

AARÃO E LUCANO REIS

CURSO ELEMENTAR

DE

MATHEMATICA

ARITHMETICA

2ª EDIÇÃO

F. ALVES & CIA

RIO DE JANEIRO

August 5. 1861

39

A'S MEMORIAS QUERIDAS

DA NOSSA BOA E SANCTA MÃE

D. Anna Rosa Leal de Carvalho Reis

a cuja energia inquebrantavel e solícita ternura devemos
a formação do nosso character,

E DO NOSSO VENERANDO PAE

Dr. Fabio Alexandrino de Carvalho Reis

a cujo exemplo vivo e saltares conselhos devemos a formação
das nossas modestas individualidades, consagramos

O PRESENTE TRABALHO

Aarão REIS.

Lucano REIS.

Rio de Janeiro, em 13 de outubro de 1892.

ADVERTENCIA DA SEGUNDA EDIÇÃO

O acolhimento que mereceu a 1.^a edição deste Curso elementar d'Arithmetica, exposta á venda em Junho de 1894 e já esgotada, determina os auctores a offerecer á mocidade estudiosa do seu paiz esta 2.^a edição, corrigida cuidadosamente, e impressa com toda a nitidez.

MATHEMATICA

CURSO ELEMENTAR DE MATHEMATICA

PELOS

DRS. AARÃO REIS E LUCANO REIS

Da Typographia Nacional, magnificamente impresso e em bonito volume de 713 paginas, acaba de sahir o tomo I.º de um *Curso Elementar de Mathematica* que os dous irmãos D.º Aarão Reis e Lucano Reis resolvêrão organisar para prestar serviço, e valioso, á mocidade estudiosa do nosso paiz. Quem, como eu, que de um delles ouvi as sabias lições e de outro fui condiscipulo na Polytechnica, conhecer os dotes intellectuaes e a cópia de conhecimentos que possui o D.º Aarão Reis e a capacidade profissional de Lucano Reis, pôde logo *a priori* afirmar a alta competencia e o espirito largo desta obra, destinada sem duvida a marcar brilhante época na nossa litteratura scientifica.

Com attenção e prazer li todo o volume, cujo assumpto tantas relações tem com a cadeira que professo no Gymnasio Nacional; a convicção que formei de sua utilidade e valor, fez-me pegar da penna afim de aconselhar a sua leitura, quer aos moços que se preparão nos estudos secundarios, quer mesmo aos meus collegas, professores e lentes de mathematica, que nelle encontrarão optima recordação das theorias arithmeticas.

Um breve resumo salientará as boas qualidades do livro e permitirá chamar a attenção dos illustres autores para pontos em que inteiramente discordo delles e alguns dos quaes me parecem dignos de alta ponderação.

O volume, além da introdução geral, contém cinco secções, que se referem aos *numeros inteiros*, aos *fraccionarios*, aos *incommensuraccis*, á *comparação dos numeros* e ás *applicções sociaes*. Didactica é esta di-

visão geral que apresenta as melhores razões justificativas, já theorica, já praticamente considerada, e que permite com criterio sério e sem inconveniente a divisão, tão commum entre nós, do estudo da arithmetica em duas partes, estudadas geralmente em épocas distintas e separadas pela theoria das proporções.

Entre os aperfeiçoamentos communs ás diversas partes deste trabalho, ha um que convém especificar: é um pequeno e simples esboço biographico, espalhado em notas por todo o livro, sobre os mathematicos cujas descobertas auxiliáráo o progresso da arithmetica; é de sentir, porém, o que demonstraremos adiante com exemplos, que idéas preconcebidas e fontes pouco seguras tenham infelizmente induzido a enganar e injustiças que estão em desaccordo com a imparcialidade, que é talvez a virtude principal do historiador.

A *Introducção Geral* comprehende tres capitulos: o primeiro sobre *noções preliminares*; o segundo sobre *numeração*; e o terceiro sobre *noções de logica*. Ahi apparecem as tendencias do comtismo, de que infelizmente são adeptos os illustres autores, que aliás abandonáráo as regras obrigatorias, e commummente antinaturaes, impostas pela doutrina aos discipulos: os senões existentes nesta parte, são em geral devidos a semelhante systema philosophico. Assim, logo no primeiro capitulo, a definição de mathematica é a dada por Comte, definição erronea e falha, porque, como observa Poincot, o espirito na mathematica não tem unicamente em vista a *proporção* ou a *medida*, póde ainda considerár o *numero* em si mesmo, a *ordem* e a *situação* das cousas sem nenhuma idéa das suas relações, nem das distancias maiores ou menores que as separáo. Se, com effeito, percorrermos os diversos ramos da mathematica, encontraremos sempre estes dous objectos: assim, na geometria, que é o exemplo classico desta dualidade, os nomes de Archimedes e de Apollonius, segundo propõe o eminente Chasles, podião servir para designar as duas grandes divisões da geometria, cada uma das quaes possui caracter proprio e abrange uma das duas questões fundamentaes, que em todas as épocas têm occupado os grandes geometras, a saber: 1º, a quadratura das figuras curvilineas que conduzió ao calculo do infinito; 2º, a theoria dos conicos, que originou a analyse geometrica dos antigos e os methodos de perspectiva e de transversaes dos modernos. Na arithmetica sabemos pela historia das raças primitivas que a primeira noção do numero, de muitos seculos anterior ao alfabeto e á escripta, era uma simples questão de *ordem* ou de *enumeração*, como se póde vêr nos *Quippos* dos Incas, onde o numero de nós, suas disposições relativas e situações di-

versas permittião exprimir uma série consideravel de numeros; a noção da *addição* só depende da idéa de *ordem* e é independente completamente da idéa de continuidade, de medida; isto sem querermos ir a considerações que permittem vêr na arithmetica duas sciencias distinctas: uma, a arithmetica dos nossos cursos secundarios, que não passa da arte de numeração, e cujas propriedades e operações se podem estabelecer de uma infinidade de modos, segundo a base do systema escolhido; outra, a *theoria dos numeros*, que comprehende propriedades peculiares á propria natureza dos numeros e independentes dos systemas de numeração. Porque, não adoptar antes para definição da mathematica o seu fim, segundo Descartes — *a pesquisa da ordem e da medida*? Já Aristoteles perguntava: de que se occupão os mathematicos, a não ser da *ordem e da proporção*?

