SETIMA PARTE

CAPITULO VIII

Theoria dos numeros complexos

Até aqui temos tratado dos numeros incomplexos, isto é, daquelles que se referem a uma unica unidade. E, se não fosse introduzido, para os diversos misteres da vida, da diversidade de systemas de dividir e subdividir as unidades, se todas as nações cultas, inclusive a nossa, já tivessem acompanhado a França na adopção do systema metrico, tornar-se-hia ocioso este capitulo. Entretanto, emquanto ellas não se aproveitão das grandes vantagens que resultarão para o commercio e communicacões dos povos, desde que todas adoptarem semelhante systema, exporemos do modo o mais perfunctorio que nos seja possivel esta theoria, que nada mais é do que um complemento á theoria geral das fraccões.

Definição.—Numero complexo é o que consta de partes que exprimem unidades diversas, resultantes da subdivisão de uma unidade principal.

A theoria dos numeros complexos basêa-se nos dous problemas seguintes, inversos um do outro, e que por isso servem-se mutuamente de prova.

1º Problema.—Dado um numero complexo, convertê-lo em fracção ordinaria da unidade principal.

Solução.—Seja o numero $7^b, 1^v, 3^p, 5^p$. Trata-se de convertêl-o em fracção ordinaria da unidade principal, que é a braça. Para isso reduz-se primeiramente todo o numero a unidades de infima especie, o que se consegue do modo seguinte: 1 braça vale duas varas, logo 7 braças valerão 7×2, ou 14 varas, que com uma fazem 15^v; e como 1 vara vale 5 palmos, segue-se que 15^v, valerão 15×5, ou 75^p, que com os 3 existentes se tornarão em 78^p, e como, finalmente, 1 palmo vale 8 pollegadas, segue-se que 78^p, valerão 78×8 ou 624^p que com cinco fazem 629^p. Reduzindo depois a unidade principal a unidades de infima especie, vem: $1^b, =80^p$. E se $1^b, =80^p$, segue-se que $1^p = \frac{1^b}{80}$, e por consequencia $629^p, = \frac{629^b}{80}$. D'aqui a seguinte:

Regra para converter um numero complexo em fracção ordinaria da unidade principal ou de qualquer outra unidade que seja um multiplo ou submultiplo desta.

Reduz-se o numero proposto a unidades de infima especie; reduz-se tambem a unidade principal, ou aquella da qual se quer ter a fracção, a unidade de infima especie; divide-se o primeiro resultado pelo segundo, e tem-se a fracção ordinaria procurada.

2º *Problema.*—Dada uma fracção ordinaria de uma certa unidade principal, convertê-la em numero complexo.

Solução.— Seja a fracção ordinaria $\frac{629^b}{80}$. Trata-se de convertê-la em numero complexo; o que se consegue dividindo o numerador pelo denominador, do modo seguinte:

629^b	80
69	$7^b\ 1^v\ 3^p\ 5^p$
2	
138^v	
58	
5	
290^p	
50	
8	
400^p	
00	

Achado o quociente de 629 por 80, restão 69 braças que se convertem em varas multiplicando por 2; obtido o quociente de 138^v por 80, ha para resto 58^v, que se convertem em palmos, multiplicando por 5; dividindo depois 290^p por 80, vem para quociente 3^p e para resto 50^p, que se convertem em pollegadas, multiplicando por 8, e vem 400^p, que divididas por 80, dão para quociente 5^p.

Regra para converter uma fracção de uma certa unidade pr ncipal em numero complexo

Divide-se o numerador pelo denominador: o quociente exprime as unidades principaes, e o resto se converte em unidades da 1ª divisão: divide-se o producto pelo mesmo divisor, e o quociente mostra unidades da mesma 1ª divisão: havendo novo resto, reduz se ainda a unidades da seguinte subdivisão, e continua-se do mesmo modo até chegar á classe infima das unidades, ou subdivisões.—

Conhecida a solução destes dous problemas, póde se praticar as quatro operações sobre os complexos pelas mesmas regras das fracções ordinarias, desde que préviamente se tiver nelles effectuado a conversão. Prescindiremos de exemplificar esses processos por serem intuitivos a quem conhece a theoria das fracções, e passamos a tratar de methodos especiaes e directos.

