# QUARTA PARTE

---

## CAPITULO V

### Fracções decimaes

*Definição.* — Fracções decimaes são partes da unidade successivamente menores na razão decupla.

SUA ORIGEM E NOMENCLATURA

Seguindo o systema decimal, que é o systema de numeração adoptado como o mais simples e commodo, da reunião de dez unidades primitivas formou-se uma unidade superior; de dez destas, uma outra mais superior; etc.; e assim se constituio a serie decimal dos numeros inteiros.

Procedendo de uma maneira inversa, dividio-se uma unidade primitiva em dez partes iguaes; e, como cada uma dessas partes é dez vezes menor que o todo, se chamou um decimo; e este decimo por ter um valor dez vezes menor que a unidade, em virtude da primeira lei fundamental da numeração, será escripto immediatamente á direita das unidades. Semelhantemente, dividio-se o decimo em dez partes iguaes; cada uma dessas partes sendo dez vezes menor que o decimo, e o decimo dez vezes menor que a unidade, segue-se que cada uma das referidas partes será dez vezes dez, ou cem vezes menor que a unidade; e por isso se chamou centesimo, que pelo facto de ter um valor dez vezes menor que o decimo, é escripto immediatamente á sua direita; e, proseguindo nesta divisão decupla, se formárão os millesimos, decimos-millesimos, centesimos-millesimos, millionesimos, etc.; e, a partir das unidades, se tem assim feito a serie das fracções decimaes. Para ser separada esta serie da dos numeros inteiros se colloca uma virgula entre as unidades e os decimos.

### SUA NUMERAÇÃO

Assim como nos numeros inteiros, duas questões se podem propôr na numeração das fracções decimaes.

1.ª *Questão.*—Escripta a fracção decimal enuncia-la.

REGRA GERAL.—*Enuncia-se separadamente a parte inteira, se a houver, e depois a parte decimal como um numero inteiro, dando no fim o nome da unidade da ultima subdivisão decimal.*

EXEMPLO.—56,3506, que se enuncia 56 unidades e tres mil quinhentos e seis decimos-millesimos.

*Demonstração.*—Este numero se compõe de 56 unidades, 3 decimos, 5 centesimos, 0 de millesimos, e 6 decimos-millesimos. Ora, um decimo vale 10 centesimos, um centesimo vale 10 millesimos, um millesimo vale 10 decimos-millesimos, logo um decimo vale 10 vezes 10 vezes 10 ou 1,000 decimos millesimos, e, portanto, 3 decimos valerão 3,000. Um centesimo vale 10 millesimos um millesimo vale 10 decimos-millesimos, logo um centesimo vale 10 vezes 10 ou 100 decimos-millesimos e 5 centesimos valerão 500. Logo, o numero se compõe de 56 unidades, e 3,000 decimos-millesimos, mais 500 decimos-millesimos, mais 6 decimos-millesimos, e por isso se enuncia como manda a regra.

*Observação.*—Póde-se tambem comprehender em um só enunciado a parte inteira e a parte decimal. Com effeito, no mesmo numero 56,3506, uma dezena vale 10 unidades, uma unidade vale 10 decimos, o decimo 10 centesimos, o centesimo 10 millesimos, o millesimo 10 decimos-millesimos, e por consequencia a dezena vale 10 vezes 10 vezes 10 vezes 10 vezes 10 ou 100,000 decimos-millesimos, e 5 dezenas valem 500,000 decimos-millesimos. Uma unidade vale 10 decimos ou cem centesimos ou 1,0 0 millesimos, ou 10,000 decimos-millesimos, e 6 unidades valem 60,000 decimos-millesimos; e, portanto, sendo composto de 5 0,000 decimos-millesimos mais 60,000 decimos-millesimos, mais 3,000 decimos-millesimos, mais 500 decimos-millesimos, e mais 6 decimos-millesimos, póde-se ler assim : 563506 decimos-millesimos.

2ª *Questão*.—Enunciada a fracção decimal, escrevel-a.

Regra geral. — *Escreve-se a fracção decimal como se fosse um numero inteiro, e separão-se com a virgula, da direita para a esquerda, tantas casas para dizima, quantas forem precisas para obter a ultima subdivisão, em que a fracção vem expressa.*

1º EXEMPLO

Vinte e nove unidades, trezentos e cincoenta e quatro millesimos, ou vinte e nove mil trezentos e cincoenta e quatro millesimos, que, se escrevendo como se fosse inteiro, vem : 29354 ; depois attendendo-se que a ultima divisão é millesimos, e separando, da direita para a esquerda, decimos, centesimos, millesimos, vem : 29,354.

2º EXEMPLO

Setecentos e noventa e oito centesimos-millesimos. Escrevendo como se fosse inteiro, vem : 798. Agora attendendo que a subdivisão em que a fracção vem expressa é centesimos-millesimos, e separando, a contar da direita, decimos, centesimos, millesimos, decimos-millesimos, e centesimos-millesimos, preenchendo por meio de zeros os algarismos que faltão para as casas dos decimos-millesimos, dos centesimos-millesimos, e das unidades, vem : 0,00798.

