TERCEIRA PARTE

CAPITULO VI

Theoria das fracções ordinarias

Fracção em geral é uma ou mais das partes em que a unidade está ou se considera dividida. Ha duas especies de fracções: ordinarias e decimaes. Fracções ordinarias são quaesquer partes da unidade, ou tambem são as expressões de divisões indicadas, ou de quocientes.

As fracções se originão das divisões effectuadas na unidade. Com effeito, supponhamos que tinhamos de dividir 8395 por 39: praticando a divisão,

$$\begin{array}{r|l} 8395 & 39 \\ \cline{2-2} 59 & 215 \\ 205 & \\ 10 & \end{array}$$

vem 215 para quociente, 10 para resto; d'onde é facil concluir, que este quociente não será exacto sem que se lhe ajunte o quociente do resto pelo mesmo divisor. Ora, á primeira vista, parece que, como 10 é menor que 39, não se póde praticar esta divisão; porém tal difficuldade se remove, attendendo a que ha duas maneiras de dividir um numero por outro: ou dividindo-o immediatamente, ou a cada uma de suas unidades. Assim, por exemplo, ha duas maneiras de dividir 12 por 6: ou dividir immediatamente o numero 12 por 6, o que dá 2 para quociente; ou dividir cada uma das 12 unidades em 6 partes, o que dá para quociente um sexto; e, se para uma unidade se tem um sexto para quociente, para duas unidades se terá dous sextos, etc., e para 12 unidades, 12 sextos: operação esta que equivale a dividir um unidade em 6 partes, e tomar logo 12 dessas partes para o quociente buscado.

Representa-se estes quocientes, ou fracções, por meio de um risco divisorio———e dous numeros; um que se escreve em cima do risco e se chama numerador, e outro que se escreve em baixo e se chama denominador. O denominador mostra em quantas partes a unidade está dividida, e o numerador, quantas dessas partes se tem tomado para representar a fracção; e como a expressão 12 sextos quer dizer que a unidade está dividida em 6 partes, e que dessas tomamos 12, segue-se que se exprimirá esta fracção deste modo: $\frac{12}{6}$; isto é, tomando para numerador 12, e para denominador 6.

Se a unidade se dividir em 2 partes e tomar-se uma, terá para expressão $\frac{1}{2}$, que se chama *um meio*; se em 3, uma dessas partes terá para expressão $\frac{1}{3}$, que se chama *um terço*, etc.; se em 10, uma dessas partes terá para expressão $\frac{1}{10}$, que se chama *um decimo;* e quando a divisão passa de dez, accrescenta-se ao numeral o affixo avos.

Applicando isto á divisão do resto 10 por 39, vê-se que não é possivel praticar a divisão immediatamente sobre o numero 10, porem pratica-se a divisão de cada unidade de 10 em 39 partes, e tocará em quociente para uma unidade $\frac{1}{39}$, e para 10 unidades virá $\frac{10}{39}$, que é o mesmo que ter dividido uma unidade em 39 partes, e tomar logo 10 destas partes. Este quociente $\frac{10}{39}$ deve juntar-se ao quociente 215; e, pois, $215+\frac{10}{39}$ é o quociente de 8395 por 39.

Ha duas fórmas de fracções ordinarias; fracções proprias, e fracções improprias ou apparentes. *Fracções proprias são aquellas cujo numerador é menor que o denominador;* por exemplo, a fracção $\frac{2}{5}$ é uma fracção propria. *Fracções improprias ou apparentes são aquellas cujo numerador é igual ou maior que o denominador;* por exemplo, as fracções $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{2}$; etc., são fracções improprias.

As primeiras se chamão proprias, porque, sendo fracção a expressão de um quociente, cujo dividendo é o numerador, e cujo divisor é o denominador, segue-se que ter o numerador menor que o denominador é o mesmo que ter o dividendo menor que o divisor; e quando o dividendo é menor que o divisor, aquelle não póde conter este nem uma só vez, e, portanto, o quociente ou a fracção só exprime partes da unidade debaixo da fórma que lhe é propria.

As segundas se chamão improprias ou apparentes, porque tambem, em virtude da definição de fracção, ter o numerador igual ou maior que o denominador é o mesmo que ter o dividendo igual ou maior que o divisor; e nestas circumstancias, aquelle contém este ao menos uma vez; e, pois, encerra inteiros debaixo de uma fórma que não lhe é propria, ou de uma fórma apparente.

As fracções dizem se da mesma especie ou homogeneas, quando todas estão referidas á mesma unidade fraccionaria, isto é, quando têm todas o mesmo denominador; e de differentes especies ou heterogeneas, quando estão referidas a differentes unidades fraccionarias. Unidade fraccionaria é uma das partes iguaes em que suppõe-se dividida a unidade inteira.

Ao numerador e denominador de uma fracção, considerados collectivamente, se dá o nome de termos da fracção; e, pelas funcções que elles exercem se considerar-se um termo variavel e o outro constante, segue-se o seguinte:

MULTIPLICAÇÃO DE UMA FRACÇÃO POR UM INTEIRO

1.ª Regra.—*Multiplica-se uma fracção por um numero inteiro, multiplicando o inteiro pelo numerador e dando o mesmo denominador.*

Demonstração. — Quando se multiplica o numerador, augmenta-se o numero de partes que se tem tomado para significar a fracção ; partes que conservão a mesma grandeza, porque o denominador é constante ; logo, a fracção se tem tornado tantas vezes maior, quantas são as unidades do inteiro pelo qual se multiplicou o numerador.

2.ª Regra.—*Multiplica-se, tambem, uma fracção por um numero inteiro, dividindo-se o denominador pelo inteiro e dando-se o mesmo numerador.*

Demonstração.—Dividindo-se o denominador, torna-se menor o numero de partes em que se tem considerado a unidade dividida ; logo tem-se augmentado a grandeza de cada uma dessas partes ; e como se toma o mesmo numero dellas, porque o numerador é o mesmo, segue-se que a fracção se tem tornado tantas vezes maior, quantas são as unidades do inteiro pelo qual se dividio o denominador.

Assim, se se quizer multiplicar a fracção $\frac{4}{8}$ por 2, tem-se dous meios de executar esta operação ; applicando o primeiro, vem $\frac{4}{8}\times 2=\frac{4\times 2}{8}=\frac{8}{8}=1$; e applicando o segundo meio, vem $\frac{4}{8}\times 2=\frac{4}{8:2}=\frac{4}{4}=1$.

DIVISÃO DE UMA FRACÇÃO POR UM NUMERO INTEIRO

1.ª Regra.—*Divide-se uma fracção por um numero inteiro, dividindo-se o numerador pelo inteiro e dando-se o mesmo denominador.*

Demonstração.—Quando se divide o numerador, torna-se menor o numero de partes que se tem tomado para significar a fracção ; partes que conservão a mesma grandeza, porque o denominador é constante ; logo, a fracção se tem tornado tantas vezes menor, quantas são as unidades do inteiro pela qual se dividio o numerador.

2.ª Regra.—*Divide-se tambem uma fracção por um numero inteiro, multiplicando-se o denominador pelo inteiro, e dando-se o mesmo numerador.*

Demonstração. — Quando se multiplica o denominador de uma fracção, augmenta-se o numero de partes em que a unidade se achava dividida; logo, torna-se menor a grandeza de cada uma destas partes; e como toma-se o mesmo numero dellas, porque o numerador não variou, segue-se que a fracção tem-se tornado tantas vezes menor, quantas são as unidades do inteiro pelo qual se multiplicou o denominador. Assim, se houver para dividir $\frac{8}{16}$ por 4, applicando o primeiro meio, vem $\frac{8}{16} \div 4 = \frac{8 \div 4}{16} = \frac{2}{16}$

Applicando o segundo meio, vem $\frac{8}{16} \div 4 = \frac{8}{16 \times 4} = \frac{8}{64} = \frac{4}{32} = \frac{2}{16}$

Corollario.— Destas quatro regras demonstradas, e que servem para a multiplicação e divisão de uma fracção por um numero inteiro, se deduz *o principio fundamental á theoria das fracções ordinarias*, e vem a ser; se se multiplicar ou dividir ambos os termos pelo mesmo numero, a fracção não muda de valor. Este principio se decompõe em dous; o 1º é que: se se multiplicar ambos os termos de uma fracção pelo mesmo numero, a fracção não muda de valor; e o 2º é que: se se dividir ambos os termos de uma fracção pelo mesmo numero, a fracção não muda de valor.