Addicção de complexos

REGRA.—*Escrevem-se as parcellas umas debaixo das outras de modo que as unidades da mesmo subdivisão se correspondão em uma mesma columna vertical e sommão se da direita para a esquerda; se a somma não chegar a formar uma unidade de classe immediatamente superior, escreve-se tal qual se acha; porém se contiver algumas, extrahem-se e reservão-se; escreve-se em baixo da columna respectiva o excesso da somma sobre as unidades reservadas, e levão-se as reservas a juntar á columna seguinte, e assim successivamente até á ultima columna, cuja somma se escreve por extenso...*

EXEMPLO

Sejão para sommar os numeros

	@	lb	m.	onç.	oit.	gr.
	57	23	1	5	7	39
	15	19	0	3	6	47
	18	7	1	7	4	3
	9	31	0	0	2	71
Somma.	101	18	0	1	5	16
Prova. .	32	22	2	2	2	20

A columna das unidades de infima especie dá para somma 160; e, como 72 grãos formão uma oitava, divide-se 160 por 72, e acha-se para quociente 2 oitavas. e para resto 16 grãos; escreve-se este resto em baixo da columna respectiva, e levão-se as reservas obtidas no quociente a juntar á columna seguinte das oitavas; esta columna dá para somma 21, que se divide por 8, porque 8 oitavas constituem uma onça, e vem para quociente 2 onças, e para resto 5 oitavas: este resto se escreve em baixo da columna competente, e levão-se as reservas a juntar á columna seguinte das onças. E assim semelhantemente se procede a respeito de todas as outras columnas.

Prova da addição de complexos

A prova da addição de complexos se pratica do mesmo modo que a dos numeros incomplexos, attendendo que o ultimo resto de cada columna se converte em unidades da ordem immediatamente á direita, e se juntão á somma total da columna dessa mesma ordem. Por exemplo, a somma das dezenas da columna das arrobas é 7, que subtrahidas das 10 da somma total se reduzem a 3 dezenas, que valem 30 unidades, as quaes sommadas a 1 da somma total perfazem 31 unidades. Sommando depois a columna das unidades de arrobas, obtemos 29, as quaes tambem se subtrahem da somma total 31, e vem 2 unidades para resto. Estas unidades convertidas em libras dão 64, que juntas ás 18 da somma total perfazem 82 libras; e subtrahindo das 8 dezenas da somma as 6 das columnas das libras vem para resto 2 dezenas, que valem 20 unidades as quaes sommadas ás duas da somma total fazem 22, de que se subtrahe a somma 20 da columna das unidades de libras, e vem para resto 2 libras, que se convertem em 4 marcos, dos quaes se subtrahe a somma 2 da columna dos marcos e vem para resto 2, etc.

Subtracção dos complexos

REGRA.—*Escreve-se o subtrahendo em baixo do minuendo, de modo que suas unidades de uma mesma classe se correspondão em uma mesma columna vertical, e subtrahe-se da direita para a esquerda cada classe do numero inferior de cada classe do numero superior. Se a classe inferior fôr igual á superior correspondente não ha differença, e se escreve zero em baixo da columna respectiva; se a classe inferior fôr menor que a superior correspondente, ha differença, a qual tambem se escreve em baixo da columna competente; se, finalmente, a classe inferior fôr maior que a superior correspondente, junta-se á superior uma unidade da classe immediatamente maior, decomposta em unidades da classe de que se trata, e pratica-se a operação, considerando a classe superior da esquerda como diminuida de uma unidade. Quando porém a classe ou classes da esquerda forem iguaes a zero, recorre-se áquella que o não seja, e pratica-se a operação considerando todas essas classes contendo tantas unidades menos uma quantas são aquellas que fazem uma unidade superior.*

