DECIMA SEGUNDA PARTE

CAPITULO XIII

Regra de tres

Regra de tres, em geral, é toda a questão que tem por fim, conhecendo-se o valor de uma grandeza numerica, assim como os valores correspondentes de uma ou muitas outras grandezas, ás quaes a 1ª é directa ou inversamente proporcional, determinar o valor que tomará a 1ª logo que as outras recebão outros valores determinados.

Ha duas especies de regra de tres: regra de tres simples, e regra de tres composta.

Pelas noções que já obtivemos na theoria das proporções sabemos que, logo que duas grandezas se acharem combinadas pelo enunciado da questão, de modo que dous valores da primeira estejão na mesma razão que dous valores correspondentes da segunda, essas grandezas são directamente proporcionaes. E' assim, por exemplo, que o preço de um metal é directamente proporcional ao seu peso, porque tomados dous pesos diversos do mesmo metal e os seus preços correspondentes, a razão dos pesos é igual a razão dos preços.

E duas grandezas são inversa ou reciprocamente proporcionaes, logo que dous valores da primeira se acharem em razão inversa com os dous valores correspondentes da segunda E' assim que se diz que a velocidade de um corpo que se move uniformemente, é inversamente proporcional ao tempo empregado pelo corpo para percorrer um espaço determinado, porque dous valores differentes da velocidade estão em razão inversa com os dous valores correspondentes do tempo.

Regra de tres simples

Regra de tres simples é a questão que tem por fim, conhecendo-se os valores a *e* b *de duas grandezas que varião na mesma razão ou em razão inversa, determinar o novo valor* x *de uma dellas* «a» *quando a outra* «b» *toma outro valor* b' *determinado.*

Ella é directa ou inversa. *Regra de tres directa é aquella em que, á medida que crescem ou decrescem as quantidades principaes, crescem ou decrescem as suas relativas. Regra de tres inversa é aquella em que á medida que crescem ou decrescem as quantidades principaes, crescem ou decrescem as suas relativas. Quantidades principaes são das quantidades dadas as duas homogeneas. Quantidades relativas são aquellas cujos valores dependem dos valores das principaes.*

Se se propuzesse a questão seguinte: *Um bastão de 8 pés dá uma sombra cujo comprimento e de 7 pés ; uma torre no mesmo momento dá uma sombra de 203 pés. Pergunta-se qual a altura da torre?*

SOLUÇÃO

Esta questão é uma regra de tres simples, porque, conhecendo-se os valores, comprimento da sombra 7^p e altura 8^p representada pelo bastão, tem por fim determinar o novo valor x de uma dellas, que é a altura, quando a outra, que é a extensão da sombra, toma o valor 203^p. E os dados do problema se dispõe do modo seguinte, afim de facilitar a sua solução:

$$7^p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8^p$$
$$203 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x$$

Isto é, se a altura sendo 8^p a extensão da sombra é 7^p, sendo a altura 203^p, qual será o comprimento da sombra? As quantidades principaes são 7 e 203, porque são das quantidades dadas as duas que exprimem a mesma especie, que é altura, e as outras quantidades 8 e x são relativas, isto é, 8 é relativa de 7, e x relativa de 203, porque os valores das segundas são dependentes dos valores das primeiras. Resta agora indagar se a regra é directa ou indirecta; e para isso procede-se do modo seguinte: Se a altura no 2º caso fosse o dobro, evidentemente o comprimento da sombra seria o dobro; se a altura fosse o triplo, o comprimento da sombra seria o triplo; se fosse a metade a altura no 2º caso, o comprimento da sombra, no 2º caso, seria a metade do comprimento da sombra do 1º etc.—E então vendo-se que, crescendo ou decrescendo as quantidades principaes, crescem ou decrescem as suas relativas, conclue-se que a regra é directa; e por consequencia sendo 203 maior que 7, segue-se que x deve ser maior que 8. Sabido isto, arma-se a proporção segundo a regra seguinte: *Menor para maior da mesma especie, como menor para maior da mesma especie; ou maior para menor da mesma especie, como maior para menor da mesma especie*; *e vem*:

$$7:203::8:x=\frac{8\times 203}{7}=\frac{1624}{7}=232$$

$$\text{ou}\ldots.203:7::x:8:x=\frac{8\times 203}{7}=232$$

Proponhamos agora a questão seguinte: *A tripolação de um navio tem só 20 dias de mantimento e conta com uma viagem de 35 dias. Como se ha de reduzir a ração diaria de cada praça?*

Solução.—Como no enunciado não vem explicita a ração ordinaria, e ella é forçosamente conhecida, representa-se pela unidade, e dispõe-se os dados do modo seguinte:

$$\begin{array}{ll} 20^d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1^r \\ 35.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x \end{array}$$

Se o numero de dias de viagem fosse o dobro, a ração diaria se tornaria na metade; se o numero de dias de viagem fosse o triplo, a ração diaria se tornaria na terça parte; se o numero de dias de viagem fosse a metade, a ração diaria se tornaria no dobro, etc., De sorte que, á medida que crescem as quantidades principaes, decrescem as suas relativas, e vice-versa, e conseguintemente a regra é inversa; e como 35 é maior que 20, segue-se que x é menor que 1. E estabelecendo a proporção, vem:

$$35:20::1:x=\frac{1\times20}{35}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$$

Estando o cambio entre a praça do Rio de Janeiro e Lisboa a 50 % contra a primeira, quanto deve custar uma letra de cambio para pagar 25:000$ em Lisboa?

Solução.—50 % contra a praça do Rio de Janeiro, quer dizer que o Rio de Janeiro por cada 100 paga a Lisboa 150: e então a questão proposta em ultima analyse se reduz á seguinte. *Se por* 100 *o Rio de Janeiro paga* 150 *a Lisboa, por* 25:000 *quando deve pagar*? Dispondo os dados, vem:

100	150
25:000$.	x

Esta regra é directa, porque quanto maior é o valor da letra, maior deve ser a somma que ella deve custar; e como 25:000$ é maior que 100, x deve ser maior que 150; e por consequencia,

$$100:25:000\$::150:x=\frac{150\times25:000\$}{100}=\frac{375:000\$}{100}=37:500\$$$

Tendo comprado uma letra de cambio por 37:500$, *estando o cambio a* 50 % *a favor da letra, qual é o seu valor?*

Solução.—50 % a favor da letra quer dizer que por cada 150 o comprador dá 100: e então a questão se reduz á seguinte: *Se por* 150 *o comprador dá* 100, *por* 37:500$ *quanto dará?* Isto é:

150.	100
37:500$	x

Esta regra é directa, porque á medida que cresce o valor da letra, cresce a quantia que o comprador deve dar por ella; e como 37:500$ é maior que 150, x deve ser maior que 100. E então, armando a proporção, vem:

$$150:37\$500::100:x=\frac{100\times 37:500\$}{150}=25:000\$.$$

Comprou-se uma letra de 25:000$ por 37:500$. Qual é o preço do cambio?

Solução.—Achar o preço do cambio, equivale a achar o valor correspondente a 100; e para isso dispõe-se os dados do modo seguinte:

25:000$. . . . . 37:500$
100 x

Por uma analyse semelhante á que temos feito, vemos que esta regra é directa, e que x é menor que 37:500$, e portanto, armando a proporção, vem:

$$25:000\$:100::37:500\$:x=\frac{37:500\$\times 100}{25:000\$}=\frac{3750}{25}=\frac{750}{5}=$$

$$=\frac{150}{1}=150;\ \text{e}\ 150-100=50.$$

Certa obra foi feita por 10 obreiros em 15 dias. Quer-se saber em quantos dias 9 obreiros farão a mesma obra?

Solução.—Quanto maior é o numero de obreiros, menor é o numero de dias, e vice-versa; logo, a regra é inversa. Dispondo os dados, vem:

10^{obr}. . . . . 15^{d}
9. x

Sendo a regra indirecta, e 9 menor que 10, segue-se que x deve ser maior que 47; e, armando a proporção vem:

$$9:10::15:x=\frac{10\times 15}{9}=\frac{150}{9}=16^{d}\ 16^{h}$$

Regra de tres composta

Regra de tres composta é a questão que tem por fim, conhecendo-se o valor de uma grandeza «a» assim como os valores correspondentes de muitas outras grandezas «b, c, d», etc., ás quaes a primeira é directa ou inversamente proporcional, determinar o valor x *que tomará a primeira, logo que as outras recebão outros valores determinados* b', c', d', *etc.*

A's quant dades de especie differente, que entrão no enunciado da questão, e das quaes depende a determinação do valor da incognita, dá-se o nome de circumstancia da questão; e á especie que se quer determinar, proposta da questão.

Uma regra de tres composta compõe se de tantas regras de tres simples, quantas são as circumstancias que entrão na questão; de sorte que a solução de uma regra de tres composta se reduz a considerar de per si successivamente cada uma das regras de tres simples que ella contêm. Exemplifiquemos:

Se 30 obreiros fizerão 237 braças de obra em 18 dias, quer-se saber, 54 obreiros da mesma força que os primeiros quantas braças farão da mesma obra em 28 dias?

Solução.—E' manifesto que a proposta da questão que é a obra que se pertende determinar, depende não só do numero dos jornaleiros, como tambem dos dias; logo, a questão é uma regra de tres composta, porque conhece-se o valor da grandeza da obra, que é 237^{B}, assim como o valor do tempo, que é 18^{d}, e o valor do numero de obreiros, que é 30, ás quaes a primeira é directa ou inversamente proporcional, e busca-se conhecer o valor de x que terá a primeira desde que as outras tem recebido os valores determinados 28 e 54; e, como a proposta da questão depende de duas circumstancias, segue-se que o problema se compõe de duas regras de tres simples. E, para isoladamente considerarmos cada uma dessas regras de tres simples, é preciso dispormos os dados e o pedido da questão, do modo seguinte:

$$
\begin{array}{lll}
\overset{obr.}{30} \ldots & \overset{br.}{237} \ldots & \overset{d.}{\left(\begin{matrix}18\\28\end{matrix}\right.} \\
54 \ldots & x \ldots &
\end{array}
$$

Depois, fazendo abstracção da circumstancia dos dias, que equivale a suppor que o numero de dias do 2º caso é igual ao numero de dias do 1º, ficamos reduzidos á regra de tres simples seguinte: *Se* 30 *obreiros fazem* 237 *braças de obra*, 54 *obreiros quantas braças farão da mesma obra?*

E' uma regra directa, porque quanto maior é o numero de obreiros, maior deve ser obra; e como 54 é maior que 30, segue-se que x é maior que 237, e estabelecendo a proporção, vem 30:54::237:x (1). O valor de x dado por esta proporção exprime a porção de obra feita pelos 54 obreiros, suppondo que elles trabalhárão 18 dias; mas os obreiros no 2º caso trabalhárão 28 dias, e então para attendermos á differença dos dias, temos uma outra regra de tres simples, que vem a ser: *Se os obreiros trabalhando* 18 *dias fizerão a obra* x, *trabalhando* 28 *dias, que obra farão?*

Dispondo os dados vem:

d.	
18.	x
28.	x'

Esta regra é directa, porque quanto maior é o numero de dias de trabalho, maior deve ser a obra, e como 28 é maior que 18, x' é maior que x. Armando a proporção, attendendo que na proporção (1) x occupa o lugar de consequente, e fazendo-o occupar na proporção seguinte o lugar de antecedente, vem:

18:28::x:x'. Escrevendo tambem a proporção (1) 30:54::237:x. e multiplicando ordenadamente estas duas proporções, obtem-se:

$18\times30:28\times54::237.\,x:xx'$. Dividindo ambos os termos da 2ª razão por x, o que não a altera, vem:

$$18\times30:28\times54::237:x'=\frac{28\times54\times227}{18\times30}=\frac{28}{18}\times\frac{54}{30}\times237.$$

Este resultado analysado nos dá um meio expedito de resolver o problema proposto; e vem a ser: *Multiplicar a razão directa dos dias pela razão directa dos obreiros, e ainda o resultado pela homogenea de* x.