Demonstração do 1º principio.— Quando se multiplica o numerador, multiplica-se a fracção: quando se multiplica o denominador, divide-se a fracção: então, se ao mesmo tempo se multiplicou e dividio a fracção pelo mesmo numero, houve compensação: logo, a fracção não mudou de valor.

Demonstração do 2º principio.— Quando se divide o numerador, divide-se a fracção: quando se divide o denominador, multiplica-se a fracção: logo, se ao mesmo tempo se dividio e multiplicou a fracção pelo mesmo numero, houve compensação, e a fracção não mudou de valor.

O 1º principio se applica á reducção das fracções ao mesmo denominador, como depois se verá: e delle se segue que uma mesma fracção póde ter infinitas fórmas: por exemplo, a fracção $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32} = \frac{32}{64} =$ etc.; porque, multiplicando-se-lhe ambos os termos pelo mesmo numero, ella não muda de valor; portanto, a fracção $\frac{2}{4}$, que resultou da multiplicação de ambos os termos da fracção $\frac{1}{2}$ por 2, é equivalente á fracção $\frac{1}{2}$, porém de uma fórma diversa; assim tambem a fracção $\frac{4}{8}$ que resultou da multiplicação de ambos os termos de $\frac{2}{4}$ por 2, é de uma fórma diversa, mas inteiramente equivalente á fracção $\frac{2}{4}$ e a $\frac{1}{2}$, etc.

Analysando todas estas fracções desde $\frac{1}{2}$ até á ultima escripta, se vê que, na fracção $\frac{1}{2}$, o denominador 2 é o dobro do numerador 1; na fracção $\frac{2}{4}$, o denominador 4 é o dobro do numerador 2, etc.; mas todas estas fracções representão a fracção $\frac{1}{2}$; logo, toda fracção cujo denominador fôr o dobro do numerador, será equivalente á fracção $\frac{1}{2}$.

Tomando a fracção $\frac{1}{3}$ e multiplicando-lhe ambos os termos por 3, o que a não altera, e fazendo o mesmo a cada uma das fracções resultantes, vem $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}=\frac{9}{27}=\frac{27}{81}$, etc. Nestas fracções o denominador 3 da 1ª é o triplo do numerador 1; o denominador 9 da 2ª é o triplo do numerador, etc.; e como todas estas fracções representão a fracção $\frac{1}{3}$, segue-se que toda a fracção, cujo denominador fôr o triplo do numerador, será equivalente a $\frac{1}{3}$.

Por analogia, toda fracção, cujo denominador fôr o quadruplo do numerador, será equivalente á fracção $\frac{1}{4}$ etc.

O 2º principio serve para a simplificação das fracções. Com effeito, assim como se passou da fracção $\frac{1}{2}$ de fórma mais simples, á fracção $\frac{32}{64}$ de fórma mais complicada, multiplicando ambos os termos de $\frac{1}{2}$ pelo mesmo numero, é obvio que se passará da fracção $\frac{32}{64}$ á fracção $\frac{1}{2}$ *dividindo ambos os termos da primeira pelo mesmo numero:* a esta transformação das fracções de expressão composta em fracções de expressão simples, é o que se chama simplificar a fracção.

SIMPLIFICAÇÃO DAS FRACÇÕES

Pelo que fica dito, é facil de deduzir, que a simplificação das fracções tem por fim dar a uma fracção a fórma mais simples que é possivel; e as vantagens que disso resultão são: 1ª, facilidade de entrar com ella em jogo de calculo, o que é facil de conceber, pois, tendo a fracção a fórma mais simples, os seus termos serão numeros simples, e é mais facil executar operações sobre numeros simples do que sobre numeros compostos; 2ª, fazer idéa da fracção. Com effeito, sendo a fracção de fórma complicada, os seus termos são numeros muito compostos; e sendo o denominador um numero consideravel, mostrará a unidade dividida em um numero consideravel de partes, e por consequencia a grandeza de cada uma dellas será tão pequena, que escapará aos nossos sentidos consideral a: ao contrario, á medida que fôr diminuindo o denominador, ou mais simples se tornando, irá diminuindo o numero de partes em que a unidade se considera dividida, e, portanto, crescendo a grandeza de cada uma dellas; e, indubitavelmente, mais clara se irá tornando a idéa que se fazia dessa fracção.

Simplifica-se, em geral, uma fracção, dividindo ambos os seus termos pelo mesmo numero; e chama-se divisor commum a esse numero, que tem a propriedade de dividir exactamente ambos os termos della.

Dada, pois, uma fracção para ser simplificada, toda a difficuldade consiste em conhecer os diversos divisores communs simples que ella póde ter, ou, o que ainda é melhor, o seu divisor commum mais composto. A indagação particular destas duas sortes de divisores dá lugar á existencia de dous methodos distinctos: o da indagação dos divisores simples, e o da indagação do maximo commum divisor.

A indagação dos divisores simples de uma fracção funda-se no conhecimento dos caracteres de divisibilidade dos numeros.

Os caracteres de divisibilidade mais frequentes na pratica são: 1º, *todo numero terminado por zero, é divisivel por 2, por 5, e por consequencia por 10*; 2º, *todo numero terminado por algarismo par, é divisivel por 2*; 3º, *todo numero terminado por 5, é divisivel por 5*; 4º, *todo numero cuja somma dos algarismos absolutos fôr 9, ou multiplo de 9, será divisivel por 9, e por consequencia por 3*; 5º, *todo o numero cuja somma dos algarismos absolutos der 3 ou multiplo de 3, será divisivel por 3*; 6º, *todo numero, em que o numero expresso pelos seus dous ultimos algarismos fôr divisivel por 4 ou por 25, será divisivel por 4 ou 25*; 7º, *todo numero, em que o numero expresso pelos tres ultimos algarismos fôr divisivel por 8 ou por 125, será divisivel por 8 ou por 125*; 8º, *todo numero, em que a differença entre a somma dos algarismos da ordem impar, a contar da direita, e a somma dos algarismos da ordem par, fôr 0,11 ou multiplo de 11, será divisivel por 11, etc.*

Demonstracção do 1º.— Supponha se o numero 320; demonstra se, primeiramente, que este numero é divisivel por 2 da maneira seguinte: quando se divide este numero por 2, em virtude do principio de que o resto é sempre menor que o divisor, segue se que o resto não póde ser maior que 1, á direita do qual escrevendo o algarismo que termina o numero, que por hypothese é zero, vem o numero 10, que, segundo a tabella de Pythagoras, é divisivel por 2, mas este raciocinio é independente de qualquer valor particular do numero, logo: *todo numero terminado por zero é divisivel por 2.*

Demonstra-se, semelhantemente, que o numero terminado por zero é divisivel por 5. Seja, por exemplo, o numero 840. Quando se divide este numero por 5, em virtude do principio de que o resto é sempre menor que o divisor, o resto não póde ser maior que 1, 2, 3 ou 4, á direita do qual escrevendo o algarismo que termina o numero, que por hypothese é zero, vem os numeros 10, 20, 30, 40, que segundo a tabella de Pythagoras, são divisiveis por 5; e como este raciocinio em nada dependeu do valor particular do numero, segue-se que: *todo numero terminado por zero é divisivel por 5.*

Demonstracção do 2º caracter.—Póde-se demonstrar este caracter do mesmo modo como se demonstrou o primeiro; mas achamos mais elegante a demontracção seguinte:—Supponha-se o numero 674. Por mais complicado que seja o numero, sempre se póde decompôr em dezenas mais unidades, assim o numero 674 é igual a 67 dezenas mais 4 unidades, isto é $674=670+4$. Se se demonstrar que cada uma das partes em que se decompoz o todo 674 é divisivel por 2, ter-se-ha demonstrado que o todo o será; ora, a primeira parte 4 é o algarismo que termina o numero, que por hypothese é par, e por consequencia divisivel por 2; a 2ª parte, 670, é um numero completo de dezenas, ou terminado por zero, portanto, divisivel por 2; logo, sendo ambas as partes do todo 674 divisiveis por 2, o todo o será, como se queria demonstrar.

