somma*. E, finalmente, $8+6=14$ milhares, resultado que deve ser escripto tal qual na *somma*, porque não ha mais partes a reunir com as quaes possamos sommar a *dezena de milhar* contida nessas 14 *unidades de milhar*. A somma dos dous numeros dados será, portanto, 14363.

81. — Raciocinando de modo identico em cada caso particular analogo, deduz-se a seguinte

REGRA *para addicionar dous numeros quaesquer : — Escriptos um por baixo do outro de modo a corresponderem-se as unidades da mesma ordem, sublinha-se e começa-se a operação da direita para a esquerda, sommando successivamente os algarismos das unidades, os das dezenas, os das centenas, etc.; quando o resultado de qualquer dessas sommas parciaes é menor que 10, escreve-se immediatamente na somma total, e quando excede a 9, escrevem-se na mesma sómente as unidades e reservam-se as dezenas para addicional-as ao resultado da seguinte somma parcial; o resultado da ultima somma parcial á esquerda é escripto por extenso na somma total.*

NÓTA. — Si um dos dous numeros dados, sendo menor que o outro, tem menos algarismos, consideram-se os algarismos que faltam á esquerda do menor dos dous numeros como substituidos por *zéros ;* e a regra applica-se do mesmo modo. Exemplo :

$$\begin{array}{r} 3\ 7\ 0\ 4\ 5 \\ 9\ 8\ 2 \\ \hline 3\ 8\ 0\ 2\ 7 \end{array}$$

82. — Sejam, agora, muitos os numeros a addicionar; por exemplo : 78394, 4632, 85308 e 7138. A *somma total* se compõe evidentemente das *sommas parciaes* das unidades, das dezenas, das centenas, etc., contidas nesses numeros. O'ra, qualquer dessas *sommas parciaes* compõe-se de parcellas representadas por numeros menores que dez, que já sabemos addicionar; podemos, portanto, obter facilmente a *somma total*.

Com effeito, dispostas as parcellas como indica o seguinte

TYPO DO CALCULO :

$$\begin{array}{r} 78394 \\ 4632 \\ 85308 \\ 7138 \\ \hline 175472, \end{array}$$

dizemos : $4+2=6$, $6+8=14$ e $14+8=22$ unidades; e, como 22 unidades equivalem a 2 dezenas mais 2 unidades, escrevemos 2 como algarismo das unidades da *somma* e levamos 2 para addicionar á columna seguinte (das dezenas), dizendo : $2+9=11$, $11+3=14$, $14+0=14$ e $14+3=17$ dezenas; e, como 17 dezenas equivalem a 1 centena mais 7 dezenas, escrevemos 7 como algarismo das dezenas da *somma* e levamos 1 para addicionar á columna das centenas, dizendo : $1+3=4$, $4+6=10$, $10+3=13$ e $13+1=14$ centenas; e, como 14 centenas equivalem a 1 unidade de milhar mais 4 centenas, escrevemos 4 como algarismo das centenas da *somma* e levamos 1 a addicionar á columna seguinte (das unidades de milhar), dizendo : $1+8=9$, $9+4=13$, $13+5=18$ e $18+7=25$ unidades de milhar; e, como 25 unidades de milhar equivalem a 2 dezenas de milhar mais 5 unidades de milhar, escrevemos 5 como algarismo das unidades de milhar da *somma* e levamos 2 a addicionar á columna seguinte (das dezenas de milhar), dizendo : $2+7=9$ e $9+8=17$ dezenas de milhar, resultado que escrevemos por extenso na *somma* representando 7 dezenas de milhar e 1 centena de milhar. A *somma* é, portanto, 175472.

NÓTA. — Na pratica, não se nomeiam as diversas ordens de unidades que vam sendo sommadas, e abrevia-se o calculo dizendo : 4 e 2, 6 e 8, 14 e 8, 22 ; escreve-se 2 e reserva-se 2 ;
2 e 9, 11 e 3, 14 e 3, 17 ; escreve-se 7 e reserva-se 1 ;
1 e 3, 4 e 6, 10 e 3, 13 e 1, 14 ; escreve-se 4 e reserva-se 1 ;
1 e 8, 9 e 4, 13 e 5, 18 e 7, 25 ; escreve-se 5 e reserva-se 2 ;
2 e 7, 9 e 8, 17 ; escreve-se 17 ;
a *somma* é, portanto, 175472.

83. — Raciocinando de modo identico em cada caso particular analogo, deduz-se a seguinte

Regra geral : — *Escrevem-se as parcellas umas por baixo das outras de modo que as unidades de cada ordem se correspondam em columnas verticaes, sublinha-se a ultima parcella escripta para separal-a da somma, que deve ser escripta por baixo; e, começando da direita para a esquerda, addicionam-se os algarismos de cada columna vertical successivamente. Quando a somma de qualquer columna não excede a 9, escreve-se logo o resultado por baixo do traço horizontal e sob a respectiva columna; quando, porém, excede a 9, podendo ser decomposta em dezenas e unidades, escreve-se por baixo do traço e sob a respectiva columna o algarismo das unidades, e levam-se as dezenas a sommar com os algarismos da seguinte columna. A somma da ultima columna á esquerda escreve-se por extenso.*

§ 4.º — Observações

84. — **Disposição das parcellas.** — Ha toda conveniencia, e mesmo vantagem real pratica, na disposição das parcellas umas por baixo das outras, de modo que as unidades de cada ordem se correspondam n'uma mesma columna vertical; por isso que, nas addições de numeros compostos, as unidades das differentes ordens são addicionadas separada e successivamente.

