OITAVA PARTE

CAPITULO IX

Potencias e raizes

Potencia arithmetica é o producto de um numero por si mesmo um certo numero de vezes, e raiz é aquelle numero que multiplicado por si mesmo um certo numero de vezes produz a potencia.

Quando o numero é multiplicado por si mesmo uma vez, temos a 2ª potencia a que se dá o nome de quadrado ; e ao numero que multiplicado por si mesmo produzio o quadrado chama-se raiz quadrada. Por exemplo, 16 é o quadrado de 4, e 4 é a raiz quadrada de 16.

Quando o numero é multiplicado por si mesmo duas vezes, temos a 3ª potencia, a que se dá o nome de cubo; e ao numero que multiplicado por si mesmo produzio o cubo, chama-se raiz cubica. Por exemplo, 27 é o cubo de 3, e 3 é a raiz cubica de 27.

Semelhantemente, o producto de um numero por si mesmo tres vezes é a 4ª potencia ; e o numero que a produzio é a raiz 4ª, etc.

E d'qui a seguinte consequencia: uma potencia é um producto de factores iguaes, e fórma-se o quadrado de um numero qualquer, multiplicando esse numero por si mesmo, uma vez,

Exemplo.— O quadrado de 9 é 81, de 12 é 144, de $\frac{2}{3}$ é $\frac{4}{9}$, etc., Fórma-se o cubo de um numero qualquer multiplicando este numero por si mesmo duas vezes.

Exemplo: o cubo de 4 é 64, de 5 é 125, de $\frac{3}{5}$ é $\frac{27}{125}$, etc.

Assim, pois, a formação do quadrado, do cubo e de qualquer potencia quer de numeros inteiros quer de fracções, não exige processo particular, porque consiste em uma simples multiplicação entre factores iguaes; o mesmo não acontece a respeito da extracção das raizes, que é uma operação especial e essencialmente diversa das precedentes; e por isso occupar-nos-hemos della com a minuciosidade precisa ao seu perfeito conhecimento.

Raiz quadrada

Definição.—*Raiz quadrada de um numero é aquelle numero que multiplicado por si mesmo uma vez produz o quadrado.*

Distinguem-se dous casos nesta operação: 1° é o da extracção da raiz de um numero simples ou composto de dous algarismos; 2°, é o da extracção de um numero composto de tres ou mais algarismos.

1° caso

As raizes neste caso são obtidas por meio da tabella seguinte:

Raizes quadradas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrados........	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Nesta tabella vemos que o quadrado de 1 é 1, e a raiz quadrada 1 é 1; o quadrado de 2 é 4, e a raiz quadrada de 4 é 2, etc.; e que desde 1 até 81 só ha 9 numeros quadrados perfeitos; e isto quer dizer que todos os numeros comprehendidos entre os 9 exarados na tabella não tem raiz exacta. Por exemplo, o numero 2 ou 3 achando-se comprehendido entre 1 e 4, a sua raiz acha-se tambem comprehendida entre a raiz de 1 que é 1, e a raiz de 4, que é 2, conseguintemente é maior que 1 e menor que 2, e será portanto 1 mais uma fracção. O mesmo se diz a respeito dos numeros comprehendidos entre 4 e 9, 9 e 16, 16 e 25, etc.

E disto resulta, que esta tabella não serve sómente para dar a raiz quadrada dos 9 numeros simples ou compostos de dous algarismos explicitamente nella exarados; porém tambem a raiz quadrada do maior quadrado contido em qualquer dos numeros que se imaginão comprehendidos entre dous consecutivos da referida tabella.

Exemplo.—O numero 45 não se acha explicito na tabella, e por consequencia não é quadrado perfeito; porém, como se acha comprehendido entre os dous consecutivos 36 e 49, e é maior que 36 e menor que 49, segue-se que o maior quadrado nelle contido é 36, cuja raiz é 6.

2º CASO

Regra.—*Divide-se o numero em classe de duas lettras da direita para a esquerda; extrahe-se a raiz do maior quadrado contido na ultima secção á esquerda, e escreve-se essa raiz á direita do numero proposto, delle separada por uma chave de divisão; eleva-se essa raiz ao quadrado e subtrahe-se da mesma secção; baixa-se e escreve-se á direita do resto a secção seguinte; separa-se do numero assim composto o ultimo algarismo á direita, e divide-se a parte restante á esquerda pelo dobro da raiz achada; escreve-se o quociente obtido á direita da raiz e tambem do numero que servio de divisor; multiplica-se este assim augmentado pelo mesmo quociente, e subtrahe-se o producto do dividendo com a lettra que se tinha separado; baixa-se e escreve-se á direita do resto a classe seguinte, e do mesmo modo se procede até a ultima secção, com a qual se obterá o ultimo algarismo da raiz.*

1º EXEMPLO

Seja o numero 2209, do qual se pretende extrahir a raiz. Applicando-lhe a regra acima enunciada, vem:

22.09	47
16	——
—	87
60 9	7
60.9	——
——	609
0	

E 47 é a raiz pedida.

