

## CAPITULO II

### NUMERAÇÃO

---

SUMMARIO : — Numeração. — Formação dos numeros. — Representação dos numeros. — Numeração fallada. — Artificio. — Resumo. — Observações. — Numeração escripta. — Artificio. — Resumo. — Algarismos. — Observações. — Regras para ler e escrever os numeros. — Diversos systemas de numeração. — Systema decimal romano. — Retrospecto historico.

**15.** — As palavras representativas dos diversos numeros nem um laço tinham, a principio, entre si ; o que não offerencia inconveniente algum, porque os povos nomades — como eram os dos tempos primitivos da humanidade e são ainda hoje as tribus selyagens dos centros da Africa e da Colombia <sup>1</sup> — podem satisfazer todas as suas necessidades numericas com esse modo espontaneo e imperfeito de numerar.

Desde que, porém, com a immensa revolução que fez passarem as nações ao estado sedentario, novas necessidades sociaes surgiram, determinadas pelo apparecimento

---

1. — É uma grave falta de gratidão e reconhecimento persistir-se em denominar AMERICA o vasto continente descoberto por CHRISTOVÃO COLOMBO. Convém ir habituando a mocidade a dar-lhe a denominação natural de COLOMBIA, como homenagem devida á memoria do grande navegante genovez, como propoz o Sr. Miguel Lemos.



da propriedade particular, da industria e da vida em commum, para attender a cujas exigencias foi mistér contar os homens e as cousas, medir os espaços, as superficies e o tempo, e regular a vida de accôrdo com os grandes factos astronomicos; — não foi mais possivel manter o processo primitivo designando, por nova palavra e novo signal, cada numero novamente obtido.

Tornou-se, então, indispensavel *simplificar o processo* de modo a representar todos os numeros necessários ao homem e á sociedade por meio da combinação regular de um pequeno numero de palavras e de signaes.

**16. — Numeração** — é, pois, a arte de *formar* e de *representar* os numeros.

Podem haver diversos *systemas de numeração*, differindo uns dos outros pelos *artificios* respectivamente empregados para attingir o fim proposto.

O unico systema, porém, universalmente aceito, adoptado e usado, é o — *systema decimal*, que passamos a expor.

### § 1.º — Formação dos numeros

**17. —** A' grandeza tomada para termo de comparação com as outras grandeza da mesma especie deu-se, como vimos (6), a denominação geral de — UNIDADE.

Por analogia, deu-se tambem ao *primeiro numero da série natural dos numeros inteiros* — resultante da comparação de qualquer grandeza com a respectiva unidade, quando esta é *egual* áquella, — essa mesma denominação de — UNIDADE, que o uso simplificou para — UM.

A expressão UNIDADE tem, pois, em ARITHMETICA, duas accepções distinctas : — *unidade grandeza* e *unidade numero*.



No presente capitulo a empregaremos sempre nesta segunda accepção.

**18.** — O *segundo* numero da série natural dos numeros inteiros forma-se pela reunião de dous numeros eguaes ao *primeiro*, ou melhor, pela reunião de *duas unidades*.

O *terceiro* forma-se pela reunião do *segundo* ao *primeiro*, ou melhor, pela reunião de *tres unidades*.

E assim por deante, successivamente.

**19.** — D'aqui conclue-se que :

1.<sup>o</sup> — Os numeros formam-se pela reunião successiva de *unidades*;

2.<sup>o</sup> — A série natural dos numeros inteiros é *illimitada*; porquanto, por maior que seja um numero, é *sempre* possivel reunir-lhe mais uma unidade formando assim outro numero ainda maior.

## § 2.<sup>o</sup> — Representação dos numeros

**20.** — As exigencias sociaes tornaram indispensavel, como dissemos, recorrer a um artificio para representar todos os numeros necessarios ao homem e á sociedade por meio da combinação regular de um limitado numero de palavras e signaes.

Como todas as idéas theoricas, a idéa fundamental da numeração originou-se da observação de um facto pratico espontaneo, qual o da reunião dos individuos em familias, destas em tribus, destas em cidades, destas em nações, etc.

Obedecendo a esta indicação pratica, procurou o espirito humano grupar os numeros em collecções de unidades, ficando cada unidade composta formada de um certo numero de unidades simples; e, quando a numeração tornou-se systematica, as unidades gradualmente compostas



foram constituídas de modo regular, tomado sempre o *mesmo numero* de unidades (simples, ou já compostas) de um gráo qualquer para constituirem a do gráo immediatamente superior.

Esse numero — invariavel em cada systema de numeração — é que constitue a sua respectiva — **BASE**.

O habito de contar pelos dedos, anterior á mais remota tentativa de escripta, deu a base — **DEZ** — do nosso actual systema de numeração que, por isso, é denominado — **DECIMAL**.

**21.** — A representação dos numeros póde ser feita pela voz e pela *escripta*; d'onde a distincção de duas sortes de numeração : — *numeração fallada e numeração escripta*; distincção tanto mais conveniente quanto concorda plenamente com o facto historico de ter-se sabido enunciar os numeros antes de sabel-os escrever.

### § 3.º — Numeração fallada

**22.** — **Numeração fallada** — é a arte de *enunciar* todos os numeros por meio de um limitado numero de *palavras*.

Sua importancia e necessidade indeclinavel decorrem da impossibilidade de dar-se a cada numero denominação particular sendo, por um lado, illimitada a série natural dos numeros, e, por outro lado, muito limitada a potencia da memoria humana.

**23.** — **Artificio.** — O artificio adoptado foi o seguinte :

Aos *dez* primeiros numeros deram-se nomes diversos : — *um, dous, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez*.

Estabeleceu-se, então, o seguinte **PRINCIPIO DE CONVEN-**



ÇÃO : — *Dez unidades de qualquer ordem formam uma de ordem imediatamente superior.*

Assim, as *dez* unidades já enunciadas, que foram consideradas de 1.<sup>a</sup> ordem, formaram uma de 2.<sup>a</sup> ordem, que dever-se-hia ter denominado *unenta*, mas que o uso preferiu denominar *dezena*.

Contaram-se as *unentas*, *dezenas*, ou *unidades de 2.<sup>a</sup> ordem* como se tinham contado as *unidades simples*, ou de 1.<sup>a</sup> ordem, dizendo :

Uma dezena (unenta), ou dez,	Seis dezenas,	ou sessenta,
Duas dezenas, ou duenta,	Sete dezenas,	ou setenta,
Trez dezenas, ou trenta,	Oito dezenas,	ou oitenta,
Quatro dezenas, ou quarenta,	Nove dezenas,	ou noventa,
Cinco dezenas, ou cincoenta.	Dez dezenas,	ou centena.

E os *nove* numeros comprehendidos entre duas *dezenas* consecutivas foram enunciados antepondo-se, aos nomes dos nove primeiros numeros da série, o da mais fraca dessas duas dezenas, dizendo :

Dez e um, dez e dous, dez e tres..... dez e nove ;  
 Duenta e um, duenta e dous..... duenta e cinco..... duenta e nove ;  
 Trenta e um..... trenta e quatro..... trenta e oito, trenta e nove ;  
 .....  
 Setenta e um..... setenta e seis..... setenta e oito, setenta e nove ;  
 .....  
 Noventa e um, noventa e dous..... noventa e seis..... noventa e nove.

