NONA PARTE

CAPITULO X

Theoria das equidifferenças e das proporções

Proporção é a expressão da igualdade entre duas razões. Razão é a grandeza relativa que resulta da comparação entre duas quantidades. Ha duas especies de razões: razão por differença, e razão por quociente. *Razão por differenca é a differença entre duas quantidades, e razão por quociente é o quociente entre duas quantidades.*

Assim, pois, se quatro numeros forem taes que a differença entre os dous primeiros seja igual á differença entre os dous ultimos, diz se que elles estão em equidifferença ou em proporção arithmetica segundo os antigos, a qual se exprime collocando um ponto entre os dous primeiros, dous pontos entre o 2º e 3º, e um ponto entre os dous ultimos; por exemplo : 5. 8 : 11. 14 ; e se traduz : 5 está para 8, assim como 11 está para 14 ; porém a maneira mais moderna de exprimir a equidifferença é avaliando as razões, e vem : 8—5=14—11.

Todos os quatro numeros que constituem a equidifferença são chamados em commum termos della; ao 1º e ultimo dá-se o nome de extremos, e ao 2º e 3º, de meios; o 1º e 3º são antecedentes, e o 2º e 4º consequentes.

Semelhantemente, se quatro numeros forem taes que o quociente entre os dous primeiros seja igual ao quociente entre os dous ultimos, diz-se que elles estão em proporção, ou proporção geometrica segundo os antigos, a qual se exprime collocando dous pontos, entre os dous primeiros, quatro pontos entre o 2º e 3º, e dous pontos entre os dous ultimos; por exemplo: 3:12::24:96, e se traduz do mesmo modo que as equidifferenças; porém a maneira mais moderna de exprimir a proporção é avaliando as razões, e vem:

$$\frac{12}{3}=\frac{96}{24} \text{ ou } \frac{3}{12}=\frac{24}{96}$$

Do mesmo modo que nas equidifferenças, dá-se aos quatro numeros que constituem a proporção considerados em commum, a denominação de termos; ao 1º e 3º de antecedentes: e ao 2º e 4º de consequentes.

Propriedades das equidifferenças

A propriedade fundamental das equidifferenças é que *a somma dos meios é igual á somma dos extremos.*

Demonstração.—Seja uma equidifferença qualquer $a.b::c.d$. Quer-se demonstrar que $a+d=b+c$.

Avaliando as razões na equidifferença proposta, vem: $a-b=c-d$; juntando-se a ambos os membros desta igualdade a quantidade $b+d$, resulta: $a-b+b+d=c-d+$ $+b+d$, e attendendo-se que $b-b=0$, e $d-d=0$, vem: $a+d=b+c$, como se queria demonstrar.

Reciprocamente.—Se a somma de duas quantidades fôr igual á somma de outras duas, estas quatro quantidades constituem uma equidifferença, de que duas parcellas são os meios e as outras duas são os extremos.

Demonstração.—Seja $a+d=b+c$. Quer-se demonstrar que $a.\ b:c.\ d$. Subtrahindo-se a ambos os membros da igualdade a quantidade $b+d$, vem: $a-d-(b+d)=b+c-$ $-(b+d)$; praticando-se esta subtracção indicada, o que se faz trocando os signaes a todos os termos das quantidades subtrahendas, vem: $a+d-b-d=b+c-b-d$; attendendo-se agora que $d-d=0$, e $b-b=0$, vem: $a-b=c-d$; resultado que exprime igualdade de duas razões por differença, e conseguintemente a equidifferença $a.b:c.d.$ como se queria demonstrar.

1.° *Corollario.—Um extremo incognito de uma equidifferenca é igual á somma dos meios, menos o extremo conhecido;* porque, se $a.\ b:\ c.\ x.$ é uma equidifferença, goza da propriedade fundamental de que a somma dos meios é igual á somma dos extremos; e por conseguinte, $a+x=b+c$; subtrahindo a ambos os membros da igualdade a quantidade a, vem: $x=b+c-a$.