2º EXEMPLO

10.56.25	325
9	——
——	62
15.6	2
124	——
——	124
322.5	——
3225	645
——	5
0	——
	3225

Demonstração da regra.—Divide-se o numero da direita para a esquerda, porque o quadrado é um producto da raiz por si mesma, e a formação deste producto é feita das unidades inferiores para as superiores, isto é, da direita para a esquerda, d'onde resulta que na parte esquerda do numero proposto é que se deve encontrar o producto de ordem mais elevada; e como na divisão do numero em classes só se tem em vista achar esse producto de orden superior, segue-se que nesse sentido é que se deve proceder a tal investigação. Divide se em classes de duas lettras, porque o quadrado de 10, que é o menor numero composto de dous algarismos, sendo 100, que é o menor numero composto de tres algarismos, com mais forte razão um numero maior que 1 0 terá duas lettras na raiz, e conseguintemente esta raiz se comporá de dezenas mais unidades, que, elevadas ao quadrado, dão um producto composto de tres partes: o quadrado das dezenas, mais o dobro das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades; isto é, representando-se as dezenas por

«a», e as unidades por «b», pela multiplicação algebrica de $a+b$ por $a+b$, vem :

$$(a+b)^2=a^2+2\ ab+b^2.$$

Ora, o quadrado das dezenas dá pelo menos centenas, logo, esse quadrado não póde ser representado nem pelo algarismo das unidades, nem pelo das dezenas, e por isso separão-se os algarismos 5 e 2; e temos certeza que no numero restante 1056 se acha comprehendido o quadrado das dezenas. Considerando agora o numero 1056 como representando unidades primitivas, vemos que elle é tambem composto de mais de dous algarismos, e portanto a sua raiz tambem deve ser representada por dezenas e unidades, que, elevadas ao quadrado, dão o quadrado das dezenas, mais o dobro das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades ; e como o quadrado das dezenas dá pelo menos centenas, segue-se que não póde ser representado nem pelas unidades nem pelas dezenas, e por isso separão-se os algarismos 6 e 5. E este mesmo raciocinio se produziria se ainda o numero restante fosse composto de mais de dous algarismos.

Busca-se o maior quadrado contido na ultima secção á esquerda, porque esse maior quadrado é o quadrado das dezenas da raiz procurada, o qual, em virtude do que fica dito ácerca da formação dos productos, é representado por essa secção.

Subtrahe-se o quadrado das dezenas da raiz da secção considerada, porque essa secção em geral não só contém o quadrado das dezenas, como tambem as reservas do dobro das dezenas pelas unidades, e essas reservas só podem ser obtidas tomando se a differença entre o numero que representa a ultima secção á esquerda e o quadrado das dezenas da raiz. Baixa-se e escreve-se á direita do resto a secção seguinte, porque essa secção devendo conter o dobro das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades, e o resto representando as reservas do dobro das dezenas pelas unidades, é claro que se deve reunir ao resto a referida secção. Separa-se o ultimo algarismo á direita do numero formado pelo resto e a secção abaixada, porque tendo nós obtido já as dezenas da raiz, precisamos achar as unidades dessa mesma raiz, e para isso attendemos que se soubessemos em que parte do numero estaria comprehendido o dobro das dezenas pelas unidades, sendo esta quantidade um producto composto de dous factores, um dos quaes é o dobro das dezenas, e o outro é as unidades, dividindo-se o producto pelo factor dobro das dezenas, virá o outro, que é as unidades; porém o dobro das dezenas por unidades dá pelo menos dezenas; logo, esse producto não póde ser representado pelas unidades, e por isso separa-se esse ultimo algarismo.—Divide-se a parte restante á esquerda pelo dobro da raiz achada, porque essa parte comprehendendo o dobro das dezenas pelas unidades, é obvio que quantas vezes ella contiver o dobro das dezenas da raiz, tantas serão as unidades dessa raiz que procuramos.—Escreve-se o quociente obtido á direita do numero que servio de divisor. e multiplica-se o numero resultante por esse mesmo quociente, porque o producto assim formado é o dobro das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades; numero este que é mister ser obtido não só para a verificação das unidades achadas na raiz, como tambem para, subtrahindo-o do numero que servio de dividendo mais o algarismo separado, extrahir-lhe as reservas que porventura ahi se achem contidas.

1ª *Observação.*—Quando no decorrer do calculo o numero que serve de dividendo não póde conter o numero que serve de divisor, escreve-se zero no quociente, abaixa-se nova classe, separa-se o ultimo algarismo á direita fórma-se novo divisor e continua-se a operação.

2ª *Observação.*—Os algarismos da raiz são tantos quantas são as classes em que se divide o numero.