**Vantagens das fracções decimaes sobre as fracções ordinarias**

1.ª As fracções ordinarias são compostas de dous numeros, numerador e denominador, entretanto que as decimaes são representadas por um só como os numeros inteiros o que facilita os calculos; porque para as fracções ordinarias são precisas operações especiaes, entretanto que para as decimaes se prestão as mesmas regras das operações de inteiros.

2.ª Pela divisão decupla que soffre a unidade nas fracções decimaes, ellas ficão sujeitas á numeração decimal, e d'ahi resulta a facilidade da conversão de umas partes nas outras, assim como a extensão de approximação nos calculos, o que não se dá nas fracções ordinarias.

## Propriedades

1.ª Multiplica-se uma fracção decimal por 10, 100, 1000, etc., jogando com a virgula uma, duas, tres, etc., casas para a direita; e vice-versa, divide-se por 10, 100, etc., recuando com a virgula uma, duas, etc., casas para a esquerda.

### EXEMPLO

Seja o numero 3,745. Se se fizer a virgula avançar duas casas, por exemplo, virá o numero 374,5, que será cem vezes maior que o proposto. 22

*Demonstração.*—Comparando o numero proposto 3,745 com o numero resultante 374,5, vê-se que o 3 que no 1º caso occupava o lugar das unidades, no 2º occupa o das centenas; e, portanto, recebeu um valor cem vezes maior; o 7 que no 1º occupava o lugar dos decimos, no 2º occupa o das dezenas, e pois tambem recebeu um valor cem vezes maior; o 4 que no 1º occupava a casa dos centesimos, no 2º occupa a das unidades, e por isso recebeu um valor cem vezes maior; e, finalmente. o 5, que no 1º occupava a casa dos millesimos, no 2º occupa a dos decimos, e por isso tambem tomou um valor cem vezes maior; e então, se todas as partes do numero recebêrão valores cem vezes maiores, o numero está mnltiplicado por 100 como se queria demonstrar.

Inversamente: comparando o 2º com o 1º, vê-se que se passa daquelle a este, movendo a virgula duas casas para a esquerda; e a mesma comparação faz ver que cada algarismo do 2º recebe um valor cem vezes menor, por isso que caminha duas casas para a direita.

*Observação.*—Se nos fôr dada a fracção 0,375, e a quizermos multiplicar por um milhão, deslocaremos a virgula tres casas para a direita, o que a multiplica por mil, e accrescentaremos tres zeros á direita do numero resultante 375, o que tambem multiplica por mil ; e o numero 375000 estará mil vezes mil ou um milhão de vezes maior do que a fracção proposta.

Vice-versa : se quizermos dividir a mesma fracção decimal 0,375 por um milhão, deslocaremos a virgula seis casas para a esquerda, preenchendo por meio de zeros a falta de algarismos dessas casas decimaes, que se originão da deslocação da virgula. Fazendo isto, vem : 0,000000375.

2.º Se á direita de uma fracção decimal se accrescentar qualquer numero de cifras, a fracção decimal não se alterará, e vice versa : quando uma fracção decimal fôr terminada por cifras, se se fizer abstracção de qualquer numero dellas ou de todas, a fracção decimal não se alterará.

EXEMPLO

| *cent.* | *milles.* | *dec. milles.* | *cent. mill.* | etc. |
|---|---|---|---|---|
| 0,32 | 0,320 | 0,3200 | 0,32000 | etc. |

*Demonstração.*—Se por um lado, pelo accrescimo de uma cifra, se multiplica por 10 a fracção decimal, isto é, torna-se dez vezes maior o numero de partes que a fracção significa, por outro lado, pela denominação que essas partes recebem, exprimem partes dez vezes menores que as primitivas ; e, pois, ha perfeita compensação, e a fracção decimal não se altera.

*Observação.*—Esta propriedade se applica á reducção das fracções decimaes á mesma denominação.

## Problema

### CONVERTER UMA FRACÇÃO DECIMAL EM FRACÇÃO ORDINARIA E VICE-VERSA

Converte-se uma fracção decimal em fracção ordinaria, tomando para numerador o numero que resulta quando na fracção dada se faz abstracção da virgula, e para denominador a unidade seguida de tantos zeros quantas são as casas decimaes.

EXEMPLO

$$0.2 = \frac{2}{10};\quad 0.02 = \frac{2}{100};\quad 0.305 = \frac{305}{1000};\quad 22.32 = \frac{2232}{100}$$

*Demonstração.*—Quando se toma o numero inteiro que resulta da abstracção da virgula na fracção proposta para representar o numerador, tem-se multiplicado a fracção tantas vezes por dez quantas são as casas decimaes; porque fazer abstracção da virgula, é suppôr que ella tem caminhado tantas casas para a direita quantas são as casas decimaes; logo, para que haja compensação, é preciso dividir tantas vezes por dez quantas se tem multiplicado.

Inversamente: converte-se uma fracção ordinaria em decimal, em geral, divindo o numerador pelo denominador; porém quando o denominador do quebrado é a unidade seguida das cifras, basta escrever os algarismos que representão o numerador, de modo que haja tantas casas para a dizima quantos fôrem os zeros que seguirem a unidade no denominador.