85. — Começo da operação da direita. — E' essencial effectuar a addição de numeros compostos da direita para a esquerda, isto é, das unidades simples para as de ordens mais elevadas; porque, desse modo as reservas da somma parcial de cada ordem são addicionadas á somma parcial das unidades da ordem immediatamente superior. Si, ao contrario, fosse a operação effectuada da esquerda para a direita, seria mistér proceder a duas addições em cada columna, para modificar a respectiva somma parcial accrescentando-lhe as reservas das seguintes sommas parciaes. O exemplo constante dos *typos de calculo* que se seguem, em que as mesmas parcellas (689 e 572) são addicionadas d'um e outro modo, basta para evidenciar que o segundo modo (da esquerda para a direita) não é admissivel na pratica.

TYPOS DO CALCULO:

I

ADDIÇÃO DA DIREITA PARA A ESQUERDA:

$$\begin{array}{r} 689 \\ 572 \\ \hline 1261 \end{array}$$

II

ADDIÇÃO DA ESQUERDA PARA A DIREITA:

$$\begin{array}{r} 689 \\ 572 \\ \hline 11 \\ 15 \\ 11 \\ \hline 1261 \end{array}$$

Quando, porém, a somma parcial de cada columna é inferior a 10, torna-se indifferente effectuar a addição da direita para a esquerda, ou vice-versa, como indicam os seguintes

TYPOS DO CALCULO :

I ADDIÇÃO DA DIREITA PARA A ESQUERDA :	II ADDIÇÃO DA ESQUERDA PARA A DIREITA :
1253	1253
6312	6312
124	124
7689	7689

86. — Methodo empregado na addição. — Quando, na addição de numeros compostos, considera separadamente as unidades, dezenas, centenas, etc., contidas em cada parcella, forma as sommas parciaes dessas differentes ordens de unidades, e, reunindo-as depois, obtem a somma total; — o espirito humano effectua uma *operação mental* que, em LOGICA, denomina-se *analyse*. E o meio pelo qual, empregando a *analyse*, chega assim a reconhecer que a somma total achada é, com effeito, a reunião de *todas* as unidades contidas em *todas* as parcellas, — constitue o *methodo analytico*.

Este methodo é applicado pelo espirito humano sempre que não póde reconhecer immediatamente a identidade entre duas idéas, para o que precisa decompol-as em partes *analogas* entre si e comparar separadamente essas partes para reconhecer-lhes a identidade, afim de, por este meio, reconhecer a identidade das idéas primitivas.

Assim, no caso da addição, não podendo o espirito humano reconhecer immediatamente a identidade entre uma somma dada e suas respectivas parcellas, decompõe, tanto aquella como estas, em partes analogas (unidades, dezenas, centenas, milhares, etc.); e, comparando separadamente cada um desses grupos de partes analogas, reconhece que, com effeito, as unidades da somma representam a somma das unidades das parcellas, as dezenas da somma representam a somma das dezenas das parcellas, e, assim, por diante; e conclue ser a somma total a reunião de *todas* as unidades contidas em *todas* as parcellas.

E, da analyse assim feita deduz a REGRA GERAL para addicionar numeros quaesquer.

Por este processo logico é que reconhecemos a verdade da seguinte proposição geral: — *A somma de muitos numeros é egual á das sommas parciaes formadas pela addição dos numeros de denominações semelhantes que compõem cada um dos primeiros.*

§ 5.º — Prova

87. — Ha diversos meios de *verificar*, ou *tirar a prova* de uma addição. Qualquer delles importa em uma nova addição effectuada, porém, de modo diverso da primitiva.

O mais simples e usual consiste em effectuar de novo a addição em ordem inversa; assim, tendo-se sommado primitivamente as columnas verticaes *de cima para baixo*, na *prova* basta sommal-as *de baixo para cima*, o que, importando a addição dos algarismos de cada columna em ordem diversa, evita quasi sempre a reproducção de qualquer erro commettido na operação primitiva.

A *subtracção* e a *divisão* permittem, como veremos mais adiante, a applicação de outros processos para *tirar a prova* das addições, taes como os conhecidos geralmente pelas denominações de *prova real* e *prova dos nove*.