3ª *Observação.* — Quando, depois de se ter baixado uma classe e separado á direita o ultimo algarismo. se divide o numero restante, pelo dobro da raiz achada, acontece que o quociente póde vir maior ou menor que o verdadeiro; e então é mister conhecer o meio de verificar e corrigir essa inexactidão. Se o quociente fôr maior, escripto á direita do dobro das dezenas e por elle multiplicado esse numero resultante, deve forçosamente vir um producto maior do que o numero composto do resto e a classe baixada, e conseguintemente não póde ser subtrahido. Se, porém, fôr menor o quociente, este meio já não serve para a verificação, visto como o producto sendo menor póde ser subtrahido: e então recorre-se a uma fórma algebrica que dá a differenca entre os quadrados de dous numeros inteiros consecutivos; isto é, chamando « a » um numero inteiro qualquer, o seu consecutivo é $a+1$; porém o quadrado de « a » é « a^2 », e o de « $a+1$ » é a^2+2a+1; por consequencia, $(a+1)^2-a^2=a^2+2a+1-a^2$, e como $a^2-a^2=0$, vem:

$$(a+1)^2-a^2=2a+1.$$

Esta fórmula traduzida em linguagem ordinaria, quer dizer que: *a differença dos quadrados entre dous numeros inteiros consecutivos é igual ao dobro do menor augmentado de uma unidade.*

Fazendo applicação desta fórmula, supponhamos que extrahindo a raiz quadrada de 1369, em vez de acharmos a sua raiz exacta 37, achavamos 36; então o resto 73 sendo igual ao dobro de 36 mais uma unidade, nos revela que a raiz obtida é menor que a verdadeira sua consecutiva 37.

Raizes fraccionarias

Regra.—*Fórma-se o quadrado de uma fracção elevando-se ao quadrado ambos os seus termos.*

Demonstração da regra.—Seja a fracção $\frac{a}{b}$. Como o quadrado de um numero é o producto desse numero por si mesmo uma vez, segue se que para formar-se o quadrado de $\frac{a}{b}$ é preciso multiplicar $\frac{a}{b}$ por si mesmo uma vez; isto é, $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a\times a}{b\times b}=\frac{a^2}{b^2}$.

Assim, pois, o quadrado de $\frac{3}{5}$ é $\frac{9}{25}$, e a raiz quadrada de $\frac{9}{25}$ é $\frac{3}{5}$; o quadrado de $\frac{5}{7}$ é $\frac{25}{49}$, e a raiz quadrada de $\frac{25}{49}$ é $\frac{5}{7}$, etc.

Uma fracção não póde ser raiz quadrada senão de outra fracção; isto é, se um numero inteiro não fôr quadrado de outro numero inteiro, não ha tambem fracção nenhuma que possa exprimir exactamente a sua raiz quadrada; porque se suppuzermos que uma fracção irreductivel $\frac{a}{b}$ póde representar exactamente a raiz quadrada de um numero inteiro, seguir-se-ha que este numero inteiro será igual a $\frac{a^2}{b^2}$ (porque se eleva ao quadrado uma fracção elevando ao quadrado ambos os seus termos). Ora por hypothese a fracção $\frac{a}{b}$ é irreductivel; logo $\frac{a^2}{b^2}$ tambem é irreductivel (porque o divisor de uma potencia é divisor da raiz), e conseguintemente não póde ser um numero inteiro.

Ha tres casos em que uma raiz quadrada póde ser fraccionaria: ou sendo dado um numero inteiro não quadrado perfeito, ou uma fracção decimal, ou uma fracção ordinaria.

1º CASO

Seja o numero 2 do qual se pretenda a raiz quadrada. Este numero não se achando na tabella dos quadrados dos numeros digitos, segue-se que não é quadrado perfeito; e como está comprehendido entre 1 e 4, *ipso facto* a sua raiz está comprehendida entre a raiz quadrada de 1 que é 1, e a raiz de 4, que é 2. Logo, a raiz quadrada de 2 é 1 mais uma fracção. Exprime-se essa fracção em decimaes do modo seguinte.

Regra. — *Accrescenta-se á direita do inteiro tantas classes de dous zeros quantos são os algarismos decimaes que se quer na raiz; extrahe-se a raiz como de um numero inteiro, e separão-se nella as casas de dizima pedidas.*

EXEMPLO

2.00.00.00	1,414
1	24
10.0	4
9 6	96
40 0	281
28 1	1.
11 90.0	281
11 29.6	2824
.. 60 4	4
	11296

Demonstração.—A raiz pedida devendo ser uma fracção decimal, o seu quadrado deve conter um numero duplo de casas decimaes dessa raiz (porque para eleva-la ao quadrado é preciso multiplica-la por si mesmo, e na multiplicação de fracções decimaes separa-se á direita do producto tantas casas para dizima quantas contém ambos os factores); e como é preciso que o quadrado da raiz em questão satisfaça tambem á condição de ser um numero inteiro, segue-se que não só temos de dar ao quadrado um numero duplo de casas decimaes, como tambem que essas casas sejão zeros.

Observação.—A' raiz quadrada de um numero que não é quadrado perfeito dá-se o nome de *incommensuravel*, porque não póde ter uma medida commum ou exacta com a unidade; d'onde resulta que essa raiz é sempre representada por uma dizima infinita, porém que não é periodica; porque, se o fosse, seria convertivel exactamente em uma fracção ordinaria, e deixaria de ser incommensuravel, o que vai de encontro á hypothese.