O uso simplificou essas denominações trocando :

Dez e um por — onze,	Dez e cinco por — quinze,
Dez e dous » — doze,	Duenta » — vinte,
Dez e tres » — treze,	Trenta » — trinta.
Dez e quatro » — quatorze,	

Em virtude do principio estabelecido, as *dez dezenas*,



ou *unidades de 2.<sup>a</sup> ordem*, formaram *uma centena*, ou *unidade de 3.<sup>a</sup> ordem*; e ao primeiro numero desta 3.<sup>a</sup> ordem de unidades deu-se a denominação especial de — *cem*.

Contaram-se as *centenas* do mesmo modo por que se tinham contado as *unidades simples* e as *dezenas*, de *uma até dez*; e os *noventa e nove* numeros comprehendidos entre duas centenas consecutivas foram enunciados antepondo-se, aos nomes dos noventa e nove primeiros numeros da série, o da centena mais fraca, dizendo :

Cem e um, cem e dous..... cem e dez..... cem e dezeseis..... cem e trinta e tres..... cem e setenta e oito..... cem e noventa..... cem e noventa e nove ;

Dous cem e um, dous cem e dous..... dous cem e dezenove..... dous cem e trinta..... dous cem e cincoenta e quatro..... dous cem e oitenta e um..... dous cem e noventa e nove ;

.....

Cinco cem e um, cinco cem e dous..... cinco cem e quarenta e quatro..... cinco cem e cincoenta e cinco..... cinco cem e noventa e nove ;

.....

Nove cem e um..... nove cem e nove..... nove cem e trinta..... nove cem e setenta e nove..... nove cem e noventa e nove ;

Dez cem ;

expressões que o uso transformou depois em : — *cento*, *duzentos*, *trezentos*, *quatrocentos*, *quinhentos*, *seiscentos*, *setecentos*, *oitocentos* e *novecentos*.

Ao numero *dez cem* deu-se a denominação especial de — *mil*, ou *milhar*.

Convencionou-se, então, considerar os *milhares*, ou *unidades de 4.<sup>a</sup> ordem*, como *unidades de 2.<sup>a</sup> classe*; e, assim como tinham-se formado *unidades*, *dezenas* e *centenas* de *unidades simples* ou de *1.<sup>a</sup> classe*, formaram-se tambem



*unidades, dezenas e centenas de milhares, ou de unidades de 2.<sup>a</sup> classe.*

Deste modo, sem nem um acrescimo mais de palavras especiaes, enunciaram-se os numeros até *novecentas e noventa e nove mil novecentas e noventa e nove unidades.*

Por muito tempo ficou neste ponto estacionaria a *nomenclatura* dos numeros, sem que nem um nome novo fosse introduzido para a enunciação dos numeros superiores ao que acabamos de enunciar; e dizia-se simplesmente: — MIL MIL, VINTE MIL MIL, QUINHENTOS E NOVENTA E TRES MIL MIL, etc., etc.

No seculo 16<sup>o</sup>, porém, o celebre mathematico francez VIÈTE <sup>1</sup> imaginou a palavra MILHÃO para designar MIL MIL; e este numero tornou-se o typo de uma nova *classe ternaria* (a 3.<sup>a</sup>) *de unidades*, composta tambem, como as duas precedentes, de *centenas, dezenas e unidades.*

Desde então a regra tornou-se geral, e *mil milhões* constituiram a 4.<sup>a</sup> *classe ternaria de unidades*, que se denominou *bilhões*; do mesmo modo, *mil bilhões* constituiram a 5.<sup>a</sup> *classe*, que se denominou *trilhões*; e, assim por diante, formaram-se e enunciaram-se as outras classes dos *quatrilhões, quintilhões.... nonilhões.*

E, assim, conseguiu-se enunciar *todos* os numeros empregando limitadissimo numero de palavras e terminações.

Este modo de designação dos numeros não é puramente convencional, como geralmente se ensina; pois, tem uma origem social no uso, espontaneamente adoptado na socie-

---

1. — Nascido em Fontenay, Poitou, no anno de 1540 e fallecido em Pariz no anno de 1603. Foi o fundador da *Algebra*, em cujos estudos introduziu a representação das quantidades conhecidas e desconhecidas por *letras*, o que permite a completa *generalização* das questões, resolvidas por *formulas geraes applicaveis* a todos os casos analogos.



dade, de serem os individuos designados pelos seus nomes proprios, accrescidos dos das respectivas familias, e, ainda muitas vezes, mórmente nos povos civilisados, dos nomes das tribus ou nações a que pertencem. A analogia é evidente.

**24. — Resumo.** — Resumindo o que fica exposto, temos que o *artificio* da numeração fallada consiste em enunciar todos os numeros, empregando apenas :

1.º — DOZE PALAVRAS, que são : — *um, dous, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, cem e mil* ;

2.º — DUAS TERMINAÇÕES, que são : — *enta e lhão* ;

3.º — UM PRINCIPIO DE CONVENÇÃO, que é, como vimos, o seguinte : — *dez unidades de qualquer ordem formam uma de ordem immediatamente superior.*

**25. — Observações.** — A necessidade de recorrer a um artificio, universalmente aceitavel e adoptado, para enunciar os numeros, provém de que, como pondéra o eminente CONDORCET <sup>1</sup>, teem as palavras os tres seguintes usos :

1.º — SOLICITAR A ATENÇÃO DE OUTREM PARA AS IDÉAS EXPRESSAS ;

2.º — DESPERTAR A ATENÇÃO PROPRIA PARA IDÉAS QUE SEJAM SEMPRE AS MESMAS ;

---

1. — CARITAT DE CONDORCET, nascido em Ribemont (Picardia, França) aos 17 de setembro de 1743 e fallecido em Bourg-la-Reine aos 8 de abril de 1794, foi incontestavelmente o maior pensador do 18.º seculo. Escreveu varias obras sobre mathematica e sobre sociologia, todas monumentaes, avultando entre ellas a ultima, em que, sob o modesto titulo de *Quadro dos progressos do espirito humano*, tentou esboçar prematuramente a synthese do saber humano, mais tarde (1832-42) definitivamente formulada, com o desinvolvimento já então permittido pela oportunidade, pelo grande AUG. COMTE. Entre os trabalhos do illustre philosopho figura o pequeno, mas valiosissimo, compendio de *arithmeticar elementar*, publicado, depois de sua morte, sob o despretençioso titulo de *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*, do qual, já ha, felizmente, entre nós recommendavel traducção em portuguez, publicada nesta Capital



3.º. — PERMITTIR QUE POSSAMOS, Á VONTADE, LEMBRAR-NOS DE CERTAS IDÉAS QUE CONVEM CONSERVAR ;

d'onde resulta ser indispensavel que, para *todos* os individuos e em *todas* as occasiões, exprima *sempre* cada palavra a *mesma idéa*, tendo *sentido fixo* que possa ser comprehendido prompta e geralmente. Assim, a palavra *nove*, por exemplo, serve-nos, não só para fazer comprehender a outrem que, em tal logar ha esse numero de taes ou taes objectos, como tambem para lembrar-nos o numero desses objectos, sem que precisemos recorrer ás operações feitas para contal-os.

26. — As duas terminações *enta* e *lhão* foram, é certo, escolhidas arbitrariamente, pois outras poderiam ser. Houve, porém, ponderosos motivos de utilidade em formar os nomes das diversas unidades compostas combinando os das unidades simples com terminações que indicassem clara e facilmente as relações existentes entre umas e outras. Assim, a palavra *trilhão*, por exemplo, indica logo uma classe de unidades *tres vezes superior* á classe das unidades de mil; e *quarenta* indica a collecção de *quatro dezenas*.