Um meio incognito de uma equidifferença é igual á somma dos extremos, menos o meio conhecido; porque se $a.b.x.d.$ é uma equidifferença, goza da propriedade fundamental de que a somma dos meios é igual á somma dos extremos; isto é, $b+x=a+d$. Subtrahindo a ambos os membros desta igualdade a quantidade b, vem: $x=a+d-b$.

Assim, pois, se tivermos a equidifferença, $23.10:19.x$, ou a equidifferença $7.x:21\ 29$, da 1ª temos que $x=10+19-23=29-23=6$, e da 2ª $x=7+29-21=36-21=15$.

2.° *Corollario.*—Póde-se sommar ou subtrahir o mesmo numero a ambos os antecedentes, a ambos os consequentes, ao 1° e 2° termos, ou ao 3° e 4° sem perturbar a equidifferença; porque sendo por hypothese $4.12:15.23$ uma equidifferença qualquer, em virtude da propriedade fundamental, $4+23=12+15$; e se juntarmos a 4 e 15, que são os antecedentes da equidifferença, o mesmo numero, juntaremos a ambos os membros da igualdade a mesma quantidade, por tanto esta não se alterará, e conseguintemente não se alterará tambem a equidifferença de que ella traduz uma propriedade essencial á sua existencia. O mesmo se diz a respeito de 23 e 12, que são os consequentes, e de 4 e 12, e 15 e 23.

Observação.—Quando a equidifferença tem os meios iguaes, chama-se equidifferença continua; e o meio incognito, que neste caso se chama *meio differencial*, é igual á *semi-somma dos extremos*; porque sendo $a\ x:x.b.$ a equidifferença continua, em virtude da propriedade fundamental, $x+x=a+b$, ou $2\,x=a+b$; dividindo-se ambos os membros desta igualdade por 2, vem: $x=\frac{a+b}{2}$

Propriedades das proporções

A propriedade fundamental das proporções é que *o producto dos meios é igual ao producto dos extremos.*

Demonstração.—Seja $a : b :: c : d$ uma proporção qualquer. Avaliando as razões, vem :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por bd, temos:

$$\frac{a\,b\,d}{b} = \frac{c\,b\,d}{d}$$

Dividindo ambos os termos da 1ª fracção por b, e da 2ª por d, vem : $ad = bc$, como se queria demonstrar.

Reciprocamente.—Se o producto de dous numeros fôr igual ao producto de outros dous, estes quatro numeros constituirão uma proporção de que dous factores de um producto serão meios, e os outros dous serão extremos.

Demonstração.—Seja $ab = cd$. Dividindo ambos os membros desta igualdade por bd, temos

$$\frac{ab}{bd} = \frac{cd}{bd}$$

donde, dividindo ambos os termos da 1ª fracção por b e da 2ª por d, vem :

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$$

resultado este que exprime igualdade entre duas razões por quociente, e conseguintemente a proporção $a : d :: c : b$, como se queria demonstrar.

1.º Corollario.—*Um extremo incognito de uma proporção é igual ao producto dos meios dividido pelo extremo conhecido*; porque se $a : b :: c : x$, é uma proporção, goza da propriedade fundamental de ser o producto dos meios igual ao producto dos extremos, e por conseguinte $ax = bc$. Dividindo ambos os membros da igualdade por a, vem :

$$x = \frac{bc}{a}$$

Um meio incognito de uma proporção é igual ao producto dos extremos dividido pelo meio conhecido; porque se $a:b::x:d$ é uma proporção, goza da propriedade fundamental de ser o producto dos meios igual ao producto dos extremos; e por consequencia $bx=ad$. Dividindo ambos os membros desta igualdade por b, vem:

$$x=\frac{ad}{b}$$

Assim, pois, se tivermos a proporção numerica $4:5::6:x$, ou a proporção $6:12::x:30$, tirando o valor de x na 1ª, resulta