2º CASO

Seja a fracção decimal 0,345, da qual se pretenda a raiz quadrada.

Regra.—*Se o numero de algarismos decimaes da fracção proposta fôr par, extrahe-se a raiz como dos inteiros, e dá-se-lhe metade das casas de dizima existentes no quadrado; e se fôr impar, accrescenta-se primeiramente á sua direita tantos zeros quantos sejão precisos para que se torne par.*

EXEMPLO

34.50.00	0,587
25.	108
9 5.0	8
8 6 4	864
8 6 0.0	1167
8 1 6.9	7
4 3 1	8169

Demonstração.—Quando se eleva a fracção decimal ao quadrado, multiplica-se essa fracção por si mesma uma vez e conseguintemente separa se á direita do producto um numero duplo das casas decimaes contidas na raiz; do que resulta que a fracção decimal de numero impar de casas de dizima não póde ser quadrado perfeito, e como se póde accrescentar á direita de uma fracção decimal qualquer numero de zeros sem que ella se perturbe, segue se que por esse meio facilmente conseguimos tornar uma fracção decimal quadrado perfeito todas as vezes que ella não o seja.

3º CASO

Seja a fracção ordinaria $\frac{3}{5}$, por exemplo, da qual se queira extrahir a raiz quadrada.

1ª Regra. (*).—*Converte se a fracção ordinaria proposta em fracção decimal, e applica-se a esta a extracção da raiz.*

EXEMPLO

A fracção $\frac{3}{5}$ convertida em dizima, dá 0,6; ajuntando lhe um zero para poder extrahir a raiz quadrada, vêm 0,60, cuja raiz approximada até decimos é 0,7.

2ª Regra —*Se a fracção ordinaria fôr quadrado perfeito, extrahe-se a raiz a ambos os termos; se o denominador só o fôr, extrahe-se a raiz desse denominador, e approximadamente a do numerador; se, finalmente, o denominador não fôr quadrado perfeito multiplicão-se ambos os termos da fracção pelo mesmo denominador, e extrahe-se a raiz da fracção resultante.*

EXEMPLO

Se a fracção ordinaria proposta fosse $\frac{9}{25}$, a sua raiz quadrada seria $\frac{3}{5}$; se fosse $\frac{6}{49}$, a raiz seria $\frac{2,4}{7}=\frac{24}{70}=\frac{12}{35}$; se

(*) Esta regra só é applicavel quando a fracção é convertivel em dizima finita.

fosse $\frac{3}{5}$, multiplicando ambos os termos por 5, vem $\frac{15}{25}$, cuja raiz é $\frac{3,8}{5} = \frac{38}{50} = \frac{19}{25}$.

Demonstração.— Esta regra resalta da regra de multiplicação de fracções ordinarias, porque desde que se sabe que multiplicão se fracções ordinarias multiplicando os numeradores e denominadores entre si, se conclue que quando duas fracções a multiplicar forem de termos respectivamente identicos, o producto é o quadrado de uma dellas, e esse quadrado é obtido *elevando respectivamente ao quadrado cada um dos termos da fracção proposta, e vice-versa: extrahe-se a raiz quadrada de uma fracção ordinaria, extrahindo a raiz quadrada de ambos os seus termos.*

Observação.—A razão porque nesta regra sempre se attende ao denominador, com o fim de torna-lo quadrado perfeito na hypothese de o não ser, é porq e o denominador significando o numero de partes em que se acha a unidade dividida, e conseguintemente exprimindo a grandeza de cada uma dellas, não sendo elle quadrado perfeito, a sua raiz será um numero incommensuravel, não mostrará portanto uma divisão em partes exactas da unidade, e não haverá idéa nenhuma exacta a respeito da grandeza representada pela fracção proposta.

Caracteres dos numeros que não são quadrados perfeitos

1.º *Todo o numero par que não fôr divisivel por 4, não é quadrado perfeito.*

Demonstração.—Sendo « $2n$ » a fórmula geral dos numer s pares, e sendo o seu quadrado « $4n^2$ », fórmula esta que é evidentemente divisivel por 4, segue-se que não póde haver numero par quadrado perfeito que não seja divisivel por 4.

Observação—Não se deprehenda do principio acima demonstrado, que todo numero divisivel por 4 deva ser quadrado perfeito. Seria um absurdo contra o qual protestão os ns. 12, 24, etc. Da demonstração dada só se conclue que quando elle o for, será divisivel por 4; e vice-versa: sendo par e não divisivel por 4, não póde ser quadrado perfeito.

2.º Todo o numero impar que diminuido de uma unidade não der um resto divisivel por 4, não é quadrado perfeito.

Demonstração.—Sendo $(2n+1)$ a fórmula geral dos numeros impares, e sendo o seu quadrado:

$(2n+1)^2=4n^2+4n+1$, subtrahindo deste desenvolvimento a unidade, vem: $4n^2+4n$, quantidade esta que, sendo composta de dous termos e ambos divisiveis por 4, é essencialmente divisivel por 4. Logo, sempre que o numero impar, depois de diminuido de uma unidade, não der um resto divisivel por 4, não póde ser quadrado perfeito, como se queria demonstrar.