EXEMPLO

Seja a fracção $\frac{25}{49}$. Convertendo-a em dizima, vem:

$$\begin{array}{r|l} 250 & 49 \\ \cline{2-2} 50 & 0,5102 \\ 100 & \\ 2 & \end{array}$$

*Demonstração.* — A fracção proposta, sendo referida á unidade principal, exprime os $\frac{25}{49}$ dessa unidade, porém como uma unidade vale dez decimos, segue-se que $\frac{25}{49}$ vale $\frac{250}{49}$ do decimo; assim pois, quantas vezes o numerador 250 contiver o denominador, tantos serão os decimos que esta fracção encerrará; portanto, disposta a divisão de 25 por 49, escreve-se zero no quociente *(porque 25 não póde conter 49)*, depois do qual se escreve uma virgula para d'ahi começar a dizima, e se divide 250 por 49; o quociente 5 escripto á direita da virgula, representa o numero de decimos contido em $\frac{25}{49}$; e, como ha um resto 5, segue-se que $\frac{25}{49}=5$ decimos mais $\frac{5}{49}$ do decimo; porém, como um decimo vale 10 centesimos, segue-se que $\frac{5}{49}$ do decimo valerão $\frac{50}{49}$ do centesimo. Praticada esta divisão de 50 por 49, vem para o quociente 1 centesimo, (que será o numero de centesimos contidos na fracção) e para resto 1; de sorte que a fracção $\frac{5}{49}=1$ centesimo mais $\frac{1}{49}$ do centesimo. Com este resto se procede como anteriormente attendendo que 1 centesimo valendo dez millesimos $\frac{1}{49}$, do centesimo valerá $\frac{10}{49}$ do millesimo; e como 10 não contém 49, isto quer dizer, que a fracção proposta não contém millesimos, e, pois, escreve-se zero na casa dos millesimos do quociente, e converte-se o resto $\frac{10}{49}$ em decimos-millesimos, que vem a ser $\frac{100}{49}$, e se achão os decimos-millesimos do quociente, etc.

## Operações das fracções decimaes

### ADDIÇÃO

Regra.—*A addição das fracções decimaes se pratica da mesma maneira que a dos numeros inteiros, tendo unicamente demais o cuidado de reduzil-as á mesma denominação e dispôr as parcellas de modo que as virgulas se correspondão em uma mesma columna, ou, o que é o mesmo, de dispo-las como nos numeros inteiros, e separar por uma virgula, na somma, tantos algarismos decimaes quantos existem em uma parcella.*

### EXEMPLO

Se tivermos de sommar os numeros

32,4056 ; 245,379 ; 8,94 ; 7,2

reduzem-se primeiramente todos á mesma denominação (para que assim exprimão a mesma especie de unidades, e se possão sommar), o que se faz juntando á direita do 2º um zero, para reduzil-o a decimos-millesimos, que é a especie do 1º; dous zeros á direita do 3º; tres zeros á direita do 4º; (o que se sabe que não altera, pois já ficou demonstrado que não muda de valor uma fracção decimal quando se accrescenta á sua direita um numero qualquer de zeros). Fazendo isto, e dispondo logo as parcellas para a somma, vem :

EXEMPLO :

$$\begin{array}{r} 32,4056 \\ 245,3790 \\ 8,9400 \\ 7,2000 \\ \hline 293,9246 \end{array}$$

*Observação.*—Como os zeros que se accrescentão para a reducção das parcellas á mesma denominação não influem sobre a somma pedida, póde-se dispensar tal reducção, que fica subentendida desde que na collocação das parcellas as virgulas ficarem em uma mesma columna, conforme a regra determina.

EXEMPLO

$$\begin{array}{r} 32,4056 \\ 245,379\phantom{0} \\ 8,94\phantom{00} \\ 7,2\phantom{000} \\ \hline 293,9246 \end{array}$$

**Subtracção**

Regra.—*A subtracção das fracções decimaes tambem se pratica como a dos numeros inteiros depois de reduzil-as á mesma denominação.*

EXEMPLO

Seja para subtrahir de 62,09, 23,0784. Escrevendo dous zeros á direita do 1º, para reduzil-o á mesma denominação, e dispondo a operação, vem :

$$\begin{array}{r} 62{,}0900 \\ 23{,}0784 \\ \hline 39{,}0116 \end{array}$$

**Multiplicação**

Na multiplicação das fracções decimaes, distinguem-se dous casos : 1º, é o da multiplicação de uma fracção decimal por um numero inteiro ; 2º, é o da multiplicação de uma fracção decimal por outra.

Regra do 1º caso.—*Multiplicão-se os dous numeros propostos, sem attender á virgula, como se fossem inteiros, e, depois, separa-se com a virgula á direita do producto, tantas casas para dizima quantas são as do factor que as tem.*

EXEMPLO

Seja para multiplicar 32,405 por 25. Dispondo a operação, vem

$$\begin{array}{r} 32{,}405 \text{ mil} \\ 25 \text{ cem} \\ \hline 162\,025 \\ 648\,10\phantom{0} \\ \hline 810{,}125 \end{array}$$

*Demonstração.*—Quando se fez abstracção da virgula no multiplicando, considerou-se esse multiplicando mil vezes maior (*porque fazer abstracção da virgula é suppor que ella tem avançado tantas casas para a direita quantas são as decimaes que o numero encerra*) logo o producto deve ter vindo mil vezes maior (*porque se multiplica um producto, multiplicando um dos factores*); e para que seja o verdadeiro, é preciso dividi-lo por 1000, o que se faz, jogando com a virgula tres casas para á esquerda.

