SEGUNDA PARTE

CAPITULO III

Operações fundamentaes

Tendo a arithmetica por fim especial compôr e decompôr numeros, segue-se que devem haver especiaes operações que se prestem a esse duplo fim. Essas operações, que dão nascimento a outras, que por consequencia nellas se fundão, são chamadas operações fundamentaes, e são: *addição e multiplicação, subtracção e divisão.* Destas quatro operações, duas servem á composição, e duas á decomposição dos numeros; as duas que servem á composição são: *a addição e a multiplicação*; e as duas que servem á decomposição são: *a subtracção e a divisão.* Estas quatro operações se podem reduzir a duas geraes, que são: a *addição* para a composição, e a *subtracção* para a decomposição; porque as outras duas nada mais são do que casos particulares destas, como depois veremos: ora, compôr, quer dizer reunir, e decompôr, separar, porém reunir é o inverso de separar, logo as operações que servem para a composição são inteiramente inversas das operações que servem para a decomposição. Assim, pois, a subtracção é uma operação inversa da addição, e reciprocamente; e é por isso que servem-se mutuamente de prova. —

Cada uma destas operações dá lugar a considerar quatro cousas: 1ª, definição, que é o objecto a que nos propomos; 2ª, regra, que é o meio pelo qual chegamos ao resultado que buscamos; 3ª, demonstração da regra, que é o raciocinio por meio do qual nos convencemos da veracidade do processo; 4ª, prova, que é uma nova operação que serve de verificar o resultado da primeira. A ordem natural em que se devêrão apresentar estas operações seria: 1ª, as operações da composição; 2ª, as da decomposição, isto é, *addição, multiplicação, subtracção e divisão;* porém uma razão poderosa obriga a apresenta-las fóra dessa ordem, e sim debaixo da ordem seguinte: *addição, subtracção, multiplicação e divisão;* e essa razão vem a ser que, praticada a addição, que é a primeira operação de composição, necessario é provar essa operação; e como a operação que lhe serve de prova é a subtracção, segue se que, em ordem de doutrina depois da addição deve vir a subtracção: semelhantemente praticada a multiplicação, que é a segunda operação, de composição, é mister tambem provar essa operação; mas a operação que lhe serve de prova é a divisão; logo, dada a multiplicação, deve immediatamente vir a sua inversa, que é a divisão.

ADDIÇÃO

Definição.—Addição é a operação que tem por fim reunir dous ou mais numeros em um só. O problema da addição é o seguinte:—Dados dous ou mais numeros formar com elles um todo; e d'aqui vem, aos numeros dados chamar-se parcellas, e ao numero que se busca, total.

REGRA.—*Escrevem-se as parcellas umas debaixo das outras, de modo que suas unidades de uma mesma ordem se correspondão em uma mesma columna vertical; depois traça-se uma linha horizontal para separar as parcellas do todo, e somma-se cada columna da direita para a esquerda; se a somma não exceder a nove, escreve-se tal qual se acha; porém, se exceder, escrevem-se as unida-*

des em baixo da columna respectiva, e levão-se as dezenas a juntar á columna seguinte ; e assim se procede até á ultima columna, debaixo da qual se escreve o resultado tal qual se acha.

EXEMPLO

Sejão dados para sommar os numeros seguintes: 43798, 6057, 420, 37, 9.

Dispondo-se na ordem acima prescripta, vem :

$$\begin{array}{r} 43798 \\ 6057 \\ 420 \\ 37 \\ 9 \\ \hline 50321 \end{array}$$

Demonstração da regra.—Escrevem-se as parcellas de modo que suas unidades de uma mesma ordem se correspondão em uma mesma columna vertical, porque não se póde sommar nem subtrahir senão quantidades homogeneas ou da mesma especie. Somma-se da direita para a esquerda, porque nesse sentido conta-se com as reservas, e pratica-se a operação immediatamente ; entretanto que,se a somma fosse praticada da esquerda para a direita, não se poderia contar com as reservas, e praticar-se-hia mais de uma operação. Se a somma não exceder a nove, escreve-se o resultado tal qual se acha, porque, qualquer que seja esse resultado,desde um até nove,tem-se letra que o represente;d'ahi em diante, é preciso o artificio da numeração:e é por isso que a regra diz neste caso: *escrevem-se as unidades debaixo da da columna competente,e levão-se as dezenas a juntar á columna seguinte.* Por exemplo, a columna das unidades dá em totalidade trinta e uma unidades:ora,trinta e uma é igual a trinta e mais uma ; porém trinta unidades formão tres dezenas, que se deve levar para a columna das dezenas; logo resta uma unidade, que deve ser escripta em baixo da columna das unidades, etc. Na ultima columna se escreve o resultado tal qual se acha, porque já não ha mais columnas para juntar-lhes as unidades que se fórmão na columna precedente.

EXEMPLO DA SOMMA DA ESQUERDA PARA A DIREITA

	2	9	8	4	4	7
	7	8	9	3	8	2
	9	3	7	4	5	9
1	8	.	.	.	.	.
	2	0	.	.	.	.
		2	4	.	.	.
			1	1	.	.
				1	7	.
					1	8
1	.	.	.	.	.	.
1	0	.	.	.	.	.
		2	.	.	.	.
			5	.	.	.
				2	.	.
					8	8
2	0	2	5	2	8	8

Agora seguir-se-hia a prova; porém a prova da addição se pratica por meio da subtracção, que ainda não conhecemos; portanto, antes de darmos a prova da addição, passemos á subtracção.

SUBTRACÇÃO

Definição.—Subtracção é a operação que tem por fim tirar um numero de outro que o exceda.