Um livreiro fez uma edição das obras de Voltaire composta de 25 volumes em 8º, contendo cada volume 30 folhas de impressão, e cada pagina 40 linhas, compostas de 50 letras cada uma. Quer fazer uma 2ª edição em 12, *devendo conter cada volume 25 folhas de impressão, cada pagina 30 linhas de 40 letras cada uma. Pergunta-se de quantos volumes será esta segunda edição?*

Solução.—Dispondo-se convenientemente os dados e o pedido da questão, vem:

$75^{v.}$ . . .	$30^{fls.}$ . . .	40^{las} . .	$50^{\,letras}$.	8^{o}
x . . .	25 . . .	30 . .	40 . .	$12.$

E então vemos que conhecido o valor 75, assim como os valores 30, 40, 50 e 8^{o}, aos quaes o 1^{o} é directa ou inversamente proporcional, quer-se determinar o valor x que receberá a 1^{a} especie, desde que as outras tem recebido os valores 25, 30, 40 e 12. D'onde se conclue que a questão enunciada é uma regra de tres composta, e, para resolvê-la, é preciso considerar de per si cada uma das regras de tres simples que a constituem; o que se consegue fazendo primeiramente abstracção das circumstancias das linhas, das letras, e do formato das edições, que é o mesmo que suppor que o numero das linhas, das letras e do formato do 2^{o} caso é igual ao do 1^{o}. Fazendo isto resulta a regra de tres simples seguinte:

Se, contendo cada volume da obra $30^{fls.}$ de impressão, a edição é de 75^{v}., contendo 25 folhas, de quantos volumes será a edição?

Esta regra é inversa, porque, quanto menor for o numero das folhas, maior deve ser o numero dos volumes e reciprocamente; e, sendo 25 menor que 30, segue-se que x deve ser maior que 75. Armando a proporção, vêm:

$$25:30::75:x$$

O valor de x dado por esta proporção exprime o numero de volumes da nova edição, suppondo que cada pagina contém 40 linhas; mas o numero das linhas de cada pagina no 2^{o} caso é 30; e, para attendermos a esta differença das linhas, temos a seguinte regra de tres simples: *Se, na hypothese de conter cada pagina 40 linhas, o numero de volumes da edição é x, sendo 30 o numero de linhas de cada pagina, qual será o numero de volumes de cada edição?* Quanto menor é o numero das linhas, maior deve ser o numero dos volumes, e conseguintemente esta regra é inversa; e, como 30 é menor que 40, segue-se que x' é maior que v. Armando a proporção de modo a fazer com que x seja antecedente, visto como na proporção anterior elle fora consequente, vem:

$$30:40::x:x'$$

O *valor* de x' dado por esta proporção exprime o numero de volumes da nova edição, suppondo que o numero das letras de cada linha é igual a 50, mas no 2º caso o numero das letras é 40; então vamos attender a esta differença das letras, e para isto temos a regra de tres simples: *Sendo 50 o numero das letras de cada pagina, e o numero de volumes x', qual será o numero de volumes, sendo 40 o numero das letras?* E' inversa esta regra, porque quanto menor é o numero das letras, maior é o numero dos volumes: e, como 40 é menor que 50, segue-se que x'' é maior que x'. Armando a proporção de maneira que x', seja antecedente, porque na proporção anterior foi consequente, vem:

$$40:50::x':x''$$

O valor de x'' dado por esta proporção exprime o numero de volumes da 2ª edição, suppondo que o formato da obra é em 8º; mas o formato no 2º caso é em 12; por consequencia vamos attender á differença dos formatos, e para isso temos a regra de tres simples seguinte: *Se o formato da obra sendo em 8º, o numero de volumes é x'', qual será o numero de volumes, sendo o formato em 12?* E' inversa esta regra, porque quanto maior é o formato, menor é o numero de volumes; e, como 12 é maior que 8, segue-se que x''' é menor que x''. Armando a proporção de modo que x'' occupe o lugar de antecedente, por isso que elle na proporção anterior occupára o lugar de consequente, vem:

$$12:8::x'':x'''$$

E o valor de x''' é o valor pedido ou o que resolve o problema; porque é o numero determinado pela combinação de calculo feita com a traducção de todas as condições que entrão no enunciado da questão. Já poderiamos conhecer esse valor se tivessemos resolvido cada uma das proporções estabelecidas, e substituido em cada proporção seguinte o valor da incognita dado pela proporção immediatamente anterior; mas achamos mais commodo reunir todas as proporções do problema do modo seguinte:

$$
\begin{array}{l}
25:30::75:x \\
30:40::x:x' \\
40:50::x':x'' \\
12:\ 8::x'':x''' \\
\hline
\end{array}
$$

multiplical-as ordenadamente, e obtermos a seguinte proporção composta:

$$25.30.40.12:30.40.50.8::75.x.x'.x'':xx'x''x'''$$

Dividindo agora a ambos os termos da 2ª razão por $xx'x''$, vem:

$$25.30.40.12:30.40.50.8::75:x'''=\frac{30.40.50.8.75}{25.30.40.12}=\frac{30}{25}\times\frac{40}{30}\times\frac{50}{40}\times\frac{8}{12}\times 75.$$

Analysando este resultado, e combinando-o com o obtido na solução do problema anteriormente resolvido, deduzimos a seguinte regra geral para resolvermos um problema qualquer de regra de tres composta. *Dispõe-se em uma mesma linha horizontal todas as razões directas e inversas que entrão na questão, e tambem a quantidade homogenea de x, multiplicão-se entre si estes numeros assim dispostos, e tem-se o valor da incognita pedido.*

Observação.—A regra de tres composta chama-se *conjuncta*, quando as razões que a compõem são taes, que o consequente de cada uma é da mesma especie que o antecedente da razão seguinte. Exemplifiquemos:

Suppondo que 3 francos equivalem a 55 dinheiros de Amsterdam, que 65 dinheiros de Amsterdam equivalem a 32 soldos de Hamburgo, 216 soldos de Hamburgo equivalem a 240 dinheiros esterinos de Inglaterra, pergunta-se a quantos dinheiros esterlinos equivalem 120 francos?

Solução. — Dispondo os dados e o pedido da questão, temos:

fr.	dA	sH	d.st
3	55		
	65	32	
		216	240
120			x

Esta regra conjuncta se resolve por tres regras de tres simples, porque a proposta da questão depende de tres circumstancias que é necessario combinar, e a 1ª vem a ser: *Se 3 francos valem 55 dinheiros de Amsterdam, 120 francos quantos dinheiros de Amsterdam valerão?*

Armando a proporção, vem:

$$3:55::120:x$$

A 2ª regra de tres simples vem a ser: *Se 65 dinheiros de Amsterdam valem 32 soldos de Hamburgo,* x *dinheiros de Amsterdam quantos soldos de Hamburgo valerão?*

Estabelecendo a proporção, vem:

$$65:32::x:x'$$

A 3ª regra de tres simples vem a ser: *Se 216 soldos de Hamburgo valem 240 dinheiros esterlinos,* x' *soldos de Hamburgo quantos dinheiros valerão?*

Estabelecendo a proporção, vem:

$$216:240::x':x''$$

Multiplicando ordenadamente estas tres proporções, obtem-se a proporção composta seguinte:

$$3.65.216:55.32.240::120.x.x':x.x'.x''$$

Dividindo ambos os termos da 2ª razão por $x\ x'$, vem:

$$3.65.216:55.32.240::120:x'' = \frac{55.32.240.120}{3.65.216} = 1203\,\frac{49}{117}.$$

A maneira abreviada como na pratica se devem estabelecer as proporções, é a seguinte :

$$\left.\begin{array}{r} 3:55 \\ 65:32 \\ 216:240 \end{array}\right\} :: 120: x = \frac{55.32.240.120}{3.65.216}$$

Regra de companhia

Regra de companhia em geral é toda questão que tem por fim dividir um numero em partes proporcionaes.

Esta regra deve o seu nome á grande applicação que tem ás questões commerciaes, cujo fim é dividir o lucro ou perda de negociantes associados proporcionalmente aos seus capitaes e aos tempos em que elles gyrão durante uma negociação qualquer. Ella basêa-se nos tres principios seguintes:

1.º As entradas sendo differentes e os tempos iguaes, os lucros ou perdas são proporcionaes ás entradas.

2.º As entradas sendo iguaes e os tempos differentes, os lucros ou perdas são proporcionaes aos tempos.

3.º As entradas e os tempos sendo differentes, os lucros ou perdas são proporcionaos aos productos das entradas pelos tempos.

Ha duas especies de regra de companhia : regra de companhia simples, e regra de companhia composta.

Regra de companhia simples

Regra de companhia simples é aquella em que os tempos são iguaes, sendo as entradas differentes, ou são diversos os tempos, sendo as entradas iguaes.

Sejão A o numero a dividir, m, n, p, etc., os numeros proporcionaes ás partes em que se quer dividir o numero A, e x, x', x''' etc., as partes que se quer conhecer.

Como em virtude da definição os numeros m, n, p, etc., devem ser directamente proporcionaes ás partes incognitas x, x'. x'', etc, segue-se que :

$$m:x::n:x'::p:x'' \ etc.$$

Porém n'uma serie de razões iguaes *a somma dos antecedentes está para a somma dos consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente*; logo:

$$m + n + p + \text{etc.} : x + x' + x'' + \text{etc.} :: m : x$$
$$m + n + p + \text{etc.} : x + x' + x'' + \text{etc.} :: n : x'$$
$$m + n + p + \text{etc.} : x + x' + x'' + \text{etc.} :: p : x''$$
etc.