CAPITULO II

SUBTRACÇÃO

SUMMARIO : — Definição. — Exemplos. — Signal representativo. — Partes componentes. — A numeração contendo o germen da subtracção. — Os dous casos em que se divide a theoria da subtracção. — Primeiro caso : *Subtractor numero simples.* — Segundo caso : *Subtracção de dous numeros quaesquer.* — O signal ( ), denominado *parentheses.* — Regra geral. — Outro processo de effectuar a subtracção. — Observações. — Prova. — Complementos arithmeticos. — Prova real da addição.

§ 1.º — Preliminares

88. — Subtracção — *é a operação que tem por fim combinar dous numeros dados de modo a formar um terceiro que, addicionado ao menor dos dous, reproduza o maior.*

Exemplos : — Um menino tinha 10 fructas, deu 4 a um dos seus collegas, e ficou com 6 ; porque $6 + 4 = 10$.

A edade d'um menino, que tem 10 annos, excede á de outro, que tem só 4 annos, de 6 annos ; porque $6+4=10$.

A differença de preço entre um objecto, que custa 10$000, e outro que custa apenas 4$000, é de 6$000 ; porque $6+4=10$.

89. — Na *subtracção*, portanto, o maior dos dous numeros dados é *sempre* a somma do menor com o resultado ; e, por isso, póde-se definil-a como sendo — *a operação que tem por fim, dada uma somma de duas parcellas e uma destas, determinar a outra.*

90. — A subtracção é representada pelo signal —, que significa *menos* e foi tambem introduzido pelo illustre Rudolff.

Os numeros dados são denominados *termos da subtracção*, sendo o maior o *subtrahendo* e o menor o *subtractor*; e o resultado da operação é denominado *resto, excesso*, ou *differença*, conforme o que se procura determinar é— qual o *resto* que fica diminuindo-se um numero de tantas unidades quantas são as de outro,— ou qual o excesso de um numero sobre outro—, ou, finalmente, qual a differença entre dous numeros dados. Assim, nos exemplos figurados, os numeros 10 e 4 são os *termos da subtracção*, sendo 10 o *subtrahendo* e 4 o *subtractor*; o numero 6 é o *resto* no 1.º, o *excesso* no 2.º, e a *differença* no 3.º exemplo; e a operação é indicada do seguinte modo :

$$10 - 4 = 6.$$

91. — Sendo, em ultima analyse, o resultado de uma subtracção qualquer a differença entre o numero das unidades contidas no subtrahendo e o das contidas no subtractor, é claro que, para subtrahir do numero 5 o numero 2, por exemplo, bastará subtrahir ao primeiro, successivamente, as *duas* unidades contidas no segundo, dizendo : 5 menos 1, 4; 4 menos 1, 3; logo, 5 menos 2, 3.

A numeração contém, portanto, tambem o germen da subtracção, que se reduz, afinal, a percorrer a escala natural dos numeros, descendo ; e, desse modo poderiamos effectuar qualquer subtracção, subtrahindo ao subtrahendo successivamente, uma a uma todas as unidades contidas no subtractor.

Tratando-se, porém, de numeros compostos de muitos algarismos, semelhante processo rudimentar seria por demais moroso, enfadonho e susceptivel de erros ; d'ahi a necessidade de um processo mais simples e expedito.

92. — Convém observar tambem aqui que, por mais penoso que seja o processo rudimentar fornecido pela numeração, constitue elle — para a subtracção do mesmo modo que para a addição — a base necessaria de que dependem os casos mais complicados em que os *termos* são numeros compostos de muitos algarismos.

93. — Assim, a theoria da subtracção póde ser tambem decomposta nos *dous* casos seguintes, cujo estudo successivo permitte que as mais fracas intelligencias apprendam facilmente a *avaliar* a segunda das *seis* combinações numericas elementares.

§ 2.º — Primeiro caso :

O subtractor é numero simples

94. — Apprendem-se, geralmente, de cór e com extrema facilidade, nas *Escholas Primarias*, os resultados das subtracções em que o subtractor é *menor* que 10 ; e não ha quem os não retenha na memoria e os não possa reproduzir promptamente.

95. — Quando, porém, assim não seja, nada mais facil que obter esses resultados pelo processo rudimentar de subtrahir ao subtrahendo, successivamente e uma a uma, tantas unidades quantas forem as contidas no subtractor. Assim, subtrahe-se facilmente 6 de 25 dizendo :

25 menos 1, ... 24 ;
24 » 1, ... 23 ;
23 » 1, ... 22 ;
22 » 1, ... 21 ;
21 » 1, ... 20 ;
20 » 1, ... 19 ;

logo, $25 - 6 = 19$.

Do mesmo modo, subtrahe-se, por exemplo, 5 de 204 dizendo :

204	menos	1, ...	203 ;
203	»	1, ...	202 ;
202	»	1, ...	201 ;
201	»	1, ...	200 ;
200	»	1, ...	199 ;

logo, $204 - 5 = 199$.