O problema da subtracção é o seguinte:—Dada a somma de duas parcellas e uma dellas, achar a outra. O todo é o numero maior ou aquelle de que se subtrahe, e por isso se chama minuendo; a parte dada é o numero menor ou aquelle que se subtrahe, e por isso se chama subtrahendo; a parte buscada é o resultado da subtracção, e se chama resto, excesso ou differença.

Embora os diversos arithmeticos antigos e modernos considerem estes tres vocabulos como synonimos, ha todavia entre elles notavel indifferença: quando, dadas duas quantidades, se tem em vista tirar uma da outra, ao resultado obtido se dá o nome de *resto*; quando, porém, se tem em vista saber qual dellas é a maior, mas sem se importar de quanto, ao resultado se chama *excesso*; e quando, emfim, se quer saber qual dellas é a maior, mas avaliando esse excesso, o resultado tem o nome de *differença*.

Destas diversas accepções dadas aos vocabulos *resto*, *excesso*, *differença*, se deprehende que as denominações dadas ao resultado de uma subtracção são dependentes da natureza da questão que conduzio a essa operação; mas o que é verdade, é que, qualquer que seja a questão, tendo por fim determinar um resto, ou excesso, ou differença, ella é resolvida por meio da subtracção, e a subtracção sempre tem por fim tirar um numero de outro que o exceda.

REGRA.—*Escreve-se o numero menor em baixo do maior, isto é, o subtrahendo em baixo do minuendo, de maneira que suas unidades de uma mesma ordem se correspondão em uma mesma columna vertical; depois traça-se uma linha horizontal para separar o minuendo e o subtrahendo do resto, excesso ou differença, e subtrahe-se da direita para a esquerda cada algarismo do numero inferior, de cada algarismo do numero superior. Se o algarismo inferior fôr igual ao superior correspondente não ha differença, e se escreve zero debaixo da columna respectiva; se o algarismo inferior fôr menor que o superior correspondente, então ha differença, a qual tambem se escreve em baixo da columna competente; se, emfim, o algarismo inferior fôr maior que o superior correspondente, neste caso não é possivel praticar a subtracção sem usar do artificio seguinte:—Toma-se uma unidade ao algarismo immediato á esquerda, decompõe-se essa unidade em unidades da ordem de que se trata, juntão-se ás existentes nessa columna, e pratica-se a subtracção, considerando o algarismo da esquerda como diminuido de uma unidade.*

EXEMPLO:

$$\begin{array}{r} 636893 \\ 128973 \\ \hline 507920 \end{array}$$

Depois de dispôr os numeros propostos como manda a regra, isto é, o menor em baixo do maior, etc., attende-se que, como o primeiro algarismo inferior é igual ao superior correspondente, não ha differença, e por isso se escreveu zero debaixo dessa columna: na segunda columna, o algarismo inferior 7 é menor que o superior correspondente 9, e portanto ha de differença 2, a qual tambem se escreveu nessa columna; porém, na terceira columna, o algarismo inferior 9 é maior do que o superior correspondente 8, e, então, para se poder praticar a subtracção, toma-se uma unidade ao algarismo 6 da columna immediata á esquerda, que é a columna dos milhares; decompõe-se esse milhar nas dez centenas que elle vale, juntão-se essas dez centenas ás 8 existentes na columna das centenas e tem-se 18 centenas, das quaes, subtrahindo 9, restão 9; e como do algarismo 6 se tomou uma unidade, deve-se consideral-o como diminuindo dessa unidade, isto é, valendo 5. Nesta columna dá-se o mesmo inconveniente de não poder subtrahir-se de 5, 8 milhares, e portanto usa-se do mesmo artificio, isto é, toma-se uma unidade ao algarismo 3, decompõe-se essa unidade, que é uma dezena de milhar, nos dez milhares que ella vale, juntão-se esses dez milhares aos 5 que contém a columna dos milhares e se formão 15, dos quaes, subtrahidos 8 restão 7; e o algarismo 3, ficando diminuido de uma unidade, isto é, valendo 2, subtrahindo-se-lhe 2, nada resta, e por isso se escreveu zero na sua columna respectiva; finalmente, na ultima columna ha 6 unidades, das quaes, subtrahida uma, restão 5.

Este é o artificio usado, e aquelle que se aprende nas aulas primarias: porém ha um outro mais elegante, apresentando mais analogia com a regra da addição, e vem a ser o seguinte: *Junta-se dez unidades ao algarismo superior e uma ao algarismo inferior seguinte:*

EXEMPLO:

$$\begin{array}{r} 6\ 7\ 5 \\ 3\ 8\ 7 \\ \hline 2\ 8\ 8 \end{array}$$

675

O algarismo superior das unidades é menor que o inferior; portanto, para tornar possivel a subtracção, juntão-se 10 unidades ao algarismo superior 5, e ficão 15, das quaes subtrahindo 7, vem para resto 8: passando á casa seguinte, junta-se uma unidade ao algarismo 8 do numero inferior que fica valendo de 9; e, como não é possivel subtrahil-o de 7, procede-se da mesma fórma, isto é, juntão-se 10 unidades ao algarismo superior 7 (que fica valendo 17, de que, subtrahidos 9, restão 8), e uma unidade ao algarismo inferior seguinte, que fica valendo 4, e subtrahido de 6, dá para resto 2.

Demonstração da regra.—Esta regra é quasi evidente porque o minuendo sendo um todo cujas partes são o subtrahendo e o resto, elle representará a somma dos dous; logo, é claro que, abatendo-se successivamente desse minuendo todas as partes de que se compõe o subtrahendo, virá a outra parte, que é o resto; e esse resto exprimirá a differença entre os dous numeros propostos.

