QUINTA PARTE

CAPITULO VI

Fracções continuas

Definição. — Chamão se fracções continuas as fracções ordinarias irreductiveis de termos compostos, que podem ser transformadas em uma expressão formada por uma serie de fracções ordinarias, ligadas todas pelo denominador, tendo cada uma a unidade por numerador, e por denominador um inteiro seguido de fracção.

COMO ELLAS SE ORIGINÃO

Já se vio que, quando uma fracção é de fórma complicada, ou os seus termos são numeros consideraveis, simplifical-a é o meio de se obter della uma idéa clara ácerca da sua grandeza; porém, quando essa fracção é irreductivel, os seus termos são numeros primos entre si, e, portanto, não ha numero nenhum que divida exactamente a ambos, e não se póde obter uma fracção de fórma simples que exactamente a represente. Entretanto, apezar de não se poder obter valores que exactamente exprimão a fracção proposta, nem por isso se deixa de conseguil-os tão approximados quanto se queira; e é esta avaliação aproximada das fracções irreductiveis cujos termos são consideraveis, que dá origem ás fracções continuas.

Seja a fracção irreductivel $\frac{149}{493}$. Dividindo ambos os seus termos pelo numerador, o que não altera, vem $\frac{1}{\frac{493}{159}}$; e effectuando a divisão no denominador de 493 por 159, vem

$$\begin{array}{r|l} 493 & 159 \\ \hline 16 & 3+\frac{16}{159} \end{array}$$

e, pois, a fracção proposta $\frac{159}{493}=\frac{16}{3+\frac{16}{159}}$. Desprezando agora no denominador a fracção $\frac{16}{159}$, resulta a fracção $\frac{1}{3}$ para primeiro valor aproximado da fracção proposta, e este valor é maior que o verdadeiro.

Demonstração. — Quando se desprezou a fracção $\frac{16}{159}$, sendo ella uma parte do denominador da fracção $\frac{1}{3+\frac{16}{159}}$, subtrahio-se ao denominador essa quantidade $\frac{16}{159}$; e, pois, esse denominador se tornou diminuido dessa quantidade; e, como, quanto menor é o denominador, maior é a fracção, segue-se que $\frac{1}{3}$ é maior do que a fração proposta.

Se, porém, em lugar de supprimir a fracção $\frac{16}{159}$, substituir-se por ella a unidade, a fracção $\frac{1}{3+\frac{16}{159}}$ se reduz a $\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$; e esta fracção $\frac{1}{4}$ é menor que a proposta, por isso que, faltando a fracção $\frac{16}{159}$, á fracção $\frac{143}{159}$ para que seja igual á unidade, (*com effeito*, $\frac{16}{159}+\frac{143}{159}=\frac{16+143}{159}=\frac{159}{159}=1$), a substituição feita da unidade pela fracção $\frac{16}{159}$ equivale a ter juntado a esta fracção a quantidade $\frac{143}{159}$; mas $\frac{16}{159}$ é uma parte do denominador da fracção $\dfrac{1}{3+\dfrac{16}{159}}$, juntar uma certa quantidade á parte é o mesmo que juntar ao todo essa mesma quantidade, logo juntar á fracção $\dfrac{16}{159}$ a quantidade $\dfrac{143}{159}$, é juntal-a a todo o denominador, e augmental-o dessa quantidade; porém quanto maior é o denominador de uma fracção, menor é essa fracção; logo a fracção $\dfrac{1}{4}$ é menor do que a proposta; e, pois, temos que o verdadeiro valor está comprehendido entre $\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{1}{4}$ o que já dá uma idéa, se não exacta, ao menos muito aproximada da fracção proposta.

Se se quizer apreciar de quanto $\dfrac{1}{3}$ é maior do que a fracção proposta, tome-se a differença entre esta e aquella, e virá: $\dfrac{1}{3}-\dfrac{159}{493}=\dfrac{493-477}{1479}=\dfrac{16}{1479}$; e este é o erro que se commette quando se toma $\dfrac{1}{3}$ pelo seu verdadeiro valor.