96. — Além disso o quadro da addição (75) permitte a determinação prompta e rapida do resultado de qualquer subtracção desde que o subtrahendo fôr menor que 18 e o subtractor fôr menor que 10. Assim, para determinar o resultado da subtracção do numero 7 do numero 16, basta procurar 7 na 1.ª columna vertical á esquerda e seguir com a vista a linha horizontal a esse numero correspondente até encontrar o numero 16; o numero 9, que está collocado no alto da columna vertical a que corresponde o numero 16, é o resultado procurado. E, com effeito, $16 - 7 = 9$.

97. — Sabendo-se subtrahir um numero simples de outro qualquer, é facil subtrahir dous ou mais numeros simples, successivamente, do mesmo subtrahendo. Assim, subtrahe-se $6 + 5 + 3 + 8$ de 345, por exemplo, dizendo :

$$345 - 6 = 339,$$
$$339 - 5 = 334,$$
$$334 - 3 = 331,$$
$$331 - 8 = 323;$$

logo, $345 - (6 + 5 + 3 + 8) = 323$.

NÓTA. — O signal ( ) é empregado, em *Mathematica*, para indicar que devem ser consideradas como effectuadas as operações que estiverem representadas dentro delle. Assim $13 + (7 - 4)$, por exemplo, indica que a 13 deve ser addicionada a differença entre 7 e 4, isto é, 3 ; de modo que $13 + (7 - 4) = 13 + 3 = 16$.

§ 3.º — Segundo caso :

Subtracção de dous numeros quaesquer

98. — A subtracção, neste caso, reduz-se á do caso precedente em virtude dos 2 seguintes *postulados*, que pertencem (50) ao numero dos que se tornariam menos claros desde que procurassemos demonstral-os directamente :

1.º — *Decompostos dous numeros em um mesmo numero de partes e sendo todas as partes do maior desses dous numeros maiores que as partes correspondentes do menor, — a differença entre os dous poderá ser obtida addicionando-se as differenças entre as partes correspondentes.*

Exemplo : Sendo $19 = 11 + 8$ e $12 = 7 + 5$, de modo que $11 - 7 = 4$ e $8 - 5 = 3$, affirmamos que

$$19 - 12 = 4 + 3.$$

Com effeito, considerando as duas egualdades

$$11 - 7 = 4 \text{ e } 8 - 5 = 3,$$

e addicionando-as membro a membro, temos :

$$(11 + 8) - (7 + 5) = 4 + 3,$$

ou, effectuando as operações indicadas nas parentheses,

$$19 - 12 = 4 + 3.$$

2.º — *A differença entre dous numeros não se altera quando a ambos é addicionado o mesmo numero.*

Exemplo : — Sendo $8 - 5 = 3$, será tambem

$$(8 + 4) - (5 + 4) = 3;$$

e, com effeito, sendo

$$8 + 4 = 12 \text{ e } 5 + 4 = 9,$$

verifica-se que

$$12 - 9 = 3.$$

99. — O primeiro destes dous *postulados*, analogo ao que na addição permitte a decomposição dos numeros nas diversas ordens de unidades nelles contidas, basta para facilitar a subtracção d'um numero composto d'outro, quando todos os algarismos do maior são maiores que os correspondentes do numero menor. Seja, por exemplo, o numero 532401 a subtrahir do numero 874639. Escripto o menor destes numeros por baixo do maior de modo a se corresponderem os algarismos representativos de cada ordem de unidades, como indica o seguinte

TYPO DO CALCULO :

$$\begin{array}{cccccc} 8 & 7 & 4 & 6 & 3 & 9, \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 0 & 1, \\ \hline 3 & 4 & 2 & 2 & 3 & 8, \end{array}$$

effectua-se facilmente a subtracção dizendo :

de 9 unidades tirando 1, ficam 8, algarismo que representará, no resultado, a differença entre as unidades dos dous numeros dados ;
de 3 dezenas não tirando nem uma, ficam as mesmas 3, algarismo que representará, no resultado, a differença entre as dezenas dos dous numeros dados ;
e, assim, por diante, serão determinados successivamente os algarismos 2, 2, 4 e 3 que representarão, no resultado, as differenças entre as centenas, as unidades de milhar, as dezenas de milhar e as centenas de milhar dos dous numeros dados ;
de modo que o numero 342238 será a *differença*, *resto* ou *excesso* procurado entre os dous *termos* da subtracção proposta.

100. — Quando a condição precedente não é satisfeita e ha, portanto, no numero maior (o *subtrahendo*) um ou mais algarismos *menores* que os correspondentes do numero menor (o *subtractor*), a operação é menos simples de effectuar-se, e torna-se mistér recorrer ao auxilio do 2.º *postulado*. Seja, por exemplo, o numero 52634 a subtrahir do numero 81495. Escripto o numero *menor* por baixo do *maior*, de modo a se corresponderem as unidades de cada ordem, como indica o seguinte

TYPO DO CALCULO :

$$\begin{array}{r} 8\ 1\ 4\ 9\ 5, \\ 5\ 2\ 6\ 3\ 4, \\ \hline 2\ 8\ 8\ 6\ 1, \end{array}$$

effectua-se a subtracção dizendo :