Demais, é muito mais commodo, em qualquer lingua, o uso de palavras determinadas em parte por certas relações, do que o de palavras inteiramente arbitrarías que, nem são tão facilmente retidas pela memoria, nem suas respectivas significações podem ser espontaneamente despertadas ao espirito por outras palavras, ou idéas.

#### § 4.º. — Numeração escripta

27. — **Numeração escripta** — é a arte de *escrever* todos os numeros por meio de um limitado numero de *signaes*.



Sua importancia e necessidade indeclinavel decorrem tambem da impossibilidade de dar-se a cada numero um signal especial representativo.

**28. — Artificio.** — O artificio adoptado foi o seguinte :

Para representar as *nove* unidades de cada ordem crearam-se os *nove* seguintes signaes, denominados *algarismos* :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

E, para representar as diversas ordens de unidades contidas em qualquer numero, estabeleceu-se o seguinte PRINCIPIO DE CONVENÇÃO : — *O algarismo escripto á esquerda de outro tem valor dez vezes maior do que o que teria si estivesse escripto no logar desse outro.*

Assim, para escrever o numero *vinte e nove*, por exemplo, que contém *nove unidades e duas dezenas*, escreve-se o algarismo 9, e, á sua esquerda, o algarismo 2, que, em virtude do *principio*, representará *dezenas*, isto é, escreve-se : 29.

Para a indicação das ordens de unidades poderiam ter sido adoptados signaes especiaes, ou, então, seguido o exemplo da Grecia antiga onde, representadas as unidades pelas 9 primeiras letras do alphabeto, as dezenas pelas 9 seguintes e as centenas ainda pelas outras 9 seguintes, — dos milhares em diante reapareciam as mesmas letras accentuadas ; de modo que a letra  $\gamma$ , por exemplo, representava *tres* e essa mesma letra accentuada ( $\gamma'$ ) representava *tres mil*. Da observação, porém, das classificações sociaes nas ceremonias publicas e solemnidades, onde o logar occupado por cada funcionario é um dos caracteristicos da respectiva funcção,—originou-se naturalmente a idéa de representar, nos numeros escrip-



tos, as diversas ordens de unidades pela posição dos respectivos algarismos, ficando assim a numeração escripta em harmonia com a fallada <sup>1</sup>.

E, como certas ordens de unidades podem faltar, em um numero <sup>2</sup>, inventou-se mais um *algarismo*, chamado *zéro*, destinado a indicar, em qualquer numero escripto, as ordens d'unidades que faltarem.

Esse novo algarismo, o *zéro*, consistiu a principio em um simples ponto, mais tarde em dous pequenos traços verticaes ||, depois <sup>3</sup> em um circulo ○, e, finalmente, na ellipse actual 0.

De modo que, para escrever, por exemplo, o numero *trezentos e cinco*, que só contém *centenas e unidades*, escreve-se o algarismo 5 das unidades, á sua *esquerda* o algarismo 0 indicativo de que faltam no numero dado as dezenas, e á *esquerda* deste o algarismo 3 das centenas, assim : 305. E, para escrever, por exemplo, o numero *sete milhões quinhentos e oito mil seiscentos e noventa* — que contém *nove dezenas, seis centenas, oito unidades de milhar, cinco centenas de milhar e sete unidades de milhão*, não tendo, portanto, *unidades simples, nem dezenas de milhar*, — escreve-se : 7508690, collocando o algarismo 0 nos logares que deveriam ser occupados, no nu-

1. — O mathematico arabe MOHAMMED-BEN-MOUSA ABON-DJEFAR AL KHO-WAREZMI natural do Khorassan, e que floresceu no seculo 9º, sendo bibliothecario do kalifa *Al-Mamoun*, passa por ser o primeiro que teve a idéa de dar a cada um dos *dez* signaes numericos, de 0 até 9, um *valor de posição*, crescente da direita para a esquerda, representando successivamente *unidades, dezenas, centenas*, etc. — Reynaud mostrou que a palavra *algarismo* provém tambem do sobrenome *Alkhârismi* (natural da provincia de Kharizme) com que era conhecido Mohammed.

2. — Assim, por exemplo, o numero *trezentos e cinco* não contém *dezenas*.

3. — Ignora-se a data em que foi o ponto dos arabes substituido pelo circulo na representação graphica do *zéro*; o que é, porém, certo é que, em arabe, *zeroh* significa circulo.



mero escripto, pelos algarismos das unidades simples e das dezenas de milhar.

**29. — Resumo.** — Resumindo o que fica exposto, temos que o *artificio* da numeração escripta consiste em escrever *todos* os numeroõs empregando apenas :

- 1.º — DEZ ALGARISMOS : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0;
- 2.º — UM PRINCIPIO DE CONVENÇÃO : — *O algarismo escripto á esquerda de outro tem valor dez vezes maior do que o que teria se estivesse escripto no logar desse outro.*

**30. — Algarismos.** — Os algarismos que representam os nove primeiros numeros chamam-se *significativos*, porque teem significação propria.

Assim, 9, ainda mesmo escripto isoladamente, significa *nove unidades*; 5, *cinco unidades*; 3, *tres unidades, etc.*

O algarismo 0 (zéro), porém, chama-se *insignificativo*, porque não tem significação propria; e, escripto isoladamente, nada significa, nada vale.

Os algarismos significativos teem dous valores :

1.º — O *absoluto*, que é o valor proprio do algarismo, independente do logar por elle occupado em qualquer numero escripto;

2.º — O *relativo*, que varia conforme o logar occupado pelo algarismo.

Assim, o valor absoluto de 8 é *oito unidades*; mas, esse mesmo algarismo póde ter os valores relativos de *oito dezenas, oito centenas, oito milhares, etc.*, conforme o logar que occupar em um numero qualquer escripto. Exemplo : 8888, isto é, *oito mil e oitocentos e oitenta e oito.*

**31. — Observações.** — As denominações dos numeros, si bem exprimindo *sempre* as mesmas idéas, variam conforme as differentes linguas falladas no globo terrestre; os algarismos, porém, que os representam na



escripta, são os mesmos para *todos* os povos modernos civilizados; de modo que, individuos, que não se entendem nada absolutamente fallando, escrevem do mesmo modo os numeros, na mais perfeita harmonia.

— A conveniencia de serem os numeros representados na escripta por algarismos 1, 2, 3, .... 9, em vez de o serem pelas suas proprias denominações *um, dous, tres, .... nove*, provém da grande commodidade que resulta para os calculos de poderem os numeros ser assim representados muito mais abreviada e facilmente.

— O facto de cada grupo de tres algarismos corresponder sempre, nos numeros escriptos, a cada uma das successivas classes ternarias de unidades em que se decompõem os numeros — o que determina sempre a denominação de *centena* para o primeiro á esquerda desses tres algarismos, a de *dezena* para o segundo e a de *unidade* para o terceiro á direita, — estabelece, como já indicámos, perfeita harmonia entre a numeração escripta e a numeração fallada.