Regra do 2º caso.—*Multiplica-se uma fracção decimal por outra, fazendo-se abstracção da virgula em ambos os factores, e multiplicando-os como se fossem inteiros; separando depois, á direita do producto tantas casas para dizima, quantas contiverem ambos os factores.*

EXEMPLO

```
      35,407
      12,54
   ----------
     1 41 628
    17 70 35
    70 81 4
   354 07
   ----------
   444,00 378
```

*Demonstração.*—Quando se fez abstracção da virgula no multiplicando, tornou-se-o mil vezes maior, logo *ipso facto*, o producto deve ter vindo mil vezes maior; quando, tambem, se fez abstracção da virgula no multiplicador, elle se tornou cem vezes maior; e por isso o producto se tornou cem vezes maior; e, como pela parte do multiplicando elle se tornou mil vezes maior, e pela do multiplicador se fez cem vezes maior, segue-se que elle está cem mil vezes maior; e para que se torne o verdadeiro, é preciso dividi-lo por $100 \times 1000 = 100.000$, o que se faz jogando com á virgula cinco casas para a esquerda; isto é, tantas quantas existem em ambos os factores.

*Observações.*—A's vezes acontece que o producto de duas fracções decimaes não contem um numero de algarismos igual áquelle que deve indicar a somma das casas de dizima existentes no multiplicando e no multiplicador; e então é preciso completar as casas decimaes por meio de zeros escriptos á esquerda do producto.

EXEMPLO

$$
\begin{array}{r}
0{,}03054 \\
0{,}023 \\
\hline
9162 \\
6108\phantom{0} \\
\hline
70242
\end{array}
$$

Como no multiplicando ha 5 casas de dizima e no multiplicador 3, segue-se que é preciso separar no producto 8; e, como no producto não ha senão 5 algarismos, faltão 3, que se supprem por cifras, e vem 0,00070242.

Este caso é bem digno de attenção, pois é o que mais sorprende ao espirito ainda não familiarisado ás theorias dos numeros.

DIVISÃO

Na divisão das fracções decimaes, ha dous casos a considerar: 1º, é o da divisão de uma fracção decimal por um numero inteiro, ou de um inteiro por uma fracção decimal; 2º, é o da divisão de uma fracção decimal por outra fracção decimal.

REGRA DO 1º CASO.—*Divide-se uma fracção decimal por um numero inteiro, ou inteiro por uma fracção decimal, fazendo-se abstracção da virgula no termo decimal, e accrescentando á direita do termo inteiro tantos zeros quantos forem as casas de dizima do termo decimal.*

1º EXEMPLO

Tendo de dividir a fracção decimal 437,482 por 56, a divisão se pratica deste modo:

$$
\begin{array}{r|l}
437482 & 56000 \\
\cline{2-2}
454820 & \;\;7{,}8 \\
6820 &
\end{array}
$$

## 2º EXEMPLO

Seja para dividir 486 por 0,032; a operação se pratica do modo seguinte:

| | |
|---|---|
| 486000 | 32 |
| 166 | 15187,5 |
| 60 | |
| 280 | |
| 240 | |
| 160 | |
| 00 | |

*Demonstração do* 1º *exemplo.*—Quando se fez abstracção da virgula no dividendo, multiplicou-se este termo por mil (*tantas vezes por dez, quantas são as casas decimaes nelle existentes*); logo multiplicou-se por mil o quociente; e, para que este se torne o verdadeiro, é preciso dividi-lo por mil; mas, divide-se por mil um quociente, multiplicando-se por mil o divisor, e multiplica-se por mil o divisor, accrescentando-se tres zeros á sua direita, isto é, tantos quantos são os algarismos decimaes do dividendo.

*Demonstração do* 2º *exemplo.*—Quando se fez abstracção da virgula no divisor, multiplicou-se este termo por mil (*tantas vezes por* 10, *quantas são as casas decimaes que elle contem*); logo, dividio-se por mil o quociente, e para que este se torne o verdadeiro é preciso multiplica-lo por mil; porém multiplica-se por mil um quociente, multiplicando por mil o dividendo, e multiplica-se por mil o dividendo, accrescentando-se tres zeros á sua direita; isto é: tantos quantos são os algarismos decimaes da dizima.

*Observação.*—Deve-se ter nota lo durante esta operação, que, achada a parte inteira do quociente, para se conseguir o progresso da operação se tem accrescentado zeros á direita dos restos; porém isto já não deve sorprehender, depois que se sabe converter uma fracção ordinaria em decimal. Com effeito, o resto de uma divisão qualquer sempre é o numerador de fracção ordinaria, cujo denominador é o divisor.

REGRA DO 2º CASO.—*Divide-se uma fracção decimal por outra, fazendo-se abstracção da virgula em ambos os termos, e accrescentando-se á direita daquelle que menor numero de casas de dizima tiver, tantos zeros* *quantas forem as casas de dizima excedentes entre os dous numeros propostos, e pratica-se a divisão como se os numeros fossem inteiros.*

EXEMPLO

Seja para dividir 43,047 por 2,53698.

