PRIMEIRA PARTE

CAPITULO I

Principios elementares

Arithmetica é o ramo da sciencia dos numeros que os considera sob o ponto de vista particular da realização dos calculos. (*)

Sendo os numeros o objecto da arithmetica, segue-se desde logo a necessidade de saber o que é numero; mas para adquirir-se este conhecimento é preciso ter-se duas idéas que são subsidiarias á idéa do numero, e vem a ser, a da quantidade e a da unidade.

Define se quantidade tudo o que é susceptivel da comparação de igual, maior ou menor. Ha duas especies de quantidades: quantidade continua e descontinua.

Quantidade continua *é a que póde crescer ou decrescer por grãos tão pequenos quanto se queira*, ou, *é aquella em que as partes estão de tal sorte unidas que o fim de uma é necessariamente principio de outra.*

Quantidade descontinua *é a que cresce ou decresce por grãos finitos;* taes são todas as collecções, reuniões de objectos semelhantes.

(*) A palavra arithmetica quer dizer no grego: disciplina demonstrativa. Outros dizem derivar-se do verbo grego αριθμεω, que quer dizer contar.

No espaço infinito que temos diante de nossos olhos e que nossos sentidos se perdem em considerar, é que todos os corpos da natureza se achão mergulhados, e conseguintemente occupando ou limitando delle uma certa porção a que se dá o nome de extensão Ora. a propriedade que designa tamanho é que se chama grandeza ou quantidade; e como quanto maior ou menor for a porção de espaço occupada pelo corpo, maior ou menor será a grandeza, segue-se, que em nossa concepção não podemos dar existencia a um corpo qualquer, sem que préviamente imaginemos o espaço que elle occupa; mas é obvio, que emquanto não medirmos esta extensão, poderemos, sim, fazer uma idéa, mas não exactamente conceber a grandeza desse corpo. Esta extensão assim considerada, na qual nem o nosso espirito ainda pôde fazer a separação de suas partes integrantes, essa grandeza ainda não avaliada, é que vem a ser a quantidade continua.

Supponhamos agora, que comparavamos o corpo proposto com outro da mesma natureza e de grandeza convencionada. Desta comparação resulta applicarmos o corpo de comparação sobre o corpo comparado, (operação que se fará directa ou indirectamente conforme a natureza do corpo) e vermos quantas vezes aquelle neste se contém. Esta operação equivale a imaginar que se tem separado no corpo proposto um certo numero de partes iguaes ao corpo de comparação. Esta quantidade agora obtida, composta de partes distinctas, é a quantidade descontinua; e a quantidade com que se comparou a quantidade continua, e que é origem da descontinua, se chama unidade; de sorte que, *unidade mathematica, é uma grandeza designada para medir ou comparar outras da mesma especie.*

Quantidades ha, que são essencialmente descontinuas; por exemplo, a collecção de individuos ou de cousas da mesma especie é uma quantidade desse genero; porque nella não podemos suppor crescimentos ou decrescimentos de uma grandeza tão pequena quanto quizermos (e é essa a qualidade essencial das quantidades continuas). Nestas quantidades, a unidade não póde ser arbitraria; e é sem contradicção um individuo da mesma natureza. Assim, pois, na collecção seis homens, evidentemente a unidade é o homem.

Destas quantidades, é a descontinua que faz objecto da arithmetica; porque com effeito ella é representada pelo numero.

Agora que já temos um tal ou qual conhecimento da quantidade e da unidade, vamos definir o que é numero.