$$x=\frac{6\times5}{4}=\frac{30}{4}=7\frac{2}{4}=7\frac{1}{2}$$

e na 2ª

$$x=\frac{6\times30}{12}=\frac{180}{12}=15$$

2.º Corollario.—*Uma proporção não se altera quando se multiplicão os dous primeiros termos ou os dous ultimos, ou ambos os antecedentes, ou ambos os consequentes pelo mesmo numero*; porque, sendo por hypothese $12:4::15:5$, uma proporção qualquer; em virtude da propriedade fundamental resulta $12\times5=4\times15$; e multiplicando pelo mesmo numero 12 e 4, que são os dous primeiros termos da proporção, ou 5 e 15, que são os dous ultimos, ou 12 e 15, que são os antecedentes, ou, finalmente, 4 e 5, que são os consequentes, multiplicão-se ambos os membros da igualdade pelo mesmo numero, o que a não altera, e conseguintemente a proporção de que ella traduz uma propriedade essencial á sua existencia, tambem não se perturba.

3.º Corollario.—*Póde-se alternar uma proporção, que é mudar-lhe o lugar dos meios, inverter, que é mudar meios para extremos e extremos para meios, ou transpor, que é mudar o lugar das razões, sem que ella se altere*; porque da proporção $12:15::4:5$, por exemplo, sendo alternada, resulta: $12:4::15:5$; sendo invertida, resulta: $15:12::5:4$; e sendo transposta, resulta: $4:5::12:15$; e é evidente que em todas ellas o producto dos meios é igual ao producto dos extremos.

Observação.— Quando a proporção tem os meios iguaes, chama-se proporção continua, e o meio incognito, que neste caso se chama meio proporcional, *é igual á raiz quadrada do producto dos extremos*; porque sendo $a:x::x.b$ a proporção continua, em virtude da propriedade fundamental, $x \times x = ab$, ou $x^2 = ab$; d'onde extrahindo a raiz quadrada a ambos os membros desta igualdade, resulta: $x = \sqrt{a.b}$

1.ª *Propriedade.*—Em qualquer proporção *a somma ou differença entre os dous primeiros termos está para o segundo, como a somma ou differença dos dous ultimos está para o quarto.*

Demonstração.—Seja em geral a proporção $a:b::c:d$. Vamos demonstrar que $a \pm b:b::c \pm d:d$. Avaliando as razões na proporção, vem:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Juntando ou subtrahindo a unidade a ambos os membros desta igualdade, resulta:

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$$

Reduzindo o inteiro 1 á denominação do quebrado, vem:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

resultado este que exprime igualdade de razões por quociente, e conseguintemente a proporção $a \pm b:b::c \pm d:d$, como se queria demonstrar.

2.ª *Propriedade.*—*A somma ou differença dos dous primeiros termos está para o primeiro, como a somma ou differença dos dous ultimos está para o terceiro.*

Demonstração. — Seja $a:b::c:d$ uma proporção qualquer. Quer-se demonstrar que $a \pm b:a::c \pm d:c$.

Applicando á proporção proposta o principio demonstrado que a somma ou differença dos dous primeiros está para o segundo, como a somma ou differença dos dous ultimos está para o quarto, vem: $a \pm b:b::c \pm d:d$.

Alternando esta proporção, resulta : $a \pm b : c \pm d :: b : d$.

Alternando tambem a proporção primitiva, vem : $a : c :: b : d$.

Comparando agora estas duas proporções, vêmos que ellas têm uma razão commum $b : d$; logo as outras duas constituem uma nova proporção, em virtude do principio de que duas razões iguaes a uma terceira são iguaes entre si, e portanto $a \pm b : c \pm d :: a : c$. Alternando finalmente, esta ultima proporção, resulta $a \pm b : a :: c \pm d : c$, como se queria demonstrar.