EXEMPLO

	T	P	p	c
	52	0	0	8
	23	4	7	11
Resto...	28	1	4	9
Prova...	52	0	0	8

Exposição.—Como não se póde subtrahir 11^l de 8^l, recorre-se á casa das pollegadas; e esta sendo zero, recorre-se á dos pés, e como tambem é zero, vai-se á das toezas, e toma-se 1, que se decompõe em 6 pés; depois toma-se um pé, e decompõe-se em 12 pollegadas. e 1 pollegada em 12 linhas; de sorte que a classe das toezas só tem 51, por isso que 1 foi para a casa dos pés; a dos pés só tem 5, porque 1 foi para a casa das pollegadas; e a das pollegadas só tem 11, porque 1 foi para a casa das linhas em fórma de 12, que com 8 fazem 20, de que subtrahindo 11, restão 9. E assim se continúa a operação deduzindo de 11^p $7,^p$ de 5^p 4^p, e de 51^t 23^t.

Prova da subtracção de complexos

A prova da subtração de complexos se pratica como a dos numeros incomplexos; isto é, sommando o numero menor com o resto, devendo obter-se em resultado o numero maior, se por ventura a conta estiver certa.

Multiplicação de complexos

Nesta operação distinguem-se dous casos: 1º é o da multiplicação de um numero complexo por um incomplexo; o 2º é o da multiplicação de dous numeros complexos entre si.

REGRA DO 1º CASO.— *Escreve-se o multiplicador em baixo do multiplicando, traça-se uma linha horizontal para separar os factores do producto, e multiplica-se da direita para esquerda cada classe do multplicando pelo multiplicador, extrahindo de cada producto as reservas nelle incluidas, e levando-as a juntar ao producto seguinte.*

EXEMPLO

$$\begin{array}{r} 347\ £\quad 17^s\quad 9^d \\ 37\qquad\qquad\quad \\ \hline 12871\ £\quad 16^s\quad 9^d \end{array}$$

Exposição.—Multiplicando 9^d por 37, vem 333^d; e como 1 soldo vale 12 dinheiros, divide-se 333 por 12, e vem no quociente 27^s e no resto 9^d. Escreve se o resto em baixo da columna dos dinheiros, e guardão-se as reservas representadas pelo quociente para juntar ao producto seguinte dos soldos. Multiplicando depois 17^s por 37^d, vem 629^s, aos quaes se juntão os 27 de reserva, e obtem-se 656^s; e como 20^s constituem 1 £, divide-se 650 por 20, e vem para quociente 32 e para resto 16. Escreve-se este resto em baixo da columna dos soldos, e leva-se o quociente 32, que exprime as reservas, a juntar ao producto das libras. Multiplicando, finalmente, 347 £ por 37, resulta o producto 12839 £, que juntas ás 32 £ de reserva produzem 12871 £.

2.º Caso de multiplicação de complexos

O methodo mais expedito de effectuar a multiplicação de complexos neste caso é o de partes aliquotas.

Chama-se parte aliquota de um número, a que se contem exactamente nesse numero, e parte aliquanta a que não divide exactamente o dito numero.

Este methodo consiste em decompor o numero de unidades de cada classe em partes aliquotas, ou da unidade principal, ou da unidade antecedente.

Durante a applicação deste methodo são ás vezes precisos. por facilidade, certos productos, que não correspondendo a porção alguma do multiplicando, não devem ser sommados ; pelo que se assignalalão com traço para evitar enganos. E como elles unicamente servem de auxilio á formação de outros productos, são por isso chamados *productos subsidiarios*.