3.º Todo numero terminado pelos algarismos 2, 3, 7, 8, não é quadrado perfeito.

Demonstração.—Quando se eleva ao quadrado um numero inteiro, sómente o quadrado das unidades é o que influe no 1º algarismo da direita; e como dos quadrados de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, nenhum acaba em qualquer daquelles algarismos segue-se que não póde haver quadrado perfeito que nelle termine.

4.º Todo numero que terminar em um numero impar de zeros, não é quadrado perfeito.

Demonstração.—Para que o quadrado termine em zeros é preciso que a raiz tambem termine; e como qualquer numero terminado por zeros multiplicado por si mesmo dá um producto terminado por um numero duplo de zeros de qualquer dos factores, segue-se que sempre que um numero acabar por um numero impar de zeros não será quadrado perfeito.

Raiz cubica

Definição.—*Raiz cubica de um numero é aquelle numero que, multiplicado por si mesmo duas vezes, produz o cubo.*

Distinguem-se dous casos nesta operação: 1º, é o da extracção da raiz de um numero simples ou composto de dous ou tres algarismos; 2º, é o da extracção da raiz de um numero composto de quatro ou mais algarismos.

1º caso

As raizes neste caso são obtidas por meio da tabella seguinte :

Raizes cubicas	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Cubos........	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

Nesta tabella vê-se que o cubo de 1 é 1, e a raiz cubica de 1 é 1 : o cubo de 2 é 8, e a raiz cubica de 8 é 2, etc.; e que desde 1 até 729 só ha nove cubos perfeitos ; e isto quer dizer, que todos os numeros comprehendidos entre os 9 exarados na tabella não tem raiz exacta. Por exemplo, o numero 5 achando-se comprehendido entre 1 e 8, a sua raiz acha-se tambem comprehendida entre a raiz de 1, que é 1, e a raiz de 8, que é 2, e conseguintemente é maior que 1 e menor que 2, e será portanto 1 mais uma fracção. O mesmo se diz a respeito dos numeros comprehendidos entre 8 e 27, 27 e 64, etc.

E disto resulta que esta tabella não serve sómente para dar a raiz cubica dos 9 numeros simples ou compostos de dous e tres algarismos explicitamente nella exarados, porém tambem a raiz cubica do maior cubo contido em qualquer dos numeros que se imaginão comprehendidos entre dous consecutivos da referida tabella.

Exemplo —O numero 36 não se acha explicito na tabella, e por consequencia não é cubo perfeito ; porém, como se acha comprehendido entre os dous consecutivos 27 e 64, e é maior que 27 e menor que 64, segue-se que o maior cubo nelle contido é 27 cuja raiz é 3.

2º caso

Regra —*Divide-se o numero em classes de tres lettras da direita para a esquerda ; extrahe-se a raiz do maior cubo contido na ultima secção á esquerda, e escreve-se essa raiz á direita do numero proposto, delle separada por uma chave de divisão, eleva-se essa raiz ao cubo, e subtrahe-se da mesma secção; baixa-se e escreve-se á direita do resto a secção seguinte ; separa-se do numero assim composto os dous ultimos algarismos á direita, e divide-se a parte restante á esquerda pelo triplo do quadrado da raiz achada ; escreve-se o quociente obtido á direita da raiz ; eleva-se ao cubo toda a* *raiz achada, e subtrahe-se esse cubo do numero representado pelas duas classes já consideradas ; abaixa-se e escreve se á direita do resto a classe seguinte, e do mesmo modo se procede até a ultima secção, com a qual se obterá o ultimo algarismo da raiz.*

ENEMPLO

Seja o numero 43725858179, do qual se pretende extrahir a raiz cubica. Applicando-lhe a regra acima enunciada vem :

43.725.858.179	3523
27	27
167.25	3675
428.75	371712
..8508·58	
436142.08	
..1116501 79	
437258166 67	
......41512	