Numero é a relação que existe entre a quantidade e a unidade. Com effeito, supponhamos que tinhamos a distancia A——————B comprehendida entre os dous pontos A e B. Para avaliarmos ou medirmos esta quantidade, é mister comparal-a com outra que lhe seja homogenea ou da mesma especie, que é a que se chama unidade; e seja essa outra, a quantidade a——b: desta comparação resulta applicarmos a unidade a——b sobre a quantidade A——————B, e vermos quantas vezes ella ahi é contida; e supponde, por exemplo, que cabia cinco vezes exactamente, ficaria a quantidade A———B reduzida á quantidade A—+—+—+—+—B, que lhe é equivalente, por isso que se acha comprehendida dentro dos limites: ora a quantidade A—+—+—+—+—B é representada pela somma das 5 unidades, ou pelo numero 5; e analysando, vê se que o numero 5 foi obtido, comparando a quantidade com a unidade; porém o resultado da comparação entre duas quantidades da mesma especie é que se chama relação, logo o numero é a relação que existe entre a quantidade e a unidade. Este raciocinio é geral, porque é independente do numero de vezes que a quantidade póde conter a unidade.

Na avaliação das quantidades, podem succeder tres casos: ou que a unidade se contenha exactamente na quantidade, ou que se contenha um certo numero de vezes e haja um resto, ou finalmente, que não se contenha nenhuma vez. No primeiro caso, que é aquelle que já considerámos, fórma-se um numero unicamente composto de unidades; no segundo caso, supponhamos que sobrepondo a unidade a———b á quantidade A——————B, ella ahi se conteve quatro vezes e houve o resto b B, isto é, A—+—+—+——b——B; trata-se de avaliar este resto, e ainda expresso na mesma unidade: para isso divide-se a unidade em partes taes, que a grandeza de cada uma dellas seja menor que a grandeza b B que é o resto que se quer medir, depois toma-se uma dessas partes para nova unidade, a qual applicada sobre o resto, o apresenta avaliado em partes da unidade primitiva. Isto quer dizer que, se dividirmos a unidade em quatro partes, e sobrepuzermos uma dessas partes, que é um quarto da unidade, ao resto b B, e supponde que esse quarto da unidade se conteve duas vezes no resto, se fórma o numero 4 mais dous quartos da mesma unidade; isto é, um numero composto de unidades e partes da unidade. No terceiro caso, supponhamos que a quantidade A————B não podia conter nenhuma vez a unidade a————b, por isso que esta era maior que aquella; então procederiamos da mesma fórma que procedemos quando quizemos avaliar o resto b B; isto é, dividiriamos a unidade em um numero de partes tal, que a grandeza de cada uma dellas fosse menor que a quantidade A————B; e estariamos reduzidos a comparar a quantidade A————B com a parte tomada por unidade.

Destes tres casos que considerámos, resulta que ha tres especies de numeros: numero inteiro, numero quebrado, e numero mixto. Numero inteiro, *é o composto unicamente de unidades; numero quebrado é o formado sómente de partes da unidade; e numero mixto é o formado de unidades e partes da unidade.*

Ha duas maneiras de considerar os numeros: ou como abstractos, ou como concretos. Numero abstracto *é aquelle que não se applica a especie alguma de unidades, e numero concreto é aquelle que determina a especie de unidades a que pertence;* por exemplo: quando dizemos seis ou seis vezes, consideramos o numero 6 como abstracto; e quando dizemos oito livros, 8 livros é um numero concreto, onde a especie determinada é livro.

O numero concreto, ou é *complexo*, ou *incomplexo*. Diz-se complexo quando *consta de unidades de differentes grandezas, todas, porém, referidas ao mesmo objecto:* e incomplexo quando *consta de unidades de uma só grandeza.* Exemplo de um numero complexo: 5 arrobas, 3 libras, 5 onças de cêra; exemplo de um numero incomplexo: 7 varas de panno.