EXEMPLO

	12 £	17^s	$9^d \frac{1}{3}$
	5^t	4^P	7^p
	60 £	0^s	0^d
10^s	2	10	
5^s	1	5	
2^s	0	10	
1^s	**0**	**5** (*)	
6^d	0	2	6
3^d	0	1	3
1^d	**0**	**0**	**5** (*)
$\frac{1}{3}^d$	0	0	$1 \frac{2}{3}$
3^d	6	8	$10 \frac{2}{3}$
1^p	2	2	$11 \frac{5}{9}$
6^p	1	1	$5 \frac{7}{9}$
1^p	0	3	$6 \frac{52}{54}$
	74 £	5^s	$9^d \frac{34}{54}$

(*) Producto subsidiario.

Exposição.—Para bem se comprehender este caso de multiplicação de complexos, é preciso attender-se que elle é analogo ao da multiplicação de incomplexos em que ambos os factores são numeros compostos, e em que se effectua a multiplicação multiplicando todo o multiplicando por cada classe de unidades do multiplicador, e attender-se tambem á definição geral de multiplicação, da qual se tira toda a comprehensão do processo das partes aliquotas, acerca do qual nos vamos occupar. Ha, porém, uma differença nesta operação, e é que em vez de multiplicar-se da direita para a esquerda, multiplica-se em sentido inverso; porque lá, de um certo numero de unidades menores, constituimos uma ou mais unidades maiores, e aqui, vamos em ordem natural tomando do multiplicador as diversas fracções da unidade principal e suas subdivisões, existentes no multiplicando, e vice-versa; o que se póde fazer de modo vantajoso para a practica, da esquerda para a direita.

Temos então de multiplicar todo o multiplicando pela 1ª parte do multiplicador, que é 5^T. Para isso devemos saber em primeiro lugar que a especie do producto participa sempre da especie do multiplicando e o multiplicador se considera como um numero abstracto; por consequencia, no caso em questão, o producto é da especie libras tornezas, soldos e dinheiros. Depois, attenderemos que, em virtude da definição de multiplicação, quando o multiplicador é 5, o producto é 5 vezes o multiplicando; em consequencia do que devemos multiplicar 12 £ por 5, o que produz 60 £. Para formar-se o producto de 17^s por 5^T vê se que a libra torneza tem 20^s, e conseguintemente 17^s é parte aliquanta da libra, mas que póde ser decomposta nas seguintes partes aliquotas, 10^s, 5^s, 2^s; e obtido o producto de cada uma dessas partes por 5, a somma dos productos parciaes dará o do todo 17^s, por 5. Ora, ter no multiplicando 10^s, é o mesmo que ter $\frac{1}{2}$ £, porém, em virtude da definição, quando o multiplicando é $\frac{1}{2}$, o producto é metade do multiplicador; logo, obtem-se o producto de 10^s tomando a metade de 5, o que dá 2 £ e sobra 1 £, que vale 20^s, cuja metade é 10^s. Obtem-se o producto de 5^s, ou tomando a 4ª parte do multiplicador 5, porque com effeito 5^s é a 4ª parte da libra e quando o multiplicador é $\frac{1}{4}$ o producto é a 4^a parte do multiplicador, ou tomando a metade do producto de 10^s visto como 5^s sendo a metade de 10^s, o seu producto deve ser a metade do producto deste; e então vem 1 £ 5^s. Semelhantemente, obtem-se o producto 2, tomando a 5^a parte do producto 10^s, porque 2^s, é a 5^a parte de 10^s, e vem: 0 £ 10^s.