Quanto ao primeiro artificio que se empregou no caso do algarismo inferior ser maior do que o superior, não se faz mais do que desfazer aquillo que se fez na addição, como se vê no seguinte:

EXEMPLO:

$$\begin{array}{r} 654 \\ 387 \\ \hline 267 \end{array}$$

O primeiro algarismo 4 do minuendo é formado da somma entre o primeiro algarismo 7 do subtrahendo e o primeiro algarismo 7 do resto; porém a somma entre 7 e 7 é 14; e se ha 4 no minuendo, é porque as dez unidades forão em fórma de uma dezena juntar-se ao algarismo das dezenas; por consequencia, quando se tiver de proceder em ordem inversa, isto é, subtrahir da somma, que é o minuendo, a parte subtrahenda para obter a outra parte, que é o resto, deve-se ir buscar ao algarismo das dezenas aquellas 10 unidades que se ahi achão convertidas em uma dezena, para que juntas ás 4, fação a somma das 14 resultantes da addição entre os algarismos das unidades do minuendo e subtrahendo. O mesmo raciocinio se applica a todas as mais ordens de unidades.

Quanto ao segundo artificio, este funda-se no principio de que se juntar-se a ambos os termos de uma differença o mesmo numero, essa differença não se perturba. Isto vê-se bem, chamando 8 o minuendo ou um termo da differença, e 4 o subtrahendo, ou outro termo da mesma differença; isto é:

$$8-4=4$$

Juntando a ambos os termos da differença 4 o mesmo numero, por exemplo o numero 10, vem

$$18-14=4$$

Expressão esta que mostra que a differença 4 não soffreu variação alguma.

Ora, com effeito, quando se ajuntão 10 unidades ao algarismo superior, têm-se ajuntando 10 unidades a todo o minuendo, e por esse facto o resto vem augmentado de 10 unidades, porque quanto maior é o minuendo maior é o resto; quando se ajunta uma unidade ao algarismo inferior seguinte á esquerda, é o mesmo que ter ajuntado a todo o subtrahendo 10 unidades daquellas que juntou-se ao minuendo, pois sempre uma unidade da esquerda vale 10 da direita; e então por isso se fez o resto diminuido de 10 unidades, porque quanto maior é o subtrahendo, menor é o resto; e como ao mesmo tempo se tem augmentado e diminuido o resto da mesma quantidade 10, segue-se que elle não variou.

EXERCICIO

$$\begin{array}{r} 9\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,5 \\ 2\,7\,3\,1\,4\,5\,6\,8\,7 \\ \hline 6\,2\,6\,8\,5\,4\,3\,1\,8 \end{array}$$

SUBTRACÇÃO DE UMA DIFFERENÇA

REGRA.—*Subtrahe-se uma differença de um numero dado, tirando desse numero o maior termo da differença e juntando o menor.*

EXEMPLO

Seja a tirar de 36 a differença 8—3.

$$36-(8-3)=(36-8)+3=28+3=31$$

Demonstração.— Supponhamos que em lugar de subtrahir do numero 36 a differença 8—3, subtrahia-se unicamente o termo 8 dessa differença. E' claro que se subtrahiria um numero 3 vezes maior; o resto se tornaria, por tanto, 3 vezes menor; e para que seja o verdadeiro, será preciso juntar-lhe 3 unidades.

PROVA DA ADDIÇÃO

A prova da addição se pratica, somando successivamente da esquerda para a direita as diversas columnas; subtrahindo a somma de cada uma dellas da somma total; e considerando cada resto como dezena que se ha de juntar ao algarismo seguinte total; se em ultima differença houver zero, conclue-se que a conta está certa.

EXEMPLO:

```
  4 3 7 8
  2 5 3 9
  6 3 9 3
 ---------
1 3 3 1 0
  1 2 2 0
```

A somma da primeira columna á esquerda é 12, subtrahindo esta somma da somma total que é 13, ha de resto 1; que considerado como dezena e junto com esse valor ao algarismo 3 seguinte da somma total, fórma 13; de que subtrahida a somma da segunda columna que é 11, dá para resto 2; que tambem considerado como dezena vale 20, e junto ao algarismo 1 da somma total faz 21; de que se subtrahe a somma 19 da terceira columna, e vem para resto 2, que vale 20; e juntando o algarismo seguinte da somma total, que é zero, dá de novo 20, de que se subtrahe a somma 20 da quarta e ultima columna e dá para resto 0; e, portanto, a conta está certa.

Demonstração.—Somma-se da esquerda para a direita porque se tem em vista verificar o total, para isso é preciso analysal-o decompondo-o em suas partes; e para effectuar essa decomposição é preciso proceder de uma maneira inversa áquella pela qual se praticou a composição. Considerão-se os restos como dezenas que se devem juntar aos algarismos seguintes da somma total, porque cada resto sendo a differença entre o valor absoluto da parcella e a somma total, segue-se que elle representa as 10, 20, 30, 40, etc., unidades que da columna á direita vierão para a da esquerda em fórma de 2, 3, 4, etc., dezenas que ahi devêrão ser juntas; logo, quando se quizer transportar esses restos para as suas verdadeiras columnas, deve-se-lhes dar os valores que elles ahi têm; isto é, de 10, 20, 30, 40, etc.

Subtrahe-se emfim a somma de cada columna da somma total, porque a somma de cada columna é uma parte integrante desse total; e então á medida que se vão subtrahindo essas partes do todo, elle vai tendendo a aniquilar-se; de sorte que, quando se tiver subtrahido a somma de todas as columnas, é o mesmo que se ter subtrahido todas as partes do seu todo; e é obvio que, se esse todo fôr o verdadeiro, isto é, o formado pela reunião exacta dessas partes, elle se deve aniquilar; e é por isso que, quando em ultima differença se acha zero, conclue-se que a conta está certa, *porque se tem subtrahido de um todo as differentes partes de que elle se compunha.*

PROVA DA SUBTRACÇÃO

A prova da subtracção se pratica sommando o resto com o subtrahendo, e se em resultado vier o minuendo conclue-se que a conta está certa.