Embora esta questão encerre mais de uma incognita, e tantas quantas são as partes em que se quer dividir o numero A, todavia como ellas se acham ligadas por uma relação conhecida, podemos por meio dessa relação reduzir a questão á de uma simples incognita, attendendo que $x+x'+x''+$ etc., exprime a somma das partes, que evidentemente é igual ao todo A; d'onde, substituindo nas proporções em lugar de $x+x'+x''+$etc., o seu valor A, resulta:

$$m+n+p+\text{etc.} : A :: m : x = \frac{Am}{m+n+p+\text{etc.}} = \frac{A}{m+n+p+\text{etc.}} \times m.$$

$$m+n+p+\text{etc.} : A :: n : x' = \frac{An}{m+n+p+\text{etc.}} = \frac{A}{m+n+p\times\text{etc.}} \times n.$$

$$m+n+p+\text{etc.} : A :: p : x'' = \frac{Ap}{m+n+p+\text{etc.}} = \frac{A}{m+n+p+\text{etc.}} \times p.$$

Interpretando os valores das incognitas deduzidos das proporções geraes acima estabelecidas obtem-se, para conseguir o valor de cada uma das partes em que se pretende dividir um numero qualquer, a seguinte

REGRA GERAL. — *Divide-se o numero proposto pela somma dos numeros proporcionaes, e multiplica-se o quociente successivamente por cada um dos mesmos numeros.*

E suppondo que as quantidades m, n, p, etc., representão entradas. A o lucro ou perda total, e x, x' x''' etc., os lucros ou perdas parciaes, estas mesmas fórmulas traduzem, para a solução de qualquer problema de regra de companhia simples, a seguinte

REGRA.—*Divide-se o lucro ou perda total pela somma das entradas, multiplica-se o quociente successivamente por cada entrada, e tem-se o lucro ou perda parcial correspondente.*

1º EXEMPLO

Tres negociantes se associárão para uma empreza qualquer commercial, entrando o 1º com 20:000$000 o 2º com 17:500$000 e o 3º com 12:800$000; no fim da associação derão balanço, e achárão de lucro 32:500$000. Quer-se saber o lucro de cada um.

Solução.—Chamando x, x', x'', os lucros que se busca conhecer relativos a cada um dos negociantes em questão. e applicando a regra deduzida para a determinação do valor de cada uma das incognitas, nós vemos que nas fórmulas geraes $A=32:500\$$, $m=20:000\$$, $n=17:500\$$, $p=12:800\$$, $m+n+p=50:300\$$, e por consequencia

$$x=\frac{32:500\$}{50:300\$}\times 20:000\$=12:922\$465;\quad x'=\frac{32:500\$}{50:300\$}\times 17:500\$=$$

$$=11:307\$157;\ \text{e}\ x''=\frac{32:500\$}{50:300\$}\times 12:800\$=8:270\$378.$$

2º EXEMPLO

Um testador deixa 105 contos de réis a tres herdeiros, de modo que ao 2º toque os $\frac{2}{3}$ do 1º; e ao 3º os $\frac{5}{7}$ do 2º. Quer-se saber qual é a herança de cada um?

Solução.—Representando por 1 a herança do 1º, a do 2º, será os $\frac{2}{3}$ de $1=\frac{2}{3}$; e a do 3º será os $\frac{5}{7}$ de $\frac{2}{3}=\frac{5\times 2}{7\times 3}=\frac{10}{21}$. De sorte que estamos reduzidos a dividir o numero 105:000$ em tres partes proporcionaes aos ns. 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{21}$. Para isso, como se tem de sommar estas partes proporcionaes, reduzem-se as fracções ao mesmo dominador, e depois o inteiro á denominação commum dos quebrados resultantes. Fazendo isto vem: $\frac{21}{21}+\frac{14}{21}+\frac{10}{21}=\frac{45}{21}$. E, supprimindo o denominador, resulta 45 para a somma referida. Applicando agora as fórmulas geraes, temos: $x=\frac{105}{45}\times 21=49:000\$000$; $x'=$ $=\frac{105}{45}\times 14=32:666\$667$; $x''=\frac{105}{45}\times 10=23:333\$333$.

Observação.—Sem inconveniencia se póde apagar o denominador da fracção resultante da somma do inteiro e das fracções dadas, porque, resolvendo o problema com o estabelecimento das proporções resulta :

$$\frac{45}{21}:\frac{21}{21}::105:x$$

$$\frac{45}{21}:\frac{14}{21}::105:x'$$

$$\frac{45}{21}:\frac{10}{21}::105:x''$$

E multiplicando ambos os termos da 1ª razão de cada proporção pelo mesmo numero 21, o que não altera, vem :

$$45:21::105:x=\frac{105}{45}\times 21=49:000\$000$$

$$45:14::105:x'=\frac{105}{45}\times 14=32:666\$667$$

$$45:10::105:x'''=\frac{105}{45}\times 10=23:333\$333$$

$$105:000\$000$$

A prova de qualquer problema desta especie, como acima se vê, se effectua sommando os valores obtidos, e, se o resultado fôr igual ao numero a dividir, está certa a operação.

Regra de companhia composta

Regra de companhia composta é aquella em que as entradas e os tempos são differentes.

Neste caso os lucros ou perdas são proporcionaes aos productos das entradas pelos tempos.

EXEMPLO

Um negociante começou uma empreza com um fundo de 25 contos de réis ; cinco mezes depois se lhe associou um capitalista entrando com 40 contos ; e seis mezes *mais tarde outro capitalista concorreu com 60 contos. No fim de dous annos, liquidou-se um lucro de 80 contos, e pede-se a parte de cada um dos socios.*

Solução.—O 1º socio teve empregado o capital de 25 contos durante 24 mezes, que é o tempo que durou a negociação; porém é claro que ter 25 contos em 24 mezes, é o mesmo que ter $25 \times 24 = 600$ contos em um mez. O 2º só empregou o seu capital durante $24-5$ ou 19 mezes; e como ter 40 contos em gyro durante 19 mezes, é o mesmo que ter $40 \times 19 = 760$ em um mez, segue-se que a sua entrada fica representada por 760 contos. O 3º, finalmente, teve em gyro os seus 60 contos por espaço de $19-6=13$ mezes, e por consequencia a sua entrada será $60 \times 13 = 780$ contos.

Então em ultima analyse estamos reduzidos a dividir o lucro 80 contos em tres partes proporcionaes ás entradas 600, 760 e 780; e para isso faz-se applicação das fórmulas deduzidas para a regra de companhia simples, e vem:

$$x = \frac{80}{600+760+780} \times 600 = \frac{80}{2140} \times 600 = \frac{8}{214} \times 600 = \frac{4}{107} \times 600 =$$
$$= 22:429.907.$$

$$x' = \frac{80}{600+760+780} \times 760 = \frac{80}{2140} \times 760 = \frac{4}{107} \times 760 = 28:411.214.$$

$$x'' = \frac{80}{600+760+780} \times 780 = \frac{80}{2140} \times 780 = \frac{4}{107} \times 780 = 29:158.879.$$

Regra de juro simples

Regra de juro simples é toda questão que tem por fim determinar o interesse que produz um certo capital emprestado segundo uma taxa qualquer durante um tempo determinado, ou qualquer dos elementos, capital, taxa, ou tempo quando os outros forem conhecidos.

Ao interesse produzido pela quantia que se empresta é que se dá o nome de juro; e chama-se taxa ao juro de uma quantia fixa em tempo tambem fixo. A quantia fixa commummente usada para o estabelecimento da taxa é 100, e o tempo é um anno, v. g. 5 %, 8 % ao anno. Vê-se, portanto, que a taxa é uma especie de unidade de juros determinada por convenção, por lei, ou por circumstanciaes cambiaes.

A regra de juro simples não tem uma solução nova, visto como ella nada mais é do que um caso particular da regra de tres composta. Assim, pois, supponhamos que queriamos determinar em geral o juro de um capital c emprestado por t annos, sendo a taxa i. Dispondo os dados e o pedido da questão, vem :

$$100 \ldots\ldots\ldots 1 \ldots\ldots\ldots\ldots i$$
$$c \ldots\ldots\ldots t \ldots\ldots\ldots\ldots x$$

E pondo o problema em proporção, vem:

$$100 : c :: i : x$$
$$1 : t :: x : x'$$
$$\underline{100 \times 1 : ct :: ix : xx' \text{ ou}}$$

$100 : ct :: i : x' = \frac{cit}{100}$ (1.) Esta fórmula traduzida em linguagem ordinaria tem a seguinte classificação : *o juro é igual ao capital multiplicado pela taxa e pelo tempo, dividido por* 100. Desta fórmula se deduzem todas as outras que resolvem as demais questões relativas ao capital, taxa, e tempo. Por exemplo: multiplicando ambos os membros da igualdade por 100, vem:

$$100\, x' = cit \ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por it, resulta: $c = \frac{100x'}{it}$ (2). Esta fórmula quer dizer que *o capital é igual a* 100 *vezes o juro, dividido pela taxa multiplicada pelo tempo.*

Dividindo ambos os membros da igualdade (a) por ct, temos: $i = \frac{100x'}{ct} \ldots\ldots$ (3). Esta expressão significa que a *taxa é igual a* 100 *vezes o juro, dividido pelo capital multiplicado pelo tempo.*

E finalmente, dividindo ambos os membros da igualdade (a) por ci, obtem-se $t = \frac{100x'}{ci} \ldots$ (4). E esta fórmula exprime que *o tempo é igual a 100 vezes o juro, dividido pelo capital multiplicado pela taxa.*

1º EXEXPLO

Pede-se o juro de rs. 357$780 em 3 annos e 8 mezes a 9 % ao anno?

Solução —E' a fórmula (1) que resolve este problema, fazendo nella $c=357\$780$; $i=9$; e $t=3\frac{2}{3}$ (porque 8 mezes é $\frac{8}{12}$ do anno; fracção esta que simplificada dá $\frac{2}{3}$). Substituindo, vem:

$$x'=\frac{357\$780\times9\times3\frac{2}{3}}{100}=\frac{357\$780\times9\times\frac{11}{3}}{100}=\frac{\frac{357\$780\times9\times11}{3}}{100}=\frac{357\$780\times9\times11}{3\times100}=$$

$$=\frac{35420220}{300}=118\$067.$$

2º EXEMPLO

Pergunta-se qual seria o capital que no fim de 3 annos e 9 mezes, empregado a juro simples na razão de $8\frac{3}{4}$ % ao anno, produziria o juro 1:063$125?