No segundo capitulo, methodico e bem escripto, como é sempre o trabalho a que me refiro, encontra-se bem explicada a numeração, cuja importancia, utilidade e regras são explanadas com verdadeiro proveito para o leitor. Infelizmente, ha ahí enganos graves nas proposições historicas: a palavra *milhão* não foi imaginada por Viète, pois já antes Lucas Pacioli, tambem conhecido por Lucas de Burgos, fallecido em 1510, trinta annos antes do nascimento de Viète, a empregou como usual em sua *Summa di Arithmetica*, folha 18, onde se lê: *mille migliaia, che fa secondo el volgo el millione*. O attribuir-se simplesmente e sem nenhuma ressalva a fundação da algebra a Viète, como fazem os illustres autores na nota da pag. 19, só tem uma explicação: o espirito intolerante de uma escola que commummente sacrifica a historia toda ás sympathias e antipathias que a qualquer dos chefes merece certo e determinado personagem. O que constitue a algebra não é, evidentemente, a representação das quantidades conhecidas e desconhecidas por letras — progresso este, e sou o primeiro a confessar, que facilita muito as generalisações e raciocínios e é um dos mais eminentes serviços prestados á mathematica; — não é pelo envoltorio dos numeros, pelo modo de figura-los, de vesti-los, diz E. Luceas, que se separa a arithmetica da algebra: ellas se distinguem pelo modo de conceber os numeros, pela propria natureza destes, pela existencia ou ausencia da noção de continuidade, segundo são considerados como grandezas ou simplesmente como *numeros de ordem*. A algebra, originada no Egypto, de um lado passou á Grecia onde pouco desenvolveu-se, e do outro aos Hindús que muito a estudarão, aperfeiçãoando-lhe notavelmente os methodos: os Arabes, herdeiros da sciencia antiga, transmittirão o conhecimento algebrico muito augmentado ao Occidente, principal-

mente aos italianos que, antes de Viète, tiveram entre muitos outros, Tartaglia e Cardan — os descobridores das soluções geraes das equações do 3º e 4º grãos. E' preciso não esquecer que, anteriormente a Viète e sem em nada diminuir os seus meritos, os symbolos algebricos começavão a ser usados regularmente por Stifel, por Bombelli e outros e que só a partir de Wallis é que tornou-se systematico o emprego das formulas : por justiça, querendo-se considerar Viète como fundador da algebra por ter representado com lettras as quantidades, não se poderá separar do delle os nomes de Harriot e de Descartes que, por seus escriptos, popularisárão e espalhárão este symbolismo. Se, como faz Nesselmann, considerarmos a algebra historicamente dividida em tres partes : a *algebra rhetorica* onde ha ausencia de symbolos (v. g. a dos gregos); a *syncopada* em que já apparecem alguns signaes (v. g. a dos arabes); e a *symbolica* ; poder-se-ha então á ultima dar o nome de Viète que será, quando muito, considerado o fundador da algebra symbolica; porém, nunca como o da algebra.

O 2º capitulo termina-se com um paragrapho util sobre numeração dos romanos e com outro intitulado — retrospecto historico — onde explica-se o abaco e dão-se noções historicas sobre a numeração decimal e origem dos algarismos. A discussão deste ultimo paragrapho nos poderia levar muito longe, principalmente porque chego a conclusões diversas da dos illustres autores, pois affirmo que os ultimos estudos permitem dar como certa a origem hindú dos nossos actuaes algarismos e do systema decimal.

O 3º capitulo em que se explanão de modo elementar, porém utilissimo, as noções principaes da logica, representa uma innovação importante no nosso ensino e é exemplo que deve ser seguido por quem escrever compendios. De accôrdo com a escola a que se filião, dão á classificação defeituosa das sciencias inventada por A. Comte.

A primeira secção que se refere aos numeros inteiros divide-se em dois livros : o 1º trata das operações, o 2º das propriedades. Em seguida a uma breve introdução para definir e classificar as operações, ellas são, em seis capitulos, estudadas com o mesmo methodo, e de modo simples e rigoroso. Entre os aperfeiçoamentos reaes introduzidos nesta parte, devem se citar a indicação do methodo seguido pelo espirito humano em cada uma das seis operações; os exemplos que mostram por que na addição e na subtracção opera-se da direita para esquerda e não *vice-versa*; noções sufficientes sobre complementos arithmeticos com exercicios claros e bem desenvolvidos. Deixando á parte os capitulos relativos ás quatro operações fundamentaes e so-

bre os quaes nada temos por emquanto a observar, encontra-se uma longa explanação da theoria da potenciação, onde a formação e as propriedades mais importantes do quadrado e do cubo são demonstradas por methodo realmente arithmetico — o que para um estudo mathematico systematico é de grande vantagem. Igualmente methodico e systematico é o capitulo da extracção de raizes e estou certo que muito facilitará a aquisição de uma theoria que os principiantes considerão sempre difficil.

Em relação á origem attribuida aos diversos signaes de operações, cumpre-me dizer: 1º que os signaes $+$ e $-$ antes de usados, em 1522, por Christovão Rudolff se encontrão em 1489 na arithmetica mercantil de Widman; 2º que o signal \times foi empregado no mesmo anno (1631) por Harnot e por Oughtred; 3º que Hoefler não tem razão — o que aliás nelle não é raro — quando diz que usou-se *expoente* pela primeira vez em 1585 em Simão Stevin, pois em 1572 Bombelli já usou signal para expoente.

No livro segundo que trata das propriedades dos numeros inteiros, os autores principião commettendo uma grande injustiça, esquecendo o nome illustre de Gauss, o — *princeps mathematicorum* — o constructor deste monumento immortal, um dos productos mais elevados do pensamento humano, chamado — *disquisitiones arithmeticae*.

E porque não citar os nomes illustres de Cauchy, de Poinsoot, de E. Luccas, de Dirichlet, de Tchebychef e de tantos outros?

A explicação difficil das propriedades dos numeros está bem dada pelos processos arithmeticos.

A segunda secção consta de tres livros: fracções ordinarias, decimaes e continuas. No estudo das primeiras ha um paragrapho util e illustrado com exemplos sobre fracções complexas, que nos compendios usuaes são geralmente tratadas muito por alto. Nas decimaes ha tambem outro paragrapho, cuja utilidade chama a attenção — refere-se ás noções elementares sobre limites.

As fracções continuas são elementarmente estudadas; porém, a collocação nesta parte do volume arrastou os autores a um erro de methodo — um dos poucos existentes no trabalho analysado. — Com effeito, sem terem ainda explicado o numero incommensuravel, dão, pags. 432-436, o desenvolvimentó desta especie de numeros em fracção continua. A origem historica destas fracções é anterior á indicada pelos autores: antes de lord Brouncker (nascido em 1620), o italiano Cataldi em um tratado sobre raizes quadradas, publicado em Bolonha em 1613, usou de semelhante desenvolvimento, tratando-o pelas regras das fracções ordinarias.