EXEMPLO:

$$\begin{array}{r} 7348 \\ 1572 \\ \hline 5776 \\ \hline 7348 \end{array}$$

Demonstração.—Tendo a subtracção por fim dado um todo, que é o minuendo, e uma de suas partes, que é o subtrahendo, achar a outra parte, que é o resto, segue-se que, se com effeito o resto é o verdadeiro, elle é uma parte do todo, minuendo, e por consequencia, junto á outra parte, subtrahendo, deve compôr o referido todo, minuendo.

MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação é um caso particular da addição de parcellas iguaes. Com effeito, quando se trata de sommar 7 com 7 e com 7, tem-se por objecto repetir 7 tres vezes; e com o fim de abreviar esta addição neste caso se deu nascimento a uma outra operação, que tem a vantagem de achar immediatamente o resultado de 7 repetido tres vezes; e esta operação é a multiplicação.

Daqui vem definir-se multiplicação a operação que tem por fim repetir um numero tantas vezes quantas são as unidades de outro. Esta definição é muito exacta e rigorosa para o caso dos numeros inteiros, porque o verbo repetir traz comsigo a idéa de augmento, e sempre nos numeros inteiros o resultado é maior que qualquer das partes que concorrem para a sua formação; porém quando os dous numeros que se têm de multiplicar são quebrados, então o resultado é sempre menor, e portanto a definição dada não abrange esse caso. Para não ter, como muitos autores fazem, de dar uma definição de multiplicação para os numeros inteiros e outra para os numeros quebrados, trato já de adoptar a definição generica, isto é, a que comprehende todos os casos de multiplicação.

Definição.—Multiplicação *é a operação em que são dados dous numeros para delles derivar um terceiro, chamado producto, que se deduz do multiplicando, como o multiplicador se deduz da unidade.*

O problema da multiplicação é o seguinte:—*Dados dous numeros, formar com elles um producto.* Esses numeros são chamados em commum factores do producto.

Dos dous numeros dados chama-se multiplicando o que é da especie do producto, do qual é conhecida a especie pelo enunciado, e o outro chama-se multiplicador, cuja especie é quasi sempre differente da do multiplicando, e que indica o quantum da deducção.

Ha tres casos de multiplicação: 1º, o da multiplicação de dous numeros simples entre si; 2º, o da multiplicação de um numero composto por um numero simples; 3º, o da multiplicação de dous numeros compostos entre si.

No 1º caso os productos se obtêm formando a seguinte

TABELLA DE PYTHAGORAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

CONSTRUCÇÃO DA TABELLA

Escrevem-se em uma linha horizontal todos os numeros simples, e tambem em uma linha vertical; depois somma-se a 1ª linha comsigo mesmo, e assim se fórma a 2ª linha horizontal; sommando a 1ª com a 2ª se fórma a 3ª, e sommando a 1ª com a 3ª, ou a 2ª comsigo mesmo se fórma a 4ª, etc.

Esta tabella é construida sob o principio de que o producto é equivalente á somma de tantas parcellas iguaes, quantas são as unidades do multiplicador, e encerra todos os productos dos numeros simples entre si, os quaes se obtêm tomando um factor na linha horizontal de cima e o outro na linha vertical da esquerda: e imaginando de cada um delles uma linha parallela á linha de situação do outro e prolongadas até se encontrarem, nesse encontro das linhas se acha o producto.

Querendo, por exemplo, formar o producto de 4 por 3, tomo na linha da esquerda o factor 4, e na primeira linha horizontal de cima o factor 3; desço verticalmente a partir desse factor, tantas casas quantas unidades tem o outro, isto é, quatro casas, e fronteiro a elle acho o numero 12, que é o producto procurado; ou o que é o mesmo, imagino a partir do factor 3 uma linha vertical, isto é, parallela á de situação do factor 4; e tambem do factor 4, uma linha horizontal, isto é, parallela á de situação do factor 3: estas duas linhas prolongadas, encontram-se no ponto em que se acha o numero 12, que é o producto buscado.

Nesta tabella se vê que, quer se tome o factor 4 para multiplicando, e o factor 3 para multiplicador, ou o factor 3 para multiplicando, e o factor 4 para multiplicador, o producto é 12; isto é, que tanto faz dizer 3 vezes 4 como 4 vezes 3; e como isto que se diz para os factores 3 e 4, diz-se para quaesquer factores, exprime-se esta propriedade debaixo do principio geral seguinte: *Quando os numeros são abstractos, a ordem dos factores não altera o producto.*

Para demonstrar esta propriedade de grande importancia na sciencia dos numeros, é preciso primeiramente estabelecel-a para o caso de dous factores; porque depois facil fica estendel-a a qualquer numero delles.

Supponhamos então que tinhamos de multiplicar 4 por 5. Si se decompõe estes factores em suas unidades, e se concebem as unidades de um factor dispostas em tantas columnas horizontaes quantas são as unidades do outro, vem,

$$\begin{array}{cccc|c}
1, & 1, & 1, & 1, & \\
1, & 1, & 1, & 1, & \\
1, & 1, & 1, & 1, & 20 \\
1, & 1, & 1, & 1, & \\
1, & 1, & 1, & 1, & \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{20} &
\end{array}$$

Evidentemente, a somma das unidades contidas neste quadro em sentido vertical, é igual a tantas vezes as cinco unidades contidas em uma linha vertical, quantas unidades ha em uma linha horizontal; e então equivale ao producto de 5 por 4; e a tantas vezes as quatro unidades contidas em uma linha horizontal, quantas são as unidades contidas em uma linha vertical; portanto equivale ella ao producto de 4 por 5: e como estas sommas são iguaes, e este raciocinio não depende do valor particular dos numeros considerados, segue-se que para o caso de dous factores, a ordem em que elles são tomados não altera o producto.