Solução.—Este problema se resolve pela fórmula (2) fazendo nella $x'=1:063\$125$; $i=8\frac{3}{4}$ e $t=3\frac{3}{4}$. Substituindo, vem:

$$c=\frac{100\times1:063\$125}{8\frac{3}{4}\times3\frac{3}{4}}=\frac{106312500}{\frac{35}{4}\times\frac{15}{4}}=\frac{106312500}{\frac{35\times15}{4\times4}}=\frac{106312500}{\frac{525}{16}}=$$

$$=\frac{106312500\times16}{525}=\frac{1701000000}{525}=3:240\$000.$$

3º EXEMPLO

Sabendo-se que o capital 3:240$000 no fim de 3 annos e 9 mezes produziria de juro simples 1:063$125, quer-se conhecer a taxa do juro?

Solução.—Resolve-se este problema pela fórmula (3), fazendo-se nella $c = 3{:}240\$000$; $t = 3\frac{3}{4}$; e $x' = 1{:}063\$125$. Substituindo vem:

$$i = \frac{100 \times 1{:}063\$125}{3{:}240\$000 \times 3\frac{3}{4}} = \frac{106312500}{3{:}240\$000 \times \frac{1}{4}} = \frac{106312500}{\frac{3{:}240\$000 \times 1}{4}} =$$

$$= \frac{106312500 \times 4}{3{:}240\$000 \times 15} = \frac{425250000}{48600000} = \frac{42525}{4860} = \frac{8501}{972} = 8\frac{3}{4}.$$

4º EXEMPLO

Em que tempo o capital 3:240$000, empregado a juro simples na razão de $8\frac{3}{4}$ °/₀ ao anno, se elevará com seus respectivos juros a 4:303$125?

Solução.—E' a fórmula (4) a que resolve este problema; mais ha nella o elemento x' que não está explicitamente conhecido, porém que facilmente se deduz, subtrahindo da somma do capital e juros o capital primitivo; isto é, $x' = 4{:}303\$125 - 3{:}240\$000 = 1{:}063\$125$. Agora, applicando a fórmula geral, vem:

$$t = \frac{100 \times 1{:}063\$125}{3{:}240\$000 \times 8\frac{3}{4}} = \frac{106312500}{3{:}240\$000 \times \frac{35}{4}} = \frac{106312500 \times 4}{\frac{3{:}240\$000 \times 35}{4}} =$$

$$= \frac{425250000}{113400000} = \frac{42525}{11340} = 3 \text{ annos e } 9 \text{ mezes.}$$

Tabella de juros simples calculados para um anno, um mez, um dia, relativos a diversos capitaes, segundo varias taxas

CAPITAL	TAXA	UM ANNO	UM MEZ	UM DIA
10 rs.	1/2 %	0.05 do real	0,004 do real	0,0002 do real
100 »	»	0,5 »	0,04 »	0,002 »
1$000	»	5 »	0,4 »	0,02 »
10$000	»	50 »	4,16 »	0,2 »
100$000	»	500 »	41,6 »	2 »
1:000$000	»	5000 »	416 »	20 »
10 rs.	1/3 %	0,03 »	0,00276 »	0,0001 »
100 »	»	0,3 »	0,0276 »	0,001 »
1$000	»	3 »	0,276 »	0,01 »
10$000	»	33,3 »	2,76 »	0,1 »
100$000	»	333 »	27,6 «	1 »
1:000$000	»	3330 »	276 »	1 »
10 rs.	1/4 %	0,025 »	0,00208 »	0,000069 »
100 »	»	0,25 »	0,0208 »	0,00069 »
1$000	»	2,5 »	0,208 »	0,0069 »
10$000	»	25 »	2,08 »	0,069 »
100$000	»	250 »	20,8 »	0,69 »
1:000$000	»	2250 »	208 »	6,9 »
10 rs.	1 %	0,1 »	0,0083 »	0,000276 »
100 »	»	1 »	0,083 »	0,00276 »
1$000	»	10 »	0,83 »	0,0276 »
10$000	»	100 »	8,3 »	0,276 »
100$000	»	1000 »	83 »	2,76 »
1:000$000	»	10000 »	830 »	27,6 »
10 rs.	2 %	0,2 »	0,0166 »	0,00055 »
100 »	»	2 »	0,166 »	0,0055 »
1$000	»	20 »	1,66 »	0,055 »
10$000	»	200 »	16,6 »	0,55 »
100$000	»	2000 «	166 »	5,5 »
1:000$000	»	20000 »	1666 »	55 »
10 rs.	3 %	0,3 »	0,025 »	0,0008 »
100 »	»	3 »	0,25 »	0,008 »
1$000	»	30 »	2,5 »	0,08 »
10$000	»	300 »	25 »	0,8 »
100$000	»	3000 »	250 »	8 »
1:000$000	»	30000 »	2500 »	80 »
10 rs.	4 %	0,4 »	0,0333 »	0,00111 »
100 »	»	4 »	0,333 »	0,0111 »
1$000	»	40 »	3,33 »	0,111 »
10$000	»	400 »	33,3 »	1,11 »
100$000	»	4000 »	333 »	11,1 »
1:000$000	»	40000 »	3330 »	111 »
10 rs.	5 %	0,5 »	0,0417 »	0,00139 »
100 »	»	5 »	0,417 »	0,0139 »
1$000	»	50 »	4,17 »	0,139 »
10$000	»	500 »	41,7 »	1,39 »
100$000	»	5000 »	417 »	13,9 »
1:000$000	»	50000 »	4177 »	139 »

CAPITAL	TOTAL	UM ANNO	UM MEZ	UM DIA
10 rs.	6 %	0,6 do real	0,05 do real	0,00167 do real
100 »	»	6 »	0,5 »	0,0167 »
1$000	»	60 »	5 »	0,167 »
10$000	»	600 »	50 »	1,67 »
100 000	»	6000 »	500 »	16,7 »
1:000$000	»	60000 »	5000 »	167 »
10 rs.	7 %	0,7 »	0,05833 »	0,00194 »
100 »	»	7 »	0,5833 »	0,0194 »
1$000	»	70 »	5,833 »	0,194 »
10$000	»	700 »	58,33 »	1,94 »
100$000	»	7000 »	583,3 »	19,4 »
1:000$000	»	70000 »	5833 »	194 »
10 rs.	8 %	0,8 »	0,0667 »	0,00222 »
100 »	»	8 »	0,667 »	0,0222 »
1$000	»	80 »	6,67 »	0,222 »
10$000	»	800 »	66,7 »	2,22 »
100$000	»	8000 »	667 »	22,2 »
1:000$000	»	80000 »	6670 »	222 »
10 rs.	9 %	0,9 »	0,075 «	0,0025 »
100 »	»	9 »	0,75 »	0,025 »
1$000	»	90 »	7,5 »	0,25 »
10$000	»	900 »	75 »	2,5 »
100$000	»	9000 »	750 »	25 »
1:000$000	»	90000 »	7500 »	250 »
10 rs.	10 %	1 »	0,0883 »	0,00277 »
100 »	»	10 »	0,833 »	0,0277 »
1$000	»	100 »	8,33 «	0,277 »
10$000	»	1000 »	83,3 »	2,77 »
100$000	»	10000 »	833 »	27,7 »
1:000$000	»	100000 »	8330 »	277 »
10 rs.	11 %	1,1 »	0,0917 »	0,00305 »
100 »	»	11 »	0,917 »	0,0305 »
1$000	»	110 »	9,17 »	0,305 »
10$000	»	1100 »	91,7 »	3,05 »
100$000	»	11000 »	917 »	30,5 »
1:000$000	»	110000 »	9170 »	305 »
10 rs.	12 %	1,2 »	0,1 »	0,00333 »
100 »	»	12 »	1 »	0,0333 »
1$000	»	120 »	10 »	0,333 »
10$000	»	1200 »	100 »	3,33 »
100$000	»	12000 »	1000 »	33,3 »
1:000$000	»	120000 »	10000 »	333 »

Observação

Para obter-se o juro simples de qualquer capital não explicito na tabella supra, acha-se o juro do capital explicito da mesmo ordem, e multiplica-se esse juro por 2, por 3, etc., conforme o numero de unidades de que o capital implicito fôr maior que o da tabella. Se quizermos, por exemplo, determinar o juro de 9:590$800 em um anno, sendo a taxa 9 %, vê-se que o juro de 1:000$ em um anno a 9 % é 90$: logo, multiplicando-se esse juro por 9, tem-se o juro de 9:000$: depois vê-se o juro de 100$ no mesmo tempo e taxa, o qual é 9$; logo, multiplicando esse juro por 5, obtem-se o juro de 500$, e depois vê-se que o juro de 10$ é 900 rs., e multiplica-se por 9, e finalmente, o juro de 100 rs que é 9 rs, multiplicado por 8, dá o juro de 800 rs. Sommam-se os juros parciaes e obtem-se o juro ou quantia total.

TYPO DE CALCULO

Juro de 1:000$ = 90:000	Juro de 100$ = 9000
9	5
Juro de 9:000$ = 810:000	Juro de 500$ = 45000
Juro de 10$ = 900	Juro de 100 rs. = 90
9	8
Juro de 90$ = 8100	Juro de 800 rs. = 720

810:000
45:000
8:100
720

Juro de 9:590$800 = 863$820

EXERCICIO

Qual é o juro de 6:000$ em um anno a ¾ %?

Solução. — Busca-se o juro de 1:000$ em um anno a ¼ %, e a tabella dá 2500; multiplica-se esse juro por 6, e vem 15000 para juro de 6:000 a ¼; multiplica-se este ultimo juro por 3, e vem 45000, que é o juro pedido.

Regra de desconto

Regra de desconto é toda questão que tem por fim determinar o abatimento que se deve fazer na importancia de uma letra ou bilhete pagavel no fim de um certo prazo, e que se deseja realizar antes do vencimento.

Chama-se valor nominal da letra a quantia inscripta na letra, de sorte que o desconto não é mais do que a differença entre o valor nominal da letra e seu valor actual.

Valor actual de uma letra é a quantia desconhecida, que, posta a juros durante o tempo que deve correr a letra, produz juro tal que junto áquella quantia dê o valor nominal.

Ha duas especies de descontos: desconto por dentro e desconto por fóra. *Desconto por dentro é o juro do valor real da letra. Desconto por fóra é o juro do valor nominal da letra durante o tempo que ella tem de correr.* E d'aqui já se deprehende que a taxa sendo a mesma, o desconto por fóra deve ser maior que o desconto por dentro, visto como no desconto por fóra, como depois se verá, confundindo-se a taxa do desconto com taxa de juro, além do abatimento real, desconta-se ainda o juro desse abatimento. Entretanto é elle o usado no commercio por ser o mais expedito, mas o outro é o mais racional e o unico que deverá ser admissivel.