### § 5.º — Regras para lêr e escrever os numeros

**32.** — Do systema de numeração, que acabamos de expor, resulta que :

1.º— Qualquer numero compõe-se de diversas *classes de unidades principaes*, ou *ternarias*, que são : 1.<sup>a</sup>—*unidades*, 2.<sup>a</sup>—*milhares*, 3.<sup>a</sup>—*milhões*, 4.<sup>a</sup>—*bilhões*, etc.; cada uma das quaes consta de *tres ordens de unidades*, a saber : — *unidades, dezenas e centenas*.

2.º— Essas diversas colleções de unidades se escrevem umas em seguida ás outras, de modo que as da ordem mais elevada contida no numero occupam o 1.º logar á



esquerda, vindo em seguida, da esquerda para a direita, as das outras ordens successivamente inferiores.

D'aqui decorrem naturalmente as duas seguintes regras praticas :

**33. — Primeira regra :** — Para escrever um numero qualquer enunciado, — escrevem-se, uns em seguida aos outros, da esquerda para a direita, os algarismos que devem representar respectivamente as centenas, dezenas e unidades de cada classe ternaria, tendo o cuidado de substituir por zéros (0) as collecções de unidades de qualquer ordem que faltarem.

Assim, a representação em algarismos do numero *cincoenta bilhões quatro milhões setecentos e oito mil e nove* é : 50004708009.

**34. — Segunda regra :** — Para ler um numero qualquer escripto, — divide-se o numero em classes de 3 algarismos, da direita para a esquerda, podendo a ultima á esquerda ficar só com dous, ou mesmo um algarismo; e lê-se, da esquerda para a direita, enunciando cada classe ternaria, como si ella estivesse só e nomeando a unidade ternaria a que ella corresponde.

Assim, dado o numero

75208000030469005,

se o divide do seguinte modo, da direita para a esquerda :

75.208.000.030.469.005,

e, como ha 6 classes ternarias, a 1.<sup>a</sup> á esquerda é a dos *quatrilhões*, seguindo-se a dos *trilhões*, depois a dos *bilhões*, a dos *milhões*, a dos *mil* e, finalmente, a das *unidades simples*.

Lê-se, pois, *setenta e cinco quatrilhões duzentos e oito trilhões trinta milhões quatrocentos e sessenta e nove mil e cinco unidades*.



## § 6.º — Diversos systemas de numeração

**35.** — Como dissemos (16), podem haver diversos *systemas de numeração*, isto é, diversos artificios para representar todos os numeros por meio de limitado numero de signaes convencionaes; e, não obstante achar-se o *decimal* definitivamente adoptado em todo o mundo, alguns outros systemas teem attrahido a attenção dos mathematicos, e sido preconizados como preferiveis.

Qualquer que seja o systema de numeração, funda-se sempre no emprego de unidades de diversas ordens, contendo cada uma a precedente *um certo numero de vezes*.

O numero de unidades de cada ordem necessario para formar uma de ordem immediatamente superior — é que constitue a BASE do systema.

O *systema decimal*, universalmente adoptado, tem, como já vimos, por base *dez*; pois, é este o numero de unidades de qualquer ordem que formam uma da ordem immediatamente superior.

O *systema binario* teria por base *dous*; o *ternario* teria por base *tres*; o *duodecimal*, *doze*; o *septimal*, preconizado por Comte, *sete*; e assim os demais.

Em qualquer d'elles o numero dos *algarismos* empregados na numeração escripta seria igual á base, incluindo nesse numero o 0 (*zéro*); assim, no systema binario, bastariam os algarismos 0 e 1 para a representação graphica de *todos* os numeros; no septimal, bastariam os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6; e, no duodecimal, além dos *dez* actuaes algarismos do systema decimal, mais *dous*, que representassem os numeros *dez* e *onze* que, nesse systema, passariam a pertencer á 1.<sup>a</sup> ordem de unidades.



O systema decimal é — não ha duvida — inferior ao *septimal* sob o ponto de vista concreto do desaccordo com o grupamento espontaneo e universal dos dias <sup>1</sup>, que a revolução franceza embalde tentou transformar; e, sob o ponto de vista abstracto, inferior ao *duodecimal*, que só com mais dous algarismos, offerceria uma base que, tendo maior numero de divisores, deveria satisfazer melhor ás condições que poderiam ter determinado a preferencia logica d'este ou d'aquelle systema de numeração.

Adoptado, porém, como hoje se acha, universalmente, seria talvez um impossivel qualquer tentativa de substituir por outro o systema decimal, por maiores e mais efficazes que pudessem porventura ser as vantagens a colher de semelhante resolução no dominio pratico da mathematica.

Um tal progresso, ao envez de ser o desinvolvimento evolutivo de uma ordem pre-existente, só poderia talvez ser conseguido á custa do arbitrio e da anarchia, pois a transição gradual não parece possivel.

LEIBNITZ <sup>2</sup> foi o primeiro que suscitou a questão dos diversos systemas de numeração, propondo o *binario*, por ser o mais simples, sem attender, porém, á difficuldade da escripta dos numeros, que se tornaria muito extensa desde que só houvesse dous algarismos, nem ao extremo cuidado que seria mistér para escrever todos os numeros com algarismos identieos, sem faltas nem repetições; o

---

1. — A universal instituição da *semana* de 7 dias.

2. — Guilherme LEIBNITZ, nascido em *Leipzig* (Allemanha) aos 3 de julho de 1646 e fallecido aos 14 de novembro de 1716, foi o inventor — ao mesmo tempo que NEWTON — do *calculo infinitesimal*, ou das *funções indirectas*, o que só bastaria para sua gloria, ainda quando outros muitos valiosissimos subsidios não tivesse elle prestado á sciencia, tendo sempre em vista o progresso e a felicidade da humanidade.



que elle proprio reconheceu pouco depois, abandonando semelhante tentativa.

Posteriormente, o grande AUGUSTO COMTE<sup>1</sup> demonstrou com sua habitual precisão, a superioridade do *systema septimal*, destinado — entende o mestre — a substituir de futuro o actual *systema decimal*, a despeito da resistencia que esta construcção — provisoria, mas universalmente adoptada — offerecerá a semelhante transformação que, não obstante, se operará, graças á *pouca consistencia das construcções puramente parciaes, sempre incapazes de resistir á systematização universal, sobretudo quando o successo deve resultar só da educação.*

Para evitar o inconveniente de entrar aqui em explicações, que não poderiam ser bem comprehendidas pelos principiantes, para quem especialmente escrevemos, julgamos mais acertado reservar para uma nóta especial, que será appensa ao presente trabalho, o estudo comparativo dos diversos *systemas* de numeração propostos e dos processos que permitem passar qualquer numero, escripto de accordo com um delles, para outro.

### § 7.º — Systema decimal romano

**36.** — Roma<sup>2</sup>, que foi na antiguidade e por longos seculos o centro da civilisação humana, exerce ainda, atravez

---

1. — SYNTHÈSE SUBJECTIVE, 1.<sup>er</sup> tome contenant le *Traité de Philosophie Mathématique* (Paris, 1856). V. pgs. 126 a 132 (chap. prem.). Destinada a formar quatro volumes, esta obra magistral foi, infelizmente, interrompida pelo prematuro fallecimento, aos 5 de setembro de 1857, do eminente auctor, que então contava apenas 59 annos de idade, vividos « em plena conformidade com sua doutrina ».

2. — Foi a maior, em extensão territorial e em importancia politica e commercial, das nações da antiguidade, e dominou com sua influencia decisiva todos os povos dessa época remota da historia da humanidade.



da historia, decisiva influencia sobre as sociedades modernas, influencia que se manifesta, completa e sensivel, nas mais insignificantes minucias da vida social.