Trata-se agora de formar o producto de 9^d; e como 9^d é parte aliquanta do soldo, decompõe-se nas partes aliquotas 6^d e 3^d. Ora, se nós tivessemos o producto de um soldo, tomando-lhe a metade obteriamos o producto de 6^d, porque sendo $1^s = 12^d$, segue se que 6^d é a metade de 1^s; e como não temos esse producto, podemos forma-lo subsidiariamente, tomando a metade do producto de 2^s, e escrevendo-o em typo diverso ou traçando-o, para que não possa ser confundido com os outros productos, nem entrar na somma; ou então, querendo-se evitar o producto subsidiario, toma-se a 4^a parte do producto de 2^s. E, de qualquer dos dous modos vem para o producto de 6^d, 0 £ 2^s, 6^d, Evidentemente, 3^d é metade de 6^d, e conseguintemente obtem-se esse producto tomando metade do producto de 6^d, e vem: 0 £ 1^s 5^d. Resta agora de todo o multiplicando só formar o producto de $\frac{1}{3}^d$; e como não temos producto de 1^d forma-se esse producto subsidiario tomando a terça parte do producto de 3^d (porque 1 é evidentemente $\frac{1}{3}$ de 3) e vem 0 £ 0^s 5^d. Tomando a terça parte desse producto, acha se para o producto de $\frac{1}{3}^d$, 0 £ 0^s $1^d \frac{}{3}$, e temos até aqui formado o producto de todo o multiplicando pela 1^a parte do multiplicador, que é 5^T.

Vamos agora obter o producto de todo o multiplicando pela 2^a parte do multiplicador, que é 4^p. Em virtude da definição, se em vez de 4^p nós tivessemos no multiplicador 1^T, o producto seria uma vez todo o multiplicando; se tivessemos 2^T o producto seria duas vezes todo o multiplicando; se tivessemos $\frac{1}{2}^T$, o producto seria metade de todo o multiplicando; se tivessemos $\frac{1}{3}^T$, o producto seria $\frac{1}{3}$ de todo o multiplicando, etc.; porém temos 4^p. que é parte aliquanta da toeza, porque a toeza vale 6^p; decompondo estes 4^p nas partes aliquotas 3^p e 1^p, formaremos primeiramente o producto de 3^p, attendendo que 3^p é metade da toeza, e que quando o multiplicador é $\frac{1}{2}$ o producto é metade do multiplicando. Tomando então a metade de todo o multiplicando, vem para o producto de 3^p: 6£ 8^s $10^d\frac{2}{3}$. E a maneira como se obtem este producto é a seguinte: a metade de 12 £ é 6 £, a metade 17^s é 8^s, e sobra 1^s, que vale 12^d que se juntão aos 9^d existentes, e perfazem 21^d, cuja metade é 10^d, e resta $1^d + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}^d$, e a metade de $\frac{4}{3}^d$ é $\frac{2}{3}^d$.

Obtido o producto de 3^p, facilmente se obtem o producto de 1^p, tomando a terça parte, e vem: 2 £ 2^s $11^d\frac{5}{9}$. Só falta agora obter o producto pela terceira parte do multiplicador, que é 7^p. Para isso decompõe-se a parte aliquanta 7^p nas partes aliquotas 6^p e 1^p. Obtem-se o producto de 6^p, tomando a metade do producto de um pé (porque um pé tendo 12 pollegadas segue-se que 6^p será a metade de 1^p) e vem: 1 £ 1^s $5^d\frac{7}{9}$, que se obtem do modo seguinte: a metade de 2 £ é 1 £, a metade de 2^s é 1^s, a metade de 11^d é 5^d e sobra $1^d + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}$ cuja metade é $\frac{7}{14}$. Finalmente, obtem-se o producto de 1^p tomando a 6^a parte do producto de 6^p, do seguinte modo: a 6^a parte de 1 £ é 0 £, e resta 1 £, que vale 20^s, com 1 que existe na columna dos soldos, fazem 21^s, cuja 6^a parte é 3^s, e sobrão 3^s, que valem 36^d; com 5 que existem na respectiva columna fazem 41^d, cuja 6^a parte é 6^d e restão $5^d + \frac{7}{9} = \frac{52}{9}$, cuja 6^a parte é $\frac{52}{54}$ (porque tomar a 6^a parte da fracção $\frac{52}{9}$ é dividil-a por 6; e não sendo divisivel o numerador por esse numero, multiplica-se o denominador). Sommão-se agora os productos parciaes (tendo o cuidado de não incluir os subsidiarios), e tem-se o producto total de 74 £ 5^s $9^d\frac{34}{54}$, ou simplificando a fracção: 74 £ 5^s $9^d\frac{17}{27}$.