CAPITULO II

Principios fundamentaes

NUMERAÇÃO

Numeração *é um systema resumido de palavras e figuras, convencionaes, com que se enuncia e escreve todos os numeros.*

Desde que se tem conhecimento dos numeros, a primeira necessidade que logo apparece é a da maneira de exprimil-os; esta foi a primeira investigação feita pelos primeiros arithmeticos, e della resultou a numeração. Como a principio o unico meio que havia de exprimil-os era por um certo numero o mais limitado que foi possivel crear de palavras, e só depois é que forão inventados esses caracteres particulares que se chamão algarismos, resultou disto os arithmeticos distinguirem duas especies de numeração: numeração fallada, e numeração escripta; sendo numeração fallada, *a arte de exprimir os numeros por meio de palavras*, e numeração escripta, *a arte de exprimir os numeros por meio de algarismos.*

As desvantagens que apresenta a numeração fallada são: 1ª, que representando-se os numeros do mesmo modo como erão enunciados, se tornava assim muito prolixa a sua escripta; 2ª, que sendo elles representados por palavras, e estas compostas de differentes sons variaveis para as differentes linguas, havia por isso o grande inconveniente de não se tornarem universaes, isto é, entendidos p r todas as nações; mas estes inconvenientes forão removidos pela numeração escripta, que veio tornar perfeita a sciencia dos numeros.

Antes que se inventassem caracteres proprios a uma escripta universal, estabeleceu-se uma serie curta de palavras, que abrangesse um extenso limite, alem do qual não fosse nunca preciso transpôr. Para isso, imaginárão-se os numeros compostos de diversas ordens de unidades, e cada grupo de tres dessas, constituindo uma classe differente, fundando-se o principio que *dez unidades de cada ordem formarião uma de ordem superior;* e emquanto cada uma dessas ordens não instituisse uma nova, fossem os numeros por ella representados, designados pelas palavras *um*, *dous*, *tres*, *quatro*, *cinco*, *seis*, *sete*, *oito*, e *nove*, e as tres ordens de cada grupo pelas palavras *unidades dezenas* e *centenas*; significando a palavra *dezena* a reunião de dez unidades, e a palavra *centena* a de dez dezenas ou de cem unidades. dessa classe. As diversas classes forão designadas pelas denominacões de — unidades — milhares — milhões — bilhões — trilhões — quatrilhões.... etc... até nonilhões. E assim se chegou a exprimir todos os numeros comprehendidos em todas as ordens e em todas as classes, dizendo: uma, duas, tres unidades, etc.; uma, duas, tres dezenas, etc.; uma, duas tres centenas, etc.: accrescentando-se no fim a denominação da classe, como por exemplo: *uma dezena de milhar*, ou *dez mil*; *uma centena de milhar*, ou *cem mil*; *uma dezena de milhão*, ou *dez milhões*, *uma centena de milhão*, ou *cem milhões*, etc.

D'aqui resulta que desde que se sabe enunciar todos os numeros contidos na 1ª classe, sabe-se ipso facto enuncia los em todas as outras, sem ser preciso crear palavra novas.

Entretanto, quando o numero comprehende duas ou mais classes ou grupos de tres ordens, abrevia-se a sua enunciação, por meio das terminações *enta* e *entas* aos nomes que exprimem as diversas ordens das classes superiores; e assim em lugar de quatro dezenas, diz-se quarenta unidades, etc.: em lugar de duas, tres centenas, etc., diz-se duzentas, trezentas unidades, etc.

Segundo esta abreviação, o numero que tiver duas centenas, cinco dezenas, e seis unidades, lê-se: duzentas e cincoenta e seis unidades.

Como é facil de verificar póde-se enunciar os diversos numeros, usando de doze palavras, que são: *um*, *dous*, *tres*... *nove*, *dez*, *cem*, *mil*, e as terminações *enta*, *entos* e *lhão*. Não obstante, o uso tem admittido as palavras *onze*, *doze*, *treze*, *quatorze*, *quinze*, em lugar de *dez* e *um*, de *dez* e *dous*, de *dez* e *tres*, etc.; e vinte, e trinta em lugar de vienta, e trienta E com este tão limitado numero de palavras se chega a enunciar todos os numeros, desde um até novecentos e noventa e nove nonilhões. Além deste limite, não ha necessidade nenhuma da vida que nos conduza á representação de numero tão consideravel; e se houvesse, seria preciso crear uma nova serie de palavras para semelhante representação.