Ora, agora, seguir-se-hia demonstrar a mesma propriedade para o caso de um numero qualquer de factores; porém não podemos ainda, sem primeiro demonstrar a proposição seguinte: *multiplicar um numero pelo producto de outros dous, é o mesmo que multiplicar primeiramente por um delles, e depois multiplicar o producto resultante pelo outro.*

Demonstração.—Se o numero porque se tem de multiplicar o producto, fosse a unidade, a proposição seria evidente; porque si se tratasse, por exemplo, de multiplicar 1 por 42, decompondo 42 em seus factores 6 e 7, é claro que tanto faz multiplicar 1 por 6, o que dá 6, e o resultado por 7, que dá 42, como logo multiplicar 1 por 42, o que dá 42; porém, si se tivesse de multiplicar um numero qualquer, por exemplo, 4 por 42, então attende-se que 4 se decompõe em $1+1+1+1$; e se para o caso de 1, é verdadeira a proposição, será verdadeira para duas unidades, que são o dobro, para tres unidades, que são o triplo, e para quatro unidades, que são o quadruplo. Da mesma fórma se demonstraria que, se se tivesse de multiplicar 7 pelo producto dos numeros 4 por 5 e por 8, valeria o mesmo que multiplicar 7 por 4, e o producto achado por 5 e este ultimo producto por 8, e assim para qualquer numero de factores.

Estabelecido isto, passemos a demonstrar que em qualquer numero de factores, a ordem em que elles podem se achar não altera o producto. Seja $5\times3\times4$, o producto proposto. Ora, no producto 3×4, póde-se mudar a ordem dos factores 3 e 4, que ainda subsistirá o mesmo producto, segundo o que já se demonstrou; portanto, o producto $5\times3\times4$ é o mesmo que $5\times4\times3$: tambem póde-se mudar a ordem dos factores 5 e 4 sem que se altere o producto logo ainda o producto primitivo será equivalente a $4\times5\times3$; e assim fazendo com que cada factor occupe todos os lugares possiveis, dar-se-ha a um mesmo producto composto de tres factores todas as mudanças seguintes, que em algebra se dá o nome de *permutações*.

$$5\times3\times4$$
$$5\times4\times3$$
$$4\times5\times3$$
$$4\times3\times5$$
$$3\times4\times5$$
$$3\times5\times4$$

Isto estendendo-se a um numero qualquer de factores e os raciocinios que aqui se empregão sendo independentes do valor particular de cada factor, segue-se que fica provado que, *n'um producto qualquer, é indifferente a ordem em que se tomão os factores.*

MULTIPLICAÇÃO DE UM NUMERO SIMPLES POR UM COMPOSTO

REGRA. — *Escreve-se o multiplicador em baixo do multiplicando, traça se uma linha horizontal para separar os factores do producto, e multiplica-se da direita para a esquerda, cada ordem de unidades do multiplicando pelo multiplicador, levando as reservas de cada producto a juntar ao producto seguinte.*

EXEMPLO

$$\begin{array}{r} 324 \\ 6 \\ \hline 1944 \end{array}$$

Demonstração da regra.—Imaginando o multiplicando, que é um numero composto, decomposto em suas differentes ordens de unidades, se vê que, no caso em questão, elle é igual a tres centenas, mais duas dezenas, mais quatro unidades; e então é claro que se se formar o producto das tres centenas pelo multiplicador, o das duas dezenas pelo multiplicador, e o das quatro unidades pelo multiplicador, a somma destes productos parciaes deve dar o producto total, isto é, de todo o multiplicando pelo multiplicador; porém o producto de 3 centenas por 6, dá 18 centenas *(tabella de Pythagoras)*, o de 2 dezenas por 6, dá 12 dezenas, e o de 4 unidades por 6, dá 24 unidades, como se vê no calculo seguinte : logo, praticando a somma, vem o producto total 1944, que é o mesmo resultado obtido pela regra acima ; e pois, ella é verdadeira, por isso que nos conduz ao seu verdadeiro fim.

$$\begin{array}{r} 324 \\ 6 \\ \hline 1800 \\ 120 \\ 24 \\ \hline 1944 \end{array}$$

Observações.—Quando um dos factores, ou ambos, são terminados por zeros, pratica-se logo a multiplicação entre os algarismos significativos, sem attender aos zeros, e accrescenta-se depois á direita do producto tantos zeros, quantos ha no multiplicando e no multiplicador.

EXEMPLO

$$\begin{array}{r} 637 \\ 20 \\ \hline 12740 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 4500 \\ 20 \\ \hline 90000 \end{array}$$

Segundo os principios de numeração já estabelecidos, não deve parecer estranha a obrigação de accrescentar á direita do producto todos aquelles zeros, de que se fez abstracção durante a operação ; entretanto demonstraremos, para que não reste duvida algúma a semelhante respeito. Quando no segundo exemplo, se fez abstracção dos dous zeros no multiplicando, se o considerou 100 vezes menor (*porque supprimindo á direita de um numero inteiro duas cifras, se o divide por* 100) : logo por esse facto o producto veio tambem 100 vezes menor, (*porque menor factor, menor producto*): quando se fez abstracção do zero no multiplicador, tornamo-lo dez vezes menor, e por isso tambem o producto deve estar 10 vezes menor; portanto o producto está 10 vezes 100 ou 1000 vezes menor do que devêra vir; e para que se torne no seu verdadeiro valor, é preciso multiplica-lo por 1000, o que se faz accrescentando tres cifras á sua direita.