Praticando a regra, e dispondo a operação, vem :

```
4304700    | 253698
           |--------
1767720    | 16,967
 2455320   |
  1720380  |
   1981920 |
    206034 |
```

*Demonstração.*—Quando se fez abstracção da virgula no divisor, tornou-se-o cem mil vezes maior, e, por esse facto, cem mil vezes menor o quociente; quando se fez abstracção da virgula no dividendo, tornou-se-o mil vezes maior, e por isso vem o quociente mil vezes maior; logo o quociente ainda está cem vezes menor; e para que seja o verdadeiro, é preciso multiplica-lo por cem, o que se faz multiplicando o dividendo, por cem, ou juntando á sua direita duas cifras, isto é, tantas quantas são precisas para igualar as casas de dizima em ambos os termos.

*Observação.*—Quando o divisor é um numero inteiro, ou contém menos algarismos decimaes que o dividendo, em lugar de reduzi-lo á mesma denominação é mais simples operar do modo seguinte :

1º EXEMPLO

Seja para dividir 437,4825 por 56. Dispondo a operação vem :

```
437,4825 |  56
         |-------
 45,4    | 7,8121
    68
    122
     105
      49
```

*Explicação.*—A divisão neste caso podendo ser considerada como tendo por fim tomar a 56ª parte do dividendo, toma-se primeiramente a 56ª parte do 437, isto é, divide-se 437 por 56 que dá para quociente 7, e para resto 45, á direita do qual juntando-se os quatro decimos do dividendo, formão-se 454 decimos, de que se toma tambem a 56ª parte, e se acha para quociente 8 decimos, os quaes se escrevem á direita das 7 unidades, depois de ter escripto uma virgula. Proseguindo assim, se vão achando as diversas ordens do quociente ; e se, exhaurindo-se o dividendo, ainda se quizer levar a maior approximação o quociente, accrescenta se um zero á direita do ultimo resto, e continua-se a operação segundo a regra já dada antecedentemente.

### 2º EXEMPLO

Tendo-se para dividir 789,3264 por 28,6, a operação se dispõe do modo seguinte :

| | |
|---|---|
| 7893,264 | 286 |
| 2173 | 27,598 |
| 171 2 | |
| 28 26 | |
| 2 524 | |
| 236 | |

*Explicação.*—Neste caso, basta fazer abstracção da virgula no divisor, e jogar no dividendo tantas casas para a direita, quantos são os algarismos decimaes do divisor. No exemplo proposto só havia um algarismo decimal no divisor, e por isso jogou-se com a virgula no dividendo uma casa para a direita, e não se alterou o quociente, porque pela abstracção feita da virgula no divisor, elle ficou multiplicado por 10, e por consequencia dividido por 10 o quociente; e para que este seja o verdadeiro, é preciso multiplica-lo por 10, o que se faz multiplicando por 10 o dividendo ; e como este tem mais casas decimaes que o divisor, para multiplica-lo por 10 basta jogar-se-lhe com a virgula uma casa para a direita.

## Fracções decimaes periodicas

DEFINIÇÃO.—*Denominão-se fracções decimaes periodicas* (que muitos chamão dizimas periodicas) *as decimaes em que de intervallos em intervallos iguaes se reproduzem os mesmos algarismos e escriptos na mesma ordem.*

Chamão-se *periodos* a estes grupos compostos dos mesmos algarismos escriptos na mesma ordem.

Ha duas especies de fracções decimaes periodicas : periodicas simples, e periodicas compostas (*a que muitos chamão mixtas.*)

Fracções periodicas simples, são aquellas em que os periodos começão logo depois da virgula.

Fracções periodicas compostas, são aquellas em que os periodos não começão logo depois da virgula.

0,3232 etc., ou 4,162162, etc., são dizimas periodicas simples, porque os periodos, que são, na 1ª, 32, e na 2ª 162, principião logo depois da virgula.

0,3193069306 etc., e 48,003232 etc., são dizimas periodicas compostas ; porque os periodos, que na 1ª são 9306. e na 2ª 32, não começão immediatamente depois da virgula.

### COMO ELLAS SE ORIGINÃO

As fracções decimaes periodicas se originão da avaliação das fracções ordinarias em fracções decimaes. Nesta reducção, em que se divide o numerador da fracção ordinaria pelo denominador, ou o quociente é finito ou infinito ; é finito quando a divisão se effectua exactamente, e infinito quando por mais que se prolongue a divisão, ella jamais se effectua exactamente. D'aqui se deprehende que, dada uma fracção, se póde determinar se ella, convertida em fracção decimal, dará uma fracção decimal finita ou infinita.

### QUANDO A FRACÇÃO ORDINARIA DARÁ UMA FRACÇÃO DECIMAL FINITA

REGRA GERAL.—*Sempre que a fracção ordinaria irredutivel não contiver no denominador outros factores primos senão 2 e 5, essa fracção é reductivel em fracção decimal finita.*

*Demonstração.*—Quando se converte a fracção ordinaria em fracção decimal, multiplica-se o seu numerador por 10, 100, 1000, etc.; logo, esse numerador ficará sendo divisivel por 2 e 5 *(porque 2 e 5 são factores de 10)*, ou por $2 \times 2$ e $5 \times 5$, ou por $2 \times 2 \times 2$ e $5 \times 5 \times 5$, etc.: e então, é claro que, se o denominador só contiver esses factores, tendo o numerador se tornado multiplo delles, a divisão se effectuará exactamente, e a fracção decimal obtida exprimirá o valor exacto da fracção proposta.