Supponhamos agora que se queira obter um valor mais aproximado. Para isso toma-se a fracção $\dfrac{16}{159}$ que se tem desprezado, e opera-se sobre ella como justamente se tem praticado com a fracção proposta; isto é, dividem-se ambos os termos pelo seu numerador, e vem:

$$\frac{16}{159}=\frac{1}{\dfrac{159}{16}}=\frac{1}{9+\dfrac{15}{16}}$$

portanto a fracção proposta $\dfrac{159}{493}=\dfrac{1}{3+\dfrac{16}{159}}$ se reduz (substituindo por $\dfrac{16}{159}$ o seu valor $\dfrac{1}{9+\dfrac{15}{16}}$) a $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{9+\dfrac{15}{16}}}$. Desprezando nesta fracção resultante a fracção $\frac{15}{16}$ vem $\frac{1}{3+\frac{1}{9}} = \frac{9}{28}$ *(porque reduzindo o inteiro 3 á denominação do quebrado* $\frac{1}{9}$, *resulta* $\frac{28}{9}$; *e então fica* $\frac{1}{\frac{28}{9}} = \frac{9}{28}$) para segundo valor aproximado da fracção proposta e menor que o verdadeiro.

Demonstração.—Tendo-se desprezado na fracção $\frac{1}{3+\frac{1}{9+\frac{15}{16}}}$ a fracção $\frac{15}{16}$, tem-se subtrahido ao denominador $9+\frac{15}{16}$ uma parte $\frac{15}{16}$, e portanto elle se tem tornado menor, e maior a fracção $\frac{1}{9}$ *(porque menor denominador maior fracção)*; porém a fracção $\frac{1}{9}$ faz parte do denominador $3+\frac{1}{9}$; crescendo a parte cresce o todo; logo é maior o denominador $3+\frac{1}{9}$, e menor a fracção $\frac{1}{3+\frac{1}{9}} = \frac{9}{28}$ *(porque maior denominador, menor fracção)*. Assim, pois, a fracção proposta está comprehendida entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{9}{28}$; e se se quizer avaliar de quanto a fracção $\frac{1}{28}$ é menor que a proposta, toma-se a differença entre a proposta e $\frac{9}{28}$, e vem $\frac{159}{493} - \frac{9}{28} = \frac{4452-4437}{13804} = \frac{15}{13804}$. Comparando agora o erro $\frac{16}{1479}$ que se commettia quando se tomava $\frac{1}{3}$, com o erro $\frac{15}{13807}$ que se commette quando se toma $\frac{9}{28}$, vê-se que o erro commettido no segundo caso é muito menor que no primeiro; por isso que a fracção $\frac{15}{13807}$ é muito menor que a fracção $\frac{16}{1479}$.

Póde-se tambem avaliar os erros e provar que elles vão diminuindo á medida que mais valores se calculão, comparando o ultimo valor achado com o precedente. Assim, por exemplo, tinha-se achado para primeiro valor $\frac{1}{3}$ e para segundo $\frac{9}{28}$, e se se quizer calcular o erro commettido quando se toma uma das duas fracções para representar o valor da proposta, acha-se a differença entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{9}{28} = \frac{28-27}{84} = \frac{1}{84}$ etc.

Se ainda se quizesse determinar um 3º valor, se teria de tomar a fracção desprezada $\frac{15}{16}$, e dividir-se-lhe ambos os termos pelo seu numerador; e viria a fracção proposta $\frac{159}{493} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}$

Nesta ultima fracção desprezando-se a fracção $\frac{1}{15}$ vem a fracção $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}}$ que reduzida dá $\frac{10}{31}$, que é o 3º valor buscado.

Esta reducção se pratica reduzindo primeiramente o inteiro 9 á denominação do quebrado $\frac{1}{1}$ o que dá $\frac{10}{1}$, e substituindo este valor pelo denominador $9+\frac{1}{1}$ na fracção $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}}$, vem $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{10}{1}}}$ e porque

$$\cfrac{1}{\cfrac{10}{1}} = \frac{1}{10} \text{ vem } \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{10}}$$

Reduzindo agora o inteiro 3 á denominação do quebrado

$\frac{1}{10}$ vem $\frac{31}{10}$ que substituidos ao denominador $3+\frac{1}{10}$ produzem $\frac{1}{\frac{31}{10}} = \frac{10}{31}$ *(porque se divide um inteiro por um quebrado multiplicando o inteiro pelo quebrado invertido)*. Seguindo o mesmo raciocinio e o mesmo processo acima dados, se demonstra que este valor $\frac{10}{31}$ é maior que o verdadeiro, e se calcula o erro commettido quando se o toma para representar a fracção proposta.