MULTIPLICAÇÃO DE UM NUMERO COMPOSTO POR OUTRO COMPOSTO

REGRA.—*Escreve-se o multiplicador em baixo do multiplicando, traça se uma linha horizontal para separar os factores do producto, e multiplica-se da direita para a esquerda todo o multiplicando por cada algarismo do multiplicador, escrevendo o primeiro algarismo de cada producto, em baixo do algarismo respectivo do multiplicador; sommão-se os productos parciaes, e tem-se o producto total; isto é, de todo o multiplicando por todo o multiplicador.*

EXEMPLO

4283	...... Multiplicando.
324	..... Multiplicador.
17132	..... Productos parciaes.
8566	
12849	
1387692	.... Producto total.

Demonstração da regra.—Decompondo o multiplicador em suas differentes ordens de unidades, e formando o producto do multiplicando por cada uma destas parcellas, a somma destes productos parciaes será o producto total. No caso proposto, o multiplicador é igual a tres centenas ou 300, mais duas dezenas ou 20, mais quatro unidades; formando pois, os productos do multiplicando por 300, depois por 20, e depois por 4, pelas regras anteriormente dadas, sommando estes productos parciaes, vê-se que o resultado é o mesmo obtido pela regra; logo ella é verdadeira; pois nos conduz ao verdadeiro fim.

15.

DIVISÃO

Definição.—Divisão *é a operação por meio da qual se deduz do dividendo um numero chamado quociente, que seja do dividendo o que é o divisor da unidade.* Assim, pois, a divisão é o inverso da multiplicação.

O problema da divisão é o seguinte:—*Dado um producto de dous factores e um delles, achar o outro factor.* E como o producto de dous numeros inteiros se compõe de tantas vezes o multiplicando quantas unidades ha no multiplicador, segue-se, que elle conterá tantas vezes um factor; quantas unidades ha no outro; e é por isso que se diz que um producto se divide em tantas partes iguaes a um factor, quantas são as unidades do outro. Debaixo deste ponto de vista, se tem chamado ao producto, *dividendo*, que é o numero que se divide, ao factor dado, *divisor*, que é o numero pelo qual se divide, e ao factor procurado, *quociente.* (*)

A divisão sendo um caso particular da subtracção, já se vê que póde ser praticada, subtrahindo-se o divisor do dividendo tantas vezes quantas sejão precisas para que este se aniquile: e o numero de vezes que se tiver praticado essas subtracções será o quociente buscado. Assim se se tivesse de dividir 32 por 8, se procederia deste modo:

$$
\begin{array}{r l}
32 & \\
8 & \\
\hline
24 & \ldots.(1) \\
8 & \\
\hline
16 & \ldots.(2) \\
8 & \\
\hline
8 & \ldots.(3) \\
8 & \\
\hline
0 & \ldots.(4)
\end{array}
$$

(*) A palavra quociente, deriva-se da palavra latina *quoties*; e quer dizer quantas vezes o dividendo contém o divisor.

O quociente seria 4, que é o numero de vezes que se praticou a subtracção; mas é claro, que este processo se torna prolixo quando o dividendo é um numero consideravel relativamente ao divisor, e é este inconveniente que tem dado nascimento á divisão, cujas regras passamos a expôr.

Ha tres casos de divisão a considerar: 1º, é o da divisão de dous numeros digitos, ou de um numero composto de dous algarismos por um numero digito quando o quociente é digito; 2º, é o da divisão de um numero composto de dous ou mais algarismos, por um numero simples ou digito; 3º, é o da divisão de dous numeros compostos.

No 1º caso, os quocientes se obtêm na tabella de Pythagoras, onde, desde que se encontrão os 81 productos dos numeros desde 1 até 9, se conhecem tambem os quocientes dos dividendos até 81 pelos divisores até 9. 15.

2º Caso

DIVISÃO DE UM NUMERO DE DOUS OU MAIS ALGARISMOS POR UM NUMERO SIMPLES

REGRA.—*Escreve-se o divisor á direita do dividendo, separa-se este daquelle por uma risca vertical, e o divisor do quociente por meio de uma barra horizontal; tomão-se tantas lettras á esquerda do dividendo quantas são necessarias para conter o divisor, busca-se o numero de vezes que se contém, e escreve se o quociente; fórma-se o seu producto pelo divisor, e subtrahe-se esse producto das lettras separadas á esquerda do dividendo; abaixa-se e escreve-se á direita do resto a lettra seguinte do dividendo, e continúa-se a divisão. Quando, porém, o resto com o algarismo seguinte do dividendo não contiver o divisor, escreve-se zero no quociente, e abaixando a lettra seguinte, continúa-se a operação.*

EXEMPLO

$$\begin{array}{r|l} 32056 & 8 \\ \cline{2-2} 0056 & 4007 \\ 0 & \end{array}$$

Demonstração da regra.—Divide-se da esquerda para a direita, porque o dividendo representa o producto do divisor pelos diversos algarismos do quociente, e na formação desses productos ha reservas que se vão agglomerar á parte esquerda do numero; e como essas reservas não podem ser previstas, é preciso desengloba las, o que se não póde fazer senão procedendo da esquerda para a direita.

Toma-se á esquerda do dividendo tantos algarismos quantos são precisos para conter o divisor, porque como não se póde dividir immediatamente todo o dividendo, não ha outro meio senão decompô-lo nos differentes productos parciaes.

No caso proposto, o facto do algarismo 3 não conter o divisor significa que não ha no quociente unidades dessa ordem, e as que existem no dividendo representão reservas do producto immediato; isto é, o algarismo 3 é da ordem dezena de milhar, e não conter elle o divisor, quer dizer que não ha dezenas de milhar no quociente, e as que ha no dividendo são reservas do producto dos milhares do quociente pelo divisor. Com effeito, 4 milhares do quociente pelo divisor 8 dão em producto 32 milhares, que formão 2 milhares e 3 dezenas de milhar.