*Corollario,*— O numero total das operações a effectuar é dado pelo maior numero dos dous factores 2 e 5 que entrão no denominador.

EXEMPLO

A fracção, $\frac{7}{8} = \frac{7}{2 \times 2 \times 2}$, convertida em fracção decimal dá

$$\begin{array}{r|l} 70 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & 0{,}875 \\ 40 & \\ 00 & \end{array}$$

e como havia no denominador tres factores iguaes a 2, effectuarão-se tres divisões, e conseguintemente, a fracção decimal contém tres algarismos.

OUTRO EXEMPLO

A fracção $\frac{317}{1250} = \frac{317}{2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}$, convertida em decimal dá

$$\begin{array}{r|l} 3170 & 1250 \\ \cline{2-2} 6700 & 0{,}2536 \\ 4500 & \\ 7500 & \\ 0000 & \end{array}$$

Neste caso, o denominador da fracção proposta contém quatro factores iguaes a 5, e por isso foi preciso effectuar quatro operações, e conseguintemente houve quatro algarismos na fracção decimal.

### QUANDO A FRACÇÃO ORDINARIA DARÁ UMA FRACÇÃO DECIMAL INFINITA

REGRA GERAL.—*Sempre que uma fracção ordinaria irreductivel contiver no denominador um ou mais factores primos differentes de 3 e 5, que não entrem no numerador, dará uma fracção decimal infinita e periodica.*

*Demonstração.*—A multiplicação do numerador por 10, 100, 1000, etc., para reduzil-a á fracção decimal, introduz os factores primos 2 e 5, ou o producto desses factores por si mesmo um certo numero de vezes; e, pois, o factor, ou os factores, que se suppõe existir no denominador sem entrar no numerador, não se achão comprehendidos no producto do numerador por 10, 100, 1000, etc., e por consequencia a divisão jámais se poderá effectuar exactamente, e a fracção decimal que se obtiver no quociente será infinita.

Demais, esta fracção decimal será periodica; porque cada resto devendo ser menor que o divisor, e este divisor sendo constante, segue-se que, quando se tiverem effectuado tantas operações quantas unidades ha no divisor menos uma (*e não se póde effectuar mais*), se deverá infallivelmente recahir em um dos restos já obtidos, á direita do qual escrevendo zero, se obtem um dividendo parcial semelhante a um dos precedentes, que, dividido pelo mesmo divisor, fará reproduzir no quociente um dos algarismos já obtidos, que por conseguinte dará nascimento a um resto semelhante áquelle que o algarismo semelhante do quociente produzio, e este resto portanto fará vir no quociente um outro algarismo semelhante a outro já obtido, e assim indefinidamente, certos algarismos do quociente se irão reproduzindo na mesma ordem.

#### 1º EXEMPLO

A fracção $\frac{6}{7}$ convertida em fracção decimal, dá:

```
60     | 7
       |________________
 40    | 0,857142 | 8571...
  50   |
   10
    30
     20
      6
```

Neste exemplo praticou-se o maximo de operações para o apparecimento dos periodos ; isto é, tantas quantas são as unidades do divisor menos uma. O divisor, neste caso, é 7, e praticou-se 7 menos uma, ou 6 operações ; porém, muitos casos ha em que não se chega a praticar tantas operações ; os exemplos seguintes nos vão convencer disso.

### 2º EXEMPLO

Seja a fracção $\frac{13}{37}$. Reduzindo esta fracção ordinaria em fracção decimal, vem :

$$\begin{array}{r|l} 130 & 37 \\ \hline 190 & 0{,}351 \mid 351\ldots \\ 50 & \\ 13 & \end{array}$$

### 3º EXEMPLO

Seja a fracção $\frac{29}{84}$. Dispondo a operação, vem :

$$\begin{array}{r|l} 290 & 84 \\ \hline & 0{,}34523809 \mid 523809 \end{array}$$

*Observação.*—E' bom não deixar escapar á attenção, que as fracções ordinarias em cujo denominador entrar algum factor differente de 2 e 5, dão uma fracção decimal finita unicamente no caso de entrar tambem no numerador esse factor.

### EXEMPLO

A fracção $\frac{147}{875} = \frac{21\times7}{7\times125}$, dá uma fracção decimal finita, embora o seu denominador encerre o factor 7, differente de 2 e 5, porque o mesmo factor faz parte do numerador. Dividindo ambos os seus termos por esse factor commum, o que não altera, vem a fracção $\frac{21}{125} = \frac{21}{5.5.5}$, a qual dá uma fracção decimal finita, porque o denominador só encerra o factor 5, que é factor de 10.

Acabou-se de ver que certas fracções ordinarias reduzidas a decimaes dão nascimento a fracções decimaes periodicas; e agora vai-se ver que, reciprocamente: toda fracção decimal periodica simples ou composta, provém de uma fracção ordinaria; e póde-se tornar a achar facilmente a fracção que lhe tem dado nascimento.