A quarta secção, relativa aos numeros commensuraveis, é de verdadeiro valor e foge ao modo mesquinho com que em quasi todas as arithmeticas brazileiras é tratado capitulo tão importante e difficil da mathematica. Salvo pequenos enganos, devidos antes á fôrma de phrase que a paralogismo de idéa, como o affirmar-se que a medida *directa* das grandezas nunca conduz aos numeros incommensuraveis; toda esta secção deve ser attentamente lida, pois está magistralmente feita. A explanação das operações sobre incommensuraveis, das theorias dos radicaes, dos erros, das operações abreviadas e dos numeros approximados, basta para dar ao livro dos Srs. Drs. Aarão e Lucano Reis o lugar de honra entre os congeneres publicados em nossa lingua.

A quarta secção, intitulada « Comparação dos numeros, » comprehende dous livros : um relativo ás razões e proporções, e outro ás progressões e logarithmos. De estylo simples e claro, faceis as demonstrações, esta secção está bem escripta. Os autores attribuem, de acôrdo com a seita philosophica que seguem, a Thales de Mileto a proporcionalidade dos lados homologos dos triangulos equiangulos — opinião esta que só se pôde justificar por um cochilo de Delambre, e que depois da traducção do papyro Rhind tornou-se absurda. Igualmente na theoria das progressões veio o classico exemplo da queda dos corpos sobre um plano inclinado, e por consequencia o nome de Galileu, que é apresentado como *succumbindo ás torturas do carcere* — o que se sabe não passa de um enorme exagero falso, com o fim de ferir o catholicismo. Nesta theoria astronomica do movimento da Terra, o *monge catholico* Copernico não merecerá uma citação?

Antes de Lahire, em 1631 Oughtred empregou o symbolo :: para denotar a proporção.

No capitulo sobre logarithmos ha tambem um senão no methodo : é o emprego de letras sem se ter feito considerações que demonstrem ao leitor que ellas ahi estão substituindo *numeros quoesquer*; e é preciso não esquecer que a capacidade de comprehender os symbolos geraes representa para o espirito humano grande adiantamento e que a evolução da mentalidade infantil segue ao longe em caminho parallelo a da humanidade.

A 5ª secção comprehende 2 livros : um sobre metrologia e outro intitulado « problemas arithmeticos usuaes. » A metrologia é magnificamente escripta : nella dão-se as explicações necessarias para comprehensão da utilidade e importancia de um systema uniforme de medidas, bem como o historico do systema francez. A parte pratica é sufficiente e utilmente desenvolvida.

Os problemas usuaes (regras de tres, descontos, etc.) são simples, porém, rigorosamente explicados.

Tal é em resumo o conjunto desta obra cujo valor excepcional para o nosso ensino secundario tentei salientar, principalmente quando se tiver completado todo o curso de mathematica, o que faço votos seja em breve tempo.

Lêr e meditar esta obra é obrigação dos que se entregão entre nós ao estudo da sciencia dos numeros.

EUGENIO GABAGLIA 1.

(Transcripto da parte edictorial do *Jornal do Commercio* de 21 de maio de 1893.)

1. O D^r Eugenio Gabaglia, engenheiro civil e bacharel em mathematica, é lente do *Gymnasio Nacional* e da *Eschola Naval*.

ADVERTENCIA DA PRIMEIRA EDIÇÃO

Os melhores annos da sua mocidade consagrou-os, em grande parte, meu irmão — o Dr. AARÃO REIS — ao magisterio, que exerceu em explicações e estabelecimentos particulares, examinando por vezes na Inspectoria Geral da Instrucção Publica desta Capital, e posteriormente, leccionando no Curso Annexo, óra extincto, da ESCHOLA POLYTECHNICA DO RIO DE JANEIRO.

Do modo por que, no exercicio de tão sagrado ministerio, se esforçou por bem cumprir seus arduos deveres, restam-lhe dous valiosos attestados : — a consciencia de, nem uma só vez, ter subido á cadeira de professor sem levar previamente preparada a lição que devia expôr e explicar aos alumnos, nem concorrido jamais com o seu voto, como examinador, para approvar por empenho ignorantes, ou reprovar por despeito habilitados; e o officio — que adiante transcrevemos — por meio do qual a Directoria da ESCHOLA POLYTECHNICA communicou-lhe ter sido extincta, por acto legislativo, a Aula Preparatoria, que constituia o referido Curso Annexo dessa ESCHOLA.

Semelhante officio é tanto mais honroso quanto, além de representar o resultado de uma proposta da ESCHOLA ao GOVERNO, foi firmado pelo EXM. SR. DR. IGNACIO DA CUNHA

GALVÃO, juiz que allia, á indiscutivel competencia, moralidade rara nos tempos que correm.

Discipulo de meu irmão — que educou-me habilitando-me a poder hoje consagrar tambem ao magisterio os lazeres que me deixam minhas funcções publicas — entendi que seria de alguma utilidade aproveitar as copiosas nótas e cuidadosos apontamentos de que elle se servia para o exercicio consciencioso do magisterio, e, dando-lhes redacção definitiva e convenientemente coordenada, organizar um CURSO ELEMENTAR DE MATHEMATICA, — theorico, pratico e applicado, que se prestasse ao estudo da mocidade brazileira.

Este o trabalho que — cuidadosamente refundido, revisto e accrescentado por meu irmão — óra entregamos á publicidade, na convicção — talvez erronea, mas sincera — de que prestamos mais um serviço util ao nosso paiz, concorrendo, quando mais não seja, para animar, pelo nosso exemplo, commettimentos de mór valia.

Nesse intuito, poderíamos — não ha duvida — ter restringido as proporções deste modesto trabalho ao estritamente indispensavel para seu objectivo principal; — entendemos, porém, que, sem nos afastarmos deste, conciria dar ao presente trabalho mais algum desenvolvimento, de modo a appropriar-o, ao mesmo tempo, ao ensino da MATHEMATICA ELEMENTAR aos candidatos á matricula nos diversos estabelecimentos de ensino superior do paiz, aos alumnos das ESCOLAS NAVAL e NORMAES, e, ainda, aos que desejarem seguir a carreira commercial, ou a nobre profissão de engenheiros agrimensores, que tão importante é, de presente, no Brazil.