Multiplica-se o quociente achado pelo divisor, para ter em evidencia o producto parcial dessa ordem, e subtrahe-se esse producto do dividendo parcial, para desenglobar as reservas que porventura ahi se achem contidas.

Baixa-se e escreve-se á direita do resto o algarismo seguinte do dividendo, porque o resto sendo reservas do producto da ordem a que pertence esse algarismo, é preciso escrevel-o em seguida a esse resto para assim ter em evidencia o producto parcial da ordem buscada para o quociente.

Corollario.—Disto se segue que, dado um dividendo e um divisor, póde-se logo determinar o numero de algarismos do quociente.

Com effeito, supponhamos que o dividendo era 7281 e o divisor era 9, é claro que os 7 milhares do dividendo não contendo o divisor, não haverá milhares no quociente; e as 72 centenas contendo o divisor, segue-se que a unidade mais elevada do quociente é centenas, e por consequencia ha *centenas*, *dezenas* e *unidades*, ou tres algarismos no quociente.

3º Caso

DIVISÃO DE UM NUMERO COMPOSTO POR OUTRO COMPOSTO

REGRA.—*Escreve se o divisor á direita do dividendo, separados por um risco vertical, traça-se uma linha horizontal para separar o divisor do quociente; depois, separa-se á esquerda do dividendo tantos algarismos quantos sejão precisos para conter o divisor, e assim se fórma um dividendo parcial; divide-se o primeiro ou os dous primeiros algarismos desse dividendo parcial pelo primeiro do divisor (conforme esse primeiro algarismo do dividendo é pelo menos igual ao divisor); acha-se o quociente, fórma-se o seu producto por todo o divisor, e subtrahe-se esse producto do dividendo parcial; abaixa-se e escreve-se á direita do resto a lettra seguinte do dividendo, e continúa-se a divisão do mesmo modo até a ultima lettra do dividendo, que dará a ultima do quociente. Quando o resto com a lettra seguinte do dividendo não contiver o divisor, escreve-se zero no quociente, e abaixando-se a lettra seguinte, continúa-se a operação.*

EXEMPLO

$$\begin{array}{r|l} 2\,5\,9\,5\,7\,8 & 5\,9\,4 \\ \cline{2-2} 2\,1\,9\,7 & 4\,3\,7 \\ 4\,1\,5\,8 & \\ 0\,0\,0\,0 & \end{array}$$

Demonstração da regra.—A demonstração desta regra é a mesma da do segundo caso; accrescentando-se unicamente, o porque dividindo-se o primeiro ou os dous primeiros algarismos do dividendo pelo primeiro do divisor, se obtem o quociente do dividendo por todo o divisor.

Sendo o primeiro dividendo parcial, no exemplo proposto, 2595, seria muito difficil, e até mesmo inexequivel determinar-se immediatamente o quociente desse dividendo por 594; mas então attende-se que o dividendo 2595 está comprehendido entre 2500 e 2600 centenas: isto é, entre 25 e 26 dezenas de milhar, assim como o divisor 594 se acha comprehendido entre 500 e 600 unidades; isto é, entre 5 e 6 centenas; portanto, para se determinar o quociente de 2595, por 594, se está reduzido a dividir 25 dezenas de milhar por 5 centenas, o que dá 4 centenas, etc.

OBSERVAÇÃO

Quando o dividendo e o divisor são terminados por cifras, abrevia-se a divisão, fazendo em ambos abstracção de igual numero dellas, o que não altera o quociente.

EXEMPLO

```
4 3 7 8 0 (0 0 | 2 6 (0 0
1 7 7          |---------
  2 1 8        | 1 6 8 3
    1 0 0      |
      2 2      |
```

Demonstração.—Quando se fez abstracção das duas cifras no dividendo, se o dividio por 100 (*em virtude dos principios de numeração)*, e, portanto, dividio-se por 100 o quociente; quando se fez abstracção das duas cifras no divisor, tambem se o dividio por 100, e por esse facto, multiplicou-se por 100 o quociente; e, pois, se ao mesmo tempo se dividio e multiplicou o quociente pelo mesmo numero 100, houve compensação, logo elle não mudou de valor.

PROVA DA MULTIPLICAÇÃO

Tendo a muitiplicação por fim:—*Dados dous factores compor com elles um producto*; e tendo por objecto a divisão:—*Dado um producto de dous factores e um desses factores achar o outro*, é claro, que se verificará um producto, dividindo-se por um dos factores; e se no quociente vier o outro factor, é prova de que o producto é verdadeiro.

EXEMPLO

$$\begin{array}{r}
424 \\
37 \\
\hline
2968 \\
1272 \\
\hline
15688
\end{array}
\qquad
\text{Prova...}\quad
\begin{array}{r|l}
15688 & 424 \\ \cline{2-2}
2968 & 37 \\
000 &
\end{array}$$

PROVA DA DIVISÃO

A divisão tem por objecto:— *Dado um producto de dous factores, e um desses factores, achar o outro*, e sendo o producto o dividendo, o factor dado, o divisor. e o factor buscado, o quociente, segue-se que o quociente multiplicado pelo divisor deve reproduzir o dividendo: logo, quando se quizer verificar um quociente, nada mais é preciso do que multiplica-lo pelo divisor, e se vier o dividendo, o quociente será exacto.

