DECIMA PRIMEIRA PARTE

CAPITULO XII

Logarithmos

Logarithmos são os termos do uma progressão por differença, correspondentes termo a termo aos de uma progressão por quociente.

Sejão por exemplo, as progressões seguintes :

$$\div\!\div\ 1:\ 4:\ 16:\ 64:\ 256:\ \text{etc.} \qquad (1)$$
$$\div\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \text{etc.} \qquad (2)$$

Cada termo da 2ª é logarithmo do termo correspondente da 1ª; isto é, 0 é o logarithmo de 1 ; 1 logarithmo de 4; 2 logarithmo de 16, etc.

Segundo a definição dada, parece que os numeros que se achão na progressão por quociente são os unicos que tem logarithmos ; mas não é isso o que se deve entender, e sim que um nnmero qualquer tem sempre um logarithmo commensuravel ou incommensuravel ; porque inserindo-se, entre cada dous termos consecutivos da progressão por quociente um numero de meios proporcionaes assaz consideravel, obtem-se novas progressões por quociente ; e inserindo-se tambem entre cada dous termos consecutivos da progressão por differença o mesmo numero de meios differenciaes, obtem-se outras tantas progressões por differença, cujos termos são os logarithmos dos termos correspondentes das novas progressões por quociente, e se o numero de meios inseridos é muito grande, os termos da progressão por differença serão os logarithmos exactos dos numeros que se achão inscriptos na progressão por quociente, e ao mesmo tempo os logarithmos approximados dos numeros que não se achão nella exarados.

Da definição geral dada, conclue-se que póde haver uma infinidade de progressões por quociente que se faça corresponder á mesma progressão por differença, e reciprocamente. Portanto um mesmo numero póde ter infinitos logarithmos, e reciprocamente, conforme o systema de progressões, uma por differença e outra por quociente, que se adoptar para construcção das taboas.

Para brevidade dos calculos e facil applicação dos logarithmos, dá-se por primeiro termo á progressão por quociente a unidade, e por primeiro termo á progressão por differença zero, qualquer que seja o systema adoptado.

Entre todos os systemas de logarithmos que podem haver, o mais commodo e expedito para os calculos numericos ordinarios é o que traz o nome de seu inventor Briggs. Neste systema póde-se definir: *logarithmo de um numero é o expoente a que se deve elevar a base para ter o numero proposto.*

Este systema tem por base 10, que é a razão da progressão por quociente, que principia por 1, emquanto que a progressão por differença é a que tem por primeiro termo zero e segue a serie natural dos numeros inteiros:

$$\because\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \quad \text{etc.}$$
$$\div\ 0 . 1 \quad 2 . \quad 3 . \quad 4 . \quad \text{etc.}$$

Da inspecção destas duas progressões resulta que, assim como passamos na progressão por quociente de um termo para outro, multiplicando o antecedente por 10, vice versa, passaremos de um termo para o antecedente, dividindo o consequente por 10; e semelhantemente, se na progressão por differença passamos de um termo para o seguinte juntando ao antecedente a razão, vice-versa, passaremos de um termo qualquer para o seu antecedente, subtrahindo ao consequente a razão. Assim, pois, dividindo na progressão por quociente o 1º termo 1 por 10, vem 0,1; dividindo por 10, vem 0,01 etc.; e na progressão por differença, subtrahindo ao termo zero a razão, vem: —1; e subtrahindo a este termo a razão vem: —2, etc., E' portanto facil prolongar indefinidamente as duas progressões tanto para a direita como para a esquerda, acceitando a convenção do signal— para indicar a impossibilidade de praticar-se a subtracção, quando o minuendo é menor do que o subtrahendo e então, completando as duas progressões fundamentaes do systema de Briggs, vem:

÷÷..... 0,001:0,01:0,1:1:10:100:1000:........
÷..... —3.—2.—1 0. 1. 2. 3.........