Esse o motivo por que o presente — CURSO ELEMENTAR DE MATHEMATICA — constará de 4 volumes separados, e que serão publicados successivamente, comprehendendo : — a

Arithmetica, — a Algebra elementar, — a Geometria preliminar, — a Trigonometria rectilinea e espherica; — aos quaes accrescentaremos, si o favor publico nos ajudar, mais outros 3 complementares, comprehendendo: — as Noções geraes de Astronomia, Physica e Mechanica, — o Desenho linear e topographico, — e, finalmente, a Agrimensura, com seus trabalhos de campo e a legislação das terras no Brazil.

Organizando-o e publicando-o, acreditamos prestar algum serviço á mocidade estudiosa do nosso paiz, onde abundam um sem numero de compendios estrangeiros — francezes principalmente, — mas um unico curso nacional de mathematica elementar existe, o do Exm. Sr. senador C. B. Ottoni, excellente para a época em que foi organizado e publicado, porém já um tanto insufficiente para os estudos actuaes, attento o desenvolvimento que, felizmente, vae sendo exigido no ensino desta materia, no Brazil, até mesmo para os candidatos á matricula nas Academias de Direito.

Rio de Janeiro, em 13 de outubro de 1892.

LUCANO L. DE CARVALHO REIS.

Theodora da Cruz Vianna

CURSO ELEMENTAR

DE

MATHEMATICA

I.

ARITHMETICA

(CALCULO DOS VALORES)

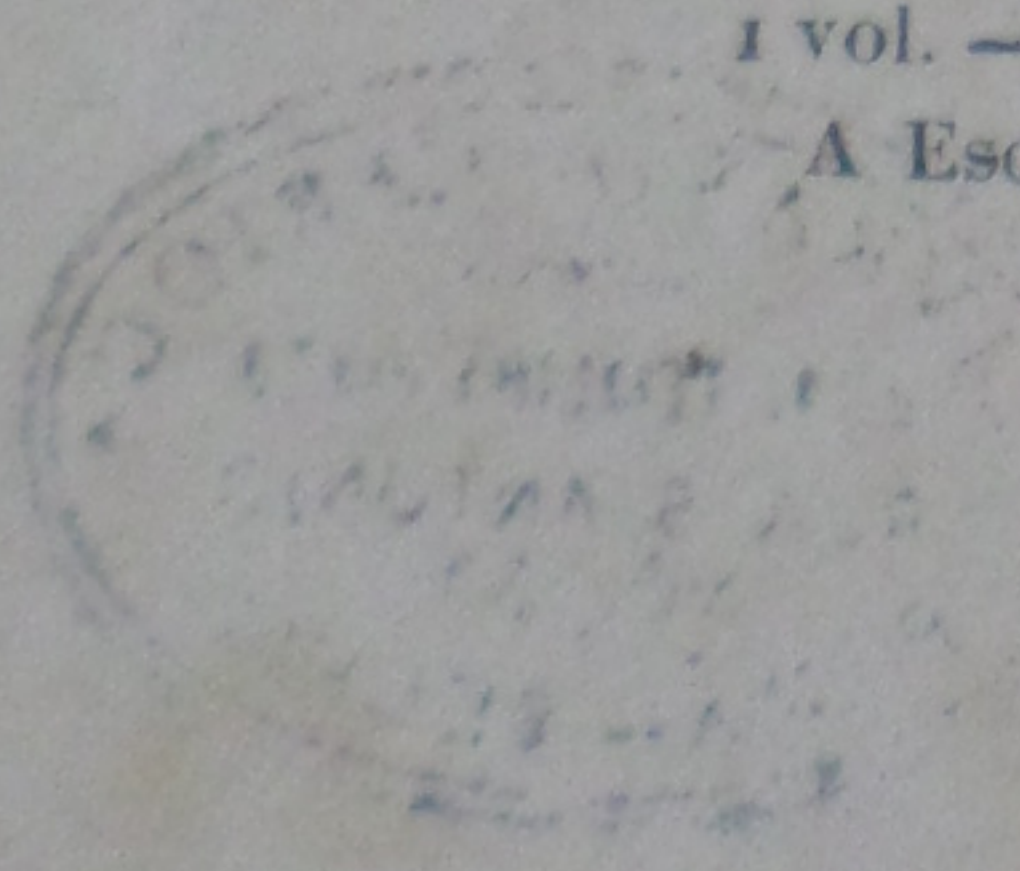
Handwritten notes:
Theodora da Cruz Vianna
1870
1870

OBRAS DO DR. AARÃO REIS :

- A INSTRUÇÃO SUPERIOR NO IMPERIO — 1 vol. — 1875.
LIÇÕES DE ALGEBRA ELEMENTAR — 1 vol. — 1876.
A RESCISÃO DO CONTRACTO DAS OBRAS DO NOVO MATA LOURO — 1 vol. — 1879. — *Publicação Official do Ministerio do Imperio.*
A INSTRUÇÃO NACIONAL E O DECRETO DE 19 DE ABRIL — 1 vol. 1879.
THESE DE CONCURSO — á cadeira de Economia Politica, Estatistica e Direito Administrativo da Eschola Polytechnica do Rio de Janeiro — 1 vol. — 1880.
A ENGENHARIA E AS OBRAS PUBLICAS NO BRAZIL — 1 vol. — 1880.
A LUZ ELECTRICA PELO SYSTEMA EDISON — Relatorio apresentado ao Club de Engenharia por uma commissão de que foi relator — 1 vol. — 1882. — *Publicação da Revista de Engenharia.*
A TRANSMISSÃO E A DISTRIBUIÇÃO ELECTRICAS DA FORÇA — 1 vol. — 1884.
ARCHIVO DOS TRABALHOS DO 1.º CONGRESSO DAS ESTRADAS DE FERRO NO BRAZIL — 1 vol. — 1884. — *Publicação do Club de Engenharia.*
AÇUDE DE QUIXADÁ — Relatorio apresentado ao Governo Imperial — 1 vol. — 1885. — *Publicação do Ministerio da Agricultura, Commercio e Obras Publicas.*
A ESTRADA DE FERRO DE SOBRAL — Laudo desempatador — 1 vol. — 1888. — *Publicação do Ministerio da Agricultura, Commercio e Obras Publicas.*
A ELECTROLOGIA EM 1886 — 1 vol. — 1888.
LA SOCIÉTÉ ANONYME DU GAZ DE RIO DE JANEIRO — 1 vol. — 1890. — Parecer publicado pelo *Ministerio da Agricultura, Commercio e Obras Publicas.*
RELATORIO DA COMMISSÃO D'ESTUDO DAS LOCALIDADES INDICADAS PARA A NOVA CAPITAL DO ESTADO DE MINAS GERAES — 1 vol. — 1893.
REVISTA GERAL DOS TRABALHOS DA COMMISSÃO CONSTRUCTORA DA NOVA CAPITAL DO ESTADO DE MINAS GERAES, 1.º numero — 1 vol. — 1895.