Do mesmo modo, ou como se demonstrou o 1º caracter, se demonstra o 3º, isto é, que *todo o numero terminado por 5 é divisivel por 5.*

Demonstração do 4º caracter.—Supponha-se o numero 432. Decompondo este numero em suas differentes ordens de unidades, vem $432=400+30+2$, isto é, 4 centenas mais 3 dezenas, mais 2 unidades. Ora, $400=100+100+100+100$; assim como $30=10+10+10$: logo substituindo, vem $432=$ $=100+100+100+100+10+10+10+2$; como $100=99+1$, e $10=9+1$, substituindo vem $432=(99+1)+(99+1)+$ $+(99+1)+(99+1)+(9+1)+(9+1)+(9+1)+2$. Analysando este resultado, se vê que tem-se decomposto o numero proposto em duas partes, uma das quaes é composta de noves e a outra não; esta outra é a somma dos restos das divisões d s algarismos relativos por 9; logo $1+1+1+1=4$, é o resto de 400 por 9; e esse resto 4 é o primeiro algarismo absoluto: tambem 1 é o resto da divisão de 10 por 9, logo $1+1+1=3$ é o resto da divisão de 30 por 9, e esse algarismo 3 é o segundo algarismo absoluto; donde resulta que os algarismos absolutos nada mais são do que os restos das divisões dos algarismos relativos por 9; de sorte que, ter a somma dos algarismos absolutos de um numero, é o mesmo que ter uma das partes em que se decompoz esse numero. Ora uma das partes é composta de noves, por isso evidentemente divisivel por 9; se a outra, que é representada pela somma dos algarismos absolutos, fôr 9 ou multiplo de 9, segue se que ella será tambem divisivel por 9; e então sendo ambas as partes em que um todo se decompoz divisiveis por 9, o todo o será : logo, sempre que a somma dos algarismos absolutos fôr 9 ou multiplo de 9, o numero será divisivel por 9 e por 3, como se queria demonstrar.

A demonstração do 5º caracter é a mesma da do 4º decompondo a parte composta de noves em seu submultiplo 3.

Demonstração do 6º caracter.—Seja o numero 3275, em que o numero expresso pelos dous ultimos algarismos é divisivel por 25; queremos demonstrar que é elle tambem divisivel por 25. Para isso decompomos o numero 3275 em duas partes, das quaes uma seja 75. Teremos, portanto: $3275=3200+75$. Mas, como $3200=32\times100$ e $100=4\times25$, substituindo, teremos: $3275=32\times4\times25+75$.

Analysando as duas partes em que ficou decomposto o numero 3275, vemos que a segunda 75 é por hypothese divisivel por 25, a primeira contendo o factor 25, é tambem divisivel por 25 ; logo, se ambas as partes em que se decompoz o numero são divisiveis por 25, o todo o será como se queria demonstrar.

Demonstração do 7º caracter.—Seja o numero 4264 em que o numero expresso pelos tres ultimos algarismos é divisivel por 8. Para demonstrarmos que o numero 4264 é tambem divisivel por 8, o decomporemos em duas partes das quaes uma seja o numero 264. Virá pois: $4264=4000+264$.

Mas como 4000 é igual a 4×1000 e 1000 é igual a 8×125, teremos, substituindo : $4264=4000+264=4\times1000+264=$ $=4\times8\times125+264$.

Analysando este resultado, vemos que das duas partes em que se decompoz o numero 4264. uma, 264 é por hypothese divisivel por 8 ; a outra, contendo o factor 8, é tambem por elle divisivel. Logo, se ambas as partes em que se decompoz o numero 4264 são divisiveis por 8, segue-se que o todo o será, como se queria demonstrar.

Demonstração do 8º caracter.—Seja o numero 2948, em que a differença entre a somma $8+9=17$ dos algarismos da ordem impar a contar da direita e a somma $4+2=6$ dos algarismos da ordem par é igual a 11. Queremos demonstrar que o numero 2948 é divisivel por 11. Para o fazer, precisamos attender ao seguinte theorema :—Todo o numero terminado por um numero impar de zeros é igual a um multiplo de 11 menos uma unidade ; todo o numero terminado por um numero par de zeros é igual a um multiplo de 11 mais uma unidade.

Facilmente se conceberá a verdade deste theorema lembrando que 10 é igual a $11-1$, que 100 é igual a $11\times9+1$, que 1000 é igual a $90\times11+10=(90\times11)+(11-1)=11\times(\times90+1)-1=11\times91-1$, etc.

Decompondo o numero dado 2948 em suas differentes ordens de unidades, temos:

$$2948=2000+900+40+8=2\times1000+9\times100+4\times10+8$$

Substituindo os numeros 1000, 100, e 10 pelos seus equivalentes $11-1$, $11\times9+1$ e $11\times91-1$, vem:

$$2948=2(11\times91-1)+9(11\times9+1)+4(11-1)+8=2\times11\times91-2+9\times11\times9+9+4\times11-4+8=11(2\times91+9\times9+4)+(8+9)-(4+2)=11(2\times91+9\times9+4)+(17-6).$$

Temos, portanto, o numero 2948 decomposto em duas partes; a 1ª tendo o numero 11 para factor commum, e, portanto, por elle divisivel; a 2ª, é a differença entre as sommas $8+9=17$ e $4+2=6$; portanto, é igual a 11.

Logo se ambas as partes em que se decompoz o numero são divisiveis por 11 o todo o será, como se queria demonstrar.

Segundo estes caracteres de divisibilidade, vai-se determinando successivamente os diversos divisores de uma fracção, á medida que os seus termos vão apresentando de um modo commum qualquer dos caracteres indicados.

Por exemplo, se se tratar do simplificar a fracção $\frac{725}{850}$, attendendo-se ao numerador, vê-se que elle está comprehendido no 3º caracter de divisibilidade, isto é, que tem para divisor 5; attendendo-se ao denominador, vê-se que elle está comprehendido no 1º caracter de divisibilidade, e, portanto, tem para divisores 2 e 5; logo esta fracção tem para divisor commum 5; simplificando-a com este divisor, vem $\frac{145}{170}$. O numerador desta fracção, tambem está incluido no 3º caracter de divisibilidade; e, pois, tem para divisor 5; o denominador está incluido no 1º caracter de divisibilidade, e, portanto, tem para divisor 2 e 5; tambem o divisor commum desta fracção é 5: simplificando-a com este divisor vem $\frac{29}{34}$. Esta fracção, ao menos por este methodo, não pode ser mais simplificada, por isso que um dos seus termos não se acha incluido em caracter nenhum de divisibilidade. Claramente se vê, que este methodo, além de ser prolixo, em muitos casos não conduz á fracção mais simples que é possivel obter; portanto se houver um outro methodo que a isso nos conduza de uma maneira mais breve, deve ser preferido. Este é o do maximo commum divisor, de que passamos a tratar.