Desconto por dentro

Seja em geral c o valor nominal de uma letra; t o tempo no fim do qual ella é pagavel; i a taxa do desconto; pede-se o desconto por dentro.

Solução.—Se 100 na unidade de tempo vence i, é claro que no tempo t vencerá it; e então o capital 100 no tempo t se converterá em $100+it$; vice-versa o capital $100+it$ terá para valor actual 100; d'onde resulta que por $100+it$ o banqueiro desconta it; e se por $100+it$ elle desconta it, pelo capital c quanto descontará? A proporção seguinte responderá á questão. $100+it:it::c:x=\frac{cit}{100+it}$. Esta fórmula traduz o seguinte principio: *o desconto por dentro é igual ao valor nominal da letra multiplicado pela taxa e pelo tempo, dividido por 100 mais a taxa multiplicada pelo tempo.*

1.ª APPLICAÇÃO

Sendo 2:850$ o valor nominal de uma letra pagavel em 2 annos e 8 mezes, pergunta-se qual será o desconto que deve soffrer a mesma letra, sendo a taxa $8\frac{3}{4}$ % ao anno?

Solução.—Se $8\frac{3}{4}$ ou $\frac{35}{4}$ é o que vence 100 em um anno, é claro que $\frac{35}{4}\times 2\frac{2}{3}=\frac{35}{4}\times\frac{8}{3}=\frac{280}{12}=\frac{70}{3}$ será o que vence 100 em $2^a\frac{2}{3}$; por consequencia o capital 100 no fim de $2^a\frac{2}{3}$ se converterá em $100+\frac{70}{3}$; vice-versa: o capital $100+\frac{70}{3}$ terá para valor actual 100; d'onde resulta que o banqueiro por $100+\frac{70}{3}$ desconta $\frac{70}{3}$, e pelo capital 2:850$ descontará x, que se vai determinar pela proporção seguinte:

$$100+\frac{70}{3}:\frac{70}{3}::2:850\$:x$$

$$\frac{370}{3}:\frac{70}{3}::2:850\$:x$$

$$370:70::2:850\$:x$$

$$37:7::2:850\$:x=\frac{2:850\$\times 7}{37}=539\$189 \text{ rs.}$$

Este resultado devera ser obtido applicando immediatamente a fórmula, como d'aqui em diante o faremos ; mas quizemos fixar sobre valores particulares os raciocinios que haviamos produzido sobre symbolos geraes.

Conhecido o desconto 539$189 rs., obtem-se o valor actual da letra subtrahindo do valor nominal o desconto conhecido. Fazendo isto, vem:

$$2:850.000-539.189=2:310.811 \text{ rs.}$$

Porém se suppuzermos que não é conhecido o desconto, e quizermos directamente chegar ao conhecimento do valor actual, devemos proceder do modo seguinte:

Se 100 em geral no fim do tempo t produz o juro it, é claro que nessa época o capital 100 se converterá em $100+it$, de que 100 será o valor actual, donde resulta que se determinará o valor actual de um capital qualquer c por meio da proporção

$$100+it:100::c:x=\frac{100\ c}{100+it}.$$

E este valor nos indica que *o valor actual de uma letra é igual a 100 vezes o valor nominal dividido por 100 mais a taxa multiplicada pelo tempo.*

Applicando esta solução ao caso do valor nominal ser 2:850$000, o tempo $2^a\frac{2}{3}$, e a taxa $8\frac{3}{4}$ temos:

$$100+\frac{70}{3}:100::2:850.000:x=\frac{100\times 2:850.000}{100+\frac{70}{3}}=\frac{285:000.000}{\frac{370}{3}}=$$

$$=\frac{3\times 285:000.000}{370}=\frac{855.000.000}{370}=2:310,810 \text{ rs.}$$

Desconto por fóra

Sendo desconto por fóra o juro do valor nominal da letra durante o tempo que ella tem de correr, segue-se que é por meio da fórmula de juro simples que se determina semelhante desconto.

Seja por exemplo, a mesma letra que anteriormente consideramos, cujo valor nominal é 2:850\$000, $2^a\frac{2}{3}$ o prazo do vencimento, e $8\frac{3}{4}$ a taxa, e supponhamos que se quer determinar o desconto por fóra.

Solução —Se por 100 o banqueiro desconta em geral *it*, que para o caso em questão é $\frac{70}{3}$, por 2:850\$000 quanto deve descontar? E' uma regra de tres equivalente á regra de juros, se 100 produz $\frac{70}{3}$, 2:850\$000 quanto prodnzirá, e que se traduz na seguinte proporção:

$$100:\frac{70}{3}::2:850\$:x=\frac{2:850\$\times\frac{70}{3}}{100}=665:000 \text{ rs.}$$

Analysando-se o valor de x, e attendendo-se que $\frac{70}{3}$ é o producto de $2\frac{2}{3}$ por $8\frac{3}{4}$, isto é do tempo pela taxa, vê-se que elle é uma applicação á fórmula geral $j=\frac{cit}{100}$.

Observação.—Cabe agora verificar o que dissemos ácerca das duas especies de desconto; e para isso comparemos o desconto por fóra 665:000 com o desconto por dentro 539.189. Evidentemente aquelle é maior que este de 125.811; o que é desvantajoso para o portador e de summa vantagem para o descontador; e vê-se que o excesso 125.811 é o juro do desconto por dentro, calculando o juro que o capital 539.189 póde produzir em $2^a\frac{2}{3}$ á razão de $8\frac{3}{4}\,^0/_0$; o que facilmente se obtem multiplicando 539.189 por $\frac{70}{3}$ e dividindo por 100.

EXERCICIO

Tendo-se descontado uma letra de 4:850$000 passada a $13\frac{1}{3}$ mezes á razão de $\frac{3}{4}$ °/o ao mez, pergunta-se qual foi o desconto feito pelo banqueiro e qual a somma recebida ou o valor da letra ?

Solução.—Se fôr o desconto por fóra o que queremos determinar, não é preciso para isso senão applicar a fórmula de juro simples $j=\frac{cit}{100}$, substituindo nella por c, 4:850$, por $i\,\frac{3}{4}$, e por t $13\frac{1}{2}$. Fazendo isto, vem:

$$j=\frac{4{:}850\$\times\frac{3}{4}\times 13\frac{1}{2}}{100}=\frac{4{:}850\$\times\frac{81}{8}}{100}=\frac{\frac{4{:}850\$\times 81}{8}}{100}=\frac{4{:}850\$\times 81}{800}=$$

$$=491\,063 \text{ rs.}$$

Agora, subtrahindo este desconto do valor nominal, obtem-se o valor actual; isto é, 4:850.000—491.063= =4:358 937 rs.

Mas se este valor actual tivesse de ser directamente determinado, serião as proporções seguintes que levar-nos-hião ao conhecimento da incognita:

$100 : it :: c : y$; ou, em virtude da propriedade das proporções.

$100-it : 100 :: c-y : c$; ou, fazendo $c-y=c'$, e invertendo.

$100 : 100-it :: c : c'$; ou, substituindo ás letras os valores particulares.

$100 : 100-\frac{81}{8} :: 4{:}850\$: c'$; ou, reduzindo o inteiro á denominação do quebrado.

$100 : \frac{800-81}{8} :: 4{:}850\$: c'$; ou, finalmente multiplicando ambos os termos da 1ª razão por 8, e praticando a subtração indicada,

$$800 : 719 :: 4{:}850\$: c'=\frac{4850\times 719}{800}=4{:}358.937 \text{ rs.}$$

Querendo, porém, determinar o desconto por dentro, faz-se para isso applicação da fórmula para esse fim deduzida, que vem a ser, $x=\frac{cit}{100+it}$, substituindo por c 4:850\$, e por $it \frac{3}{4}\times 13\frac{1}{2}=\frac{81}{8}$. E então vem:

$$x=\frac{4850\times\frac{81}{8}}{100+\frac{81}{8}}=\frac{\frac{392:850\$}{8}}{\frac{800+81}{8}}=\frac{392:850.000}{881}=445.914$$

Resta agora conhecer o valor actual, que facilmente se obtem subtrahindo do valor nominal 4:850\$ o desconto 445.914; isto é, 4.850:000—445.914=4:404.086. E na hypothese de não ser conhecido o desconto por dentro, e querer-se directamente determinar o valor actual respectivo, applica-se a fórmula $x=\frac{100c}{100+it}$ e dá:

$$x=\frac{485:000.000}{100+\frac{81}{8}}=\frac{485:000.000}{\frac{800+81}{8}}=\frac{8\times 485:000.000}{881}=4:404.086$$

OUTRO EXERCICIO

Qual será a importancia de uma letra, que, descontada á razão de 9 % ao anno, produzio 5:227\$200, faltando apenas para o seu vencimento 5 mezes e 10 dias, e sendo o desconto por dentro?

Solução.—A incognita deste problema é o valor nominal da letra, que póde ser conhecido pela fórmula $x=\frac{cit}{100+it}$ fazendo nella $x=5:227\$200$, $i=9$, $t=\frac{160}{360}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$, e por consequencia $it=9\times\frac{4}{9}=4$. E então, vem:

$$5:227\$200=\frac{4c}{104}.$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por 104, resulta: $104 \times 5:227\$200 = 4\ c$.

Dividindo ambos os membros por 4, obtem-se:

$$c = \frac{104 \times 5:227\$200}{4} = 135:907\$200.$$

E esta expressão, attendendo-se á significação geral das quantidades que nella entrão, traduz-se do modo seguinte: *o valor nominal é igual a 100 mais o producto da taxa pelo tempo, multiplicado pelo valor actual, dividido pelo producto da taxa pelo tempo.*

Regra de juro composto

Regra de juro composto é toda questão que tem por fim achar o interesse que produz uma certa quantia empregada a uma razão e tem o quaesquer, quando o juro por ella vencido na unidade de tempo se accumula ao capital para com elle vencer um novo juro, ou qualquer destes elementos sendo conhecidos, determinar os outros tres.

Seja c um capital primitivo, i a taxa, e t o tempo. Vamos determinar a somma de capital e juros; isto é, a quantia afinal produzida, comprehendendo capital, juros, e juros de juros.