E' assim que o imperfeito e incompleto systema de numeração romano é ainda hoje adoptado, em todas as nações cultas, para a representação graphica dos numeros em certos casos especiaes, como, por exemplo, a paginação dos prefacios dos livros, a numeração dos capitulos e paragraphos, a indicação das datas nos edificios e monumentos publicos, etc., etc.

D'ahi a necessidade de consagrar-lhe, ainda que summariamente, algumas linhas neste logar.

O SYSTEMA ROMANO — si bem que *decimal*, pois nelle *dez unidades de qualquer ordem valem uma da ordem immediatamente superior* — dispõe apenas, para a escripta dos numeros, de :

1.º — SETE SIGNAES escolhidos entre as proprias letras do alphabeto, e são : I, V, X, L, C, D e M, representando respectivamente os seguintes numeros e algarismos : 1, 5, 10, 50, 100, 500 e 1000;

2.º — A seguinte CONVENÇÃO : — A letra I, escripta á esquerda da letra V, ou da letra X, diminue de *uma unidade* os valores que estas representam; — a letra X, escripta á esquerda da letra L, ou da letra C, diminue de *uma dezena* os valores que estas representam; — e, finalmente, a letra C, escripta á esquerda da letra D, ou da letra M, diminue de *uma centena* os valores que estas representam.

Os numeros 2 e 3 são representados pela mesma letra I repetida *duas e tres* vezes; e os numeros 6, 7 e 8 são representados pela letra V seguida de *um, dous e tres* 1; de modo que as unidades simples se escrevem do seguinte modo ;



I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII e IX.

Analogamente, as dezenas são representadas pelos seguintes signaes :

X, XX, XXX, XL, L, LX, LXX, LXXX e XC;

e os numeros comprehendidos entre duas dezenas consecutivas são representados escrevendo-se o signal representativo da dezena mais fraca á esquerda dos signaes representativos dos nove primeiros numeros.

Exemplos : XIV, *quatorze*; XXXVIII, *trinta e oito*; XLV, *quarenta e cinco*; XCIX, *noventa e nove*.

Analogamente, tambem, as centenas são representadas pelos seguintes signaes :

C, CC, CCC, CD, D, DC, DCC, DCCC e CM;

e os numeros comprehendidos entre duas centenas consecutivas são representados escrevendo-se o signal representativo da centena mais fraca á esquerda dos signaes representativos dos 99 primeiros numeros.

Exemplos : CDXIV, *quatrocentos e quatorze*; DCCXCVIII, *setecentos e noventa e oito*; CMXLIV, *novecentos e quarenta e quatro*.

Para escrever os numeros maiores que *mil* (1000), considera-se este numero como uma nova unidade principal, e escrevem-se os milhares do mesmo modo que as unidades da 1.<sup>a</sup> classe ternaria (unidades, dezenas e centenas) com a só differença de dar um traço horizontal por sobre o numero escripto. Assim,  $\overline{\text{XXX}}$  representa *trinta mil* (30000);  $\overline{\text{CD}}$ , *quatrocentos mil* (400,000);  $\overline{\text{CMLXIV}}$ , *novecentos e sessenta e quatro mil* (964000); etc., etc.

Os numeros, porém, 1000, 2000 e 3000, em vez de serem representados por  $\overline{\text{I}}$ ,  $\overline{\text{II}}$  e  $\overline{\text{III}}$ , o são por M, MM e MMM,



Para escrever qualquer numero composto de milhares, centenas, dezenas e unidades, escrevem-se, em seguida uns aos outros, *da esquerda para a direita*, os signaes representativos de cada uma dessas 4 ordens de unidades. Assim, o numero *quatrocentos setenta e nove mil oitocentos e sessenta e sete* (479867) se escreve :

CDLXXIXDCCCLXVII ;

e a éra actual (1897) se escreveria :

MDCCCXCVII

### § 8.º — Retrospecto historico

**37.** — Exposta, como fica, a theoria da numeração, de accordo com o systema decimal, óra universalmente adoptado, vejamos por que phases principaes passou ella para attingir sua actual constituição, evidentemente definitiva.

Por muitos seculos não teve a numeração outras palavras, para representar as unidades compostas, sinão *dezenas, centenas e milhares*.

Um *milhão* era designado pelas palavras *mil mil*; um *bilhão*, pelas palavras *mil mil mil*; e, assim, por diante; o que, aliás, satisfazia ás necessidades de então, pois rarisimas vezes appareciam numeros tão consideraveis.

Só no 16.º seculo appareceu, como já vimos (23), a palavra *milhão*, proposta pelo illustre VIÈTE; e, só no seculo seguinte, surgiu, sob o nome de *membros*, empregado por STEVIN em sua *Arithmetica* (1625), a idéa das *classes ternarias*.

A palavra *bilhão* parece ter sido empregada pela primeira vez em 1665 pelo jesuita TAQUET, que dividia os nu-



meros em classes *sextenarias*, como indica o seguinte quadro extrahido do seu proprio livro :

LOCUS	VALOR	LOCUS	VALOR
Primus . .	Unitates.	Septimus . .	Milliones.
Secundus	Decades.	Octavus . . .	Decades milliones.
Tertius . .	Centennes.	Nonus . . . .	Centennes milliones.
Quartus .	Millia.	Decimus . . .	Millia milliones.
Quintus .	Decades millia.	Undecimus .	Decades millia milliones.
Sextus . .	Centennes millia.	Duodecimus	Centennes millia milliones.
		Treziemus.....	Billiones.

Semelhante systema foi, porém, logo abandonado, sendo desde então adoptada a divisão dos numeros compostos em *classes ternarias* de *unidades, milhares, milhões, bilhões, trilhões, etc.*

Quanto aos algarismos de que óra nos servimos, sua adopção em numero de *dez*, inclusive o zéro, então representado por  $\bigcirc$  ou por  $\odot$ , data do 12.<sup>o</sup> seculo (1100); mas, só no 15.<sup>o</sup> seculo ficou definitivamente fixada a fórma que ainda hoje teem.

Antes da invenção do zéro, empregava-se, na escripta dos numeros, um processo especial, conhecido pela denominação de *abacus*, e que, conforme expoz BOECIO<sup>1</sup> na sua

1. — BOECIO, philosopho mathematico, floresceu em fins do 5.<sup>o</sup> e principios do 6.<sup>o</sup> seculos, e morreu, em 524, estrangulado, na prisão em que o mandára encarcerar, como trahidor, o rei Theodorico, dos Ostrogodos, por suspeital-o conspirar, em favor do imperador Justiniano, para libertar Roma do jugo dos barbaros. Foi quem, como commentador abalizado, revelou aos seus contemporaneos as obras do grande ARISTOTELES; e, como obras originaes, deixou dous livros sobre *Arithmetica*, cinco sobre *Musica*, um sobre *Geometria* e outro sobre *Philosophia* intitulado: — *De consolatione philosophiæ*.



*Geometria*, consistia em um quadro dividido em columnas verticaes, encimada cada uma pela indicação, em algarismos romanos, da ordem de unidades a que era affectada; de modo que, para escrever qualquer numero, bastava escrever, em linha horizontal, suas diversas unidades nas respectivas columnas.