Esta questão apresenta dous casos distinctos: ou a fracção periodica é simples, ou composta. Considerando o primeiro caso, trata-se de

### Converter uma fracção periodica simples na fracção ordinaria d'onde ella proveio

Regra.—*Converte-se uma fracção decimal periodica simples em fracção ordinaria, tomando para numerador um dos periodos, e para denominador tantos noves quantos são os algarismos do periodo.*

EXEMPLO

A fracção periodica simples 0,3232 etc. $=\frac{32}{99}$.

*Demonstração.*—Na fracção periodica proposta 0,3232, etc., joga-se com a virgula tantas casas para a direita quantos são os algarismos do periodo, e vem 32, 32, etc.; e (*em virtude do principio; que se multiplica uma fracção decimal tantas vezes por 10 quantas forem as casas que a virgula avançar para a direita*) esta fracção periodica está 100 vezes maior do que a proposta, e portanto, se subtrahirmos esta daquella, o resto virá 100 menos uma ou 99 vezes maior do que a proposta. Praticando a subtracção,

$$\begin{array}{r} 32,32\text{ etc.} \\ -\ 0,32\text{ etc.} \\ \hline 32 \end{array}$$

vem 32 para resto; e como elle está 99 vezes maior do que o verdadeiro valor da fracção periodica proposta, para que seja o verdadeiro é preciso dividil-o por 99, e vem $\frac{32}{99}$ para o verdadeiro valor; o qual analysado dá para numerador um dos periodos, e para denominador tantos noves quantos são os algarismos do periodo.

*Observação.*—Este raciocinio é geral, pois se applica a qualquer fracção periodica simples. Quando a fracção periodica fôr acompanhada de inteiro, será equivalente ao inteiro mais a fracção ordinaria que exprime a fracção periodica; e este inteiro se junta ao quebrado depois de ser este reduzido aos seus menores termos.

EXEMPLO

$$4{,}162162 \text{ etc.} = 4 + \frac{162}{999} = 4 + \frac{6}{37} = \frac{154}{37}$$

*Outra demonstração.*—Toda a fracção ordinaria que tiver para numerador a unidade e para denominador um ou mais noves, tem no seu desenvolvimento a unidade no periodo; assim pois, as fracções $\frac{1}{9} = 0{,}111$ etc., $\frac{1}{99} = 0{,}0101$ etc., $\frac{1}{999} = 0{,}001011$ etc., isto é, todas ellas têm a unidade no periodo, mas este tem tantos algarismos, quantos são os noves do denominador; portanto, é claro que, dada uma fracção periodica simples de um só algarismo no periodo, deve-se comparal-a com o desenvolvimento de $\frac{1}{9}$; dada uma fracção de dous algarismos no periodo, deve se comparal-a com o desenvolvimento de $\frac{1}{99}$, etc. Suppondo, pois, que a fracção periodica dada, seja 0,162162, etc., como ella tem tres algarismos no periodo, deve-se comparal-a com o desenvolvimento de $\frac{1}{999}$. Ora, $\frac{1}{999} = 0{,}001001$ etc., porém, é evidente que, multiplicando-se este desenvolvimento por 162, resulta a fracção periodica proposta 0,162162 etc.; mas o desenvolvimento 0,001001 etc., é igual a $\frac{1}{999}$, logo o desenvolvimento multiplicado por 162 que é 0,162162 etc., será igual á fracção $\frac{1}{999} \times 162 = \frac{162}{999}$, logo a fracção periodica proposta $0{,}162162 \text{ etc.} = \frac{162}{999}$, isto é, a uma fracção ordinaria que tem para numerador um dos periodos, e para denominador tantos noves quantos são os algarismos do periodo ; e como este raciocinio é independente do valor particular da fracção periodica, segue-se que a regra é geral. Vai-se agora tratar do 2º caso, que tem por fim :

### Converter uma fracção periodica composta na fracção ordinaria d'onde ella proveio

REGRA.—*Converte-se uma fracção periodica composta em fracção ordinaria, tomando para numerador, os algarismos não periodicos, multiplicados por tantos noves quantos são os algarismos do periodo, mais um periodo ; e, para denominador, tantos noves quantos são os algarismos do periodo, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos decimaes não periodicos.*

OUTRA REGRA.—A *fracção periodica composta é equivalente á fracção ordinaria cujo denominador é a differença entre os algarismos não periodicos seguidos dos algarismos de um periodo, e os algarismos não periodicos ; e cujo denominador são tantos noves quantos são os algarismos do periodo, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos decimaes não periodicos.*

1º *Exemplo da 1ª regra.*—A fracção periodica composta $0{,}3193069306$ etc. $= \dfrac{31 \times 9999 + 9306}{999900} = \dfrac{319275}{999900} = \dfrac{129}{404}$

2º *Exemplo.*—A fracção periodica composta

$$25{,}0006262 \text{ etc.} = \frac{25000 \times 99 + 62}{99000} = \frac{2475062}{99000}$$

1º *Exemplo da 2ª regra.*—A fracção periodica composta

$$0{,}3193069306 \text{ etc.} = \frac{319306 - 31}{999900} = \frac{319275}{999900} = \frac{129}{404}$$