4 unidades subtrahidas de 5, restam 1 ;
3 dezenas subtrahidas de 9, restam 6 ;
6 centenas não podendo ser subtrahidas de 4, addicionam-se a estas mais 10, e subtrahidas as 6 de 14, restam 8 centenas ;
tendo-se, porém, addicionado 10 centenas ao subtrahendo, é preciso, para não alterar a differença *(2.º postulado)*, addicionar ao subtractor outras 10 centenas, ou, o que vale o mesmo, 1 unidade de milhar ; por isso, considera-se o algarismo das unidades de milhar do subtractor como augmentado de 1 unidade dessa ordem, e continúa-se dizendo :
3 unidades de milhar não podendo ser subtrahidas de 1, addicionam-se a esta mais 10, e, subtrahidas as 3 de 11, restam 8 unidades de milhar ; e, para compensar a addição das 10 unidades de milhar ao subtrahendo, addicionam-se ao subtractor outras 10, ou, o que vale o mesmo, 1 dezena de milhar, considerando o algarismo dessa ordem d'unidades no subtractor como augmentado de 1 unidade da mesma ordem, e dizendo :
6 dezenas de milhar subtrahidas de 8, restam 2.

A differença, pois, entre os dous numeros dados é 28861.

NOTA. — Nas analyses que acabam de ser feitas, consideraram-se numeros tendo ambos o mesmo numero de algarismos ; si, porém, o subtractor tivesse menos algarismos que o subtrahendo, bastaria considerar-se representados por *zeros* os algarismos que o subtractor tivesse de menos que o subtrahendo, á esquerda. Exemplos :

$$\begin{array}{r} 6\ 8\ 7\ 3\ 5\ 9 \\ 4\ 2\ 3\ 6 \\ \hline 6\ 8\ 3\ 1\ 2\ 3 \end{array} \quad\Bigg|\quad \begin{array}{r} 7\ 2\ 3\ 9\ 1\ 4 \\ 5\ 7\ 2\ 3 \\ \hline 7\ 1\ 8\ 1\ 9\ 1 \end{array}$$

101. — Do que precede deduz-se a seguinte

Regra geral : — *Para subtrahir um numero composto, de outro, escreve-se o subtractor por baixo do subtrahendo de modo que se correspondam as unidades de cada ordem, e subtrahe-se cada algarismo do subtractor do algarismo correspondente do subtrahendo, começando da direita para a esquerda; si qualquer dessas subtracções parciaes é impossivel, addicionam-se ao algarismo respectivo do subtrahendo 10 unidades da mesma ordem, e continúa-se depois a operação considerando o seguinte algarismo do subtractor como augmentado de 1 unidade da sua respectiva ordem; os resultados obtidos dessas successivas subtracções parciaes constituem os diversos algarismos da differença total entre os dous numeros dados.*

102. — Algumas pessoas preferem, a este processo natural de effectuar a subtracção, outro egualmente baseado na decomposição dos numeros nas diversas ordens d'unidades nelles contidas, mas que dispensa a applicação do 2.º *postulado*, por quanto limita-se a reforçar os algarismos fracos do subtrahendo á custa dos algarismos seguintes desse mesmo termo, que representam as unidades de ordens successivamente superiores. Assim, para subtrahir o numero 3742 do numero 9425, dispõem-n'os como indica o seguinte

TYPO DO CALCULO :

$$\begin{array}{cccc} 9 & 4 & 2 & 5, \\ 3 & 7 & 4 & 2, \\ \hline 5 & 6 & 8 & 3, \end{array}$$

e effectuam a subtracção dizendo :

2 unidades subtrahidas de 5, restam 3 ;
4 dezenas não podendo ser subtrahidas de 2, tira-se ao algarismo seguinte do subtrahendo 1 centena, que vale 10 dezenas, e que, addicio-

nadas ás 2, formam 12, das quaes se subtrahem as 4 do subtractor, restando 8;
7 centenas não podendo tambem ser subtrahidas de 3 (isto é, 4 — 1), tira-se ao algarismo seguinte do subtrahendo 1 unidade de milhar, que vale 10 centenas, e estas addicionadas ás 3, formam 13, das quaes se subtrahem as 7 do subtractor, restando 6; e, finalmente, 3 unidades de milhar subtrahidas de 8 (isto é, 9 — 1), restam 5.

A differença procurada é, pois, 5683.