Demonstração da regra.— Divide-se o numero da direita para a esquerda, porque o cubo é um producto da raiz por si mesma, e a formação deste producto é feita das unidades inferiores para as superiores, isto é, da direita para a esquerda ; d'onde resulta que na parte esquerda do numero proposto é que se deve encontrar o producto de ordem mais elevada ; e como na divisão do numero em classes só se tem em vista achar esse producto de ordem superior, segue-se que nesse sentido é que se deve proceder a tal investigação. Divide-se em classes de tres lettras, porque o cubo de 10, que é o menor numero composto de dous algarismos sendo 1000, que é o menor composto de quatro, com mais forte razão um numero maior que 1000 terá pelo menos duas lettras na raiz ; e conseguintemente esta raiz se comporá de dezenas mais unidades, que elevadas ao cubo dão um producto composto de quatro partes : o cubo das dezenas, mais o triplo do quadrado das dezenas pelas unidades, mais o triplo das dezenas pelo quadrado das unidades, mais o cubo das unidades; isto é, representando-se as dezenas por « a » e as unidades por « b », pela multiplicação algebrica de $a+b$ por $a+b$ por $a+b$, vem:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Ora, o cubo das dezenas dá pelo menos milhares; logo esse cubo não póde ser representado nem pelo algarismo das unidades, nem pelo das dezenas, nem pelo das centenas, e por isso separão-se os algarismos 9, 7, 1; e temos certeza que no numero restante 43725858 se acha comprehendido o cubo das dezenas. Considerando agora este numero como representando unidades primitivas, vemos que elle é tambem composto de mais de tres algarismos, e portanto a sua raiz tambem deve ser representada por dezenas e unidades, que elevadas ao cubo dão o cubo das dezenas, mais o triplo do quadrado das dezenas pelas unidades, mais o triplo das dezenas pelo quadrado das unidades, mais o cubo das unidades; e como o cubo das dezenas dá pelo menos milhares, segue-se que não pode ser representado nem pelas unidades, nem pelas dezenas, nem pelas centenas, e por isso separão-se os algarismos 8, 5, 8, e temos certeza que no numero restante 43725 se acha comprehendido o cubo das dezenas. Finalmente, considerando este numero como representando unidades primitivas, vemos tambem que elle é composto de mais de tres algarismos, e portanto a sua raiz deve ser representada por dezenas e unidades, que elevadas ao cubo dão o cubo das dezenas, mais o triplo do quadrado das dezenas pelas unidades, mais o triplo das dezenas pelo quadrado das unidades, mais o cubo das unidades; e como o cubo das dezenas dá pelo menos milhares, segue-se que não póde ser representado nem pelas unidades, nem pelas dezenas, nem pelas centenas, e por isso separão-se os algarismos 5, 2, 7, e temos certeza que no numero restante 43 se acha comprehendido o cubo das dezenas procurado. Se ainda este numero fosse representado por mais de tres algarismos, o mesmo raciocinio se reproduziria.

Busca se o maior cubo contido na ultima secção á esquerda, porque esse maior cubo é o cubo das dezenas da raiz procurada, o qual em virtude do que fica dito ácerca da formação dos productos, é representado por essa secção.

Subtrahe-se da secção considerada o cubo das dezenas da raiz, porque essa secção em geral não só contém o cubo das dezenas, como tambem as reservas do triplo do quadrado das dezenas pelas unidades, e essas reservas só podem ser obtidas tomando-se a differença entre o numero que representa a ultima secção á esquerda e o cubo das dezenas da raiz. Baixa-se e escreve-se á direita do resto a secção seguinte, porque essa secção devendo conter o triplo do quadrado das dezenas pelas unidades, mais o triplo das dezenas pelo quadrado das unidades, mais o cubo das unidades, e o resto representando as reservas do triplo do quadrado das dezenas pelas unidades, é claro que se deve reunir ao resto a referida secção. Separão-se os dous ultimos algarismos á direita do numero formado pelo resto e a secção abaixada, porque tendo nós obtido já as dezenas da raiz, precisamos achar as unidades dessa mesma raiz. e para isso attendemos que, se soubessemos em que parte do numero estaria comprehendido o triplo do quadrado das dezenas pelas unidades, sendo esta quantidade um producto composto de dous factores, um dos quaes é o triplo do quadrado das dezenas e o outro é as unidades, dividindo se o producto pelo factor triplo do quadrado das dezenas (que no caso vertente é 27) virá o outro, que é as unidades; porém o triplo do quadrado de dezenas por unidades dá pelo menos centenas. e por conseguinte esse producto não póde ser representado pelas unidades nem pelas dezenas. e por isso separão-se esses algarismos (5, e 2, no exemplo em questão). Divide se a parte restante á esquerda pelo triplo do quadrado da raiz achada, porque essa parte comprehendendo o triplo do quadrado das dezenas pelas unidades, é claro que quantas vezes ella contiver o triplo do quadrado das dezenas da raiz, tantas serão as unidades dessa raiz que procuramos.

1.ª Observação.—Quando no decorrer do calculo, o numero que serve de dividendo não póde conter ao numero que serve de divisor, escreve-se zero no quociente, abaixa-se nova classe, separão-se os dous algarismos á direita, fórma-se novo divisor, e continua-se a operação.

2.ª Observação.—Os algarismos da raiz são tantos, quantas são as classes em que se divide o numero.

3.ª Observação.—Quando. depois de se ter baixado uma classe e separado á direita do numero resultante os dous ultimos algarismos, se divide o numero restante pelo triplo do quadrado da raiz achada, acontece que o quociente póde vir maior ou menor que o verdadeiro; e então é mister conhecer o meio de verificar e corrigir essa inexactidão. Se o quociente for maior, o cubo da raiz achada não poderá ser subtrahido das classes consideradas; se porém for menor, neste caso recorre-se a uma fórmula algebrica que nos dá a differença entre os cubos de dous numeros inteiros consecutivos; isto é, chamando « a » um numero inteiro qualquer, o seu consecutivo é « $a+1$ »; e como o cubo de « a » é « a^3 » e o cubo de « $a+1$ » é a^3+3a^2+3a+1, segue se que: $(a+1)^3-a^3=a^3+3a^2+3a+1-a^3$; porém $a^3-a^3=0$, logo $(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1$.