Assentada esta nomenclatura, inventou-se caracteres especiaes, proprios a universalisar a escripta dos numeros; forão os algarismos, *que são as letras da escriptura numerica*, e são: 1, 2, 3 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, nove dos quaes são signitivos, e o ultimo, que é o zero, não tem valor algum, e sim duas serventias, como depois veremos. Com estes dez algarismos inventados se constituio um systema particular de numeração, e portanto a base desse systema creado veio a ser os algarismos sobre os quaes todo esse systema repousou. Assim como com esses dez algarismos se pôde formar um systema, tambem se poderia formar systemas com mais ou menos algarismos; e cada um delles teria por base os algarismos que nelle entrassem.

D'aqui se segue que, *base de um systema de numeração, é o numero de algarismos que entra nesse systema*; que a variedade dos systemas depende da variedade das bases, assim como a denominação que deve ter cada um desses systemas é filha da denominação da base; portanto o systema de numeração em que só entrassem dous algarismos teria por base dous, e o systema se chamaria *binario*; o systema em que entrassem tres algarismos, teria por base tres e se chamaria *ternario*, etc., e o systema em que entrão dez algarismos tem por base dez e se chama *decimal*.

Qualquer que seja o numero de algarismos inventados, elle é sempre muito limitado relativamente aos numeros que podem existir: de sorte que é preciso usar de um artificio, de certo bem engenhoso, para que com tão poucos caracteres ou algarismos, possão ser representados todos os numeros. O artificio consiste em sujeitar esses algarismos á lei seguinte: *Todo algarismo escripto á esquerda de outro terá um valo tantos vezes maior do que teria se se achasse uma casa á direita, quantas são as unidades da base do systema, e vice-versa*. Esta lei particularisada para os differentes systemas dá para o systema binario: *Todo algarismo escripto á esquerda de outro terá um valor duas vezes maior do que teria se se acha-se uma casa á direita, e vice-versa*. Para o systema ternario: *Todo algarismo escripto á esquerda de outro terá um valor tres vezes maior do que teria se se achasse uma casa á direita, e vice-versa*... Para o systema decimal: *Todo algarismo escripto á esquerda de outro terá um valor dez vezes* *maior do que teria se se achasse uma casa á direita, e vice-versa.*

Entre os differentes systemas que porventura se pode formar, o decimal é o unico adoptado; e por isso só delle nos occuparemos.

SYSTEMA DECIMAL

Seguindo a maneira natural de formar os numeros pela reunião successiva de uma unidade a outra, e attendendo ao limite marcado pelos algarismos que entrão no systema de que tratamos, e que devem exprimir os differentes compostos, vê-se que o maior composto que por esses caracteres póde ser representado é nove; de sorte que, quando chegarmos ao composto dez, não haverá letra que o exprima, e então será mister estabelecer a lei convencionada; isto é, que essas dez unidades de primeira ordem, e que por isso se chamão primitivas, vão formar uma unidade de segunda ordem, que por ser formada da reunião de dez unidades primitivas se chama dezena, e que valendo dez vezes mais que as primeiras, em virtude da outra lei deve ser escripta immediatamente á esquerda dellas. Agora toda a difficuldade consiste em fazer com que o mesmo algarismo 1, que ainda ha pouco exprimio unidade primitiva, vá agora exprimir unidade de segunda ordem ou dezena; para isso é que se inventou o zero, que nenhum valor tendo, escripto em qualquer casa servirá para indicar que na casa em que se acha não ha unidades dessa ordem, porque todas que ahi havião forão formar as da ordem seguinte: de maneira que escrevendo o zero á direita do 1, elle não só mostrará que não ha unidades primitivas, como tambem fará com que o 1 recue uma casa para a esquerda, e por isso vá representar um valor dez vezes maior a respeito das unidades, ou uma dezena; e eis-aqui a razão por que o composto dez é representado desta sorte: 10. Ora, agora, cada uma destas unidades tanto primitivas como de segunda ordem, passão pelos mesmos gráos de crescimentos por que passárão as primitivas; isto é, crescem de 1 até 9; de sorte que o maior numero formado de duas ordens de unidades é 99. Semelhantemente, quando tivermos o composto —cem, será elle representado por 100; porque cem é igual a noventa e nove mais um: ora, juntando uma unidade a nove primitivas, teremos dez unidades primitivas; porém dez unidades primitivas formão uma dezena, que vai para a casa das dezenas; e então é preciso escrever zero na casa das unidades para indicar que ahi não ha unidades dessa ordem; porque as que havião, concorrêrão todas para a formação de unidades da ordem seguinte: porém a dezena formada pela somma das unidades primitivas, junta ás nove dezenas existentes, dá dez dezenas: e como não ha letra que exprima esse composto de dez dezenas, é mister tambem applicar a lei, de que *dez dezenas formão uma centena;* e então segue-se, que devemos levar essa centena para a casa das centenas, e portanto escrever zero na casa das dezenas pela mesma razão acima dada. Pela analyse feita sobre a serie natural da formação dos numeros, se vê que 100 é o menor numero composto de tres ordens de unidades, e por consequencia 999 será o maior, segundo o que já vimos. Proseguindo nestas formações, se vão constituindo as differentes ordens de unidades cujas denominações e valores se achão exarados na tabella seguinte:

ORDENS	&c9.ª	8.ª	7.ª	6.ª	5.ª	4.ª	3.ª	2.ª	1.ª
NOMES, ETC.	Centena de milh˜es	Dezena de milh˜es	Milh˜es	Centena de milhares	Dezena de milhares	Milhares	Centenas	Dezenas	Unidades
VALORES								1	10
							1	10	
						1	10		
					1	10			
				1	10				
			1	10					
		1	10						
	1	10							

Segundo estes principios estabelecidos, um mesmo algarismo recebe dous valores: um que se chama absoluto, e outro local ou relativo. *Valor absoluto de um algarismo, é o dado pela fórma desse algarismo*, e valor local ou relativo, *é o dado pelo lugar que occupa relativamente á casa das unidades.* Assim no numero 342, o valor absoluto do primeiro algarismo á direita é dous, porque essa é a fórma do algarismo; do segundo é quatro, etc.; porém o valor local do primeiro é duas unidades, do segundo é quatro dezenas, etc.; e como em cada algarismo a fórma não varia, segue-se que o valor absoluto, que dessa fórma depende, será constante para um mesmo algarismo; e podendo elle ter, relativamente á casa das unidades, infinitas collocações, e dessas collocações dependendo o valor relativo, segue se que o valor relativo de um mesmo algarismo é variavel ao infinito; e é nestas infinitas variações de valores a que um mesmo algarismo é sujeito, que reside todo o engenho e artificio da numeração escripta. 4

CONSEQUENCIAS DA NUMERAÇÃO

A primeira consequencia que se deduz dos principios da numeração, é que torna-se um numero dez vezes maior tantas vezes *quantas forem as cifras que á sua direita se ajuntar;* e vice-versa: *quando um numero fôr terminado por zeros, se tornará dez vezes menor tantas vezes, quantos forem os zeros que á sua direita se supprimir.* Com effeito, suppondo que o numero era 425, e que se queria multiplical-o por 10, bastava para isso juntar-se-lhe á direita um zero, e o numero resultante seria 4,250. Este numero é 10 vezes maior do que o primeiro, porque o algarismo 5 que no primeiro occupava a casa das unidades, no segundo occupa a casa das dezenas, e portanto recebeu um valor 10 vezes maior; o algarismo 2, que no primeiro occupava a casa das dezenas, no segundo occupa a casa das centenas, e portanto tambem recebeu um valor 10 vezes maior, e o 4, que no primeiro occupava a casa das centenas, no segundo occupa a casa dos milhares, e conseguintemente recebeu um valor 10 vezes maior; e, então, se todas as partes integrantes do numero recebêrão um valor 10 vezes maior, segue-se que todo o numero ficou 10 vezes maior. O mesmo raciocinio, applicado em ordem inversa, demonstra a proposição reciproca, isto é, que quando um numero for terminado por zeros, se o tornará 10 vezes menor tantas vezes quantos forem os zeros que á sua direita se supprimir. O raciocinio é o mesmo, qualquer que seja o numero de zeros que á direita do numero se accrescente ou se tire, unicamente differindo o valor que o numero recebe, pelo numero de zeros que se ajunta ou tira; isto é, que: *se se ajuntar dous zeros, o numero fica multiplicado por 100; se se supprimir dous zeros, o numero fica dividido por 100; se se ajuntar tres zeros, o numero fica multiplicado por 1000, e vice-versa*, etc.