Solução.—O capital c no fim do primeiro mez ou anno vence de juro $\frac{ci}{100}$; mas, em virtude da definição, este juro deve ser reunido ao capital para com elle vencer um novo juro no mez ou anno seguinte; logo, no principio do segundo mez ou anno, o capital empregado será:

$$c + \frac{ci}{100} = c\left(1 + \frac{i}{100}\right) = c\left(\frac{100+i}{100}\right) = c'.$$

Então começamos o segundo mez o anno com o capital c', e não devemos perder de vista que c' é $c\left(\frac{100+i}{100}\right)$, e que chegamos a este resultado pondo em evidencia o factor commum c na expressão $c + \frac{ci}{100}$, e depois reduzindo o inteiro 1 á denominação do quebrado.

O capital c' tambem vence de juro $\frac{c'i}{100}$, no fim do segundo mez ou anno: de sorte que, ainda em virtude da definição, no principio do terceiro mez ou anno tem-se o capital:

$$c'+\frac{c'i}{100}=c'\left(1+\frac{i}{100}\right)=c'\left(\frac{100+i}{100}\right)=c''.$$

Mas no fim do terceiro mez o anno, o capital c'' vence de juro $\frac{c''}{100}$; logo, no principio do quarto mez ou anno temos o capital accumulado:

$$c''+\frac{c''i}{100}=c''\left(1+\frac{i}{100}\right)=c''\left(\frac{100+i}{100}\right)=c'''.$$

Agora, analysando os resultados obtidos, vemos que:

No fim do primeiro mez ou anno, a somma de capital e juros é: $c\left(\frac{100+i}{100}\right)$, que se traduz *em capital primitivo multiplicado por 100 mais a taxa dividido por 100 elevado a 1, que é o tempo decorrido.*

No fim do segundo mez ou anno, a somma de capital e juros é: $c'\left(\frac{100+i}{100}\right)$. Substituindo nesta expressão por c' o seu valor $c\left(\frac{100+i}{100}\right)$ vem:

$c'\left(\frac{100+i}{100}\right)=c\left(\frac{100+i}{100}\right)\left(\frac{100+i}{100}\right)=c\left(\frac{100+i}{100}\right)^2$ que se traduz em *capital primitivo multiplicado por 100, mais a taxa dividido por 100, elevado a 2, que é o tempo decorrido.*

No fim do terceiro mez ou anno, a somma de capital e juros é: $c''\left(\frac{100+i}{100}\right)$. Substituindo nesta expressão por c'' o valor $c'\left(\frac{100+i}{100}\right)=c\left(\frac{100+i}{100}\right)^2$, vem: $c''\left(\frac{100+i}{100}\right)=c\left(\frac{100+i}{100}\right)^2\left(\frac{100+i}{100}\right)=c\left(\frac{100+i}{100}\right)^3$, que se traduz em *capital primitivo multiplicado por 100 mais a taxa dividido por 100 elevado a 3, que é o tempo decorrido, etc.*

E, por analogia, se for C o capital accumulado no fim do tempo t, teremos:

$$C=c\left(\frac{100+i}{100}\right)^t \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Esta fórmula traduzida em linguagem ordinaria quer dizer que em geral: *A somma de capital e juros é igual ao capital primitivo multiplicado por 100 mais a taxa dividido por 100 elevado ao numero de mezes ou annos decorridos.*

Como ella contém os 4 elementos distinctos C, c, i, t, tres dos quaes sendo conhecidos se determina o 4º, resulta que ha 4 problemas geraes nella comprehendidos: um que tem por fim conhecer C, ou a somma de capital e juros; outro c, ou o capital primitivo; outro i, ou a taxa; e outro t, ou o tempo de duração do emprego do capital.

O 1º problema é resolvido pela fórmula (1), ou applicando-lhe os logarithmos para mais commodidade,

$$\log.\ C=\log.\ c+t\ \log.\frac{100+i}{100} \ldots\ldots \quad (1').$$

Subtrahindo a ambos os membros desta igualdade a quantidade $t\ \log.\frac{100+i}{100}$, obtem-se:

$$\log.\ c=\log.\ C-t\ \log\frac{100+i}{100} \ldots\ldots \quad (2).$$

E é esta fórmula (2) que resolve o 2º problema.

Subtrahindo a ambos os membros da igualdade (1') a quantidade $\log.\ c$, resulta: $t\ \log.\frac{100+i}{100}=\log.\ C-\log.\ c$. Dividindo ambos os membros desta igualdade por t, obtem-se:

$$\log.\frac{100+i}{100}=\frac{\log.\ C-\log.\ c}{t} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

E esta fórmula (3) é que re olve o 3º problema.

Se, finalmente, na expressão $t\ \log.\frac{100+i}{100}=\log.\ C-\log.\ c$, deduzida da fórmula (1'), dividir-se ambos os membros por $\log.\frac{100+i}{100}$, resulta:

$$t=\frac{\log.C-\log.i}{\log.\frac{100+i}{100}} \ldots\ldots \quad (4).$$

Por meio desta ultima fórmula se obtem a solução do 4.º problema.

1ª APPLICAÇÃO

Qual será o capital accumulado produzido por 250$ emgado a juro composto de 5 % em 14 annos?

Solução.—Faz-se na fórmula (1') $c=250\$$, $t=14$, e $i=5$, e obtem-se:

$\log.\ C=\log.\ 250.000+14\ \log.\frac{105}{100}=\log.\ 250.000+14$ $(\log.\ 105-\log.\ 100)=5,3979400+14\times 0,0211893=$ $=5,6945902.$

Entrando com este logarithmo nas taboas, e procurando o numero correspondente, vem: $C=494,983$ rs.

2ª APPLICAÇÃO

Qual será o capital primitivo que, posto a juro composto de 5 %. em 14 annos produza a somma de capital 494,983 rs.?

Solução.- Faz-se na fórmula (2) $C=494,983$, $t=14$, $i=5$, e vem: $\log.\ c=\log.\ 494,983-14\ (\log.\ 105-$ $-\log.\ 100)=5,3979400$. Entra-se com este logarithmo nas taboas e obtem se o numero correspondente, $c=250.000$ rs.

3ª APPLICAÇÃO

A que razão ou taxa de juro composto deve ser empregado o capital 250$000, para produzir em 14 annos 494,983 réis?

Solução.— Faz-se na fórmula (3) $C=494.983$, $c=$ $=250\$$, e $t=14$, e resulta: $\log.\frac{100+i}{100}=\frac{\log.494.983\ \ \log.250.000}{14}=$ $=\frac{0,2966502}{14}=0,0211893$. Entra-se com este logarithmo nas taboas, vê-se o numero correspondente, e tem-se $\frac{100+i}{100}=$ $=1{,}050$. Multiplicão-se ambos os membros desta igualdade por 100, e obtem-se: $100+i=105$. E subtrahindo 100 a ambos os membros, vem: $i=105-100=5$.

4ª APPLICAÇÃO

Por quanto tempo deve estar empregado a juro composto de 5 % o capital 250$000 para produzir o capital accumulado 494.983 ?

Solução.—Faz-se na fórmula (4) $C=494.983$, $c=250\$$ e $i=5$, e vem: $t=\frac{\log.494{,}883-\log.250{:}000}{\log.\frac{105}{100}}=\frac{0{,}2966502}{0{,}0211893}=14$ annos.

Regra de annuidade

Regra de annuidade é toda questão que tem por objecto a extincção de qualquer divida contrahida a juros compostos, por meio de prestações iguaes, feitas em prazos tambem iguaes.

As questões desta especie são inversas daquellas que tem por objecto realizar no fim de um numero qualquer de annos uma somma produzida pela accumulação de um certo capital, seus juros e juros de juros, porque é o devedor que se desembaraça por meio de prestações ou annuidades de um capital com seus juros em diversos pagamentos effectuados antes do fim do prazo marcado para o embolso ; prestações estas que podem ser consideradas como adiantamentos feitos ao credor sobre este embolso, e cujo valor depende do tempo decorrido entre uma destas épocas e a outra.

Por conseguinte, se representarmos por c cada prestação, e n o numero de annos em que se deve realizar o embolso, o 1º pagamento que se effectua $n-1$ annos antes do prazo marcado, é indubitavelmente um capital que pelo gyro de juros compostos se converte no valor $c\left(\frac{100+i}{100}\right)^{n-1}$; o 2º que se effectua $n-2$ annos antes, se torna em $c\left(\frac{100+i}{100}\right)^{n-2}$; o 3º, em

$c\left(\frac{100+i}{100}\right)^{n-3}$ etc.; até que o ultimo só tem para valor c. Mas por outro lado se chamarmos C o capital emprestado, esse capital valerá no fim de n annos $C\left(\frac{100+i}{100}\right)^{n}$; valor este que deve ser igual á somma de todos os adiantamentos feitos pelo devedor ao credor, e portanto:

$$C\left(\frac{100+i}{100}\right)^{n}=c\left(\frac{100+i}{100}\right)^{n-1}+c\left(\frac{100+i}{100}\right)^{n-2}+c\left(\frac{100+i}{100}\right)^{n-3}+\ldots+c.$$

E, como o 2º membro desta igualdade considerado do fim para o principio, indica a somma dos termos de uma progressão por quociente crescente, cuja razão é $\frac{100+i}{100}$, e nós sabemos que a somma dos termos de uma progressão por quociente é igual ao primeiro multiplicado pela differença entre a razão elevada ao numero dos termos e a unidade, dividido pela razão menos um, segue-se que:

$$C\left(\frac{100+i}{100}\right)^{n}=\frac{c\left\{\left(\frac{100+i}{100}\right)^{n}-1\right\}}{\frac{100+i}{100}-1}\text{; ou}$$

$$C\left(\frac{100+i}{100}\right)^{n}=\frac{c\left\{\left(\frac{100+i}{100}\right)^{n}-1\right\}}{\frac{i}{100}}$$

Esta fórmula, comprehendendo os elementos C, c, i, n, tres dos quaes sendo conhecidos, se determina o 4º, resulta que ha problemas geraes nella contidos, cujas soluções dependem dos valores dessas quantidades, e dos quaes prescindiremos por não ser aqui conveniente a sua deducção. A tabella seguinte resolverá os problemas mencionados.

Tabella das annuidades para 1000 de 1 até 20 annos a juro composto de 2, 3, 4, 5 e 6 por 100

Annos	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %
1	1020.00	1030.00	1040.00	1050.00	1060.00
2	515.05	522.61	530.20	537.81	545.44
3	346.76	353.53	360 35	367.21	374.11
4	262.62	269.03	275.50	282.01	288.60
5	212.16	218.36	224.63	230.98	237.40
6	178.53	184.60	190.76	199.02	203.36
7	154.51	160.51	166.61	172.82	179.14
8	136.51	142 46	148.53	154.72	161.04
9	122.52	128.43	134.49	140.70	147.02
10	111.33	117.23	123.29	129.51	135.87
11	102.18	108.08	114.15	120.39	126.79
12	94.56	100.46	106.55	112.83	119.28
13	88.12	94.03	100.14	106.46	112.96
14	82.60	88.53	94.67	101.02	107.59
15	77.83	83.77	89.94	96.34	102.96
16	73.65	79.61	85.82	92.27	98.96
17	69 97	75.95	82.20	88.70	95.45
18	66.70	72.71	78.99	85.55	92 36
19	63.78	69.81	76.14	82.75	89.62
20	61.16	67.22	73.58	80.24	87.19

1ª QUESTÃO

Que somma annual se deve pagar em 12 annos para amortizar uma divida de 1:200$000, contrahida a juro composto de 5 °/₀ ?