Assim,

	CM	XM	M	C	X	I
3509 se escrevia . . . . .	...	...	3	5	...	9
26970 » » . . . . .	...	2	6	9	7	
418039 » » . . . . .	4	1	8	...	3	9
305007 » » . . . . .	3	...	5	...	...	7

Deste modo escreveram-se os numeros, por meio do *abacus*, até o 11.º seculo. Em principios do seguinte, imaginou-se indicar as unidades ausentes em qualquer numero por meio de dous traços verticaes ||, que foi a primitiva fórmula do zéro. Mais tarde, quando deu-se a este algarismo a fórmula circular ○ ou ⊙, supprimiram-se as indicações que encimavam as columnas do *abacus*, aperfeiçoamento este que se ignora a quem seja devido. Depois, finalmente, foram os traços verticaes do quadro do *abacus* supprimidos tambem por inuteis, e começaram a ser os numeros escriptos como óra o são tomando, então, o zéro a sua fórmula actual elliptica (0).

A mesma idéa que presidiu á invenção do *abacus* encontra-se, como pondéra o sabio A. HUMBOLDT<sup>1</sup> no *suan-*

1. — HUMBOLDT (Fred. Henrique Alexandre), celebre naturalista, nascido em Berlim aos 14 de setembro de 1769 e fallecido na mesma cidade aos 6 de maio



*pan*, machina de contar de muito remota invenção asiatica importada na Russia pelos Mongóes, e que consistia em séries de cordões representando, como as columnas verticaes do *abacus*, as diversas ordens de unidades.

Quer um, quer outro desses dous processos primitivos de contar — a *arithmetica figurada* (signaes escriptos do *abacus*) e a *arithmetica palpavel* (cordões do *suan-pan*) — conduz ao *valor de posição*, ou *relativo*, reduzindo a numeração a *nove* algarismos <sup>1</sup>.

Demais, os recentes trabalhos dos orientalistas modernos teem evidenciado o pouco fundamento da opinião que pretende attribuir aos povos antigos da India a origem dos algarismos representativos dos numeros, importados depois no Occidente europeu pelos arabes.

Em meio, portanto, das incertezas que envolvem as origens dos systemas de numeração, o que parece mais provavel é que — como pondéra o mesmo sabio pensador — « o sentimento de analogas necessidades tenha feito nascer separadamente identicas combinações de idéas em povos de raças differentes. »

---

de 1859. Depois de longas e penosas excursões scientificas por varias regiões do globo terrestre, entre as quaes o *Brazil*, e arriscadas ascensões aos mais altos picos das montanhas afamadas da Europa e da Colombia, publicou importantissimas obras, do mais elevado valor scientifico, avultando, entre todas, por seu grandioso conjuncto philosophico e inesgotavel riqueza de informações uteis e criteriosas observações, a que, sob o modesto titulo explicativo de *ensaio de uma descripção physica do mundo*, appareceu em 1854. Esta notabilissima obra — COSMOS, — que por si só bastaria para constituir seu auctor um dos *benemeritos da humanidade*, tem sido traduzida em quasi todas as linguas. HUMBOLDT falleceu aos 90 annos e a seus restos mortaes foram prestadas as mais imponentes homenagens ; mais de 600 estudantes, tendo á sua frente os professores, acompanharam o feretro até o cemiterio. A' sua memoria rende a posteridade o merecido culto de veneração e de gratidão.

1. — A. D'HUMBOLDT — *Cosmos*, t. 2º, pgs. 541 da trad. franc.



Em todo o caso, á Eschola d'Alexandria <sup>1</sup> parece ser devida a introdução e divulgação no Occidente europeu dos dous processos de contar, que indicamos, de cuja natural evolução e aperfeiçoamento progressivo resultou o nosso actual systema decimal de numeração.

Terá este systema de ser substituído, de futuro, pelo *septimal*, como pensa o grande AUG. COMTE?....

E' possível; mas por emquanto, nada indica no espirito humano tendencia para semelhante revolução.

---

1. — Depois da morte do grande conquistador ALEXANDRE — O GRANDE, a cidade d'*Alexandria*, que elle fundára no Egipto, tornou-se, sob o governo de um dos seus generaes e successores, PTOLOMEO, o centro da civilização do mundo e a séde de todo o desinvolvimento intellectual da humanidade nessa época (300 annos antes da era christã). *Alexandria* deu então seu nome a duas escholas philosophicas, que se tornaram celebres na historia pela influencia preponderante que exerceram sobre o movimento scientifico; a primeira caracterizada pelos trabalhos de *Euclides* e *Archimedes*; e a segunda pelos de *Claudio Ptolomeo*, *Diophante*, *Pappus*, e outros, influenciados pelas doutrinas de PYTHAGORAS e de PLATÃO, de onde a denominação de *neo-pythagorismo* da da ás vezes a esta 2.<sup>a</sup> eschola d'Alexandria.

---



## CAPITULO III

### IDÉAS E DEFINIÇÕES GERAES DE LOGICA

---

SUMMARIO : — Aptidão innata ao espirito humano. — Methodos logicos : — deducção e inducção. — Methodos subsidiarios : — observação, experimentação, comparação e filiação. — Idéas simples e abstractas. — Leis naturaes. — Sciencias positivas. — Philosophia positiva. — Definições geraes. — Raciocinio, proposição, concluir, axioma, theorema, lemma, postulado, corollario, scolio, reciproca, problema. — Noção de numero, sua formação no espirito humano. — Calculo, sua divisão. — Arithmetica, ou calculo dos valores.

38. — A intelligencia humana possui a propriedade primordial de reconhecer que um objecto, facto, cousa, ou idéa, é semelhante ou dissemelhante a outro objecto, facto, cousa, ou idéa; e é nessa aptidão innata ao espirito humano que se basêa a *logica*, isto é, o poder que tem o espirito humano de, partindo dos dados simples fornecidos pela intuição e pela consciencia, elevar-se ao conhecimento de verdades cada vez mais desinvolvidas.

#### § 1.º — Idéas geraes

39. — **Methodos logicos.** — A aptidão innata, de que dispõe o espirito humano para o descobrimento da verdade, manifesta-se a principio por dous methodos geraes : — a *deducção* e a *inducção*, que são sufficientemente alimentados pelos dados simples e communs forne-



cidos pela *intuição* e pela *consciencia*, com o auxilio dos *sentidos* <sup>1</sup>.

DEDUCCÃO—é o processo intellectual por meio do qual o espirito humano descobre que um phenomeno qualquer está contido, como caso particular, em outro mais geral.

INDUCCÃO — é o processo intellectual por meio do qual o espirito humano descobre o que ha de constante em causas, ou phenomenos, variaveis.

Mais tarde, para *deduzir* tornam-se precisos *principios*, isto é, verdades que teem por caracter distinctivo não dependerem de nem uma outra; e para *induzir* tornam-se precisos *factos*. E, para obtel-os, uns e outros, recorre então o espirito humano aos *methodos logicos subsidarios*, especiaes ás diversas sciencias particulares, taes como:—a *observação*, a *experimentação*, a *comparação* e a *filiação*.

O conjuncto destes methodos, geraes e subsidiarios, constitue a base *objectiva* do METHODO UNIVERSAL, OU POSITIVO, que se completa pela *systematização subjectiva* das concepções humanas; de modo que — *induzir para deduzir, afim de construir* — é a fórmula geral da LOGICA.