A segunda consequencia é a solução dos dous problemas seguintes, chamados os problemas da numeração: 1º, *enunciado um numero, escrevel-o; 2º, escripto o numero, enuncial-o.*

SOLUÇÃO DO PRIMEIRO PROBLEMA

O primeiro problema se resolve *escrevendo successivamente da esquerda para a direita os differentes algarismos que representão as differentes ordens de unidades de que o numero se compõe.*

Poder-se-hia objectar a preferencia de escrever o numero da esquerda para a direita, e não da direita para a esquerda: mas, facilmente se desfaz qualquer objecção a este respeito, apresentando a circumstan ia, não só de difficuldade, mas tambem de impossibilidade em escrever-se da direita para a esquerda no caso do numero ser muito composto, porque para escrever se o numero nesse sentido é preciso reter de cór todos os seus algarismos, e suas differentes ordens, o que é impossivel: além disso, admittida mesmo tal memoria, ainda haveria o inconveniente do prejuizo do tempo que se perderia em esperar que se enunciasse o numero todo, para então escrevel-o em sentido inverso.

SOLUÇÃO DO SEGUNDO PROBLEMA

Divide-se o numero em classe de tres letras da direita para a esquerda, dá-se a primeira classe o nome de unidades, á segunda o de milhares, e a todas as outras o de *milhões, billiões, etc.; depois lê-se o numero da esquerda para a direita, dando a cada classe a sua denominação competente.*

Divide-se o numero em classes de tres letras, porque segundo a convenção estabelecida, de tres em tres ordens de unidades, apparece sempre uma ordem de nova especie; divide se da direita para a esquerda, porque, quando se divide, tem-se em vista achar as unidades de ordem mais elevada nelle existentes, para d'ahi começar a leitura do numero, e essas unidades, em virtude das leis de numeração, são formadas nesse sentido, isto é, da direita para a esquerda; e se dividissemos o numero da esquerda para a direita, aconteceria que unidades de uma ordem inferior, entrarião em classe com unidades superiores e ficaria assim alterado todo o valor do numero.

EXEMPLO

4800025019008732015276002

Sept	S	qt	Q	T	B	M	m	U
4,	800,	025,	019,	008,	732,	015,	276,	002,

e lê-se: 4 septilliões, 800 sextilliões, 25 quintilliões, 19 quatrilliões, 8 trilliões, 732 billiões, 15 milhões, 276 mil e duas unidades.

OBSERVAÇÃO

Segundo o systema antigo, as classes se compõem de seis algarismos, comprehendendo cada uma, unidades, dezenas, centenas, milhares, dezenas de milhares, e centenas de milhares dessa classe; como se vê no exemplo seguinte:

Q	m	T	m	B	m	M	m	U
4,	800,	025,	019,	008,	732,	015,	276,	002,

e lê se: 4 quatrilliões, 800 mil e 25 trilliões, 19 mil e 8 billiões, 732 mil e 15 milhões, 276 mil e 2 unidades. (*)

(*) Quando o numero proposto exprime moeda, em vez de milhar se diz conto, bi-conto em vez de billião, etc.