Solução.—Busca-se na columna dos 5 °/₀ da tabella o numero correspondente a 12 annos, que é 112,83; e se por 1$000 se deve pagar 112, 83 por 1:200$000 se pagará x; isto é:

$$1000:112,83::1:200\$000:x=135\$396$$

2ª QUESTÃO

Que divida se poderá pagar contrahida a juro composto de 5 °/₀ com a annuidade 135$396 em 12 annos?

Solução.—Busca-se na columna dos 5 °/₀ da tabella o numero correspondente a 12 annos, que é 112,83, e arma-se a proporção seguinte:

$$112,83:1000::135\$396:x=1:200\$000$$

3ª QUESTÃO

Quantos annos são precisos para que uma divida de 1:200$000 a juros compostos de 5 °/₀ seja extincta com annuidades de 135$396?

Solução.—Arma-se primeiramente a proporção seguinte:

$$1:200\$000:135.396::1000:x=112,83$$

Entra-se depois na tabella com o valor de x na columna dos 5 °/₀, e vê-se que esse numero corresponde a 12 annos, que é o tempo pedido.

4ª QUESTÃO

A que taxa de juro composto foi contrahida a divida de 1:200$000, cuja amortização se verificou em 12 annos com prestações de 135$396?

Solução.—Estabelece-se a proporção:

$$1:200.000:135.396::1000:x=112,83$$

Procura-se depois este numero 112,83 na linha horizontal da tabella que corresponde a 12 annos, e sendo elle encontrado na columna dos 5 %, segue-se que 5 é a taxa pedida.

REGRA DE FALSA POSIÇÃO

E' esta uma das mais fecundas e importantes regras arithmeticas por suas numerosas e variadas applicações. Todos os problemas que em algebra são traduzidos em equações do 1º gráo a uma ou mais incognitas, arithmeticamente se resolvem por meio da regra de *falsa posição*, o que extraordinariamente amplia os recursos da sciencia dos numeros.

Esta regra consiste em *substituir ao numero que se busca um outro qualquer, tomado ao acaso, e effectuar sobre este todas as operações indicadas no enunciado da questão ; tomar depois a differença entre o resultado obtido pela hypothese e o que deveria vir, obtendo assim o que se chamma a 1ª differença; estabelecer uma 2ª hypothese tomando um outro numero, proceder do mesmo modo, e obter a 2ª differença, multiplicar a 1ª differença pela 2ª hypothese e a 2ª differença pela 1ª hypothese, se os resultados dos dous numeros hypotheticos forem ambos maiores ou menores que o verdadeiro, tomar as differenças entre os dous productos e entre as duas differenças, dividir o 1º resultado pelo 2º, e o quociente será o numero pedido; porém, se os resultados forem um maior e outro menor que o verdadeiro, então o dividendo deverá ser a somma dos dous productos e o divisor a somma das duas differenças.*

Quando os problemas dependem de mais de uma incognita, é mister estabelecer mais de duas hypotheses; e em geral são necessarias tantas mais uma quantas são as incognitas. A regra de falsa posição estende-se mesmo aos problemas de gráos superiores, e tem grande applicação na astronomia ; porém, neste caso, e no demais de uma incognita, embora do 1º grão, ella se torna por tal modo complicada, que prescindiremos de tratar de semelhantes questões.

1º EXEMPLO

Qual é o numero que sommado com a sua metade, terça, e qual parte, prefaz o numero 275 ?

Solução

1ª hypothese......	24	2ª hypothese......	96
Metade...........	12	Metade...........	48
Terço.............	8	Terço.............	32
Quarto............	6	Quarto............	24
	50		200
	275		275
1ª differença......	225	2ª differença......	75
2ª hypothese......	96	1ª hypothese......	24
	1350		300
	2025		150
1º producto.......	21600	2º producto........	1800
1ª differença......	225	1º producto........	21600
2ª differença......	75	2º producto........	1800
Differ. das differ...	150	Differ. dos prod...	19800

19800	150
480	132 numero pedido.
300	

2º EXEMPLO

Um pai deixou em seu testamento a seguinte disposição: Dê-se a meu primeiro filho 1.000 francos, mais a nona parte do resto, deduzida a parte do primeiro ; dê-se ao segundo 2.000 francos, mais a nona parte do resto, deduzidas as partes dos dous primeiros ; dê-se ao terceiro 3.000 francos, mais a nona parte do resto, e assim por diante. Quer-se saber que fortuna deixou, quantos são os filhos, e quanto cabe a cada um, sabendo-se que cumpridas as disposições testamentarias todos ficão com partes iguaes.

Solução

Do enunciado do problema se conclue que, conhecendo-se a fortuna deixada, sabe-se quanto cabe a cada filho, e qual é o numero delles. Trata-se, pois, de determinar essa fortuna.

1ª hypothese............	10.000	2ª hypothese..........	19.000
Herança do 1º filho......	1.000	Herança do 1º filho....	1.000
	9.000		18 000
$\frac{1}{9}$ do resto.............	1.000	— do resto...........	2.000
	8.000		16.000
Herança do 2º filho......	2.000	Herança do 2º filho....	2.000
	6.000		14.000
$\frac{1}{9}$ do resto.............	$666\frac{6}{9}$	$\frac{1}{9}$ do resto..........	$1.555\frac{5}{9}$

1ª diff. $666\frac{6}{9} = \frac{6000}{9}$ 2ª diff. $555\frac{5}{9} = \frac{5000}{9}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Diff. das diff...} & = \dfrac{6000}{9} - \dfrac{5000}{9} = \dfrac{1000}{9} \\ 1^{\circ}\ \text{producto....} & = \dfrac{6000}{9} \times 19000 = \dfrac{114000000}{9} \\ 2^{\circ}\ \text{producto....} & = \dfrac{5000}{9} \times 10000 = \dfrac{50000000}{9} \\ \text{Dividendo.....} & = \dfrac{114000000 - 50000000}{9} = \dfrac{64000000}{9} \end{array}\right| \begin{array}{l} \dfrac{64000000}{9} : \dfrac{1000}{9} = \dfrac{64000000}{1000} = \\ = 64000 \text{ fr. numero pedido.} \end{array}$$

Assim, pois, o pai deixou 64.000 francos. Segundo as ordens do testador, toca ao 1º filho a quantia de 8.000 francos; e como todos devem ter quinhões iguaes, dividindo 64.000 por 8.000, obter-se-ha o numero dos filhos, que é 8.

3º EXEMPLO

Tres fontes, correndo simultaneamente para um tanque cuja capacidade é de 2.000 litros, enchem-no em 1 hora; sabe se que a primeira lança no tanque 230 litros mais do que a segunda. e a segunda, 150 mais do que a terceira. Pergunta-se quantos litros cada fonte despeja no tanque no tempo dado, e qual a intensidade correspondente?

Solução

E' claro que, conhecido o numero de litros que a terceira fonte despeja no tanque, ter-se-ha o que corresponde a cada uma das outras. Trata-se de determinar este numero.

1ª hyp.=1ª fonte	100	2ª hyp.=1ª fonte.......	120
2ª fonte=100+150	250	2ª fonte=120+150	270
3ª fonte=250+230	480	3ª fonte=270+230	500
	830		890
Capacidade do tanque ..	2000	Capacidade do tanque...	2000
1ª differença	1170	2ª differença	1110
2ª hypothese	120	1ª hypothese	100
	23400	2º producto	111000
	1170		
1º producto.............	140400	Diff. das diff.=1170−1110=60 div.	
2º producto.............	111000		
Dividendo...............	29400	60	
	5400		
	000	490 numero pedido.	

Verificação. — Se a terceira fonte despeja no tanque 490 litros, a segunda despejará 640 e a primeira 870. Sommando estas porções d'agua, acha-se com effeito 2,000 litros.

Quanto á intensidade de cada fonte, reduz-se a questão a dividir por 60 a porção d'agua relativa a cada uma, e o quociente será a sua intensidade, isto é, a porção d'agua que a fonte despeja em um minuto. Acha-se assim para intensidade da primeira, 14,5 litros; para a da segunda, 10,666, etc.; para a da terceira, 8,111, etc:

4º EXEMPLO

Um pobre chegou a uma igreja onde havia tres altares, e pedio ao santo do primeiro que lhe dobrasse o dinheiro que trazia; o que realizado, o pobre deu-lhe um vintem. Aconteceu o mesmo diante do segundo e do terceiro altar e sahio sem real. Pergunta-se quanto levava elle quando entrou na igreja?

1ª hypothese	30	2ª hypothese	40
Dinheiro dobrado	60	Dobro	80
Dito dado pelo pobre	20	Dinheiro dado	20
1º altar	40	1º altar	60
Dobro	80	Dobro	120
Dinheiro dado	20	Dinheiro dado	20
2º altar	60	2º altar	100
Dobro	120	Dobro	200
Dinheiro dado	20	Dinheiro dado	20
1ª differença (3º altar)	100	2ª differença (3º altar)	180
2ª hypothese	40	1ª hypothese	30
1º producto	4000	2º producto	5400

Differença das differenças = 180—100 = 80

Dividendo=5400—4000=1400	80
600	17,5 numero pedido.
400	
00	

Demonstração da regra

A regra da falsa posição funda-se no principio de que dous numeros quaesquer a e b são sempre proporcionaes a seus multiplos e submultiplos semelhantes.