Methodo do maximo commum divisor

Define-se maximo commum divisor de uma fracção, o *numero que, dividindo exactamente ambos os termos della, a reduz á sua mais simples expressão.* O methodo do maximo commum divisor funda-se nos tres principios seguintes: 1º, *todo o numero que divide outro, divide o multiplo desse outro*; 2º, *todo o numero que divide o maior e o menor, divide o resto de sua divisão*; 3º, *todo numero que divide o resto e o numero menor divide o maior.* Estes principios se tomão aqui como evidentes: em algebra é que se os demonstra; todavia não só porque algum genio mais curioso e analytico queira conhecer já essas demonstrações, mas tambem porque ellas são de mui facil concepção, eu as inseri na nota. (*)

(*) DEMONSTRAÇÃO DO 1º PRINCIPIO

Seja $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ o producto cujos factores são **A** e **B**; seja **D** o numero que divide um dos factores; e seja, emfim, **A** o factor ao qual **D** divide. Vamos demonstrar que **D** dividirá tambem o producto $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$:

Como por hypothese **D** divide **A**, segue-se que $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{D}}$ é um numero inteiro, que chamaremos **Q**; isto é, $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{D}}=\mathbf{Q}$. Multiplicando ambos os membros desta igualdade por **D**, vem:

$$\mathbf{A}=\mathbf{D}\times\mathbf{Q}$$

Multiplicando ambos os termos desta igualdade pelo mesmo numero **B**, o que a não altera, vem:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{B}\times\mathbf{D}\times\mathbf{Q}$$

Dividindo agora, ambos os membros desta igualdade pelo mesmo numero **D**, o que tambem a não altera, vem:

$$\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{\mathbf{D}}=\mathbf{B}\times\mathbf{Q}$$

Se demonstrarmos que o 2º membro desta igualdade é um numero inteiro, teremos demonstrado que o 1º o será; ora, o 2º membro é o producto das quantidades **B** e **Q**; porém **B** é por hypothese um numero inteiro, porque é um dos factores do producto; **Q** é tambem um

Regra.—*Divide-se o maior pelo menor; se a divisão se fizer exacta, o menor será o divisor commum buscado, se não divide-se o menor pelo resto da 1ª divisão, o resto da 1ª divisão pelo da 2ª e assim successivamente até que haja um quociente exacto; o divisor qne concorrer para essa exacta divisão, será o maior divisor commum buscado.*

EXEMPLO

Supponhamos que tinhamos de achar o maximo commum divisor entre os dous termos da fracção $\frac{143}{637}$ Praticando a a regra vem

637	143	65	13
65			
	4	2	5
	13	00	

---

numero inteiro, porque é o quociente de **A** por **D**, e nós suppozemos que **D** dividia **A**; mas o producto de dous numeros inteiros é um numero inteiro; logo **B**×**Q** é um numero inteiro; e sendo o 2º membro um numero inteiro, o 1º tambem o é; mas o 1º membro é quociente de **A**×**B** por **D**, logo **D** divide **A**×**B**, como se queria demonstrar.

DEMONSTRAÇÃO DO 2º PRINCIPIO

Seja **M** o numero maior, **m** o numero menor, **R** o resto da divisão de **M** por **m**, **Q** o quociente desta divisão; e seja **D** o divisor de **M** e de **m**.

Como, por hypothese, **D** divide **M**, segue-se que o quociente de **M** por **D** será um numero inteiro

Como tambem, **D** divide **m**, o quociente de **m** por **D** será um numero inteiro.

Queremos demonstrar que $\frac{R}{D}$ será tambem um numero inteiro.

Ora, o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente, mais o resto; isto é:

$$M=mQ+R$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por **D**, vem:

$$\frac{M}{D}=\frac{mQ}{D}+\frac{R}{D}$$

O 1º membro desta igualdade é um numero inteiro, porque representa o quociente de **M** por **D**, e suppuzemos que **D** dividia **M**; logo o 2º membro tambem o deve ser. Ora o 2º membro é a somma

Demonstração da regra.—O maior divisor commum entre dous numeros, não póde ser maior que o menor delles; ora, o menor é o maior divisor exacto de si mesmo; se elle fôr do maior, será elle o maior divisor commum buscado ; para saber se o menor é divisor do maior, é pre-

---

das quantidades $\frac{mQ}{D}$ e $\frac{R}{D}$; $\frac{mQ}{D}$ é um numero inteiro, porque por hypothese **D** divide **m**, e, conseguintemente, divide o seu multiplo **mQ**, em virtude do 1º principio, logo $\frac{R}{D}$ será necessariamente um numero inteiro, porque se fosse fraccionario sommado com o numero inteiro $\frac{mQ}{D}$ daria um numero fraccionario, que seria igual ao numero inteiro $\frac{M}{D}$, o que é absurdo. E se $\frac{R}{D}$ é um numero inteiro, **D** divide **R**, como se queria demonstrar.

DEMONSTRAÇÃO DO 3º PRINCIPIO

Por hypothese **D** divide o resto **R**, e conseguintemente $\frac{R}{D}$ é um numero inteiro.

Tambem por hypothese **D** divide **m**, e portanto $\frac{m}{D}$ é um numero inteiro.

Vai-se demonstrar que **D** divide **M**, ou, o que é o mesmo, que $\frac{M}{D}$ é tambem um numero inteiro.

O dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente mais o resto, logo:

$$M=mQ+R$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por **D**, vem:

$$\frac{M}{D}=\frac{mQ}{D}+\frac{R}{D}$$

Se o 1º membro desta igualdade fôr um numero inteiro, ipso facto o 2º o será. Ora o 2º membro é a somma das quantidades $\frac{mQ}{D}$ e $\frac{R}{D}$; porém $\frac{mQ}{D}$ é um numero inteiro, porque **D** divide a **m** por hypothese, e conseguintemente ao seu multiplo **mQ**; $\frac{R}{D}$ é tambem um numero inteiro por hypothese ; a somma de dous numeros inteiros dá um numero inteiro, logo o 2º membro é um numero inteiro; e, portanto, o 1º tambem o deve ser. Logo **D** divide **M**, como se queria demonstrar.

ciso dividir o maior pelo menor ; e eis-aqui a razão porque se divide o maior pelo menor.

Applicando este raciocinio ao caso proposto, se dirá: o maior divisor commum entre 143 e 637 não póde ser maior que o menor delles, que é 143; ora, 143 é o maior divisor de si mesmo, se elle fôr do maior que é 637, será elle o maior divisor commum buscado; mas como se ha de saber se 143 é divisor de 637? Dividindo 637 por 143. Praticada a divisão, ha um resto 65: então faz-se com o resto 65 e o numero 143, o mesmo raciocinio que se fez com 637 e 143; isto é, o maior divisor commum entre 143 e 65 não póde ser maior que o menor delles que é 65; porém 65 é o maior divisor de si mesmo, se elle for de 143, será elle o maior divisor commum entre 65 e 143; e para saber se 65 é divisor de 143, é preciso dividir 143 por 65, e eis a razão por que se divide o menor pelo resto. Proseguindo da mesma fórma, se demonstrará porque se divide o resto 65 da 1ª divisão, pelo resto 13 da segunda; e como a divisão se faz exacta, se conclue que 13 é o maior divisor commum de si mesmo e de 65. Agora o que resta demonstrar é que 13 sendo o maior divisor de si mesmo e de 65, o será entre os dous numeros propostos.

Demonstração.—Não póde haver divisor commum entre 637 e 143, que não haja tambem entre 143 e 65 (em virtude do principio de que o numero que divide o maior e o menor divide o resto); não póde tambem haver divisor commum entre 143 e 65, que não haja entre 65 e 13 (em virtude do mesmo principio); ora, 13 é o maior divisor de si mesmo; é, tambem, de 65 porque a divisão se faz exacta; mas, não póde haver divisor commum entre 13 e 65, que não haja, tambem, entre 65 e 143 (em virtude do principio de que o numero que divide o resto e o menor divide o maior); nem póde haver divisor commum entre 65 e 143. que não haja entre 143 e 637 (em virtude do mesmo principio), logo 13 é o maior divisor commum buscado entre os dous numeros propostos, isto é, entre 637 e 143.

Achado o maior divisor commum, nada mais resta do que simplificar a fracção, dividindo-lhes ambos os termos por esse divisor. Fazendo isso, vem $\frac{143}{637} = \frac{11}{49}$; e tem-se a certeza de que esta fracção não póde mais exactamente ser simplificada, por isso que os termos da sua primitiva forão divididos pelo maior divisor exacto que podião ter, para produzir a fracção. Esta ultima fracção, que não é mais susceptivel de ser simplificada, por isso que seus termos não têm um divisor commum, chama-se fracção irreductivel.