TRADUCÇÕES :

- TRIGONOMETRIA ESFERICA, de Dubois — 1 vol. — 1872.
A REPUBLICA CONSTITUCIONAL, de Ed. Laboulaye — 1 vol. — 1872.
A IDÉA DE DEUS SEGUNDO A PHILOSOPHIA POSITIVA, de E. Littré — 1 vol. — 1876.
A ESCRAVIDÃO DOS NEGROS, de Condorcet — 1 vol. — 1881.



CURSO ELEMENTAR
DE
MATHEMATICA

THEORICO, PRATICO E APPLICADO

ORGANIZADO, DE ACCORDO COM OS MELHORES AUCTORES,

PELO

ENGENHEIRO CIVIL

Aarão REIS

EX-PROFESSOR DE MATHEMATICA ELEMENTAR NA ESCHOLA POLYTECHNICA
DO RIO DE JANEIRO

E

Lucano REIS

PROFESSOR DE MATHEMATICA ELEMENTAR E OFFICIAL DA CONTADORIA
GERAL DA GUERRA

I.

ARITHMETICA

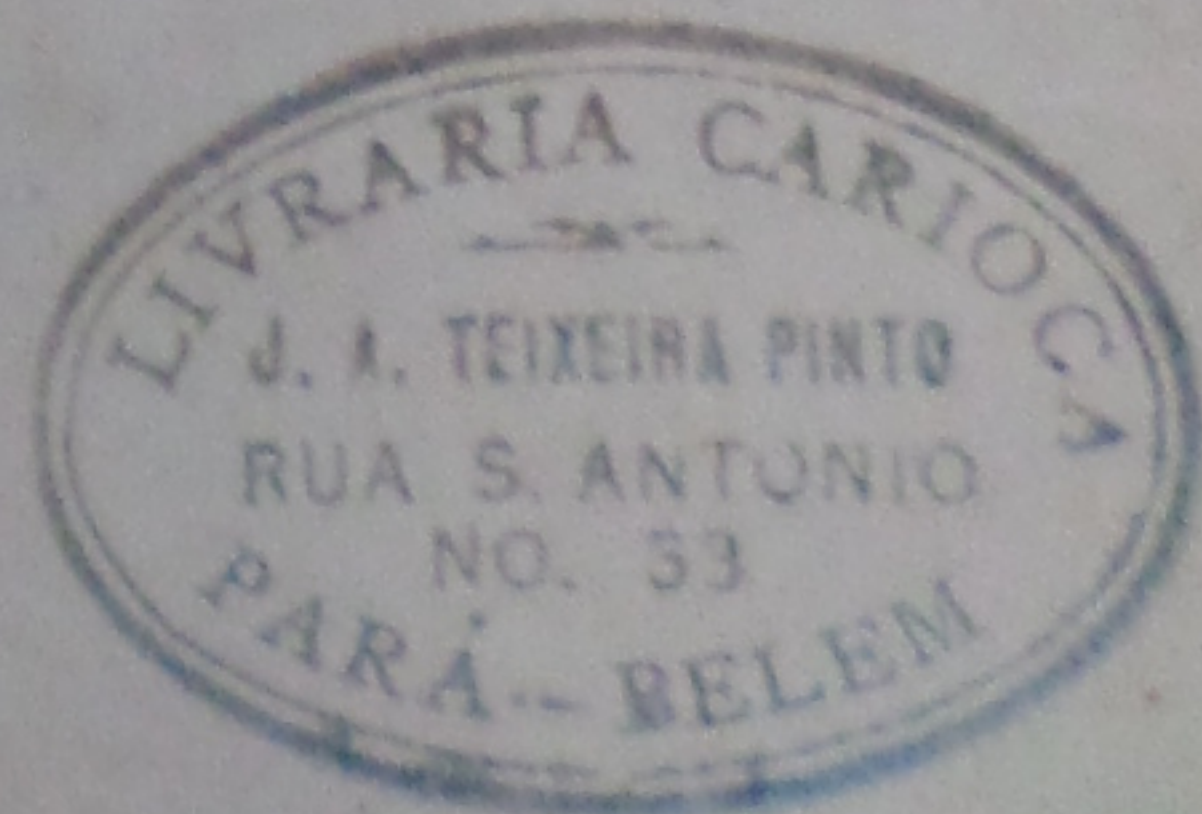
(CALCULO DOS VALORES)

SEGUNDA EDIÇÃO

JOÃO LOPES DA CUNHA, EDITOR

24, rua da Quitanda, 24

RIO DE JANEIRO



*Serão considerados falsificados os exemplares que não
tiverem as assignaturas dos auctores, ficando os falsifica-
dores sujeitos ás penas de lei.*

Luciano Reis

2132

Directoria da Eschola Polytechnica

Rio de Janeiro, em 18 de novembro de 1882.

Illm. Sr. — Communicando a V. S., como determina o Aviso do Ministerio do Imperio de 16 do corrente, que, attenta a disposição do art. 2.º n. 28 da Lei n. 3141 de 30 de outubro ultimo, cessára o exercicio, que V. S. tinha nesta Eschola como substituto interino da Aula Preparatoria, — cumpro o grato dever, recommendado no citado Aviso, de louvar a V. S. em nome do Governo Imperial, pela reconhecida aptidão com que desempenhou as suas funcções.

Deus guarde a V. S. — Illm. Sr. bacharel Aarão Reis. — *I. Cunha Galvão*, director.

2.ª Directoria. — Ministerio dos Negocios do Imperio

Rio de Janeiro, em 16 de novembro de 1882.

Pelo officio de V. S., de 7 do corrente mez, fico inteirado de que, attenta a disposição do art. 2.º n. 28 da Lei n. 3141 de 30 de outubro ultimo, deixou de ter exercicio nessa Eschola o bacharel Aarão Reis, o qual estava servindo interinamente de substituto da *Aula Preparatoria*.

A' vista do que V. S. informou relativamente ao modo por que elle desempenhou as suas funcções, recommendo-lhe que o louve em nome do Governo Imperial.

Deus guarde a V. S. — *Pedro Leão Velloso*. — Sr. Director da Eschola Polytechnica.

I.

ARITHMETICA

(CALCULO DOS VALORES)

Notre vraie méthode n'est que cet heureux mélange de l'*analyse* et de la *synthèse*.

POINSOT, — *Th. nouvelle de la rotation des corps.*

Le domaine arithmétique constitue l'élément le plus général, le plus simple et le plus abstrait de la Logique, et, dès lors, de toute philosophie seconde.