Com effeito :

$$a:b::2a:2b::3a:3b \text{ etc.}::\frac{1}{2}a:\frac{1}{2}b::\frac{1}{3}a:\frac{1}{3}b \text{ etc.}$$

Desta serie de razões iguaes, em virtude do principio de que a somma dos antecedentes está para a somma dos consequentes, como qualquer antecedente está para o seu consequente, se deduz:

$$2a+3a+\text{etc.}:2b3b=+\text{etc.}::\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a+\text{etc.}::\frac{1}{2}b+$$
$$+\frac{1}{3}b+\text{etc.}::a:b.$$

Chamando agora x o numero procurado, «a» a 1ª hypothese, b a segunda, d a 1ª differença d' a segunda, r e r'

os resultados das duas hypotheses, e R o verdadeiro resultado, em vista do principio acima apresentado, teremos:

$$\left.\begin{matrix} x:a::R:r \\ x:b::R:r' \end{matrix}\right\} \quad (1)$$

E por consequencia:

$$x—a:a::R—r:r$$
$$x—b:b::—R—r:r'$$

E como

$$R—r=d, R—r'=d'$$

substituindo vem:

$$x—a:a::d:r$$
$$x—b:b::d':r'$$

Alternando estas duas proporções, resulta:

$$x—a:d::a:r$$
$$x—b:d'::b:r'$$

Porém, compondo as duas proporções (1), obtemos a nova:

$$a:b::r:r'$$

ou alterando:

$$a:r::b:r'$$

Donde se conclue:

$$x—a:d::x—b:d'$$

ou

$$(x—a)\ d'=(x—b)\ d.$$

Effectuando as muliiplicações indicadas, vem:

$$d'x—ad'=dx—bd$$

Subtrahindo a ambos os membros desta igualdade a quantidade dx, e juntando-lhes ad', o que a não altera, resulta:

$$d'x - dx = ad' - bd$$

Pondo em evidencia o factor commum x, vem:

$$x(d' - d) = ad' - bd$$

Logo:

$$x = \frac{ad' - bd}{d' - d}$$

Este resultado analysado dá a regra.

Osbervação

Suppuzemos as differenças d e d' do mesmo signal, se fossem de signaes contrarios, o que aconteceria se um resultado fosse maior e o outro menor que o verdadeiro, então a fórmula se mudaria na seguinte:

$$x = \frac{ad' + bd}{d + d'}$$

modificação esta que vem tambem indicada na regra dada.

APPENDICE

I

DIVISIBILIDADE

A' pagina 72, por occasião de tratar-se do *Methodo do maximo commum divisor*, forão enunciados os tres principios fundamentaes, em que se baseia a theoria do maximo commum divisor, tendo sido as respectivas demonstrações insertas na nota.

Estes tres principios são de alta importancia na indagação dos divisores dos numeros.

Vamos agora expôr um 4º principio de não menor importancia, por quanto nelle se baseião as demonstrações dadas aos caracteres de divisibilidade.

4º principio.—Todo o numero D *que divide as partes* A *e* B *de um todo, divide necessariamente esse todo* A+B=S; *todo o numero* D *que divide uma das partes* A *do todo, sem dividir a outra* B, *não divide o todo e o resto da divisão da somma pelo divisor* D *é igual ao resto da divisão da parte* B *pelo mesmo divisor.*

Demonstração. — Sendo A e B as partes do todo S, temos a igualdade evidente $A+B=S$.

Dividindo ambos os membros dessa igualdade por D, virá: $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}=\frac{S}{D}$.

Analysando agora esta ultima igualdade, vemos que o 1º membro é um numero inteiro, porque, D dividindo A e B, $\frac{A}{D}$ e $\frac{B}{D}$ serão numeros inteiros; e a somma de dous numeros inteiros é sempre inteiro.

Logo o 2º membro, tambem, será inteiro e D dividirá a somma S ou $A+B$.

Para demonstrar a 2ª parte do principio, basta attender á igualdade $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}=\frac{S}{D}$.

E' claro, com effeito, que se por hypothese D dividir A sem dividir B, $\frac{A}{D}$ será inteiro e $\frac{B}{D}$ não. Ora, a somma de um numero inteiro e de um numero fraccionario nunca é um inteiro, logo $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}$ não será inteiro; nem o será tambem $\frac{S}{D}$ que é o 2º membro da igualdade.

Falta apenas provar que os restos da divisão de S por D e de B por D serão iguaes.

Chamemos Q o quociente da divisão de A por D, e Q' o da divisão de B por D sendo B o resto desta divisão, que se não faz exactamente.

Como o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente mais o resto, $A=DQ$ e $B=DQ'+R$.

Substituindo estes valores de A e B na igualdade $A+B=S$, teremos:

$$DQ+DQ'+R=S$$

ou, pondo em evidencia o factor commum D, no 1º membro:

$$D(Q+Q')+R=S$$

igualdade que nos mostra que R é tambem o resto da divisão da somma S pelo divisor D; sendo quociente dessa divisão a somma dos quocientes parciaes $Q+Q'$.

II

DECOMPOSIÇÃO DE UM NUMERO EM SEUS DIVISORES PRIMOS

Para decompor um numero em seus factores primos, procede-se do seguinte modo:

Regra. — Divide-se o numero dado pelo seu menor divisor primo; divide-se igualmente o quociente achado pelo menor divisor primo que elle contiver; e, semelhantemente se procede até que se ache o quociente um. Os diversos divisores são os factores primos buscados.

Seja o numero 8820.

8820	2
4410	2
2205	3
735	3
245	5
49	7
7	7
1	

O menor divisor primo que contém o numero 8820 é 2; dividindo 8820 por 2 obtemos o quociente 4410, cujo menor divisor primo é ainda 2. Dividindo 4410 por 2 obtemos para quociente 2205, cujo menor divisor é 3.

Procedendo de igual modo até apparecer o quociente 1, obteremos a serie de divisores primos 2, 2, 3, 3, 5, 7, 7.

Vemos que o numero dado é composto de 2 factores iguaes a 2 ou 2^2; 2 iguaes a 3 ou 3^2, 1 igual a 5 e 2 iguaes a 7 ou 7^2.

Pode, pois, o numero dado 8820 ser representado por:

$$2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$$

Sabendo decompor um numero em seus factores primos, podemos examinar a condição a que devem satisfazer dous numeros, para que seja um divisor do outro.

A condição a satisfazer, condição necessaria, é que o dividendo deverá conter todos os factores primos do divisor, *pelo menos elevado ao mesmo expoente*, isto é, repetido o mesmo numero de vezes no dividendo e no divisor.

Sejão os numeros 15750 e 1800.

Decompondo-os em seus divisores primos, teremos:

$$15750 = 2 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$$

e

$$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2.$$

Como o factor 2 do numero 1800 tem maior expoente do que o do numero 15750; o primeiro não dividirá o segundo.

Mas, se, por exemplo, forem dados os numeros 15750 e 210, decompondo-os nos diversos factores primos, teremos:

$$15750 = 2 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

vê se que no 1º existem todos os factores do 2º; póde, por tanto, ser elle representado pelo producto

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7)\ (3 \times 5^2);$$

isto é,

$$15750 = 210 \times 75$$

Dividindo 15750 por 210, obtemos para quociente 75 ou (3×5^2); um numero inteiro; logo 210 é divisor de 15750.

III

POTENCIAS E RAIZES

A

Extracção da raiz quadrada de um numero com uma dada approximação

Seja a extrahir a raiz quadrada do numero N com a approximação $\frac{1}{n}$.

Regra.—Multiplica-se o numero dado pelo quadrado do denominador da approximação; extrahe-se a raiz do producto e dá-se para denominador a esta raiz o denominador da mesma approximação.

Exemplo.—Seja a extrahir a raiz quadrada de 45 com a approximação de $\frac{1}{7}$; o producto de 45 pelo quadrado de 7 ou 49 é 2205, cuja raiz é 46. $\frac{46}{9}$ será, pois, a raiz de 45, com a approximação de $\frac{1}{9}$.

Se quizermos extrahir a raiz de um numero N com a approximação $\frac{n}{n}$, empregaremos a seguinte:

Regra.—Divide se o numero dado pelo quadrado da fracção que indica a approximação exigida; extrahe-se a raiz quadrada da parte inteira do resultado obtido e multiplica-se esta raiz pela fracção que representa a approximação.

Exemplo.—Seja a extrahir a raiz quadrada de 37 com a approximação de $\frac{3}{5}$.

$$37 \div \frac{9}{25} = \frac{37 \times 25}{9} = \frac{925}{9} = 102\frac{7}{9}.$$

A raiz de 102 é 10.

$10 \times \frac{3}{5} = \frac{30}{5} = 6$ será a raiz de 37 com a approximação $\frac{3}{5}$.

B

Extracção da raiz cubica de um numero com uma dada approximação.

Para extrahir a raiz cubica de um numero N com a approximação $\frac{1}{n}$, empregaremos a seguinte:

Regra.—Multiplica-se o numero dado pelo cubo do denominador da approximação; extrahe-se a raiz cubica do producto e divide-se essa raiz pelo denominador da approximação.

Exemplo.—Seja a extrahir a raiz cubica de 67 com a approximação $\frac{1}{5}$.

$$67 \times 5^3 = 67 \times 125 = 8375.$$

A raiz cubica de 8375 é 20, a raiz buscada será $\frac{20 \times 1}{5} = 4$.

Para extrahir a raiz cubica de um numero com a approximação $\frac{m}{n}$, empregaremos a seguinte:

Regra.—Divide-se o numero dado pelo cubo da fracção que indica a approximação; extrahe-se a raiz cubica da parte inteira do resultado e multiplica-se essa raiz pela fracção $\frac{m}{n}$.

Exemplo.—Seja a extrahir a raiz cubica de 7 com a approximação $\frac{3}{5}$.

$$7 \div \frac{3^3}{5^3} = 7 \times \frac{125}{27} = \frac{875}{27} = 32\frac{11}{27}$$

A raiz cubica de 32 sendo 3, a raiz buscada será $3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$.

Pontos de Arithmetica do programma de exames de preparatorios organisado pelo Conselho Director de Instrucção Primaria e Secundaria em 1877, desenvolvidos na 5ª edição do Explicador de Arithmetica de Eduardo de Sá.

Pontos	*Pag. d'arith.*
Vago: Noções preliminares, numeração decimal...	17 a 33
1. Quatro operações sobre numeros inteiros.........	35 a 60
2. Fracções ordinarias, sua reducção ao mesmo denominador e á expressão mais simples............	61 a 83
3. Operações sobre as fracções ordinarias...........	84 a 92
4. Operações sobre as fracções decimaes...........	93 a 106
5. Systema metrico..............................	127 a 137
6. Operações sobre os numeros complexos...........	139 a 154
7. Divisibilidade dos numeros....................	68 a 259
8. Dizimas periodicas............................	107 a 116
9. Quadrado e raiz quadrada......................	155 a 262
10. Cubo e raiz cubica...........................	166 a 263
11. Equidifferenças e proporções.................	177 a 185
12. Regra de tres, simples e composta. Regra conjuncta	215 a 22[illegible]
13. Regra de juros e de descontos................	230 a 242
14. Regra de companhia, simples e composta........	226 a [illegible]30
15. Progressões por differença...................	187 a 19[illegible]
16. Progressões por quociente....................	191 a 195
17. Logarithmos, theoria elementar e uso das taboas..	197 a 213
18. Juros compostos..............................	242 a 246