E' occasião de notar, que todos os numeros que tem divisor commum são chamados primos entre si ; assim como se chamão primos os numeros que só tem por divisor a si ou a unidade. Para notar-se bem a differença que existe entre numeros primos e primos entre si, supponha-se os numeros seguintes : 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, etc. Estes numeros não podem ser divididos senão por si ou pela unidade, que essa é divisor de todo numero ; portanto são primos. Supponha-se agora os numeros seguintes : 14, 15. Estes numeros tem diversos divisores, isto é, o primeiro tem para divisores 2, e 7, e o segundo 3 e 5 ; porém nesses divisores nenhum havendo que seja commum, segue-se que os numeros são primos entre si. Com esta idéa que se acaba de adquirir ácerca de numeros primos entre si define-se : —*Fracção irreductivel, aquella cujos termos são numeros primos entre si.*

N. B.—Se, buscando-se o maior divisor commum entre dous numeros, vier para ultimo divisor a unidade, é signal de que esses numeros são primos entre si.

Reducção de fracções ao mesmo denominador

Já sabemos que a reducção de fracções ao mesmo denominador é fundada no principio de que se póde multiplicar ambos os termos de uma fracção pelo mesmo numero, sem que ella mude de valor. A reducção das fracções ao mesmo denominador serve para remover o obstaculo que se apresenta quando se quer sommar, ou subtrahir fracções de denominadores diversos, e para compara-las.

Supponhamos primeiramente as duas fracções $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{7}$. Ora, é claro que o denominador commum mais visivel que ellas podem ter é o formado do producto dos dous denominadores entre si, isto é, 5+7 ; porém para que o primeiro denominador seja esse producto, só lhe falta o factor 7, mas se multiplicarmos o denominador por 7, é preciso tambem multiplicar o numerador por 7, para que não se altere a fracção e vem $\frac{2\times7}{5\times7}$. Semelhantemente, para que o denominador da seguuda seja o producto 5×7, só lhe falta introduzir o factor 5, mais se multiplicarmos o denominador por 5 é preciso tambem multiplicar o numerador por 5 para que se não altere a fracção, e vem $\frac{3\times5}{7\times5}$. Analysando o que se tem feito, deduz-se a regra seguinte:—*Reduz-se duas fracções ao mesmo denominador, multiplicando ambos os termos de cada uma pelo denominador da outra.*

Supponha-se agora as fracções $\frac{3}{9}, \frac{4}{5}, \frac{2}{8}$. O denominador commum que mais se patenteia é o formado do producto de todos os denominadores entre si; isto é, $9\times5\times8$. Ora, para que o denominador da primeira seja este producto, é preciso introduzir-lhe os factores 5 e 8, porém se se multiplicar o denominador por 5×8, é preciso, tambem, multiplicar o numerador por 5×8 para que não se altere a fracção; e vem $\frac{3\times5\times8}{9\times5\times8}$. Para que o denominador da segunda seja o producto $9\times5\times8$, só lhe faltão os factores 9 e 8, isto é, 9×8, porém, multiplicando-se o denominador por 9×8, ha de se multiplicar o numerador por 9×8, pare que se não altere a fracção, e tem-se $\frac{4\times9\times8}{5\times9\times8}$. Finalmente, o denominador da terceira, para que seja o producto $9\times5\times8$, precisa dos factores 9 e 5, isto é, 9×5; porém, multiplicando o denominador por 5×9 é preciso multiplicar o numerador por 5×9, para que não se altere a fracção, e vem $\frac{2\times9\times5}{8\times9\times5}$.

Comparando estas fracções resultantes com as fracções propostas, ou analysando o que se tem feito, deduz-se a regra seguinte:— *Reduz-se tres ou mais fracções ao mesmo denominador, multiplicando ambos os termos de cada uma pelo producto dos denominadores de todas as outras.*

Casos ha, em que se póde dar ás fracções um denominador commum mais simples do que aquelle que se obteria pela regra geral; e isso, quando existe um denominador que é um multiplo de todos os outros, ou ha um maior divisor commum entre todos ou alguns denominadores.

1º Caso.—Sejão as fracções $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{9}{105}$. Para reduzil-as ao mesmo denominador, basta attender que 105 é multiplo de 21 e de 7; e então o denominador commum mais simples é 105; denominador este, qne se obtem: *dividindo o denominador multiplo* (105) *por cada um dos denominadores, e multiplicando ambos os termos das fracções respectivas pelo quociente obtido.* O quociente de 105 por 7 é 15; logo é por 15 que devemos multiplicar ambos os termos da 1ª fracção: o quociente de 105 por 21 é 5; e, por consequencia, é por 5 que devemos multiplicar ambos os termos da 2ª fracção. Fazendo isto, vem:

$$\frac{45}{105}, \frac{25}{105}, \frac{9}{105}$$

2º Caso.—Sejão as fracções $\frac{3}{18}$, $\frac{5}{27}$. Como entre os denominadores 18 e 27, ha o maior divisor commum 9, dividil-os-hemos por 9, e resultarão os quebrados $\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{3}$; os quaes, sendo reduzidos ao mesmo denominador, se transformão em $\frac{9}{6}$, $\frac{10}{6}$. Estes quebrados são respectivamente iguaes aos quebrados $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$; porém estes estão 9 vezes maiores que os primitivos $\frac{3}{18}$, $\frac{5}{27}$, por isso que delles resultarão, dividindo-se os denominadores por 9; logo $\frac{9}{6}$ e $\frac{10}{6}$, tambem estão 9 vezes maiores que os primitivos, e, portanto, para que lhes sejão iguaes, é preciso dividil-os por 9, o que se faz multiplicando o denominador commum por 9. Fazendo isso vem:

$$\frac{9}{54}, \frac{10}{54}$$

Claramente se vê que este denominador commum 54 é muito mais simples do que o que daria a regra geral que seria: $18 \times 27 = 486$.

3º *Caso.*—Sejão agora os quebrados a reduzir á mesma denominação, $\frac{2}{7}, \frac{4}{15}, \frac{1}{30}$. Neste caso não ha divisor commum entre todos os denominadores, 7, 15, 30; porém ha entre os dous ultimos, isto é, 15 e 30, e este é 15; portanto, dividindo-os pelo seu maior divisor commum 15, as fracções $\frac{4}{15}, \frac{1}{30}$, se reduzem a $\frac{4}{1}, \frac{1}{2}$; e como estas estão 15 vezes maiores que aquellas, é preciso tornar tambem 15 vezes maior a fracção $\frac{2}{7}$; mas esta não se póde tornar 15 vezes maior pela divisão do denominador, porque elle não tem para divisor 15, logo torna-la-hemos 15 vezes maior pela multiplicação do numerador. Fazendo isto, vem:

$$\frac{2\times15}{7}, \frac{4}{15:15}, \frac{1}{30:15} = \frac{30}{7}, \frac{4}{1}, \frac{1}{2}$$

Applicando a estas ultimas fracções $\frac{30}{7}, \frac{4}{1}, \frac{1}{2}$, a reducção ordinaria, vem:

$$\frac{30}{7}, \frac{4}{1}, \frac{1}{2}, = \frac{60}{14}, \frac{56}{14}, \frac{7}{14}$$

Estas fracções estão 15 vezes maiores que as primitivas, e, para que lhes sejão iguaes, é mister torna-las 15 vezes menores, o que se faz multiplicando o denominador commum por 15 Fazendo isto, as fracções $\frac{60}{14}, \frac{56}{14}, \frac{7}{14}$, se tornão em $\frac{60}{210}, \frac{56}{210}, \frac{7}{210}$.