Divisão de complexos

O fim da divisão de complexos é o mesmo que o da de incomplexos; porém a especie deste ou daquelle termo influe consideravelmente não só na especie do quociente como tambem no processo pelo qual se deve obter esse mesmo quociente.

Como o divisor multiplicado pelo quociente deve reproduzir o dividendo, resulta que: sempre que o dividendo e o divisor exprimirem diversas especies de unidades, o quociente participará da especie do dividendo; e, em geral, quando exprimirem a mesma especie, o quociente será abstracto, e conseguintemente proprio a representar qualquer especie (muitas vezes extranha á do dividendo e do divisor) designada pelo pedido do problema que deve ser resolvido por essa divisão.

EXEMPLO

Uma fonte a correr gasta 1^h, 58' 51" para encher um almude: quantos almudes encherá em 19^h, 7' 31" ?

Resolve-se este problema dividindo 19^h 7' 31" por 1^h 58' 51", e o quociente deve, conforme a exigencia da questão, representar almudes, que é uma especie inteiramente diversa da do dividendo e divisor.

Para que bem se comprehenda a maneira como nos devemos comportar em todas as circumstancias em que porventura se possão apresentar os probiemas cuja solução depende da divisão de complexos, classificaremos esta divisão em tres casos distinctos: 1º, é o da divisão de um numero complexo por um incomplexo, abstracto ou concreto, mas de especie differente da do dividendo; 2º, de um incomplexo ou complexo por complexo, sendo tambem de especies differentes; 3º, de dous complexos ou incomplexos entre si, pertencendo ambos á mesma especie de unidades.

1º CASO

Regra.—*Dividem-se as unidades principaes do dividendo por todo o divisor, e obtem-se as unidades principaes do quociente; converte-se o resto em unidades da 1ª subdivisão, juntão-se ao producto as da especie de conversão, existentes no dividendo, divide-se o numero resultante pelo mesmo divisor, e o quociente exprimirá unidades dessa mesma subdivisão; se houver ainda resto, será convertido em unidades da subdivisão seguinte, e achar-se-ha do mesmo modo a parte respectiva do quociente; e assim successivamente até chegar á infima classe de unidades.*

EXEMPLO

487 toezas de obra importarão em 3596 £ 17ˢ 11ᵈ. Qual é o custo da toeza?

Solução.—Se o preço da toeza fosse conhecido, sendo multiplicado pelas 487, reproduziria a quantia total: logo, a referida quantia 3596 £ 17ˢ 11ᵈ é um producto de dous factores, um dos quaes é 487ᵀ, e o outro é o preço incognito da toeza; e como dado um producto de dous factores e um delles obtem-se o outro por meio da divisão, segue-se que é esta a operação que deve resolver o problema proposto. Trata-se, portanto, de dividir 3596 £ 17ˢ 11ᵈ por 487 abstracto, e o quociente será da mesma especie do dividendo.

3596 £ 17ˢ 11ᵈ	487
187	7 £ 7ˢ 8ᵈ $\frac{291}{487}$
20	
3740ˢ	
17	
3757ˢ	
348	
12	
696	
348	
4176ᵈ	
11	
4187	
291	

2º CASO

REGRA.—*Converte-se o divisor em fracção ordinaria da unidade principal, multiplica-se o dividendo por esta fracção invertida, e extrahe-se os inteiros á fracção resultante.*

1º EXEMPLO

Uma barra de ferro de $7^{cov.}\ 2^{P}\ 5^{p}$, pesa 5829^{lb}. Quantas libras pesará uma outra que tenha um covado de comprimento?