COMTE, — *Synthèse subjective.*

INTRODUCCÃO GERAL

CAPITULO I

NOÇÕES PRELIMINARES

SUMMARIO : Grandezas. — Sua divisão e subdivisão. — Mathematica. — Medida das grandezas. — Unidade. — Numero. — Quantidade. — Diversas especies de numeros. — Arithmetica. — Observação indispensavel.

§ 1.º — Definições e idéas geraes

1. — **Grandeza** — é tudo quanto é susceptivel de augmento e diminuição; como, por exemplo : o *tempo*, a *virtude*, o *espaço*, o *talento*, a *população d'uma cidade*, o *movimento*, etc., etc.

2. — Dividem-se em dous grupos : — o das *grandezas mensuraveis* e o das *grandezas immensuraveis*.

GRANDEZAS MENSURAVEIS — são as que podem ser medidas ; como, por exemplo : o *tempo*, o *movimento*, um *rebanho*, uma *população*, etc., etc.

GRANDEZAS IMMENSURAVEIS — são as que não podem ser medidas; como, por exemplo: o *talento*, a *virtude*, a *utilidade*, etc., etc.

3. — Mathematica — é a sciencia que tem por fim a medida das grandezas.¹

4. — As *grandezas mensuraveis*, ou *mathematicas*, subdividem-se, por sua vez, em dous grupos tambem: — o das *grandezas continuas* e o das *grandezas descontinuas*.

CONTINUAS — são as que *podem* augmentar e diminuir por grãos tão pequenos quanto se queira; como, por exemplo: o *tempo*, uma *superficie*, um *peso*, o *movimento*, etc., etc.

DESCONTINUAS — são as que *não podem* augmentar, nem diminuir, por grãos tão pequenos quanto se queira; como, por exemplo, um *rebanho*, uma *população*, um *exercito*, etc., que constituem *collecções* de objectos semelhantes, mas distinctos.

5. — Medir uma grandeza — é comparal-a com outra da *mesma especie*, já conhecida; assim, mede-se um *peso* comparando-o com outro já conhecido (o *kilogrammo*, por exemplo); mede-se um *comprimento* comparando-o com outro já conhecido (o *metro*, por exemplo); etc., etc.

6. — A GRANDEZA TOMADA PARA TERMO DE COMPARAÇÃO COM AS OUTRAS GRANDEZAS DA MESMA ESPECIE — toma nome de — **unidade**.

Assim, o *metro* é a *unidade de comprimento* geralmente adoptada, o *kilogrammo* a de *peso*, o *segundo* a de *tempo*, etc., etc.

7. — A unidade é *determinada* ou *arbitraria*. Na medida das grandezas *descontinuas*, a unidade é *sempre deter-*

1. — Veja-se o desinvolvimento philosophico desta definição preliminar no § 2.º deste mesmo Capitulo.

minada, porquanto é constituída pelo objecto de que a grandeza é collecção, isto é, a *ovelha* para um *rebanho*, o *soldado* para um *exercito*, o *habitante* para uma *população*, etc. ; e, na medida das grandezas *continuas*, a unidade é *arbitraria*, podendo ser, por exemplo, para um *comprimento*, o *metro*, a *vara*, a *toeza*, o *palmo*, etc.

8. — **Numero** — é o *resultado da comparação de qualquer grandeza com a respectiva unidade*. Assim, quando, comparando um certo *peso* com a unidade *kilogrammo*, verifica-se que esse *peso* tem *dous*,... *dez*,... *cem*,... *mil*, etc., *kilogrammos*, — as palavras *dous*,... *dez*,... *cem*,... *mil*, etc., são *numeros*, pois representam o *resultado* da comparação effectuada.

9. — A idéa de numero é mais facil e claramente comprehendida quando se medem *grandezas descontinuas*, porque, em taes casos, as respectivas unidades podem, como vimos (7), separar-se materialmente. Assim, quando, medindo um *exercito*, por exemplo, verificamos conter 3825 *soldados*, a idéa que nos desperta o numero 3825 é muito mais clara e simples que a que nos desperta esse mesmo numero, quando representa, por exemplo, o resultado da medição de um *comprimento de 3825 metros*.

Abstrahindo da natureza dos objectos reunidos na collecção, adquire-se facilmente a noção abstracta do numero ; e foi essa a primeira abstracção a que se elevou o espirito humano.

Para meditar sobre os numeros, o homem representou-os primeiramente por *signaes*, que foram a principio os dedos, e, mais tarde, *pedrinhas*.¹ Depois, os signaes materiaes foram substituidos por *nomes*, e os numeros puderam ser concebidos mentalmente. Só então pôde o espi-

1. — *Calculus*, em latim ; d'onde derivou-se a palavra *calculo*.

rito humano formular a proposição : — *A série natural dos numeros é illimitada.*

10. — Quando ao numero se acrescenta a designação da especie da unidade empregada na comparação, como em *15 kilogrammos, 8 litros, 5 horas*, etc., — taes expressões representam — **quantidades**, isto é, *grandezas medidas*.¹

11. — A comparação d'uma grandeza com sua respectiva unidade póde dar em resultado uma das *tres* seguintes *especies* de numero :

1.^a — **Numero inteiro**, — si a grandeza contiver a unidade exactamente uma ou mais vezes; exemplos : *cinco, vinte e sete, oitocentos e tres*, etc.

2.^a — **Numero quebrado**, ou **FRACÇÃO**, — si a grandeza, sendo *menor* que a unidade, só contiver *partes* desta; exemplos : *tres quartos, cinco nonos, vinte e cinco setenta e tres avos*, etc.

3.^a — **Numero fraccionario**, ou **MIXTO**, — si a grandeza, além de conter a unidade uma ou mais vezes exactamente, contiver ainda *partes* da unidade; exemplos : *tres mais quatro quintos, vinte e sete mais trinta e cinco noventa e seis avos, cento e dous e trinta centesimos, dous e quatro millesimos*, etc.

12. — Quando uma grandeza contém a unidade respectiva, ou uma certa parte desta, um numero exacto de vezes, — a grandeza e a unidade são *commensuraveis*; o que quer dizer que teem uma *medida commum*. O numero que resulta, nesse caso, da comparação da grandeza com a unidade — quer seja inteiro, quer fraccionario, quer que-

1. — Alguns auctores denominam inconvenientemente taes expressões — *numeros concretos*, duas palavras talvez admiradas de se acharem reunidas.

brado — é denominado NUMERO COMMENSURAVEL, OU RACIONAL.