Finalmente, se as fracções fôrem as seguintes: $\frac{3}{11}, \frac{7}{55}, \frac{5}{77}, \frac{1}{154}$, facilmente se vê que todos os denominadores tem para maior divisor commum 11, e por conseguinte se os divide por esse divisor, e as fracções se reduzem ás seguintes:

$$\frac{3}{1}, \frac{7}{5}, \frac{5}{7}, \frac{1}{14}.$$

Ainda, entre os dous ultimos denominadores das duas ultimas fracções $\frac{5}{7}, \frac{1}{14}$, ha o maior divisor commum 7, e, pois dividindo-os por esse divisor, ellas se tornão em $\frac{5}{1}, \frac{1}{2}$; fracções estas que são 7 vezes maiores que aquellas; e para que as outras duas primeiras $\frac{3}{1}, \frac{7}{5}$, tambem se tornem 7 vezes maiores, como isso não se consegue pela divisão dos denominadores, porque elles não tem o divisor 7, se conseguirá pela multiplicação dos numeradores por 7, e então todas as fracções $\frac{3}{1}, \frac{7}{5}, \frac{5}{7}, \frac{1}{14}$, se convertem nas seguintes :

$$\frac{3\times7}{1}, \frac{7\times7}{5}, \frac{5}{7:7}, \frac{1}{14:7} = \frac{21}{1}, \frac{49}{5}, \frac{5}{1}, \frac{1}{2};$$

Os denominadores destas ultimas $\frac{21}{1}, \frac{49}{5}, \frac{5}{1}, \frac{1}{2}$, não tem mais divisor commum, e, portanto, pratica-se sobre ellas a reducção ordinaria, e vem :

$$\frac{21}{1}, \frac{49}{5}, \frac{5}{1}, \frac{1}{2} = \frac{210}{10}, \frac{98}{10}, \frac{50}{10}, \frac{5}{10}.$$

Estas fracções estão 7 vezes maiores que as fracções $\frac{3}{1}, \frac{7}{5}, \frac{5}{7}, \frac{1}{14}$, porém estas são 11 vezes maiores que as primeiras $\frac{3}{11}, \frac{7}{55}, \frac{5}{77}, \frac{1}{154}$, logo as ultimas $\frac{210}{10}, \frac{98}{10}, \frac{50}{10}, \frac{5}{10}$, estão 7×11 vezes maiores que as primeiras; e para que ellas lhes sejão iguaes, é preciso que se tornem 7×11 vezes menores, o que se faz multiplicando o denominador commum por 7×11. Fazendo isto, vem:

$$\frac{210}{10.7.11}, \frac{98}{10.7.11}, \frac{50}{10.7.11}, \frac{5}{10.7.11} = \frac{210}{770}, \frac{98}{770}, \frac{50}{770}, \frac{5}{770}.$$

Se neste caso se usasse da regra ordinaria, o denominador commum seria $11\times55\times77\times154=7174090$; e então os quebrados que tivessem um denominador tão composto tal como este, serião quebrados de fórma muito composta, e que exigirião uma operação muito trabalhosa para serem reduzidos á simplicidade da primeira fórma: d'onde resulta a conveniencia do methodo exposto que se póde resumir na seguinte:

REGRA PARA REDUZIR DUAS OU MAIS FRACÇÕES AO DENOMINADOR COMMUM MAIS SIMPLES QUE É POSSIVEL

Dividem-se os denominadores entre os quaes ha divisor commum pelo maior divisor commum que entre elles houver, e multiplicão-se por esse maior divisor commum os numeradores daquellas fracções cujo denominador não o comprehende; se entre os denominadores das fracções resultantes houver algum divisor commum pratica-se com esses denominadores o mesmo que se tem praticado com os precedentes, e se se tiver recahido em fracções, cujos denominadores não encerrem mais algum divisor commum, reduzem-se pela regra ordinaria ao mesmo denominador, e multiplica-se esse denominador commum pelo divisor, ou producto dos divisores communs achados nos denominadores das fracções, conforme os denominadores tiverem um ou mais divisores communs.

Se se propuzesse a questão: « Dadas duas fracções $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{12}$, por exemplo, quer-se saber qual é a maior? » Sendo difficil responder immediatamente a esta questão, por isso que, se, por um lado, na segunda fracção a unidade se acha dividida em um numero maior de partes, que na primeira, por outro, tomão-se mais partes, fica removida essa difficuldade pela reducção ao mesmo denominador, que as torna nas equivalentes $\frac{36}{60}$ e $\frac{35}{60}$. Agora é evidente que a fracção $\frac{36}{60}$ é maior que a fracção $\frac{35}{60}$; porque de fracções que tem o mesmo denominador é maior aquella que tem maior numerador; e como a fracção $\frac{36}{60}$ é igual á fracção $\frac{3}{5}$ e a fracção $\frac{35}{60}$ é igual á fracção $\frac{7}{12}$, segue-se que $\frac{3}{5}$ é maior que $\frac{7}{12}$.

E' possivel tambem reduzir-se as fracções ao mesmo numerador, o que se faz multiplicando ambos os termos de cada uma pelo numerador da outra, para o caso de duas, ou pelo producto dos numeradores das outras, para o caso de tres ou mais; e se applica indifferentemente este ou aquelle meio á comparação das fracções; porém o primeiro possue sempre a vantagem de fazer conhecer ao mesmo tempo as differenças que existem entre as fracções comparadas duas a duas.

Observação.—Tendo-se demonstrado que, multiplicando ambos os termos de uma fracção pelo mesmo numero, a fracção não muda de valor, póde-se suppôr que, juntando-se a ambos os termos da fracção o mesmo numero, tambem não haja alteração de valor: e é esse engano muito susceptivel de dar-se, principalmente na intelligencia ainda não habituada ás transformações algorithimicas, que vamos prevenir.

Supponhamos a fracção $\frac{4}{5}$, aos dous termos da qual juntando-se 4, vem $\frac{8}{9}$. Reduzindo estas fracções a mesmo denominador para comparal-as vem;

$$\frac{4}{5}, \frac{8}{9} = \frac{36}{45}, \frac{40}{45},$$

onde se vê que a fracção $\frac{40}{45}$ é maior que a fracção $\frac{36}{45}$, o que é o mesmo que dizer que a fracção resultante $\frac{8}{9}$ é maior que a proposta $\frac{4}{5}$ (porque $\frac{40}{45} = \frac{8}{9}$ e $\frac{36}{45} = \frac{4}{5}$, e isto pelo principio que fundamenta a reducção das fracções ao mesmo denominador) logo a fracção proposta augmentou e de tanto, quanto é a differença entre as duas, isto é, de $\frac{4}{45}$.

Demonstração do facto.—Na fracção proposta $\frac{4}{5}$ a unidade é igual a $\frac{5}{5}$; e o excesso da unidade sobre ella será igual a $\frac{1}{5}$; na fracção resultante $\frac{8}{9}$, a unidade é expressa por $\frac{9}{9}$, e o excesso da unidade sobre $\frac{8}{9}$ é igual a $\frac{1}{9}$. Comparando estas duas differenças $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{9}$, vê se que ellas tendo numeradores iguaes, a segunda tem maior denominador e, portanto, será menor. Disto resulta que a fracção $\frac{8}{9}$

differe menos da unidade do que a fracção $\frac{4}{5}$ e por consequencia será aquella maior do que esta. Concebe-se bem que, quanto maior é o numero junto a ambos os termos da fracção $\frac{4}{5}$, menor é a differença entre a unidade e a fracção resultante, e maior, portanto, é a fracção. Este raciocinio se applica a qualquer fracção da mesma especie que $\frac{4}{5}$ e pois se póde estabelecer como regra a conclusão seguinte :—*Se aos dous termos de uma fracção propria se junta um mesmo numero, a fracção resultante é maior que a proposta, e tanto maior quanto maior é o numero que se junta.* Inversamente : *se aos dous termos de uma fracção propria se diminue um mesmo numero, a fracção diminue de valor.*

Supponhamos agora a fracção impropria $\frac{7}{3}$, e que se junta a ambos os seus termos o numero 5, por exemplo; a fracção resultante será $\frac{12}{8}$. Comparando estas fracções como no caso anterior, vem :

$$\frac{7}{3},\ \frac{12}{8}=\frac{56}{24},\ \frac{36}{24};$$

donde se conclue que a fracção $\frac{7}{3}$ diminuio pela addição feita do mesmo numero a ambos os seus termos; logo tambem se póde estabelecer a regra seguinte :— *Se aos dous termos de uma fracção impropria se junta um mesmo numero, a fracção diminue, e tanto mais, quanto maior é o numero que se junta.* Inversamente : *Se aos dous termos de uma fracção impropria se diminue um mesmo numero a fracção augmenta tanto mais quanto maior é o numero que se subtrahe de ambos os termos da fracção.*

ADDIÇÃO DE FRACÇÕES

A addição de fracções tem por fim reunir duas ou mais fracções em uma só.