Esta fórmula, traduzida em linguagem ordinaria, quer dizer que: *a differença entre os cubos de dous numeros inteiros consecutivos é igual a tres vezes o menor, mais tres vezes o seu quadrado mais* 1. D'onde se conclue que sempre que o resto vier maior ou igual a 3 vezes o quadrado da raiz achada, mais 3 vezes a mesma raiz, mais 1, é signal de que a raiz está desfalcada.

4.ª Observação. — Póde-se tornar o processo da raiz cubica menos fastidioso, se em vez de elevarmos ao cubo a raiz achada todas as vezes que se tiver obtido as unidades dessa raiz, juntarmos ao numero que servio de divisor (que é o triplo do quadrado da raiz achada), o producto de tres vezes as dezenas da raiz mais as unidades dessa mesma raiz (que é o quociente obtido), pelas mesmas unidades; e, multiplicando essa somma ainda pelas mesmas unidades, vem um producto que póde ser subtrahido do resto com a secção seguinte, e ao mesmo tempo mostra que é exacto o algarismo da raiz obtido em quociente.

EXEMPLO

401.947 272	738
589.47	14700=70²×3 (1° divisor)
460.17	639=(70×3+3)×3
12 9 302.72	15339×3=46017
12 9 30 272	1598700=730²×3 (2° divisor)
0	17584=(730×3+8)×8
	1616284×8=12930272

Raizes cubicas fraccionarias

Regra.—*Forma-se o cubo de uma fracção ordinaria elevando-se ao cubo ambos os seus termos.*

Demonstração da regra. — Seja a fracção $\frac{a}{b}$. Como o cubo de um numero é o producto desse numero por si mesmo duas vezes, segue-se que para formar-se o cubo de $\frac{a}{b}$, é preciso multiplicar $\frac{a}{b}$ por si mesmo duas vezes: isto é, $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \frac{a^3}{b^3}$.

Assim pois o cubo de $\frac{3}{5}$ é $\frac{27}{125}$ e a raiz cubica de $\frac{27}{125}$ é $\frac{3}{5}$; o cubo de $\frac{5}{7}$ é $\frac{125}{343}$, e a raiz cubica de $\frac{125}{343}$ é $\frac{5}{7}$, etc.

Uma fraccção não póde ser raiz cubica senão de outra fracção; isto é, se um numero inteiro não for cubo de outro numero inteiro, não ha tambem fracção nenhuma que possa exprimir exactamente a sua raiz cubica; porque se suppuzermos que uma fracção irreductivel $\frac{a}{b}$ póde representar exactamente a raiz cubica de um numero inteiro, seguir-se-ha que este numero inteiro será igual a $\frac{a^3}{b}$ (porque se eleva ao cubo uma fracção, elevando ao cubo ambos os seus termos).

Ora, por hypothese a fracção $\frac{a}{b}$ é irreductivel; logo $\frac{a^3}{b^3}$ tambem é irreductivel (porque o divisor de uma potencia é divisor da raiz), e conseguintemente não póde ser um numero inteiro.

Ha tres casos em que uma raiz cubica póde ser fraccionaria: ou sendo dado um numero inteiro não cubo perfeito, ou uma fracção decimal, ou uma fracção ordinaria.

1º caso

Seja o numero 415, do qual se pretenda a raiz cubica. Este numero não se achando na tabella dos cubos dos numeros digitos, segue-se que não é cubo perfeito:

e como está comprehendido entre 343 e 512, *ipso facto* a sua raiz está comprehendida entre a raiz cubica de 343, que é 7, e a raiz cubica de 512, que é 8. Logo a raiz cubica de 415 é 7 mais uma fracção. Exprime se essa fracção em decimaes, do modo seguinte:

REGRA.—*Accrescenta-se á direita do inteiro tantas classes de tres zeros, quantos são os algarismos decimaes que se quer na raiz: extrahe-se a raiz como de um numero inteiro, e separão-se nella as casas de dizima pedidas.*

EXEMPLO

415.000.000.000	7,458	
343	147	(1° divisor)
.720.00	16428	(2° divisor)
405224	1665075	(3° divisor)
..97760.00		
413493625		
15063750.00		
414660272993		
..1172884088		

Demonstração.—A raiz pedida devendo ser uma fracção decimal o seu cubo deve conter um numero triplo de casas decimaes dessa raiz (porque para eleva-la ao cubo é preciso multiplica-la por si mesma duas vezes, e na multiplicação de fracções decimaes separão se á direita do producto tantas casas para dizima quantas contém os factores); e como é preciso que o cubo da raiz em questão satisfaça tambem a condição de ser um numero inteiro, segue-se que não só temos de dar ao cubo um numero triplo de casas decimaes, como tambem que essas casas sejão zeros.