Analysando estas duas progressões vemos que ellas compõem-se de duas partes a contar dos termos 1 e 0; a 1ª parte, para a direita, contem todos os numeros inteiros e seus logarithmos desde zero até o infinito; a 2ª parte, para a esquerda, contem as fracções e seus logarithmos. Além disso, vemos que o logarithmo de 1 é 0; que o logarithmo de 10 é 1, que o logarithmo de 100 é 2; isto é, que *o logarithmo da unidade seguida de zeros é um numero inteiro composto de tantas unidades quantos são os zeros;* que o logarithmo de qualquer numero comprehendido entre 1 e 10 é um numero comprehendido entre zero e 1, ou uma fracção; que o logarithmo de um numero comprehendido entre 10 e 100, é um numero comprehendido entre 1 e 2, isto é, 1 mais uma fracção, etc., A esta parte inteira do logarithmo dá-se o nome de *caracteristica*, porque ella designa a ordem das mais altas unidades do numero correspondente, e, segundo a comparação que acabamos de fazer, resulta que: *a caracteristica de um logarithmo tem tantas unidades quantos são os algarismos inteiros do numero correspondente, menos um;* isto é, se o numero tiver dous algarismos na parte inteira, o seu logarithmo terá 1 para caracteristica, porque o logarithmo de 10 é 1, se tiver tres, o seu logarithmo terá 2 para caracteristica, porque o logarithmo de 100 é 2, etc.

Extendendo-se esta analyse á parte á esquerda dos termos

1 e 0 das duas progressões fundamentaes, vemos que o logarithmo da fracção 0,1 é—1, da fracção 0,01 é—2, da fracção 0.001 é—3, etc., d'onde se conclue que *os logarithmos das fracções são os mesmos logarithmos dos numeros inteiros maiores que a unidade o mesmo numero de vezes que ellas exprimem partes menores que ella, precedidos do signal menos*; por exemplo: o log. de 10 é 1; o log. de 0,1 é—1; o log. de 100 é 2 o log. de 0,01 é—2, etc.,

1.ª *Propriedade.—O logarithmo de um producto é igual á somma dos logarithmos dos factores.*

Para demonstrar este theorema elementarmente e de modo geral, principiemos pelo caso mais simples, o de dous factores, para depois passar a um maior numero d'elles.

Demonstração do 1º *caso.*—Sejão a e b os dous factores, e insira-se entre todos os termos consecutivos da progressão por quociente tantos meios proporcionaes quantos sejão precisos para que se encontrem entre elles os factores suppostos a e b, exactamente ou com grande approximação; e insira-se tambem igual numero de meios differenciaes entre os termos consecutivos da progressão por differença. Em virtude da definição, os termos desta ultima progressão que corresponderem aos factores a e b, serão os seus logarithmos; e chamando x um termo qualquer da 1ª progressão, o qual diste tanto de b quanto a dista de 1, em consequencia da 3ª propriedade das progressões por quociente, temos: $1 : a :: b : x$; d'onde $x=ab$, e tomando na 2ª progressão os termos 0, lg. a, lg. b, lg. x, correspondentes aos termos da 1ª em consequencia tambem da 3ª propriedade das progressões por differença resulta:

0. lg. a: lg. b. lg. x; d'onde lg. x=lg. a+lg. b; e substituindo no 1º membro destá igualdade por x o seu valor dado pela 1ª proporção, vem: lg. ab=lg. a+lg. b como se queria demonstrar.

Demonstração do 2º *caso.*—Sejão primeiramente os tres factores a, b, c. Decompondo o producto abc em dous factores um dos quaes seja ab e outro c, vem lg. (abc)= lg. (ab)=lg. (c); e como lg. (ab)+lg. a+lg. b, segue-se que: lg. (abc)=ig. a+lg. b+lg. c. Sejão agora os quatro factores a, b, c, d. Decompondo o producto $abcd$ em dous factores um dos quaes seja abc e o outro d, vem: lg. $(abcd)$=

$=$lg. $abc+$lg. d; e como acabamos de ver que lg. $(abc)=$
$=$lg. $a+$lg. $b+$lg. c, segue-se que:

$$\text{lg.}\,(abcd)=\text{lg.}\,a+\text{lg.}\,b+\text{lg.}\,c+\text{lg.}\,d$$

E assim successivamente reproduzindo este mesmo raciocinio, extenderiamos esta demonstração a qualquer numero de factores.

2.ª *Propriedade.—O logarithmo de um quociente é igual ao logarithmo do dividendo menos o logarithmo do divisor.*

Demontraçao.— Seja a o dividendo, b o divisor, e q o quociente; isto é, $q=\frac{a}{b}$. Estabelecendo o principio de que o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente, ou o que é o mesmo, multiplicando ambos os membros desta igualdade por b, vem $bq=a$. Se estas quantidades são iguaes, os seus logarithmos tomados no mesmo systema tambem o serão; donde lg. $bq=$lg. a; porém lg. $bq=$lg. $b+$lg, q; logo lg. $b+$lg. $q=$lg. a. Subtrahindo a ambos os membros desta igualdade a quantidade lg. b vem: lg. $q=$lg. $a-$lg. b como se queria demonstrar.