Quando, porém, por mais longe que se levem as divisões successivas da unidade, nunca se chega a uma parte desta que se contenha na grandeza dada um certo numero exacto de vezes, — então, a grandeza e a unidade são *incommensuraveis*; o que quer dizer que não teem *medida commum*. O numero que resulta, neste segundo caso, da comparação da grandeza com a unidade, não pôde ser inteiro, quebrado, nem fraccionario, e é denominado NUMERO INCOMMENSURAVEL, OU IRRACIONAL.

13. — Arithmetica — *é a parte da mathematica que estuda as operações que se podem effectuar sobre os numeros e as propriedades destes.*

Racionalmente considerada, a ARITHMETICA offerece, por sua propria natureza, e desde o principio, o maior interesse ao espirito humano, como sendo a primeira origem do sentimento geral das *leis reaes*; sentimento que deve resultar espontaneamente de qualquer calculo numerico, onde a sciencia se mostra já caracterizada pela *previsão*, cuja conformidade directa com o facto revela desde logo uma ordem immutavel, quer no mundo exterior, quer no nosso proprio espirito.

§ 2.º — Observação indispensavel

14. — A definição de **Mathematica**¹, que adoptamos (3) nestes *elementos*, é justa e correctá; mas, por deficiencia de precisão, não corresponde dignamente á importan-

1. — O emprego desta palavra no singular, proposto pelo illustre CONDORCET, foi definitivamente adoptado pelo grande AUGUSTO COMTE para exprimir, com mais precisão, o espirito de unidade em que deve ser concebida esta sciencia.

cia, á vastidão e á difficuldade dessa bella e importantissima sciencia. E, para que os principiantes adquiram desde já idéa perfeita do objecto *real e verdadeiro* da sciencia cujo estudo iniciam, — julgamos da maior conveniencia trasladar resumidamente para estas paginas — como complemento indispensavel ás noções expostas no paragrapho antecedente—as seguintes considerações com que o immortal AUGUSTO COMTE explana, com admiravel clareza e simplicidade, esta questão, deduzindo, do esboço grosseiro fornecido pela definição preliminar, a verdadeira, completa e precisa definição da *sciencia mathematica*.

A questão de *medir uma grandeza* não apresenta por si propria ao espirito nem uma outra idéa além da simples comparação *immediata* dessa grandeza com outra semelhante, supposta conhecida, e escolhida, entre as da mesma especie, para *unidade*. A definição, pois, de *mathematica* como sendo a *sciencia* que tem por objecto *a medida das grandezas* não dá idéa exacta do que seja realmente semelhante sciencia, nem deixa mesmo perceber convenientemente que se trata de uma sciencia vasta e profunda, qual é, com justiça, considerada a *mathematica*, base fundamental de todos os conhecimentos positivos do espirito humano.

Assim definida, esta sciencia pareceria consistir unicamente n'uma simples successão de processos mechanicos destinados a obter directamente, por meio de operações analogas á superposição das linhas, as relações entre as grandezas a medir e as respectivas unidades; e não o immenso encadeamento de trabalhos racionaes extensamente desinvolvidos e offerecendo á actividade intellectual da humanidade thema inesgotavel de cogitações e estudos.

E' exacto que semelhante definição não induz a erro sobre o verdadeiro objecto da sciencia mathematica, nem tem outros defeitos além da deficiencia de precisão; mas, apresentando como DIRECTO um objecto que é, ao contrario, quasi sempre INDIRECTO, não permite perceber-se a verdadeira natureza da sciencia definida, para o que é mister dar-lhe a interpretação que resulta dos factos, aliás simplicissimos, que vamos indicar.

Temos, primeiramente, como um *facto geral*, de facilima verificação, que a *medida directa* das grandezas por superposição ou qualquer

outro processo analogo, é quasi sempre *impossivel*; de modo que, si outros meios não tivéssemos, além das comparações immediatas, para determinar as grandezas, ver-nos-hiamos coagidos a renunciar ao conhecimento da maior parte das que mais nos interessam. Assim, a medida de uma linha recta por meio de sua comparação com outra—comparação que, de quantas possamos imaginar, é sem duvida a mais simples e a que mais facilidade apresenta—quasi nunca pôde ser realizada IMMEDIATA E DIRECTAMENTE; e, basta reflectirmos sobre o conjuncto das condições necessarias para que uma linha recta seja susceptivel de medida DIRECTA para vermos quanto é raro poderem ellas ser todas satisfeitas ao mesmo tempo, relativamente ás linhas que desejamos conhecer.

A primeira e mais elementar de taes condições, qual a de podermos percorrer a linha em toda a sua extensão para applicar-lhe successivamente a unidade, exclue evidentemente, desde logo, a maior parte das distancias que mais nos interessam, taes como as dos differentes corpos celestes entre si, as da terra aos demais corpos celestes, e mesmo quasi todas as distancias terrestres, frequentemente inaccessiveis.

A essa primeira condição reúnem-se outras, qual mais difficil de ser satisfeita, como sejam a de que o comprimento da linha não seja muito grande, nem muito pequeno, que sua situação seja conveniente, etc.

A mais insignificante circumstancia, que, abstractamente considerada, não indicaria a minima difficuldade accrescida, bastará muita vez, entretanto, para impedir, na realidade, a *medida directa* de uma grandeza. Assim, uma linha, que poderia com a maior facilidade ser medida exactamente si fosse horizontal, deixa de sel-o pelo simples facto de estar situada verticalmente.

Em summa, a medida directa d'uma linha recta apresenta tão grande complicação de difficuldades, mórmente quando é mistér effectual-a com alguma exactidão, que rarissimo é encontrarmos outras linhas rectas susceptiveis de medida directa precisa além das puramente artificiaes, por nós proprios creadas expressamente para o fim de, admittindo medida directa, serem depois ligadas ás que precisamos medir indirectamente.

E, si a propria linha recta taes e tantos obstaculos offerece á medida directa, muito maiores e insuperaveis serão as difficuldades para a medida das linhas curvas, das superficies, dos volumes, dos pesos, das velocidades, dos tempos, das forças, e, em geral, de todas as outras grandezas susceptiveis de apreciação exacta, porém de natureza cada vez mais complicada.

Deste facto geral—a impossibilidade de determinar por *medida directa* a maior parte das grandezas que precisamos conhecer — foi que derivou a formação da sciencia mathematica; porque, renunciando, em quasi todos os casos, á *medida directa* das grandezas, procurou o espirito humano determinal-as *indirectamente*, creando para isso a necessaria sciencia.

O'ra, o unico methodo geral que, evidentemente, podemos conceber para determinar as grandezas não susceptiveis de medida directa, consiste em referil-as a outras susceptiveis dessa medida e que permitam a determinação das primeiras por meio das relações entre umas e outras existentes.