Solução.—Se o numero de libras pedido fosse conhecido, multiplicando esse numero por $7^{c}\ 2^{P}\ 5^{p}$, viria 5829^{lb}; logo este numero total de libras é um producto composto de dous factores, um dos quaes é $7^{c}\ 2^{P}\ 5^{p}$, e o outro é o numero de libras pedido; e portanto é dividindo o producto 5829^{lb} pelo factor $7^{c}\ 2^{P}\ 5^{p}$, que se obtem o outro factor. O que se faz convertendo, segundo a regra já enunciada, o numero $7^{c}\ 2^{P}\ 5^{p}$ em fracção ordinaria da unidade principal, e vem:

$$5829 \text{ lb} \div \frac{189 \text{ c.}}{24^{p}} = 5829 \times \frac{24^{p}}{189^{c}} = \frac{5829 \times 24^{p}}{189^{c}} = \frac{139896}{189^{c}} =$$

$$= 740 \text{ lb}.\ 0^{m}.\ 3^{onç}.\ 0^{oit}.\ 27^{grs}\frac{3}{7}.$$

Observação.—Neste caso a unica cousa a notar é a razão porque só se converte o divisor em fracção ordinaria da unidade principal; porém reflectindo-se um pouco vê-se que pertencendo o divisor a uma especie diversa da do dividendo, é preciso ter a relação que ha entre elle e a unidade principal, afim de podermos fixar que parte devemos tomar do dividendo para a determinação do quociente.

2º EXEMPLO

Se $37^{T}\ 5^{P}\ 11^{p}\ \frac{2}{3}$ de uma certa obra custárão $59\ £\ 14^{s}\ 9^{d}$, qual será o preço de 1^{T} da mesma obra?

Solução.—Se o preço de uma toeza fosse conhecido, multiplicado por $37^{T}\ 5^{P}\ 11^{p}\ \frac{2}{3}$, produziria o preço total, que é 59 £ 14ˢ 9ᵈ; logo este numero é um producto de dous factores, um dos quaes é $37^T\ 5^P\ 11^p\frac{2}{3}$ e o outro é o numero pedido. D'onde resulta que, para obtermos esse factor incognito, devemos dividir 59 £ 4ˢ 9ᵈ por $37^T\ 5^P\ 11^p\frac{2}{3}$. Fazendo isto conforme a regra acima enunciada, vem:

$$59£\ 14^s\ 9^d \div 37^T\ 5^P\ 11^p\frac{2}{3} = 59£\ 14^s\ 9^d \div \frac{8207^T}{216} =$$

$$= 59£\ 14^s\ 9^d \times \frac{216}{8207} = \frac{59£\ 14^s\ 9^d \times 216}{8207} = 1£\ 14^s\ 5^d\frac{3649}{8207}$$

$$\begin{array}{lrr}
 & 59£ & 14^s\quad 9^d \\
 & 216 & \\
\hline
 & 12744£ & 0^s\quad 0^d \\
10^s.. & 108.. & \\
4^s.. & 43.. & 4 \\
\mathbf{1^s..} & \mathbf{10..} & \mathbf{16}\ (^*) \\
6^d.. & 5.. & 8 \\
3^d.. & 2.. & 14 \\
\hline
 & 12903£ & 6^s
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
12903£\ 6^s & 8207 \\
\cline{2-2}
4696 & 1£\ \ 11^s\frac{3649}{8207} \\
20 & \\
\cline{1-1}
93920 & \\
6 & \\
\cline{1-1}
93926^s & \\
11856 & \\
3649 &
\end{array}$$

3º CASO

Regra.—*Reduz-se tanto o dividendo como o divisor a unidade de infima especie, e pratica-se a divisão ao modo ordinario sobre os numeros resultantes.*

1º EXEMPLO

Com 1 mil réis comprárão-se 359 varas de fazenda. Com quantos réis compraremos 1ᵛ 2ᴾ 7ᵖ?