3.ª *Propriedade.– O logarithmo de uma potencia qualquer de um numero é igual ao expoente da potencia multiplicado pelo logarithmo do numero.*

Demonstraçao.— Como a potencia é um producto de factores iguaes, segue-se que sendo a o numero do qual se quer formar a 2ª, 3ª, etc., ou uma potencia qualquer teremos:

$$\text{lg.}\,a^2=\text{lg.}\,(a\times a)=\text{lg.}\,a+\text{lg}\,\,a=2\,\text{lg.}\,a.$$
$$\text{lg.}\,a^3=\text{lg.}\,(a\times a\times a)=\text{lg.}\,a+\text{lg.}\,a+\text{lg.}\,a=3\,\text{lg.}\,a.$$

. . . .

e lg. $a^m=$lg. $(a.\ a.\ a.\ .\ .\ .\ .)=$lg. $a.+$lg. $a.+$lg. a.....
. . . $=m$ lg. a, que é o que se queria demonstrar.

4.ª *Propriedade.— O logarithmo da raiz de um gráo qualquer de um numero é igual ao logarithmo do numero dividido pelo indice do radical.*

Demonstração.— Seja a o numero cuja raiz do gráo m se quer extrahir, e seja b essa raiz; isto é, $\sqrt[m]{a}=b$. Elevando os membros dessa igualdade á potencia m, vem: $a=b^m$. Se estas quantidades forem iguaes, os seus logarithmos tambem o serão: d'onde lg. $a=$lg. b^m; porém lg. $b^m=m$ lg. b (porque o logarithmo de uma potencia é igual ao expoente da potencia multiplicado pelo logarithmo da quantidade); logo, substituindo, vem : lg. $a = m$. lg. b. Dividindo agora ambos os membros desta igualdade por m, vem : $\frac{\text{lg. } a}{\text{m}} = \text{lg. } b$; e substituindo por b o seu valor que é $\sqrt[\text{m}]{a}$, obtem-se : $\frac{\text{lg. } a}{m} =$ $= \log. \sqrt[\text{m}]{a}$; resultado este que traduzido em linguagem ordinaria ensina-nos que o logarithmo de $\sqrt[m]{a}$ ou de uma raiz qualquer, é igual ao logarithmo da quantidade, que é a dividido pelo indice do radical, que é m como se queria demonstrar.

Observação.— As quatro propriedades demonstradas encerrão em si um fim e utilidade da invenção dos logarithmos, que é reduzir as operações de arithmetica a operação mais simples ; isto é, a multiplicação á addicção ; a divisão á subtração ; a formação de uma potencia, á multiplicação; e a extracção de uma raiz, a uma divisão ; e é facil de vêr que o facto de log. 1 ser sempre igual a zero é uma consequencia essencial á deducção dessas propriedades. Mas para que se possão applicar taes propriedades ha necessidade de taboas que contenhão de um lado os numeros, e do outro os seus logarithmos ; e como do systema de duas progressões é que fizemos originar os logarithmos, é tambem dessas mesmas progressões que devemos originar semelhantes taboas.

N'um systema de duas progressões que estejão nas condições da definição, verifica se qualquer das propriedades demonstradas. Sejão por exemplo as progressões.

$$\begin{array}{l} \div\!\div\ 1 : 4 : 16 : 64 : 256 : 1024 : \text{etc.} \\ \div\ 0 .\ 3 .\ 6 .\ 9 .\ 12 .\ 15 .\ \text{etc.} \end{array}$$

O producto de 16 por 64 é 1024 ; o log. de 16 é 6 ; o log, de 64 é 9 ; e a somma dos logarithmos dos dous factores 16 e 64 é 6+9 ou 15, que é o logarithmo do producto.

E d'aqui se conclue que havendo as taboas acima mencionadas, poupar-nos-hemos ao trabalho de multiplicar 16 por 64, desde que buscarmos nas taboas os logarithmos dos dous factores, sommarmo-los, e entrando com esta somma 15 nas mesmas taboas, procurarmos o numero correspondente, que é 1024, ou o producto pedido. Do mesmo modo se verifica qualquer outra propriedade.

Taboa dos logarithmos.