Observação.—A' raiz cubica de numero que não é cubo perfeito dá-se o nome de *incommensuravel*, porque não póde ter uma medida commum ou exacta com a unidade, donde resulta que essa raiz é sempre representada por uma dizima infinita, porém que não é periodica; porque se o fosse, seria convertivel exactamente em uma fracção ordinaria, e deixaria de ser incommensuravel, o que vai de encontro á hypothese.

2º CASO

Seja a fracção decimal 0,7 da qual se pretenda a raiz cubica.

REGRA.—*Se o numero de algarismos decimaes da fracção proposta fôr tres ou multiplo de tres, extrahe-se a raiz como dos inteiros, e dá-se-lhe um terço das casas de dizima existentes no cubo; e, se não fôr, accrescentão-se primeiramente á sua direita tantos zeros quantos sejão precisos para que se torne em numero de tres ou multiplo de tres.*

EXEMPLO

700.000	0,88
512	192 (1º divisor)
1880,00	
681472	
.18528	

Demonstração.—Quando se eleva a fracção decimal ao cubo, separa-se á direita do producto um numero triplo das casas decimaes contidas na raiz; do que resulta que a fracção decimal que não contiver tres casas de dizima, ou um numero de casas multiplo de tres, não póde ser cubo perfeito; e como se póde accrescentar á direita de uma fracção decimal qualquer numero de zeros sem que ella se perturbe, segue-se que por esse meio facilmente conseguimos tornar possivel a extracção da raiz cubica.

3º CASO

Seja a fracção ordinaria $\frac{3}{5}$, por exemplo, da qual se queira extrahir a raiz cubica.

1ª REGRA.—*Converte-se a fracção ordinaria proposta em fracção decimal, e applica-se a esta a extracção da raiz.*

EXEMPLO

A fracção $\frac{3}{8}$ convertida em dizima, dá 0,375, cuja raiz cubica approximada é 0,7.

2ª REGRA.—*Se a fracção ordinaria fôr cubo perfeito extrahe se a raiz a ambos os termos; se o denominador só for, o extrahe-se a raiz desse denominador e approximadamente a do numerador; se, finalmente, o denominador não for cubo perfeito, multiplicão-se ambos os termos da fracção pelo quadrado do denominador e extrahe-se a raiz da fracção resultante.*

EXEMPLO.

Se a fracção ordinaria proposta fosse $\frac{27}{125}$, a sua raiz cubica seria $\frac{3}{5}$; se fosse $\frac{4}{343}$, a raiz seria $\frac{1,9}{7} = \frac{19}{70}$; se fosse $\frac{4}{7}$, multiplicando ambos os termos por 7^2 vem: $\frac{4 \times 7^2}{7^3} = \frac{4 \times 49}{7^3} = \frac{196}{7^3}$, cuja raiz é $\frac{5,8}{7} = \frac{58}{70} = \frac{29}{35}$.

Demonstração.—Esta regra resulta da regra de multiplicação de fracções ordinarias, porque desde que se sabe que multiplicão-se fracções ordinarias multiplicando os numeradores e denominadores entre si, se conclue que, quando tres fracções a multiplicar forem de termos respectivamente identicos, o producto é o cubo de uma dellas, e esse cubo é obtido *elevando respectivamente ao cubo cada um dos termos da fracção proposta, e vice-versa; extrahe-se a raiz cubica de uma fracção ordinaria extrahindo a raiz cubica de ambos os termos.*

Observação.—A razão porque nesta regra sempre se attende ao denominador com o fim de torna-lo cubo perfeito na hypothese de o não ser, é porque o denominador significando o numero de partes em que se acha a unidade dividida, e conseguintemente exprimindo a grandeza de cada uma dellas, não sendo elle cubo perfeito, a sua raiz será um numero incommensuravel, não mostrará portanto uma divisão em partes exactas da unidade, e não haverá idéa nenhuma exacta a respeito da grandeza representada pela fracção proposta.

Caracteres dos numeros que não são cubos perfeitos

1.º *Todo numero par não divisivel por 8 não póde ser cubo perfeito.*

Demonstracão.—Sendo $2n$ a fórmula geral dos numeros pares, e sendo o seu cubo $8n^3$, segue-se que não póde haver numero par cubo perfeito que não seja divisivel por 8.

Observacão.—Não se deprehenda do principio acima demonstrado, que todo numero divisivel por 8 deva ser cubo perfeito ; seria um absurdo contra o qual protestão os ns. 16, 24, etc.

Da demonstração dada só se conclue que, quando o fôr, será divisivel por 8, e vice-versa : sendo par e não divisivel por 8, não póde ser cubo perfeito,

2.º *Todo numero terminado por zeros não póde ser cubo perfeito, sem que o numero de zeros seja multiplo de 3.*

Demonstracão.—Para que o cubo termine em zeros, é preciso que a raiz tambem termine ; e como qualquer numero terminado por zeros elevado ao cubo dá um producto terminado por um numero de zeros triplo do numero de zeros da raiz, e por consequencia multiplo de 3, não póde ser cubo perfeito.