REGRA.—*Sommão-se duas ou mais fracções sommando os numeradores e dando á somma o denominador commum.*

Demonstração.—O denominador de uma fracção, exprimindo o numero de partes em que a unidade se considera dividida, denomina a especie de grandeza a que o numerador se refere (de sorte que a fracção $\frac{3}{4}$ exprime 3 grandezas da especie quartos), e o numerador representando o numero d'essas grandezas, é claro que obteremos a totalidade dellas dividindo a somma desses numeros por um daquelles que exprime a especie de grandeza.

EXEMPLO

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4+2+3}{5}=\frac{9}{5}$$

Observação.—Quando as fracções propostas têm denominadores differentes, em virtude do principio de que se não póde sommar senão grandezas da mesma especie, deve-se primeiramente transforma-las em outras equivalentes, que tenhão o mesmo denominador, e depois sobre as resultantes se applica a regra acima dada.

EXEMPLO

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{5}+\frac{4}{8}=\frac{3\times5\times8}{7\times5\times8}+\frac{2\times7\times8}{5\times7\times8}+\frac{4\times7\times5}{8\times7\times5}=\frac{120}{280}+\frac{112}{280}+\frac{140}{280}=$$

$$=\frac{120+112+140}{280}=\frac{372}{280}$$

SUBTRACÇÃO DE FRACÇÕES

A subtracção de fracções tem por fim tirar uma fracção de outra que a exceda.

REGRA.—*Subtrahe-se uma fracção de outra, tomando* *a differença entre os numeradores, e dando-lhe a denominação commum.* A demonstração desta regra é a mesma da addição.

EXEMPLO

$$\frac{7}{6}-\frac{3}{6}=\frac{7-3}{6}=\frac{4}{6}.$$

Observação.—Quando as fracções tem differentes denominadores soffrem, como para o caso da addição, a operação da reducção ao mesmo denominador, em virtude do principio de que se não póde diminuir quantidades heterogeneas, ou de differentes especies.

EXEMPLO

$$\frac{6}{8}-\frac{2}{5}=\frac{6\times5}{5\times8}-\frac{2\times8}{5\times8}=\frac{30}{40}-\frac{16}{40}=\frac{30-16}{40}=\frac{14}{40}$$

Reducção do inteiro á denominação do quebrado

Um inteiro póde acompanhar um quebrado, ou pela intervenção do signal + ou do signal —, subentendendo se sempre o signal + quando o inteiro acompanha o quebrado sem interposição de signal algum; e póde-se propôr reunir o inteiro ao quebrado. A operação por meio da qual se faz esta reunião, chama-se *reducção do inteiro á denominação do quebrado.*

Regra geral.— *Reduz-se um inteiro á denominação do quebrado, multiplicando o inteiro pelo denominador juntando ou subtrahindo o numerador (conforme o inteiro acompanha o quebrado por interposição do signal + ou —), e dando o mesmo denominador.*

1º EXEMPLO

$$2\frac{3}{5}=\frac{2\times5+3}{5}=\frac{13}{5}$$

2º EXEMPLO

$$2-\frac{3}{5}=\frac{2\times5-3}{5}=\frac{7}{5}$$

Demonstração do 1º caso.— Uma unidade vale $\frac{5}{5}$, logo duas unidades valeráõ duas vezes $\frac{5}{5}$, ou $\frac{2\times5}{5}$; e pondo-se este valor em lugar do inteiro 2 vem:

$$2\frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5} = \frac{2\times5}{5} + \frac{3}{5}$$

e sommando estas duas fracções, vem $\frac{2\times5+3}{5}$. Esta fracção analysada dá a regra; isto é, o inteiro multiplicado pelo denominador, mais o numerador, e dividida esta somma pelo denominador.

A demonstração do 2º caso é a mesma do 1º, com a unica mudança de signal.

Reducção de um inteiro á denominação de quebrado

A reducção de um inteiro á denominação de quebrado é uma operação que tem por fim converter um inteiro em um quebrado cuja denominação é dada. Esta operação differe da precedente, em que nesta *(reducção de um inteiro á denominação do quebrado)*, entende-se pela contracção—do—que uma certa fracção acompanha o inteiro; entretanto que naquella *(reducção do inteiro á denominação de quebrado)*, entende-se pela preposição —de—que não ha fracção nenhuma acompanhando o inteiro, e que unicamente se tem de effectuar a passagem da fórma inteira á fraccionaria.

REGRA.—*Reduz-se um inteiro á denominação de quebrado, multiplicando o inteiro pela denominação e dando-se a mesma denominação.*

EXEMPLO

O inteiro 5. reduzido á denominação vinte *avos*, é igual a

$$\frac{5\times20}{20} = \frac{100}{20} = \frac{10}{2}$$

reduzido á denominação *septimos*, é igual a

$$\frac{5\times7}{7} = \frac{35}{7} \text{ etc.}$$

Corollario.— Das regras da reducção de um inteiro á denominação do quebrado, e de quebrado, segue-se que qualquer fracção impropria póde ser supposta resultante dessa reducção, e, portanto, encerrando no numerador o producto do inteiro pelo denominador. Assim pois, o numerador da fracção $\frac{2\times5}{5}=\frac{10}{5}$ é formado do producto do inteiro — 2 — pelo denominador—5—; e como dividindo um producto composto de dous factores, por um delles se obtem o outro, segue-se que quantas vezes o numerador de uma fracção impropria contiver o denominador, tantas serão as unidades do inteiro que essa fracção encerra; e é por isso que esta operação se chama *extracção de inteiros.*

Extracção de inteiros

Regra.—*Extrahe-se os inteiros de uma fracção impropria, dividindo o numerador pelo denominador.*

EXEMPLO

$$\frac{19}{5}=3\frac{4}{5}$$

Addição e subtração de inteiros accompanhados de fracções

As fracções dadas para sommar ou subtrahir podem vir accompanhadas de inteiros: e nesse caso, antes de se praticar a addição ou subtracção, reduz-se os inteiros ás denominações dos quebrados que os acompanhão.

1º EXEMPLO

$$5\frac{3}{8}+7\frac{3}{8}=\frac{5\times8+3}{8}+\frac{7\times8+3}{8}=\frac{43}{8}+\frac{59}{8}=\frac{43+59}{8}=\frac{102}{8}$$

2º EXEMPLO

$$7\frac{4}{5}-2\frac{3}{5}=\frac{7\times5+4}{5}-\frac{2\times5+3}{5}=\frac{39}{5}-\frac{13}{5}=\frac{39-13}{5}=\frac{26}{5}$$

Observações.—Póde-se tambem praticar a addição ou a subtracção, conservando os inteiros em evidencia: porém apresenta-se, para a subtracção, uma difficuldade, e é quando a fracção que acompanha o numero maior é menor que a fracção que acompanha o numero menor ; neste caso, *toma-se uma unidade ao inteiro, reduz-se essa unidade á denominação do quebrado, e torna-se assim possivel a subtracção.*

1º EXEMPLO

$$4\frac{3}{7}+7\frac{5}{7}=11\frac{8}{7}$$

2º EXEMPLO

$$7\frac{1}{5}-3\frac{4}{5}=6\frac{6}{5}-3\frac{4}{5}=3\frac{2}{5}$$

Multiplicações de fracções

A multiplicação das fracções, como a dos numeros inteiros, tem por fim compor com o multiplicando um numero que se chama producto, da mesma sorte que o multiplicador é composto com a unidade. Distingue-se dous casos: 1º, o da multiplicação de uma fracção por um inteiro, e este caso já foi dado ; e o 2º é o da multiplicação de uma fracção por outra, que é o que vamos ensinar.