Taboa dos logarithmos é uma tabella contendo em uma columna os numerss inteiros em serie natural desde 1 até um certo limite, e em uma ou mais columnas á direita o logarithmo correspondente. Entre todas as taboas construidas a mais extensa é a de Callet que abrange os logarithmos dos numeros desde 1 até 108 000, e por isso só a ellas nos referiremos, mesmo porque é adoptada em todos os cursos, quer particulares quer academicos. Nas taboas só se encontrão os logarithmos dos numeros inteiros, visto como todas as operações sobre numeros de qualquer especie se reduzem em ultima analyse ao calculo dos numeros inteiros; demais só se acha ahi calculada a parte fraccionaria do logarithmo, porque a parte inteira ou caracteristica é determinada *à priori* pela regra anteriormente estabelecida.

Mesmo com os conhecimentos elementares que temos, apezar de não ser esse o meio seguido nem o mais expedito para esse fim, se póde construir uma taboa de logarithmos. Para isso imagine-se que, entre os termos consecutivos das progressões fundamentaes, isto é, entre 1 e 10, 10 e e 100, 100 e 1000, etc., se insira tantos meios proporcionaes quantos sejão precisos para que se encontrem os numeros 2, 3, 4...... 9, 11, 12...... 99, 100, 101, 102...... 999, etc., ou outros tão proximos que possão ser tomados sem erro sensivel; e que depois se insirão entre 0 e 1, 1 e 2, 2 e 3, etc., o mesmo numero de meios differenciaes. Então em virtude do que se acha estabelecido, os termos da nova progressão por differença serão respectivamente os logarithmos dos termos da nova progressão por quociente. Dispõe-se em uma columna todos os numeros inteiros consecutivos, e em uma ou mais columnas á direita os seus logarithmos.

Taboa de Callet.

Nas cinco primeiras paginas desta taboa com o titulo de Chiliade 1ª se achão os logarithmos dos numeros naturaes desde 1 até 1.200 avaliados com oito algarismos decimaes, do modo seguinte: na columna denominada *N* se achão os numeros, e na columna intitulada *log.*, os logarithmos. D'ahi em diante as taboas tomão outra disposição, e dão os logarithmos de numeros desde 1,200 até 100,000 calculados com sete algarismos decimaes; e de 100,000 até 108,000 os logarithmos são como no começo das taboas, calculados com oito algarismos decimaes. Depois da 1ª Chiliade, a columna N contém todos os numeros de 1020 até 108,000, e a columna seguinte intitulada O contém os logarithmos correspondentes, Nesta columna os numeros isolados de tres algarismos que se achão á sua esquerda são considerados como escriptos uns debaixo dos outros de maneira a completar todas as linhas; nas columnas intituladas 1, 2, 3... 9, se achão numeros de quatro algarismos, que estão na mesma linha horizontal com os numeros da columna N; esses numeros substituidos aos outros tambem de quatro algarismos que se achão á direita da columna O, são os logarithmos dos numeros da columna N, seguidos do algarismo que serve de titulo á columna vertical considerada.

Finalmente, ha umas ultimas columnas intituladas *diff.*, que quer dizer differenca, cada uma das quaes se compõe de um numero isolado, situado no seu alto e que se chama differença tabular; esses numeros isolados são as differenças dos logarithmos de dous numeros inteiros consecutivos. A' esquerda do traço vertical que está debaixo desse numero se achão os numeros 1, 2, 3.... 9, e á direita os productos da differença por 0,1; 0,2; 0,3.... e 0,9.

Usos das taboas de logarithmos.

Para se poder applicar os logarithmos ás questões numericas é necessario saber-se resolver os dous problemas seguintes: 1.º *Dado um numero, determinar o seu logarithmo;* 2.º *Dado o logarithmo de um numero, determinar esse numero.*

1.º PROBLEMA

1.º *Caso* —Se o numero for menor que 1200 será encontrado na 1ª Chiliade entre os numeros naturaes de uma das columnas N; e o numero que se achar á direita sobre a mesma linha e na columna seguinte intitulada *log.*, será o seu logarithmo, tendo-se-lhe préviamente juntado a caracteristica conveniente. Exemplo:

$$\text{Log. } 1199 = 3{,}07881918.$$

3.º *Caso.*—Se o numero fôr maior que 1200 e tiver quatro algarismos significativos, deve ser procurado na taboa que se acha depois da 1ª Chiliade, e tendo sido encontrado na columna *N*, consultar-se-ha depois a columna *O*. Se nessa columna, no mesmo alinhamento, forem encontrados sete algarismos, ter-se-ha immediatamente a parte decimal do logarithmo procurado; porém se só forem encontrados quatro, buscar-se-ha, subindo o espaço em branco, os tres primeiros algarismos isolados, em seguida aos quaes escrevendo os quatro primeiramente achados, obter-se hão os sete algarismos decimaes do logarithmo pedido. Exemplo:

Log. 5998=3,7780055; log. 6739=3,8285955.