2º *Exemplo.*—A fracção periodica composta

$$25{,}0006262 \text{ etc.} = \frac{2500062 - 25000}{99000} = \frac{2475062}{99000}$$

*Demonstração da 1ª regra.*—Se na decimal periodica composta 0,3193069306 etc., andarmos com a virgula tantas casas para a direita quantos são os algarismos não periodicos, resulta a fracção periodica simples 31,93069306 etc.= $=31+\frac{9306}{9999}=\frac{31\times9999+9306}{9999}$. E', pois, esta fracção resultante, o valor da fracção periodica simples 31,93069306 etc., e, como esta fracção periodica simples é cem vezes maior do que a fracção periodica composta 0,319306 etc. *(porque resultou do jogo da virgula duas casas para a direita)*, segue se que a fracção ordinaria $\frac{31\times9999+9306}{9999}$ está tambem 100 vezes maior que o valor da fracção periodica composta 0,319306 etc.; e portanto, para que ella exprima esse verdadeiro valor, será preciso tornar-se 100 vezes menor, o que se faz multiplicando o seu denominador por 100, ou juntando-lhe duas cifras á direita. Fazendo isto, vem $\frac{31\times9999+9306}{999900}$ para o valor da fracção periodica composta; valor que analysado corresponde á regra dada.

*Demonstração da 2ª regra.*—Como $9999=10000-1$, segue-se que, substituindo este valor no numerador da fracção.

$$\frac{31\times9999+9306}{999900} \text{ vem } \frac{31(10000-1)+9306}{999900}=\frac{310000-31+9306}{999900}$$

Agora sommando 310000 com 9306, vem $\frac{319306-31}{999900}$; fracção esta que analysada dá a regra.

**Caracteres das fracções periodicas**

1.° Toda fracção irreductivel cujo denominador não encerra nenhum dos factores primos 2 e 5, dá lugar a uma fracção periodica simples.

2.° Toda a fracção irreductivel, cujo denominador, além de qualquer factor differente, encerra um dos dous factores 2 e 5 ou ambos, dá lugar a uma fracção periodica composta, cujo periodo deve começar depois de tantos algarismos quanto é o maior numero de factores 2 ou 5 que entra no denominador.

*Demonstração do 1.º*— Se a fracção cujo denominador não encerra nenhum dos dous factores 2 e 5, pudesse dar uma fracção periodica composta, seguir-se-hia, que a fracção ordinaria equivalente á periodica seria igual á fracção proposta, o que é impossivel, porque uma fracção irreductivel não póde ser igual a uma outra fracção, se os termos desta não são equimultiplos dos termos da 1ª; d'onde resulta, que o denominador da fracção proposta seria multiplo de 2 ou de 5, o que é contra a hypothese.

*Demonstração do 2.º*— A fracção periodica não póde ser simples, porque as fracções ordinarias equivalentes a estas especies de fracções periodicas não encerrão no denominador nenhum dos factores 2 e 5, e, pois, é absurdo considerar que qualquer destas fracções, cujo denominador não encerra nenhum dos factores 2 e 5, seja igual á fracção proposta, cujo denominador encerra estes mesmos factores.

O periodo deve começar depois de tantos algarismos quanto é o maior numero de factores 2 ou 5 que entra no denominador, porque se o periodo começasse depois de 4—1 ou 3 algarismos, seguir-se-hia que a fracção equivalente a esta fracção periodica teria um denominador que conteria 3 factores 2 e 5 ou iguaes a um delles, e portanto não poderia ser igual á fracção proposta, cujo denominador encerra 4.

### 1º EXEMPLO

A fracção $\frac{6}{7}$ dá uma fracção periodica simples.

$$\begin{array}{l|l} 60 & 7 \\ \hline \ \ 40 & 0,857142 \\ \ \ \ \ 50 & \\ \ \ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 6 & \end{array}$$

cujo periodo é 857142, porque 7 não contém nenhum dos factores 2 e 5.

## 2º EXEMPLO

A fracção $\frac{29}{84}$, dá a fracção periodica composta

| | |
|---|---|
| 290 | 84 |
| 380 | 0,34 \| 523809 \| 5 |
| 440 | |
| 200 | |
| 320 | |
| 680 | |
| 800 | |
| 440 | |
| 20 | |

*Observação.*—E' bom previnir que o termo — equivalencia—, de que se tem constantemente usado para exprimir a representacão do valor de uma fracção periodica por uma fracção ordinaria, não deve ser tomado em rigorosa acepção; por isso que, quando se diz que uma fracção periodica é equivalente a uma fracção ordinaria, jámais se deve entender que a fracção ordinaria exprime um valor exacto da fracção periodica, porém sim, que ella é um limite pelo qual proximamente se a representa. Assim a fracção periodica 0,999 etc. $=\frac{9}{9}=1$, attinge sem cessar á unidade, sem, comtudo, nunca lá chegar, de sorte que a unidade é para ella um limite de valor e pelo qual ella é representada. Esta reflexão julgamos importante e necessaria, pois a pratica do ensino nos tem feito ver accumular-se um enxame de duvidas no espirito que a tem deixado desapercebida.