Podemos tambem dizer que o METHODO POSITIVO abrange, em seu conjuncto e em suas applicações, o *methodo analytico*, pelo qual sobe o espirito humano dos effeitos ás causas, das consequencias aos principios, do particular ao geral, do composto ao simples,—e o *methodo synthetico*, pelo qual desce o espirito humano do simples para o composto, do geral para o particular, dos principios para as consequencias, das causas para os effeitos.

---

1. — Os *sentidos* de que dispõe o homem para receber as impressões do mundo exterior são apenas 8, a saber: — o *tacto*, a *musculação*, a *gustação*, a *calorificação*, a *olfacção*, a *audição*, a *visão* e a *electricção*; e esses mesmos im-  
perfeitos.



A SYNTHÈSE é, pois, o *complemento indispensavel* da ANALYSE; e esta é a *base indispensavel* daquella. Esta é, por sua propria natureza, *objectiva*, isto é, referente a objectos, factos, cousas ou idéas provenientes das nossas *sensações*; e aquella é, ao contrario, *subjectiva*, isto é, referente a concepções do proprio espirito.

**40. — Idéas simples e abstractas.** — As idéas que não podem ser decompostas, nem definidas portanto, são designadas pela denominação geral de *idéas simples*, e comprehendem dous grupos : — o das que são adquiridas pelos nossos 8 sentidos, como as das *côres*, dos *sons*, dos *cheiros*, do *frio*, do *calor*, da *electricidade*, etc., etc.; e o das que se formam por *abstracção*, e que são as *idéas abstractas*, como, por exemplo, a da *extensão*, a do *espaço*, a do *tempo*, etc., etc.

IDÉA ABSTRACTA — é, portanto, a por meio da qual considera o espirito humano, em um objecto qualquer, uma ou algumas sómente de suas propriedades, desprezadas as demais. Assim, si observarmos diversos *cajueiros*, notaremos logo que todos teem folhas da mesma côr e fórma, fructos do mesmo gosto e cheiro, etc., e formaremos a idéa de *cajueiro*, que já importa uma abstracção, por quanto não ha na natureza arvore alguma que seja o *cajueiro* em geral, mas apenas taes e taes cajueiros em particular.

Si compararmos, em seguida, um *cajueiro* com um *cam-bucaseiro*, por exemplo, notaremos que ambos teem egualmente *râizes*, *troncos*, *galhos*, *folhas*, *fructos*, etc., e formaremos então a idéa de *arvore*, mais abstracta já que a de *cajueiro*. Da comparação d'uma *arvore* e d'uma *pedra*, que são ambas egualmente *impenetraveis*, *extensas* mas *limitadas em todos os sentidos*, *pesadas*, etc., formaremos a idéa de *corpo*, mais abstracta ainda que as duas precedentes. E, assim, por diante.



Os objectos que teem uma ou mais qualidades communs formam um *genero d'objectos*.

**II. — Leis naturaes.** — A palavra *phenomeno* significa, para o publico em geral, um facto ou cousa *excepcional e assombrosa*; na linguagem scientifica, porém, tal vocabulo tem differente accepção e designa simplesmente um facto commum, que se reproduz a cada instante. É synonymo de *modificação soffrida*; de modo que, scientificamente, toda e qualquer *mudança* que se produza *em nós ou fóra de nós* é um *phenomeno*. Assim, o *trovão*, que tão a miudo ouvimos, ou a *quêda d'um corpo pesado*, que a todos os instantes observamos, é, perante a sciencia, um *phenomeno* tão digno de estudo quanto um *eclipse total do sol*, ou a *loucura d'um homem*.

A mais ligeira observação nos revela que certos phenomenos são sempre acompanhados, ou seguidos, d'outros analogos, ou differentes. Assim, qualquer alteração no comprimento do raio d'um circulo é seguida d'uma alteração analoga no comprimento da respectiva circumferencia, na área do circulo, etc.; qualquer esforço muscular ou cerebral do homem determina o fluxo do sangue no respectivo orgão, e esse fluxo de sangue é seguido, por seu turno, de outras modificações physiologicas; etc.

E, como tal connexidade entre esses phenomenos não é fortuita, pois reproduz-se sempre, reconhecemos haver entre elles uma ligação tal que, a cada valor attribuido á intensidade de um, corresponde outro valor determinado, *sempre o mesmo*, da intensidade do outro.

D'aqui decorre a noção de *lei natural*, expressão que designa o modo regular de variação de um *phenomeno* por meio de outro, ou, o que é o mesmo, uma relação constante entre elementos variaveis.

Todos os phenomenos estão sujeitos a *leis*, que são tanto



mais complicadas e difficeis de serem descobertas quanto *mais complicados e menos geraes* são elles. Assim, as leis naturaes que presidem o desinvolvimento dos phenomenos sociaes são mais complicadas e difficeis de serem determinadas que as que regulam os phenomenos vitaes; estas são mais complicadas que as relativas aos phenomenos chemicos: estas, mais que as relativas aos phenomenos phisicos; estas, mais que as relativas aos phenomenos astronomicos; e estas, finalmente, mais que as relativas aos phenomenos mathematicos, as quaes formam, portanto, o primeiro grupo nessa grande escala de phenomenos naturaes.

As sciencias que estudam esses 6 grupos de phenomenos naturaes succedem-se, pois, em ordem de *complicação crescente e generalidade decrescente*; sendo a *mathematica* a *mais simples e mais geral*, seguindo-se a *astronomia*, a *physica*, a *chimica*, a *biologia* e, finalmente, a *sociologia*.

**42. — Philosophia positiva.** — O conjuncto destas 6 sciencias constitue a *philosophia positiva* que fornece ao espirito humano a verdadeira *concepção do universo*, baseada nas proprias *leis naturaes immutaveis* que regulam a variação de todos os phenomenos, desde os mais simples e geraes da *geometria linear* até os mais complicados e especiaes da *dynamica social*, que estuda as *leis da evolução social da humanidade*.

Assim, as sciencias positivas, desde a *mathematica* até a *sociologia*, formam uma hierarchia cujas diversas classes nunca foram, nem podem ser, invertidas. E tudo ahi está comprehendido: — os numeros, o conhecimento dos corpos celestes, as propriedades phisicas da materia, as combinações moleculares que ella affecta, a vida que nella se desinvolve sob a fórma de substancia organizada, e, finalmente, os phenomenos que se passam nas sociedades e na civilização.



Nem uma propriedade geral, nem uma força geral, nem uma doutrina geral, ha que esteja fóra deste grandioso conjuncto coordenado, e que não tenha ahi seu respectivo logar, inclusive as que se referem aos phenomenos cerebraes da propria intelligencia humana e aos phenomenos sociaes da moralidade do individuo, da familia, da nação e da propria humanidade, moralidade que se basêa nos principios de *mutualidade, solidariedade e reponsabilidade* promovidos pelo sentimento do *altruismo*.

### § 2.º — Definições geraes

**43.** — Não só para abreviar circumloquios, contribuindo d'ess'arte para a clareza, como tambem para designar objectos pouco conhecidos, são as sciencias forçadas a servir-se de termos especiaes, de méra convenção, os quaes é mistér definir, ou explicar, porque são de uso desconhecido para o publico em geral.

Inventados por necessidade, não devem, porém, taes termos ser multiplicados ao acaso, como vae sendo tendencia dos especialistas modernos, mais preocupados com insignificancias casuisticas e distincções metaphysicas do que com o verdadeiro desinvolvimento philosophico e pratico da sciencia.