3.º *Caso.*—Se o numero fôr representado por 5 algarismos, faz-se por um instante abstracção do ultimo, e procura-se o logarithmo do numero expresso pelos 4 restantes á esquerda; tomão-se desse logarithmo unicamente os 3 primeiros da columna O, e procurão-se os 4 ultimos na columna indicada pelo algarismo abstrahido e no mesmo alinhamento em que se acha o numero representado pelos 4 algarismos á esquerda. Exemplo: log. 51087=4,7083104.

4.º *Caso.*— Se o numero fôr composto de 6 ou mais algarismos, separão-se os 5 algarismos á esquerda, e busca-se o logarithmo do numero representado por esses 5 algarismos, multiplica-se a parte decimal que resulta da separação dos 5 primeiros algarismos, pela differença tabular, e junta-se a parte inteira desse producto ao logarithmo achado. Exemplo: Seja proposto determinar o logarithmo do numero 34678267. Separando os 5 algarismos á esquerda, vem: 34678,267; busca-se agora a parte decimal do logarithmo de 34678; qne é o proximamente menor, e vem: 0,5398035; multiplica-se a differença tabular 125 por 0,267, e vem o producto 33,375, que é o accrescimo do logarithmo correspondente a 0,267, e junta-se a parte inteira 33 ao logarithmo 0,5390546, e resulta: log. 34678267=7,5390573.

5.º *Caso.*—Obtido o logarithmo de um numero inteiro qualquer, obtem-se o logarithmo de um numero 10, 100, 1000, etc., vezes maior, juntando 1, 2, 3, etc. unidades á caracteristica; porque supponde que log. *a* é o logarithmo conhecido.

$$\begin{array}{l}
\log.\ a \times 10 = \log.\ a + \log.\ 10 = \log.\ a + 1\\
\log.\ a \times 100 = \log.\ a + \log.\ 100 = \log.\ a + 2\\
\log.\ a \times 1000 = \log.\ a + \log.\ 1000 = \log.\ a + 3\\
\text{etc.}
\end{array}$$

E vice-versa: obtido o logarithmo de um numero inteiro qualquer, obtem-se o logarithmo de um numero 10, 100, 1000, etc. vezes menor, subtrahindo 7, 2, 3, etc. unidades á caracteristica do logarithmo conhecido; porque suppondo que log. a é o logarithmo proposto.

$$\begin{array}{l}
\log.\ \frac{a}{10} = \log.\ a - \log.\ 10 \ \ = \log.\ a - 1\\
\log.\ \frac{a}{100} = \log.\ a - \log.\ 100 \ = \log.\ a - 2\\
\log.\ \frac{a}{1000} = \log\ a - \log.\ 1000 = \log.\ a - 3\\
\text{etc.}
\end{array}$$

Exemplo:

$$\begin{array}{l}
\log.\ 1199 = 3{,}07881918\\
\log.\ 1199000 = 6{,}07881918\\
\log.\ 11{,}99 = 1{,}07881918\\
\log.\ 1{,}198 = 0{,}07881918\\
\text{etc.}
\end{array}$$

Isto quer dizer que os logarithmos dos numeros décuplos e subdécuplos tem sempre a mesma parte decimal, e só varião na caracteristica.

6.º *Caso.*—Se o nnmero proposto fôr uma fracção ordinaria, obtem-se o seu logarithmo *subtrahindo do logarithmo do denominador o logarithmo do numerador, e dando ao resto o signal menos*; porque, evidentemente, qualquer fracção ordinaria é igual á unidade dividida pela mesma fracção invertida; isto é, se chamarmos $\frac{a}{b}$ a fracção proposta, $\frac{a}{b} = 1 \div \frac{b}{a}$. Se estas quantidades são iguaes os seus logarithmos tambem o serão; d'onde $\log.\ \frac{a}{b} = \log.\ 1 - \log.\ \frac{b}{a}$ e como $\log.\ 1 = 0$, segue-se que

$$\log.\ \frac{a}{b} = -\log.\ \frac{b}{a} = -(\log.\ b - \log.\ a.)$$

Isto posto seja $\frac{31}{47}$ a fracção da qual procuramos o logarithmo. Applicando a ella o principio que acabamos de demonstrar em geral, vem: $\log.\frac{31}{47} = (\log.\ 47 - \log.\ 31) = -(1{,}6720979 - 1{,}4913617) = -0{,}1807362.$