§ 4.º — Observações

103. — Inversão da subtracção relativamente á addição. — Tendo a subtracção por fim (89) determinar *uma das parcellas* de *uma somma* sendo *esta* e *a outra parcella conhecidas,* — é uma operação exactamente *inversa* á addição. Esta combina numeros *compondo-os* em um todo unico e equivalente á reunião de todas as partes, ou *parcellas*, combinadas; a subtracção, ao contrario, combina-os *decompondo* um nas duas partes, ou *parcellas,* nelle contidas. De modo que o *subtrahendo*, na subtracção, é uma *somma* de que são *parcellas* o *subtractor* e a *differença.*

NÓTA. — Nesta circumstancia basêa-se outro processo pratico de effectuar a subtracção, que consiste em procurar successivamente os algarismos que, sommados aos do subtractor, reproduzam os do subtrahendo. Assim, para subtrahir 3584 de 7936, effectua-se a operação dizendo: 2 unidades mais 4 fazem 6, logo 2 é o algarismo das unidades da differença; 5 dezenas mais 8 fazem 13, logo 5 é o algarismo das dezenas da differença; 3 centenas mais 5 e mais 1 (da reserva da somma das dezenas) fazem 9, logo 3 é o algarismo das centenas da differença; e, finalmente, 4 unidades de milhar mais 3 fazem 7, logo 4 é o algarismo das unidades de milhar da differença; e esta é, portanto, 4352, como indica aliás o seguinte

TYPO DO CALCULO:

$$\begin{array}{r} 7\ 9\ 3\ 6, \\ 3\ 5\ 8\ 4, \\ \hline 4\ 3\ 5\ 2, \end{array}$$

104. — Disposição dos termos. — Ha toda a conveniencia na disposição dos dous termos da subtracção um por baixo do outro e correspondendo-se as unidades de cada ordem; porquanto, como acabamos de ver, as unidades das differentes ordens são subtrahidas separada e successivamente. E', porém, indifferente que esteja o subtrahendo por cima do subtractor, ou vice-versa.

105. — Começo da operação da direita. — E' essencial effectuar a subtracção da direita para a esquerda, isto é, das unidades simples para as de ordens mais elevadas; porque, do contrario, seria mistér modificar um ou mais algarismos já escriptos quando, em uma columna, o algarismo do subtractor fosse maior que o correspondente do subtrahendo.

O seguinte exemplo, em que o numero 3856 é subtrahido de 7328 de um e outro modo, basta para evidenciar que o segundo modo não é admissivel na pratica :

TYPOS DO CALCULO :

I

SUBTRACÇÃO DA DIREITA PARA A ESQUERDA :

$$\begin{array}{cccc} 7 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 4 & 7 & 2 \end{array}$$

II

SUBTRACÇÃO DA ESQUERDA PARA A DIREITA :

$$\begin{array}{cccc} 7 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 6 \\ \hline 4 & 5 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{array}$$

Quando, porém, todos os algarismos do subtrahendo são respectivamente maiores que os do subtractor, torna-se indifferente começar a operação da direita para a esquerda, ou vice-versa, como indicam os seguintes

TYPOS DO CALCULO:

I SUBTRACÇÃO DA DIREITA PARA A ESQUERDA:	II SUBTRACÇÃO DA ESQUERDA PARA A DIREITA:
6 8 9 7 4 3 6 5 1 2 ――――― 3 2 4 6 2	6 8 9 7 4 3 6 5 1 2 ――――― 3 2 4 6 2

106. — Methodo empregado na subtracção. — Quando, na subtracção de numeros compostos, considera separadamente as unidades, dezenas, centenas, etc., contidas nos dous *termos*, forma as differenças parciaes dessas diversas ordens de unidades, e, reunindo-as depois, obtem a *differença* procurada entre os dous *termos;* — o espirito humano effectua, do mesmo modo que na addição (85), a *operação mental* denominada, em Logica, *analyse*. O methodo, portanto, por meio do qual, empregando a *analyse*, se chega a reconhecer que a *differença* achada é, com effeito, a differença entre *todas* as unidades contidas no subtrahendo e *todas* as contidas no subtractor, é ainda o *methodo analytico*.

Não podendo o espirito humano reconhecer immediatamente a identidade entre uma differença dada e seus respectivos termos, decompõe tanto estes como aquella em partes analogas (unidades, dezenas, centenas, etc.); e, comparando separadamente cada um desses grupos de partes analogas, reconhece que, com effeito, as unidades da differença total representam a differença entre as unidades do subtrahendo e as do subtractor, as dezenas da differença total representam tambem a differença entre as dezenas do subtrahendo e as do subtractor, e assim, por diante; e conclue ser a differença achada a differença entre *todas* as unidades contidas no subtrahendo e *todas* as contidas no subtractor.

E. da analyse assim feita deduz a *regra geral* para subtrahir, um do outro, dous numeros quaesquer.

Por este processo logico é que reconhecemos a verdade da proposição geral : — *A differença entre dous numeros compostos é egual á somma das differenças parciaes entre os numeros de denominações differentes que compõem cada um dos dous primitivos.*

§ 5.º — Prova

107. — Sendo a subtracção uma operação inversa á addição, o meio mais natural de verifical-a é effectuar a addição da differença com o subtractor afim de ver si reproduz o subtrahendo, como indica o seguinte

TYPO DO CALCULO :

I SUBTRACÇÃO :	II PROVA :
5 3 0 2 7	2 6 8 5 4
2 6 8 5 4	2 6 1 7 3
2 6 1 7 3	5 3 0 2 7

Póde-se tambem obter uma *prova* da subtracção, subtrahindo a differença e verificando si a nova differença é egual ao subtractor, como indica o seguinte

TYPO DO CALCULO :

I SUBTRACÇÃO :	II PROVA :
7 0 3 8 5	7 0 3 8 5
4 8 1 9 3	2 2 1 9 2
2 2 1 9 2	4 8 1 9 3

A *divisão* permitte tambem—como veremos mais adiante—a applicação de outro processo, conhecido geralmente por *prova dos nove*, para a verificação das subtracções.