Exprimir por um termo forçadamente inventado o que fôr possivel designar, com a indispensavel clareza e simplicidade, por uma palavra vulgar geralmente conhecida, além de charlatanismo intoleravel, importa dificultar a disseminação das sciencias, emprestando-lhes linguagem por demais complicada e de difficil vulgarização.

Neste caso não estão, porém, os termos que passamos a explicar, ou *definir*, os quaes são de uso frequente e estão de ha muito accetos nas sciencias como indispensaveis á clareza e boa comprehensão das doutrinas.



**44. — Raciocínio** — é o processo intellectual por meio do qual o espirito humano, ligando, de semelhança em semelhança, o objecto desconhecido ao conhecido, chega a assentir em uma proposição reconhecendo-a resultante de outra, ou outras, já anteriormente acceitas como verdadeiras.

**45. — Proposição** — é o enunciado de um juizo. Assim, quando, por meio do *raciocínio*, verificamos que 4 é o mesmo que 2 reunidos a 2, enunciamos este juizo por meio da proposição : — *dous e dous formam quatro*.

**46. — Concluir** — é perceber a dependencia em que uma proposição se acha de outras já acceitas como verdadeiras e denominadas *premissas*.

**47. — Axioma** — é a proposição evidente por si mesma, ou melhor, cuja verdade adquirimos por meio de uma observação tão espontanea que não sabemos precisar a época em que a fizemos. Exemplos : — *o todo é maior que qualquer de suas partes*, — *a linha recta é o mais curto caminho entre dous pontos*, etc., etc.

**48. — Theorema** — é a proposição de cuja verdade só nos convencemos por meio d'um raciocínio, chamado, neste caso, *demonstração*.

Em qualquer theorema ha sempre a *hypothese*, constituida pelas *premissas*, e a *these*, constituida pela *conclusão*.

**49. — Lemma** — é o theorema já demonstrado que serve de base á demonstração de outro, ou outros.

**50. — Postulado** — é a proposição admittida como axiomática por causa da difficuldade de demonstral-a satisfactoriamente.

**51. — Corollario** — é a proposição cuja verdade decorre naturalmente d'um theorema demonstrado.

**52. — Scolio** — é a observação indispensavel á comprehensão de qualquer doutrina



**53. — Reciproca** — é a proposição inversa de outra, cuja these passa a ser hypothese e cuja hypothese passa a ser these. Nem todas as reciprocas são verdadeiras.

**54. — Problema** — é a proposição que exige solução. Um problema é *determinado* quando só tem uma, ou um certo numero restricto de soluções; *indeterminado*, quando tem infinidade de soluções; e *impossivel*, quando não admite nem uma solução satisfactoria.

**55. — Igualdade** — é a expressão mathematica de duas quantidades, ou dous numeros, equivalentes. Indica-se pelo signal = collocado entre as duas quantidades, ou entre os dous numeros eguaes, ou equivalentes <sup>1</sup>.

**56. — Desegualdade** — é a expressão mathematica de duas quantidades, ou dous numeros, não equivalentes. Indica-se pelo signal < collocado entre as duas quantidades, ou numeros, deseguaes, ou não equivalentes, dos quaes *o maior* deve ser collocado do lado da abertura do signal e *o menor* do lado do vertice <sup>2</sup>. Assim,  $4 < 5$  indica que o numero 4 é *menor* que o numero 5, ou o numero 5 é *maior* que o numero 4.

1. — Este signal foi introduzido pelo sabio mathematico inglez RECORDE (*Robert*), nascido em *Tenby* (Pembrokeshire) em principios do seculo XVI (1500) e fallecido em *Londres* em 1558. Foi professor de mathematica em Oxford e escreveu, sob a despretenciosa fórma de dialogos, varias obras, entre as quaes *The ground of arts* (1549), que trata das notações numericas arabe e romana, e *The whetstone of witte* (1557), que se occupa da *Algebra*, então apenas iniciada. Bom medico, habil jurisconsulto, sabio philologo, foi RECORDE, além disso, o mais notavel mathematico de seu seculo, na Inglaterra, onde foi o primeiro que introduziu o estudo da analyse mathematica.

2 — Este signal foi introduzido por outro não menos illustre mathematico inglez HARRIOT (*Thomas*), nascido em *Oxford* (1560) e fallecido em *Londres* (1621). Manuscriptos seus, encontrados depois de seu fallecimento, revelaram ter elle observado, quasi ao mesmo tempo que GALILEU, as manchas solares; mas, seus principaes trabalhos versaram sobre a analyse algebraica, e constam da obra posthuma *Artis analyticae praxis*.



## § 3.º — A noção de numero

57. — A noção de numero foi a primeira abstracção a que elevou-se o espirito humano.

58. — **Abstracção** — é, como já vimos, o processo logico por meio do qual o espirito humano, afastando as diferenças que separam cousas ou factos observados, os considera apenas pelo que teem de commum.

O primeiro gráo da abstracção consiste na consideração das *propriedades abstractas*, isto é, que teem um caracter commum a certos sêres e que em nem um outro se encontram; como, por exemplo, a *dureza*, a *elasticidade*, o *estado liquido*, o *magnetismo*, o *calor*, a *sonoridade*, etc. A idéa abstracta de taes propriedades nos permite conceber os phenomenos independentemente dos sêres particulares em que ellas se manifestam; assim, depois de adquirirmos a *idéa abstracta de calor*, facilmente concebemos todos os *phenomenos calorificos* sem referil-os a um corpo determinado.

O segundo gráo da abstracção consiste na consideração das *leis abstractas* a que estão sujeitos, como já vimos, todos os phenomenos naturaes, leis que as sciencias positivas exprimem por meio de *fórmulas* claras e precisas.

59. — Observando, entre individuos isolados, certas analogias, grupou-os instinctivamente o espirito humano sob as denominações communs de *homens*, *passaros*, *peixes*, *cavallos*, etc. Depois, a observação de diversos homens, passaros, peixes, cavallos, etc., reunidos no mesmo local, deu origem á idéa de *reunião*, ou de *collecção*. E, finalmente, fazendo abstracção da natureza dos individuos reunidos em cada collecção e só considerando as diversas collecções, mais ou menos *numerosas*, adquiriu



o espirito humano a noção abstracta — clara e positiva — de *numero*.

Um *numero* é, pois, uma *collecção d'unidades*; sendo a *unidade* o symbolo representativo da existencia de um individuo ou cousa qualquer, abstracção feita de sua natureza concreta. De modo que a propria *unidade* já é, como vimos (17), um numero — o primeiro da série natural dos numeros inteiros.

60. — Adquirida a noção do numero e formada a série natural delles, com suas respectivas nomenclatura e escripta, tratou o espirito humano de descobrir as *leis*, ou *relações precisas entre numeros*, que permitem a determinação dos desconhecidos por meio dos conhecidos.

O estudo de taes leis, ou relações precisas e constantes, constitue a parte da MATHEMATICA denominada CALCULO; a qual, por seu turno, subdivide-se em duas outras partes essenciaes, comprehendendo: — a primeira, o estudo dos numeros e das operações por meio das quaes podem elles ser combinados, é o *Calculo dos valores*, ou *Arithmetica*; e a segunda, o estudo das relações e das transformações que elles comportam sem alteração do character essencial (a *egualdade*), é o *Calculo das funcções* (*Algebra e Analyse*).

O presente volume só se occupará do estudo da ARITHMETICA, OU CALCULO DOS VALORES.

---