7.º *Caso.*—Se, finalmente, o numero dado fôr uma fracção decimal, determina se o seu logarithmo *fazendo abstracção da virgula, buscando nas taboas o logarithmo do numero resultante, subtrahindo esse logarithmo de tantas unidades quantas forem as casas decimaes da fracção proposta, e dando ao resto o signal menos*, porque, sendo 0,0392 a fracção proposta, convertendo-a em fracção ordinaria, resulta.

$$0{,}0392 = \frac{392}{10000}$$

e por consequencia

$$\log.\ 0{,}0392 = -(\log.\ 10000 - \log.\ 392) =$$
$$= -(4 - 2{,}5932861) = -1{,}4067139.$$

2º PROBLEMA

1.º *Caso.*—Se o logarithmo se achar entre os da 1ª Chiliade, ter-se-ha immediatamente o numero correspondente, que será encontrado na columna *N* immediatamente precedente áquella que contém o logarithmo dado, e no alinhamento deste logarithmo.

Exemplo: 0,30103000=log. 2.

2.º *Caso.*—Se o logarithmo proposto não fôr encontrado na 1ª Chiliade, buscão se os tres primeiros algarismos decimaes deste logarithmo entre os numeros isolados que se encontrão na columna *O* da 2ª taboa, e depois os quatro ultimos entre os numeros de quatro algarismos que estão nessa mesma columna descendo, e o numero da columna *N* correspondente aos quatro ultimos algarismos encontrados será o numero procurado.

Exemplo: 5,5384481=log. 3455.

3.º *Caso.*—Se se não encontrar na columna *O* os quatro ultimos algarismos do logarithmo proposto, para-se naquelles que exprimirem um numero proximamente menor, e depois segue-se dahi para a direita sempre na mesma linha horizontal até que nessa linha sejão encontrados os quatro ultimos algarismos procurados ; o algarismo que denotar a columna onde se acharem os quatro ultimos algarismos será escripto á direita do numero que na columna *N* estiver no mesmo alinhamento, e ter-se-ha assim o numero correspondente ao logarithmo dado.

Exemplo: 4,5178159=log. 32947.

4.º *Caso.*—Se o logarithmo dado não se achar nas taboas, procura-se o logarithmo proximamente menor e o proximamente maior, e ao mesmo tempo os numeros correspondentes ; toma-se a differença entre o logarithmo proposto e o proximamente menor, e tambem a differença entre o logarithmo maior e menor ; divide-se a 1ª differença pela 2ª, junta-se o quociente obtido ao numero correspondente ao logarithmo immediatamente inferior ao logarithmo dado, e tem-se os algarismos significativos do numero procurado ; depois do que, attendendo á caracteristica do logarithmo proposto, se determina o numero de algarismos inteiros que o numero achado contém. Exemplo : Proponha se achar o numero correspondente ao logarithmo 2,4674325. Acha-se nas taboas o logarithmo proximamente menor 4674305, que chamaremos l, e o proximamente maior 4674453, que chamaremos l', e chamando L o logarithmo proposto, vem :

$$L-l=2,4674325-2,4674305=20.$$
$$l'-l=2,4674453-2,4674305=148.$$

$$\begin{array}{r|l} 200 & 148 \\ \hline .520 & 0.135 \\ .760 & \\ .27 & \end{array}$$

Juntando agora 0,135 a 29338, numero correspondente ao logarithmo immediatamente inferior ao logarithmo dado, teremos os algarismos significativos 29338135 ; e como a caracteristica do logarithmo proposto é 2, segue-se que ha 3 algarismos inteiros no numero correspondente, que conseguintemente será : 293,38135.