§ 6.º — Complementos arithmeticos

108. — *A' — differença entre um numero qualquer e a unidade seguida de tantos zéros quantos são os algarismos do numero* — chama-se COMPLEMENTO ARITHMETICO desse numero.

Assim, 3 é o *complemento arithmetico* de 7, porque $10 - 7 = 3$; 28 é o *complemento arithmetico* de 72, porque $100 - 72 = 28$; 94 é o *complemento arithmetico* de 906, porque $1000 - 906 = 94$; e assim, por diante.

109. — Com o auxilio dos *complementos arithmeticos* é possivel simplificar vantajosamente a subtracção em alguns casos, addicionando ao subtrahendo o *complemento arithmetico* do subtractor e subtrahindo da somma uma unidade de ordem egual á da mais alta do subtrahendo. Assim, tendo de subtrahir, por exemplo, 63 de 325, cujas unidades de mais alta ordem são *centenas*, addiciona-se a 325 o numero 37, que é o *complemento arithmetico* de 63 (pois, $100 - 63 = 37$), e, da somma 362 subtrahe-se *uma centena*, o que dá para resultado final 262, que é, com effeito, a differença entre 325 e 63. Indicando as operações temos :

$$325 - 63 = (325 + \text{cl. } 63) - 100 = (325 + 37) - 100 =$$
$$= 362 - 100 = 262.$$

110. — Em subtracções simples, como a que acabamos de figurar no exemplo precedente, pequena vantagem resulta da applicação dos *complementos arithmeticos;* pois, a subtracção já é de si propria facilima de effectuar-se.

Quando, porém, se trata de subtrahir muitos numeros compostos de muitos outros, a simplificação resultante da applicação dos *complementos arithmeticos* é de real vantagem, quer quanto á facilidade dos calculos, quer quanto á exactidão dos resultados.

Supponhamos, com effeito, que se trata de subtrahir, dos seis seguintes numeros á esquerda, os seis outros á direita :

$$\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 48792\\ 54816\\ 36245\\ 52949\\ 36117\\ 42992 \end{array}\right\} \\ \hline 271911\\ 228981\\ \hline 42930 \end{array} \quad - \quad \begin{array}{r} \left\{\begin{array}{r} 32592\\ 86742\\ 31525\\ 20876\\ 30419\\ 26827 \end{array}\right. \\ \hline 228981 \\ \\ \\ \end{array}$$

Pelo processo commum, teriamos de, como indicam os calculos acima : 1.° — *sommar os 6 numeros á esquerda para ter a somma* 271911, 2.° — *sommar os 6 numeros á direita para ter a somma* 228981, e 3.° — *subtrahir a 2.ª somma da 1.ª para ter a differença* 42930.

No emtanto que, applicando os *complementos arithmeticos*, teriamos apenas de, escrevendo por baixo dos 6 primeiros numeros dados os complementos dos outros 6, effectuar a addição dessas 12 parcellas e ao 1.° algarismo á esquerda da somma subtrahir *seis* unidades, como indica o seguinte

TYPO DO CALCULO :

$$
\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{ccccc}4&8&7&9&2\\5&4&8&1&6\\3&6&2&4&5\\5&2&9&4&9\\3&6&1&1&7\\4&2&9&9&2\end{array}\right\}\text{numeros dados,}\\
\left.\begin{array}{ccccc}6&7&4&0&8\\1&3&2&5&8\\6&8&4&7&5\\7&9&1&2&4\\6&9&5&8&1\\7&3&1&7&3\end{array}\right\}\text{cl. dos 6 numeros a subtrahir.}\\
\hline
6\;4\;2\;9\;3\;0\\
-6\qquad\qquad\\
\hline
4\;2\;9\;3\;0
\end{array}
$$

111. — Vejamos os motivos de semelhante processo.

Para isso, consideremos, primeiramente, um dos seis numeros a subtrahir; seja, por exemplo, o numero 32592, cujo *complemento arithmetico* é 67408. Si, em vez de subtrahir directamente, da somma 271911 dos seis primeiros, este numero, addicionamos a essa somma o respectivo *complemento* delle, — addicionamos-lhe 100000 *menos* o referido numero 32592, por isso que o *complemento* 67408 = 100000 — 32592; para termos, pois, a differença procurada é mistér subtrahir da somma assim effectuada 100000, isto é, *uma unidade da ordem mais alta nella contida.*

Raciocinando analogamente, provamos que, addicionando tambem á referida somma 271911 o *complemento* do segundo (86742) dos seis numeros a subtrahir, isto é, 13258, addicionamos-lhe 100000 *menos* aquelle numero, isto é : 100000 — 86742; de modo que, para termos a differença procurada, é mister subtrahir da somma assim effectuada 100000, isto é, *uma unidade da ordem mais alta nella contida*.