Tal é o objecto preciso da sciencia mathematica considerada em seu conjuncto.

Mas, para ainda melhor accentuar a extensão e difficuldade de uma tal sciencia, convém considerar a circumstancia de que a determinação *indirecta* das grandezas offerece grãos differentes. Assim, em muitos casos, por vezes os mais importantes, as *grandezas subsidiarias* — a cuja determinação é referida a das *principaes*, que se trata de conhecer — não são ainda, por sua vez, susceptiveis de medida directa, e precisam ser tambem referidas a outras *grandezas subsidiarias*; e, assim por deante, de modo que, frequentemente, é o espirito humano coagido a estabelecer longa série de intermediarios entre o primitivo systema de grandezas desconhecidas — objecto definitivo de suas pesquisas — e o ultimo systema de grandezas subsidiarias susceptiveis affinal de medida directa, e por meio das quaes são aquellas primeiras determinadas, embora não pareçam estar a estas ligadas.

Alguns exemplos bastarão para elucidar estas generalidades um tanto abstractas.

Consideremos, primeiramente, o phenomeno natural da *quêda vertical dos corpos pesados* que, não obstante sua extrema simplicidade, dá logar a uma questão mathematica real e susceptivel de effectivas applicações. Observando-o, o espirito menos familiarizado com as concepções mathematicas reconhece logo que as duas grandezas que elle representa — a *altura* de que cahe o corpo e o *tempo* que dura a *quêda* — estão intimamente ligadas entre si, pois juntas variam e juntas se conservam fixas, formando o que, em linguagem scientifica, se chama uma *função*. Considerado sob este ponto de vista, o phenomeno dá, portanto, logar a uma questão mathematica, qual a de supprir a medida directa de uma dessas duas grandezas, quando não possível, pela da outra. Deste modo poderemos medir *indirectamente* a

profundidade (*altura*) de um precipício, medindo *directamente* o tempo gasto por qualquer corpo pesado para cahir até o fundo; e, procedendo convenientemente, essa profundidade inaccessível será conhecida com tanta precisão como si fôra uma linha recta horizontal situada nas mais favoraveis circumstancias para uma medida directa facil e exacta. Em outras occasiões, sendo facil conhecer a *altura* da quédia de um corpo pesado e não podendo ser observado *directamente* o tempo dessa quédia, o mesmo phenomeno daria logar á questão inversa, isto é, determinar o tempo pela *altura*, como, por exemplo, si quizessemos conhecer qual seria a duração da quédia vertical de um corpo pesado cahindo da lua sobre a terra ¹.

No caso figurado é muito simples a questão mathematica, pelo menos quando desprezada a variação de intensidade da *gravitação* e a resistencia do fluido atravessado pelo corpo em sua quédia. Considerado, porém, em sua maxima generalidade, suppondo obliqua a quédia e não desprezando as circumstancias principaes que o possam affectar, esse mesmo phenomeno, em vez de offerecer apenas duas grandezas variaveis, entre si ligadas por uma relação facil de expressar mathematicamente, apresentará muitas, como sejam : — o *espaço percorrido*, já no sentido vertical, já no horizontal, o *tempo gasto* em percorrel-o, a *velocidade* do corpo em cada ponto do percurso da quédia, a *intensidade* e *direcção* do impulso primitivo, e, finalmente, em certos casos, a *resistencia* do meio e a *intensidade* da gravitação. E, nesse caso, ligadas entre si todas essas grandezas, de modo a poder ser cada uma determinada *indirectamente* por meio das outras, haverá tantas questões mathematicas distinctas quantas forem as grandezas coexistentes no phenomeno considerado. Assim, pois, uma simples mudança nas condições physicas de um problema poderá transformar uma questão mathematica primitivamente muito elementar em questão difficil, complicada, e cuja solução completa e rigorosa exceda mesmo aos actuaes recursos intellectuaes do espirito humano.

Consideremos, para melhor precisar estas reflexões, um segundo exemplo tomado entre os phenomenos geometricos, como seja a determinação de uma distancia não susceptivel de medida directa; a *altura*, por exemplo, *de uma montanha*. Será mistér conceber essa altura — que é uma recta vertical passando pelo centro da montanha — co-

1. — Neste exemplo dá-se como conhecida a distancia da lua á terra (*altura da quédia*), distancia que é, por sua vez, determinada *indirectamente* por meio de processos estudados na ASTRONOMIA.

mo fazendo parte de uma *figura geometrica*, um triangulo, por exemplo, do qual possamos medir *directamente* um lado e os dous angulos a elle adjacentes, ou um angulo e os dous lados que o formam; e, então, em vez de determinarmos *directamente* a distancia que se trata de conhecer, isto é, a *altura da montanha*, determinamol-a mathematicamente, deduzindo-a dos elementos observados do triangulo considerado, por meio das relações que ligam entre si os elementos (*lados e angulos*) dessa figura geometrica.

Semelhante trabalho, a principio bem simples, poderá tambem ir apresentando successivamente maior complicação e difficuldades, á medida que novas figuras, isto é, novos systemas subsidiarios de linhas, forem sendo necessarios para a determinação immediata dos elementos primitivamente supostos determinaveis *directamente*.

E foi por meio de taes trabalhos que o homem conseguiu determinar, não só as distancias dos astros á terra e entre si proprios, mas ainda a grandeza effectiva de cada um delles, suas verdadeiras figuras, e até as desigualdades das respectivas superficies, suas massas, densidades médias, etc., etc. Graças á potencia das theorias mathematicas, todos esses diversos resultados, e muitos outros ainda relativos a differentes classes de phenomenos naturaes, não exigiram em definitiva outras medidas *directas* sinão as de um limitadissimo numero de linhas rectas e angulos, convenientemente escolhidos.

Podemos, pois, definir, agora, com exactidão, a MATHEMATICA como sendo — *a sciencia que tem por objecto a medida indirecta das grandezas, determinando-as umas pelas outras, por meio das relações precisas que entre ellas existem.*

Este enunciado — ao envez de dar apenas idéa de uma arte, como as definições ordinariamente adoptadas — caracteriza desde logo uma verdadeira *sciencia*, e a mostra composta de um immenso encadeamento de operações intellectuaes, que poderão tornar-se complicadissimas á medida que augmentar, não só o numero de intermediarios que fôr mister estabelecer entre as grandezas desconhecidas *a determinar indirectamente* e as que admittirem, afinal, *medida directa*, como tambem o numero das variaveis coexistentes na questão proposta, e conforme a natureza das relações fornecidas, entre as diversas grandezas, pelos phenomenos considerados.