Observação.—Empregando-se a columna das differenças, toma-se o logarithmo 2,4674305 proximamente menor ao logarithmo dado, e ao mesmo tempo o numero 29338 correspondente a esse logarithmo ; a differença dos dous logarithmos dá um resto 20 ; procura-se na taboa *diff.* mais proxima e na columna á direita do risco o numero immediatamente inferior a 20, e acha-se 15 que corresponde a 1; diminue-se 15 de 20, e dá 5 de resto, que multiplicado por 10 produz 50 : procura-se de novo na mesma columna á direita o numero mais proximo de 50, e acha-se 44, que corresponde a 3 : diminue-se 44 de 50, e resta 6, que multiplicado por 10 dá 60 ; procura-se o numero mais proximo de 60 e acha-se 59, que corresponde a 4. Escrevendo em seguida aos cinco primeiros algarismos obtidos os algarismos 1, 3, 4, que acabamos de achar na taboa das differenças, e tendo em vista a caracteristica, obtem-se o numero 293,38134, correspondente ao logarithmo dado.

Temos até aqui tratado dos logarithmos positivos ; porém se o logarithmo proposto fôr negativo, segundo o que se acha estabelecido ácerca da theoria de logarithmos, devemos ter a certeza de que esse logarithmo corresponde a uma fracção ordinaria ou decimal ; de sorte que, a respeito desta especie, podem ser propostas duas questões: *dado um logarithmo negativo, achar a fracção ordinaria correspondente*; e *dado um logarithmo negativo, achar a fracção decimal correspondente*. Estas questões vão ser resolvidas nos dous casos seguintes :

5.º *Caso.*—Se o logarithmo fôr negativo, obtem-se a fracção ordinaria correspondente, *prescindindo do signal menos, procurando nas taboas o numero correspondente, e dividindo por elle a unidade ;* porque, se—0.8207333 fôr o logarithmo proposto, prescindindo do signal, e entrando com este logarithmo nas taboas, obtem se o numero 6,6181; porém, evidentemente—0,8207333=0—0,8207333 ; e como 0 é o logarithmo de 1, e 0, 8207333 é o logarithmo de 6,6181, segue-se que :

$$-0{,}8207333 = \text{log. } 1 - \text{log. } 6{,}6181.$$

Porém a differença dos dous logarithmos é o logarithmo de um quociente cujo dividendo é o minuendo, e cujo divisor é o subtrahendo ; logo :

$$-0{,}8207333 = \text{log.} \frac{1}{6{,}6181} = \text{log.} \frac{10000}{66181}.$$

6.º *caso.*—Se o logarithmo fôr negativo, obtem-se a fracção decimal correspondente, *subtrahindo este logarithmo de qualquer numero inteiro a elle superior, levando o resto ás taboas para achar o numero correspondente, e jogando depois com a virgula tantas casas para a esquerda quantas são as unidades do numero do qual se subtrahio o logarithmo proposto ;* porque se o logarithmo dado fôr—1,4067139, evidentemente elle equivale a esta expressão:

$$0-1,4067139.$$

Juntando ao minuendo o numero 2, que é de quanto supponho que se subtrahe o logarithmo proposto, vem:

$$2-1,4067139=0,5932861.$$

Porém 0,5932861=log. 3,92.

E como o logarithmo 0,5932861 está augmentado de duas unidades, segue-se que o numero 3,92, que lhe corresponde, está 100 vezes maior que o verdadeiro ou correspondente ao logarithmo proposto ; e, para que elle seja o verdadeiro, é preciso dividi-lo por 100 ; o que se faz jogando com a virgula duas casas para a esquerda, isto é, tantas quantas forão as unidades do numero do qual se subtrahio o logarithmo proposto. Fazendo isto, vem:

$$-1,4067139=\text{log. } 0,0392$$

OUTRO EXEMPLO

Seja—3,5897622 o logarithmo do qual procuramos o numero correspondente. Subtrahindo o de qualquer numero inteiro maior do que elle, por exemplo 4; vem: 4—3,5897622==0,4102378 ; entrando com esta differença nas taboas achamos para o numero correspondente ao nosso logarithmo modificado, 2,5718 ; e, finalmente attendendo que este numero obtido está 10000 vezes maior do que o verdadeiro numero correspondente ao logarithmo proposto, visto como tinhamos augmentado de 4 unidades o dito logarithmo, por tê-lo subtrahido do numero 4, jogão-se com a virgula quatro casas para a esquerda, vem:

$$-3,5897622=\text{log. } 0,00025718$$

Complementos arithmeticos

Para que se possão reduzir, tanto quanto seja possivel, as operações numericas a meras addições, costuma-se a substituir aos logarithmos affectados do signal menos o complemento do logarithmo, ou, o que ainda é mais usado, o seu complemento arithmetico.