3.ª *Propriedade.—A somma ou differença dos antecedentes está para a somma ou differença dos consequentes, como qualquer antecedente está para o seu consequente.*

Demonstracão. — Seja em geral a proporção $a : b :: c : d$. Quer-se demonstrar que $a \pm c : b \pm d :: c : d$. Para isso alterna-se a proporção primitiva, e vem: $a : c :: b : d$; porém em uma proporção a somma ou differença dos dous primeiros termos está para o 2º, assim como a somma ou differença dos dous ultimos está para o 4º; logo: $a \pm c : c :: b \pm d : d$. Alternando vem: $a \pm c : b \pm d :: c : d$; proporção esta, que, traduzida em linguagem ordinaria, dá o principio que se queria demonstrar.

4.ª *Propriedade. — A somma dos antecedentes está para a sua differenca, assim como a somma dos consequentes está para sua differenca.*

Demonstração. — Seja a proporção $a : b :: c : d$. Quer-se demonstrar que $a + c : a - c :: b + d : b - d$. Separando as duas proporções contidas na proporção $a \pm c : b \pm d :: c : d$ ultimamente demonstrada, vem: $a + c : b + d :: c : d$

$$a - c : b - d :: c : d$$

Estas duas proporcões têm a razão commum $c : d$; logo as outras duas constituem uma outra proporção; e portanto $a + b : b + d :: a - c : b - d$; proporção esta que alternada dá: $a + c : a - c :: b + d : b - d$, que é o que se queria demonstrar.

Corollario.—*Em uma serie de razões iguaes, a somma dos antecedentes esta para a somma dos consequentes, como qualquer antecedente está para o seu consequente;* porque sendo $A : a :: B : b :: C : c :: D : d ::$ *etc.*, a serie proposta, e tirando-se della as duas razões iguaes $A : a :: B : b$, e applicando a esta proporção a propriedade da somma dos antecedentes estar para a somma dos consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente, vem:

$$A+B:a+b::B:b$$

Porém na serie: $B:b::C:c$.

E como estas proporções têm a razão commum $B:b$, segue-se que $A+B:a+b::C:c$. Applicando a esta proporção a 3ª propriedade, vem:

$$A+B+C:a+b+c::C:c, \text{ etc.}$$

5.ª *Propriedade.* — *Multiplicando ordenadamente os termos de duas ou mais proporções, os productos tambem estarão em proporcão.*

Demonstração. — Sejão as proporções

$$\begin{array}{l} 2:5::6:15 \\ 3:4::6:8 \\ 8:4::12:6 \\ \hline \end{array}$$

Quer-se demonstrar que $2.3.8:5.4.4::6.6.12:15.8.6$.

Avaliando as razões de todas as proporções propostas, vem:

$$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

$$\frac{8}{4}=\frac{12}{6}$$

Multiplicando ordenadamente estas tres igualdades, resulta:

$$\frac{2\times3\times8}{5\times4\times4}=\frac{6\times6\times12}{15\times8\times6}$$

Igualdade de duas razões por quociente, logo proporção, isto é, $2.3.8:5.4.4::6.6.12:15.8.6$, como se queria demonstrar.

Corollario.—*Os quadrados, cubos, e quaesquer potencias do mesmo grão de 4 numeros em proporção, tambem estão em proporção*; porque elevar ao quadrado, cubo, etc., os termos de uma proporção, equivale a multiplicar ordenadamente 2, 3, etc., proporções cujos termos correspondentes sejão iguaes, e, em virtude do que acabámos de demonstrar, esses productos estarão em proporção.

Reciprocamente.—As raizes quadradas, cubicas, etc., de 4 numeros em proporção tambem estão em proporção; porque se $a:b::c:d$ fôr a proporção proposta, avaliando as razões, vem: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; e, extrahindo a raiz quadrada a ambos os membros desta igualdade, o que a não altera, resulta: $\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{c}{d}}$, ou porque se extrahe a raiz quadrada de uma fracção, extrahindo a raiz quadrada a ambos os seus termos, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}$; resultado este que exprime igualdade de razões por quociente, e conseguintemente a proporção $\sqrt{a}:\sqrt{b}::\sqrt{c}:\sqrt{d}$.

Do mesmo modo se procede para a raiz cubica ou de outro qual gráo.