REGRA.—*Multiplica-se uma fracção por outra, multiplicando os seus numeradores e denominadores entre si.*

EXEMPLO

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{4\times3}{5\times7}=\frac{12}{35}$$

Demonstração.—Multiplicar é compor com o multiplicando um numero, producto, da mesma sorte que o multiplicador é composto com a unidade. Desta definição se segue, que quando o multiplicador fôr 2 unidades, o producto será 2 vezes o multiplicando; quando fôr 3, o producto será 3 vezes o multiplicando, etc.; quando fôr $\frac{1}{2}$ será metade do multiplicando, quando fôr $\frac{2}{3}$, será os $\frac{2}{3}$ do multiplicando, etc. Ora, no caso da multiplicação de $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{7}$ o multiplicador é $\frac{3}{7}$ e portanto o producto é os $\frac{3}{7}$ do multiplicando $\frac{4}{5}$ de sorte que para se multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{7}$, se está reduzido a tomar os $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{5}$; porém toma-se os $\frac{3}{7}$ de uma quantidade qualquer, dividindo essa quantidade por 7 e multiplicando o quociente por 3; logo para tomar os $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{5}$, tem-se primeiramente de dividir por 7, (*o que se faz multiplicando o denominador por 7, e vem* $\frac{4}{5\times7}$) e depois multiplicar este quociente por 3 (*o que se faz multiplicando o numerador por 3*), e vem $\frac{4\times3}{5\times7}$. Esta fracção analysada dá a regra.

Outra demonstração.—Supponhamos que tinhamos de multiplicar $\frac{4}{5}$ não por $\frac{3}{7}$ mas sim por 3, que é um numero 7 vezes maior (*); então o producto seria $\frac{4\times3}{5}$ *(porque multiplica-se uma fracção por um inteiro, multiplicando o inteiro pelo numerador, e dando o mesmo denominador);* porém, como não se quer multiplicar $\frac{4}{5}$

(*) Demonstra-se que 3 é um numero 7 vezes maior que $\frac{3}{7}$ do modo seguinte:

Dizer-se que 3 é 7 vezes maior que $\frac{3}{7}$ é o mesmo que dizer que 3 é o producto de $\frac{3}{7}$ por 7; portanto, se se demontrar que 3 é o producto de $\frac{3}{7}$ por 7, ter-se-ha demonstrado a proposição.

Com effeito $\frac{3}{7}\times7=\frac{3}{1}=3$; pois multiplica-se uma fracção por um inteiro, dividindo o denominador pelo inteiro, e dando o mesmo denominador.

por 3, mas sim por $\frac{3}{7}$ que é um numero 7 vezes menor, segue-se que, quando suppuzemos para multiplicador o numero 3, considerámos um multiplicador 7 vezes maior que o verdadeiro, e, pois, o producto $\frac{4\times3}{5}$ deve tambem ter vindo 7 vezes maior do que aquelle que se busca (*porque para multiplicar um producto basta multiplicar um dos factores*); e para que elle seja o verdadeiro, é preciso dividil-o por 7, o que se faz multiplicando o denominador por 7 (*porque se divide uma fracção por um inteiro, multiplicando o inteiro pelo denominador e dando o mesmo numerador*). Fazendo isto, vem $\frac{4\times3}{5\times7}$ fracção que analysada dá a regra.

Observação.—Quando as fracções dadas para multiplicar são acompanhadas de inteiros, primeiramente reduzse os inteiros ás denominações dos quebrados que os acompanhão.

EXEMPLO

$$6\frac{2}{7}\times\left(7-\frac{3}{8}\right)=\frac{6\times7+2}{7}\times\frac{7\times8-3}{8}=\frac{44}{7}\times\frac{53}{8}=\frac{44\times53}{7\times8}=\frac{2332}{56}$$

Divisão de fracções

A divisão de fracções, como a dos numeros inteiros, tem por fim compôr com o dividendo um numero que se chama quociente, que seja do dividendo o que a unidade é do divisor. Distinguem-se tres casos: o 1º é o da divisão de uma fracção por um inteiro, e este caso já foi dado; o 2º é o da divisão de um inteiro por uma fracção; e o 3º é o da divisão de uma fracção por outra.

Regra do 2º caso.—*Divide-se um inteiro por uma fracção, multiplicando o inteiro pela fracção invertida.*

EXEMPLO

$$4\div\frac{2}{5}=4\times\frac{5}{2}=\frac{4\times5}{2}=\frac{20}{2}=10$$

Demonstração.—Dividir é compôr com o dividendo um numero, quociente, que seja do dividendo o que a unidade é do divisor. Desta definição se segue que quando o divisor fôr 1, o quociente será igual ao dividendo; quando o divisor fôr 2, o quociente será a metade do dividendo; quando o divisor fôr 3 o quociente será $\frac{1}{3}$ do dividendo, etc, quando o divisor fôr $\frac{1}{2}$ o quociente será o dobro do dividendo; quando o divisor fôr $\frac{1}{3}$, o quociente será o triplo do dividendo; quando o divisor fôr $\frac{2}{3}$ o quociente será os $\frac{3}{2}$ do dividendo, etc. No caso da divisão de 4 por $\frac{2}{5}$, o divisor é $\frac{2}{5}$; logo o quociente será os $\frac{5}{2}$ do dividendo que é 4; de sorte que, para se dividir 4 por $\frac{2}{5}$ se está reduzido a tomar os $\frac{2}{5}$ de 4; o que se faz dividindo 4 por 2, que dá $\frac{4}{2}$, e multiplicando este quociente por 5, e vem $\frac{4\times5}{2} = 4 \times \frac{5}{2}$; resultado que analysado dá a regra, isto é, o inteiro multiplicado pela fracção invertida.

Outra demonstração.—Supponhamos que se queria dividir 4 não por $\frac{2}{5}$ mas por 2, que é um numero 5 vezes maior; então o quociente seria $\frac{4}{2}$; mas, não se querendo dividir 4 por 2, e sim por $\frac{2}{5}$ que é um numero 5 vezes menor, segue se que, tendo-se supposto o divisor 5 vezes maior, o quociente deve ter vindo 5 vezes menor, (*porque quanto maior é o divisor, menor é o quociente, e vice-versa*); isto é, a fracção $\frac{4}{2}$ que é o quociente de 4 por 2, está 5 vezes menor do que o verdadeiro valor; e para que represente o verdadeiro quociente, é preciso multiplica-lo por 5, o que se faz multiplicando o seu numerador por 5. Fazendo isto, vem $\frac{4\times5}{2}=4\times\frac{5}{2}$. Este ultimo resultado analysado dá-nos o inteiro multiplicado pela fracção invertida, como manda a regra.

Regra do 3º caso.—*Divide-se uma fracção por outra, multiplicando a fracção dividenda pela fracção divisora invertida.*

EXEMPLO

$$\frac{4}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{4\times7}{5\times3} = \frac{28}{15}$$

Demonstração. E' a mesma que a do 2º caso, com a unica differença de em vez de se tomar um quebrado de um inteiro, tomar-se de outro quebrado; v. g., no exemplo proposto o divisor é $\frac{3}{7}$ e pois o quociente é os $\frac{3}{7}$ do dividendo $\frac{4}{5}$ de sorte que para dividir $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{7}$, se está reduzido a tomar os $\frac{7}{3}$ de $\frac{4}{5}$ o que se faz dividindo $\frac{4}{5}$ por 3, que dá $\frac{4}{5\times3}$ *(porque se divide uma fracção por um inteiro, multiplicando o inteiro pelo denominador e dando o mesmo numerador)* e multiplicando este quociente por 7; e vem $\frac{4\times7}{5\times3}$ *(porque se multiplica uma fracção por um inteiro, multiplicando o inteiro pelo numerador, e dando o mesmo denominador)*. Esta fracção analysada dá a regra.

Observação.—Quando as fracções a dividir são acompanhadas de inteiros, reduzem-se primeiramente os inteiros ás denominações dos quebrados.

EXEMPLOS

$$8\frac{3}{9} \div 3\frac{4}{8} = \frac{8\times9+3}{9} \div \frac{3\times8+4}{8} = \frac{75}{9} \div \frac{28}{8} = \frac{75}{9} \times \frac{8}{28} = \frac{75\times8}{9\times28} = \frac{600}{252}$$