Complemento do logarithmo de um numero e o logarithmo do reciproco desse numero. Dous numeros se dizem reciprocos um do outro, quando elles multiplicados entre si dão para producto a unidade. Assim os numeros 3 e $\frac{1}{3}$ são reciprocos, porque multiplicados produzem o resultado $\frac{3}{3}$ que é igual a 1; e por consequencia, em virtude da definição, o complemento do logarithmo de um vem a ser o logarithmo do outro. Ora, o $\log.\frac{1}{3}=-\log.\,3$, e comp. log. $\frac{1}{3}=\log.\,3$; d'onde resulta que, sempre que tivermos um logarithmo negativo, podemos substituir-lhe o seu complemento, e teremos:

$$\log.\frac{a}{b}=\log.\,a-\log.\,b=\log.\,a+\text{comp. log. }b.$$

Complemento arithmetico de um logarithmo é o que falta a esse logarithmo para completar 10 *unidades ou é a differença desse logarithmo para* 10, isto é designando o complemento arithmetico pelas letras $C\ L$ antepostas á designação lg. $C\ L$ lg. $32199=C\ \ L\ 4{,}5078424=$ $=10-4{,}5078424=5{,}4921576$. D'onde se conclue, pela analyse feita sobre a subtracção effectuada, a seguinte regra para obter-se o complemento arithmetico de um logarithmo: *Subtrahe-se de nove cada algarismo da fracção decimal do logarithmo em questão, excepto o ultimo á direita, que se subtrahe de* 10.

EXEMPLOS

Log. $8=0{,}9030900$. $C\ L$. log. $8=9{,}0969100$.
Log. $54321=4{,}7349678$. $C\ L$. log. $54321=5{,}2650322$.
Log. $1000=3{,}0000000$. $C\ L$. log. $1000=7{,}0000000$.

E se attendermos que um logarithmo qualquer affectado do signal menos póde ser sempre representado pela differença entre zero é o mesmo logarithmo, por exemplo $-L=$ $=0-L$, e que juntando-se ao minuendo 10 unidades, esta differença se torna igual a $10-L$, e que a differença $10-L$ equivale á differença $0-L$ ou $-L$ augmentada de dez unidades (porque augmentar o minuendo é augmentar a differença), se concluirá que, quando se subtrahe o logarithmo proposto de 10 unidades como manda a regra para formação do complemento arithmetico do mesmo logarithmo, tem-se augmentado 10 unidades á differença que póde sempre representar o logarithmo negativo, e conseguintemente para que haja compensação é preciso que *por cada complemento arithmetico que se juntar a um certo resultado, se subtraia uma dezena ao mesmo resultado.*

APPLICAÇÃO

Supponhamos que queriamos determinar por logarithmos o 4º termo da proporção

$$29\times69\times154:37\times49::17\times175:x=\frac{37\times49\times17\times175}{29\times69\times154}$$

Applicando os logarithmos, vem:

$$\log.x=\log.37+\log.49+\log.17+\log.175-\log 29-\log.69-\log.154=\log.37+$$
$$+\log.49+\log.17+\log.175+CL\log.29+CL\log.69+CL\log.154-30.$$

Praticando as operações segundo as regras expendidas, dispõe-se o culculo do modo seguinte:

$$\begin{array}{rr}
\log. & 37=1,5682017\\
\log. & 49=1,6901961\\
\log. & 17=1,2304489\\
\log. & 175=2,2430381\\
CL\ \log. & 29=8,5376020\\
CL\ \log. & 69=8,1611509\\
CL\ \log. & 154=7,8124793\\
\hline
 & 3)1,2431170
\end{array}$$

Por consequencia log. $x=1,2431170$. E entrando com este logarithmo nas taboas segundo as regras estabelecidas, vem:

$$x=17,5032$$

OUTRA APPLICAÇÃO

Se se quizesse inserir entre dous numeros dados qualquer numero de meios proporcionaes, por exemplo, 25 meios entre 3 e 4, applicando a fórmula geral da razão, que é $r=\sqrt{\frac{a}{l}}$, a este caso particular, vem: $r=\sqrt{\frac{4}{3}}$

D'onde log. $r=\log.\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{\log.\ 4-\log.\ 3}{26}=\frac{0,6020600-0,4771212}{26}=$
$=0,0048053$.

E procurando nas taboas o numero correspondente a este logarithmo, vem: $r=1,011126$.