EXEMPLO

$$\begin{array}{r|r}
15688 & 424 \\ \cline{2-2}
2968 & 37\ldots\ldots \text{ Prova.} \\ \cline{2-2}
0000 & 2968 \\
 & 1272 \\ \cline{2-2}
 & 15688
\end{array}$$

OBSERVAÇÃO

Quando na divisão houver resto, neste caso ella tem por fim achar o maior multiplo do divisor, que o dividendo póde conter: e então, depois de se formar esse multiplo que é o producto do quociente pelo divisor, é mister juntar-se-lhe o resto, para que se produza o dividendo.

MEIOS DE ABREVIAR A MULTIPLICAÇÃO

1.º Quando os numeros a multiplicar não são muito consideraveis, póde-se escrever immediatamente o producto total, sem se formar os productos parciaes.

Seja, por exemplo, a multiplicar 264 por 32.

Diz a regra que para effectuar a multiplicação destes dous numeros, deve-se multiplicar cada algarismo do multiplicador por todo multiplicando, isto é: temos que multiplicar 3 dezenas e 2 unidades por 2 centenas, 6 dezenas e 4 unidades.

Para effectuar estas multiplicações parciaes, sabe-se que basta multiplicar 3 e 2 por 2, por 6 e por 4, accrescentando á direita de cada producto tantos zeros quantos forem os algarismos que existão adiante dos factores nos numeros propostos.

Assim, para obter o algarismo que representará as unidades no producto total, deveremos fazer o producto das unidades do multiplicando pelas do multiplicador; isto é: $2 \times 4 = 8$.

$$\begin{array}{r} 264 \\ 32 \\ \hline 8448 \end{array}$$

O algarismo que deverá representar as dezenas será a somma dos productos das unidades do multiplicando pelas dezenas do multiplicador e das dezenas do multiplicando pelas unidades do multiplicador; isto é: 6 desenas$\times$2 unidades + 3 dezenas$\times$4 unidades $= 60 \times 2 + 30 \times 4 = 120 + 120 = 240$ unidades = 24 dezenas.

Escreve-se no producto as 4 dezenas e guarda-se 20 ou 2 centenas para serem addicionadas ao producto das centenas.

O algarismo que deverá representar este producto será a somma dos productos das unidades do multiplicador pelas centenas do multiplicando e das dezenas do multiplicando pelas dezenas do multiplicador; isto é: 2 unidades$\times$2 centenas + 6 dezenas$\times$3 dezenas $= 2 \times 200 + 60 \times 30 = 400 + 1800 = 2200$ unidades ou 22 centenas.

Addicionando-se a estas 22 centenas as 2 resultantes do producto anterior, teremos 24.

Escreve-se no producto as 4, e guarda-se as 20 centenas ou 2 milhares para serem addicionadas ao producto seguinte.

O algarismo que deverá representar o producto dos milhares será o producto das centenas do multiplicando pelas dezenas do multiplicador; isto é: 2 centenas $\times$ 3 dezenas $=$ $= 200 \times 30 = 6000$ unidades $=$ 6 milhares.

Juntando a estes 6 milhares os 2 que havião restado do producto das centenas, teremos 8 que se escreverá no producto total.

Será, pois. 8448 esse producto.

2.º Quando se têm de multiplicar entre si dous numeros consideraveis, abrevia-se o calculo da multiplicação tornando-o menos fatigante, formando primeiramente os productos do multiplicando por todos os algarismos diversos do multiplicador, e dispondo-os depois segundo a ordem em que estes algarismos se succedem.

Trata-se, por exemplo, de multiplicar os numeros 295867143 e 57423128. Para abreviar esta multiplicação, nota-se primeiro que no multiplicador existem os algarismos distinctos 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 e formão se os productos successivos do multiplicando por cada um destes algarismos, constituindo a tabella seguinte :

1	2 9 5 8 6 7 1 4 3
2	5 9 1 7 3 4 2 8 6
3	8 8 7 6 0 1 4 2 9
4	1 1 8 3 4 6 8 5 7 2
5	1 4 7 9 3 3 5 7 1 5
6	1 7 7 5 2 0 2 8 5 8
7	2 0 7 1 0 7 0 0 0 1
8	2 3 6 6 9 3 7 1 4 4

Agora toma-se nesta tabella os productos do multiplicando pelos algarismos 8, 2, 1, 3, 2, 4, 7, 5 do multiplicador, e se colloca, como abaixo se vê, no lugar que lhes convém, pela ordem das unidades que representão, e sommando esses productos, tem-se o producto pedido.

2 3 6 6 9 3 7 1 4 4
5 9 1 7 3 4 2 8 6 .
2 9 5 8 6 7 1 4 3 . .
8 8 7 6 0 1 4 2 9 . . .
5 9 1 7 3 4 2 8 6 . . . .
1 1 8 3 4 6 8 5 7 2 . . . . .
2 0 7 1 0 7 0 0 0 1 . . . . . .
1 4 7 9 3 3 5 7 1 5 . . . .
1 6 9 8 9 6 1 6 8 2 3 4 8 3 3 0 4

A vantagem deste methodo consiste em que por maior que seja o numero de algarismos do multiplicador nunca se tem de formar mais que nove productos ; e tudo o mais se reduz a uma simples addição.

MEIO DE ABREVIAR A DIVISÃO

A divisão se abrevia, formando uma tabella que contenha o producto do divisor pelos numeros digitos ; depois busca-se nessa tabella o dividendo parcial, ou o numero mais proximo, e o numero digito que lhe corresponde é o quociente parcial ; subtrahe-se o multiplo achado, do dividendo, parcial ; abaixa-se o algarismo seguinte do dividendo, examina-se na tabella qual é o multiplo mais proximo do novo divididendo parcial, e o numero digito correspondente será o outro quociente parcial, etc.

EXEMPLO :

4379863	4124	1	4124
4124	1062	2	8248
25586		3	12372
24744		4	16496
8423		5	20620
8248		6	24744
175		7	28868
		8	32992
		9	37116