Solução.—Se o numero de réis que se busca fosse conhecido, sendo multiplicado por 359ᵛ, produziria a quantia total multiplicada por 1ᵛ 2ᴾ 7ᵖ; logo este numero multiplicado pela quantia total, representada pela unidade, é um pro-

(*) Producto subsidiario.

ducto de dous factores, um dos quaes é o numero pedido, e o outro é 359; por consequencia dividindo 1^v 2^p 7^p por 359, obtem-se a quantia pedida.

O dividendo reduzido a unidades de infima especie dá 63^p; e o divisor 14360^p. Procedendo á divisão, vem:

$$\begin{array}{r|l} 6300 & 1436(0 \\ \hline 556 & 0,004 \end{array}$$

E a quantia procurada será 0,004 de 1000 reis que vem a ser: 4 réis.

2º EXEMPLO

Se 74 £ e 13^s equivalessem a 1 onça em ouro, a quantas onças serião equivalentes 328 £?

Solução.—Se esse numero de onças fosse conhecido, é claro que sendo multiplicado por 74 £ 23^s, que é o numero de libras correspondente a 1 onça, produziria o numero total das libras, isto é, 328 £, d'onde se conclue que 328 £ é um producto dos dous factores 74 £ 13^s, e o numero de onças pedido, e que se deve dividir o producto 328 £ pelo factor conhecido 74 £ 13^s, afim de obtermos o factor desconhecido. Assim procedendo, vem:

$$\begin{array}{r|l} 6560 & 1493 \\ \hline 588 & 4^{onç}.\frac{588}{1493} \end{array}$$

3º EXEMPLO

Uma fonte a correr gastou 1^h 58' 51" para encher 1 almude. Quantos almudes encherá em 19^h 7' 31"?

Solução.—Se o numero de almudes incognito fosse conhecido, sendo multiplicado por 1^h 58' 51", que é o tempo correspondente a 1 almude, viria o tempo total 19^h 7' 31". Logo, este numero é um producto de dous factores, um dos quaes é 1^h 58' 51", e o outro é o numero pedido; e conseguintemente dividindo o producto, ou 19^h 7' 31", pelo factor conhecido, ou 1^h 58' 51", obter-se-ha em quociente o factor incognito. Fazendo isto, vem:

$$
\begin{array}{r|l}
68851'' & 7131'' \\
\cline{2-2}
4672^{a} & 9^{alm}.\ 7^{can}.\ 3^{q}\dfrac{3195}{7131} \\
12^{c} & \\
\cline{1-1}
56064^{c} & \\
6147 & \\
4^{q} & \\
\cline{1-1}
24588^{q} & \\
3195 &
\end{array}
$$

Esposição.—Como a natureza da questão exige que o quociente seja da especie almudes, canadas e quartilhos, desde logo comprehender-se-ha não só a necessidade de considerar o dividendo exprimindo almudes, senão tambem a razão porque se tem reduzido, neste caso, ambos os termos a unidade de ínfima especie, e vem a ser: convertel-os em numeros incomplexos e conseguintemente fazer desapparecer tanto n'um como n'outro as subdivisões da hora, que são muito differentes das do almude. E disso resulta que, depois de se ter achado o quociente 9 almudes, o resto 4672 deve ser considerado como representando almudes, que se convertem em canadas, multiplicando por 12, porque um almude tem 12 canadas e vem o numero 56064 canadas, que dividindo pelo mesmo divisor 7131, dá para quociente 7 canadas, e para resto 6147. Agora este resto representa canadas, que se convertem em quartilhos, multiplicando por 4, porque uma canada tem 4 quartilhos, e vem: 24588 quartilhos, cuja divisão pelo mesmo divisor dá para quociente 3 quartilhos, e ainda um resto 3195, que produz no quociente a fracção $\frac{3195}{7331}$ do quartilho.