E o mesmo quanto aos demais quatro numeros a subtrahir; d'onde concluimos que, si em vez de subtrahirmos, da somma dos seis primeiros numeros, a somma dos seis outros, addicionamos a essa primeira somma a dos *complementos arithmeticos* destes, é mistér do resultado subtrahir tantas unidades da ordem mais alta nelle contida quantos forem os *complementos* addicionados.

112. — Consideremos, ainda, um segundo exemplo; e seja este a subtracção dos numeros 21506 e 3895 dos numeros 3485, 50438 e 396.

Pelo processo commum, a operação effectua-se como indica o seguinte

TYPO DO CALCULO :

$$\begin{array}{r} 3485 \\ 50438 \\ 396 \\ \hline 54319 \\ 25401 \\ \hline 28918 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{r} 3895 \\ 21506 \\ \hline 25401 \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

E, applicando os *complementos arithmeticos*, effectua-se como indica este outro

TYPO DO CALCULO :

cl. 3895 = 100000[1] — 3895 = 96105,
cl. 21506 = 100000 — 21506 = 78494;

$$\begin{array}{rcccccl}
 & & 3 & 4 & 8 & 5 & \\
 & 5 & 0 & 4 & 3 & 8 & \left.\right\} \ldots \text{ numeros propostos,} \\
 & & & 3 & 9 & 6 & \\
 & 9 & 6 & 1 & 0 & 5 & \\
 & 7 & 8 & 4 & 9 & 4 & \left.\right\} \ldots \text{ cl. determinados,} \\
\hline
2 & 2 & 8 & 9 & 1 & 8 & \\
-2 & & & & & & \ldots \text{ n.° dos compl. addicionados,} \\
\hline
 & 2 & 8 & 9 & 1 & 8 & \ldots \text{ differença procurada.}
\end{array}$$

§ 7.º — Prova real da addição

113. — Assim como a addição do subtractor á differença serve de prova á subtracção, porque a somma resultante deve ser egual ao subtrahendo; assim tambem a subtracção, que é operação inversa á addição (103), serve de prova a esta, porquanto, subtrahindo-se da *somma* todas as unidades que compõem as parcellas, deve-se achar para resto *zéro*. E esta prova é que se denomina geralmente *prova real da addição*, e consiste na addição das parcellas, columna por columna, successivamente, da *esquerda para a direita*, e subtracção de cada somma parcial, assim obtida, da somma total; si o ultimo resto é

1. — Quando os numeros propostos não são compostos do mesmo numero de algarismos, toma-se naturalmente, para evitar confusão, o complemento de todos como o do maior; assim, no exemplo figurado, o cl. de 3895 é tomado de 100000 e não de 10000, por isso que, dos numeros propostos, o maior, que é 50438, tem 5 algarismos.

nullo (zéro), é provavel [1] estar a addição primitiva exacta.

O seguinte exemplo é sufficiente para mostrar aos principiantes como se effectua esta *prova* e como deve ser disposto o

TYPO DO CALCULO :

```
  4 3 5 0 6 7 8
      5 8 0 3 4
    9 7 3 8 2 3
  5 0 4 8 2 3 4
---------------
1 0 4 3 0 7 6 9
  9
---
  1 4
  1 2
  ---
    2 3
    2 1
    ---
      2 0
      1 9
      ---
        1 7
        1 6
        ---
          1 6
          1 5
          ---
            1 9
            1 9
            ---
              0
```

1. — Dizemos *é provavel* e não *é certo*, porque, como já observámos (67), a prova não póde dar-nos *certeza* de estar exacta a operação, mas apenas *probabilidade* tanto maior quanto mais differentes forem as duas operações, a primitiva e a prova.

Sommada a primeira columna á esquerda, cuja somma é 9, colloca-se esta somma sob a da mesma columna na operação primitiva e desta se a subtrahe; ao resto 1 se reune o seguinte algarismo 4 da somma primitiva. Somma-se a 2.ª columna, e o resultado 12 é subtrahido do numero formado pelo 1.º resto reunido ao algarismo 4 da somma; ao 2.º resto 2 reune-se o seguinte algarismo 3 da somma total. Somma-se a 3.ª columna, e o resultado é subtrahido do numero formado pelo 2.º resto reunido ao algarismo 3 da somma total. E, assim, se continúa até sommar a ultima columna á direita cujo resultado é subtrahido do numero formado pelo penultimo resto reunido ao ultimo algarismo á direita da somma total. Si a operação primitiva estiver exacta, e não tiver havido enganos na effectuação da prova, o ultimo resto será nullo, isto é, egual a *zéro*, como no exemplo figurado.

Mas, é tão raro dar-se na prova erros que compensem exactamente os que se tenham por ventura dado na operação primitiva, que, quando o ultimo resto obtido na prova fôr nullo, póde-se concluir que a operação está certa.