Definições

A fracção $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}$ é que se chama fracção continua; ás fracções $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{1}$, etc., cuja totalidade constitue a fracção continua, dá-se o nome de fracções integrantes; aos inteiros, 3, 9, 1, etc., de quocientes incompletos, e de quociente completo á expressão $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\text{ etc.}}}$

Esta ultima expressão tambem se chama fracção convergente, por isso que cada vez mais se aproxima do numero reduzido a fracção continua, á medida que se toma um maior numero de fracções integrantes. Chamão-se finalmente, reduzidas, os resultados que se obtem quando se converte em um só numero fraccionario cada uma das expressões obtidas na indagação dos diversos valores. Assim, por exemplo, o resultado dado pela expressão $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}$, é uma reduzida.

Observação.—Analysando a marcha seguida no processo da reducção da fracção $\frac{159}{493}$ em fracção continua, se vê que se dividio 493 por 159, (isto é, o numero maior pelo menor) e deu 3 para quociente e 16 para resto ; depois, 159 por 16 (*o menor pelo resto da 1ª divisão*) e deu 9 para quociente e 15 para resto, etc.; d'onde se conclue o processo seguinte, que tem por fim :

DADA UMA FRACÇÃO ORDINARIA, CONVERTE-LA EM FRACÇÃO CONTINUA

REGRA.—*Opera-se sobre os termos da fracção proposta, como para achar o maior divisor commum entre elles ; e depois tomão-se successivamente os quocientes obtidos, para denominadores das fracções integrantes, que terão para numerador constante a unidade.*

EXEMPLO

Seja a fracção $\frac{65}{149}$, e pede-se que se converta em fracção continua. Dispondo a operação, vem

149	65	19	8	3	2	1;
19	2	3	2	2	1	2
	8	3	2	1	0	

e a fracção continua será

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$$

Observação importante.—Os processos acima dados applicados ao numero $3{,}14159 = 3\frac{14159}{100000}$ que exprime a razão entre o diametro e a circumferencia, dão (conservando tal qual o inteiro 3. que é o que sempre se pratica, e operando sobre a fracção):

100000	14159	887	854	33	29	4	1
887	7	15	1	25	1	7	4
	5289 854	33	194 29	4	1	0	

Logo

$$3\frac{14159}{100000} = 3\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}}}}$$

As reduzidas são (feitos os calculos inclusive a reducção do inteiro 3 á denominação do quebrado).

$1.^a\ \frac{22}{7}$; $2.^a\ \frac{333}{106}$; $3.^a\ \frac{355}{113}$; $4.^a\ \frac{9208}{2931}$; $5.^a\ \frac{9563}{3044}$; $6.^a\ \frac{76149}{24239}$; $7.^a\ \frac{314159}{100000}$.

A 1^a e 3^a razão são abreviações uteis na pratica: e para julgar do gráo de aproximação de cada uma, tomão-se as differenças com a proposta, a saber:

$$\frac{22}{7} - \frac{314159}{100000} = \frac{2200000}{700000} - \frac{2199113}{700000} = \frac{2200000-2199113}{700000} = \frac{887}{700000} =$$

$$=0{,}0012671\ ;\ \text{e}\ \frac{355}{113} - \frac{314159}{100000} = \frac{33}{11300000} = 0{,}0000029.$$

A razão $\frac{355}{113}$ foi publicada por Adriano Metio, e por elle attribuida a seu pai Pedro Metio; e a razão $\frac{22}{7}$ foi achada por Archimedes. Esta razão tem a vantagem de ser a mais facil de todas e dispensar de se fazer a proporção, por isso que basta triplicar o diametro e juntar a este producto $\frac{1}{7}$ do mesmo diametro: porque $\frac{22}{7}=3+\frac{1}{7}$; porém é exacta sómente até a 2ª casa decimal; entretanto que a razão de Metio, $\frac{355}{113}$ é melhor, porque junta á facilidade de poder ser conservada na memoria, a exactidão até a 6ª casa de dizima; o que se póde facilimente verificar convertendo tanto uma razão como outra em dizima. E tal é o gráo de exactidão que esta razão apresenta, que seria necessario um circulo de 1000000 de pés de diametro para haver $\frac{3}{10}$ de pé de erro na circumferencia rectificada; entretanto que bastaria um circulo cujo diametro fosse de 800 pés para haver um pé de erro na circumferencia rectificada pela razão de Archimedes.