DECIMA PARTE

CAPITULO XI

Theoria das Progressões

Progressão em geral é uma serie de termos, que crescem ou decrescem n'uma razão constante. Ha duas especies de progressões: progressão por differença, e progressão por quociente. *Progressão por differença é uma serie em que cada termo excede o seu antecedente ou é por elle excedido de um numero constante. Progressão por quociente é uma serie em que cada termo contem o seu antecedente, ou é por elle contido de um numero constante.* As progressões quer por differença, quer por quociente, ou são crescentes ou decrescentes. *Progressões crescentes são aquellas em que qualquer consequente é maior que o seu antecedente; e progressões decrescentes são aquellas em que qualquer consequente é menor que o seu antecedente.* Por exemplo ÷2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. etc., é uma progressão por differença crescente; e ÷ 32. 28. 24. 20. 16, etc., é uma progressão por differença decrescente. Na 1ª, a razão é 3, que é o excesso de qualquer termo sobre o precedente; d'onde resulta que nas progressões por differença crescentes se passa de um termo para o seguinte, juntando ao precedente a razão, e que o caracteristico destas progressões é terem a razão positiva. Na 2ª, a razão é 4, que é o excesso de cada antecedente sobre o consequente: d'onde resulta que nas progressões por differença decrescentes se passa de um termo para o seguinte, subtrahindo ao precedente a razão, e que o caracteristico destas progressões é terem a razão negativa.

$\div 2:6:18:54:162:$etc., é uma progressão por quociente crescente, cuja razão é 3, que é o quociente de qualquer termo pelo precedente. $\div 12:6:3:\frac{3}{2}:$ etc., é uma progressão por quociente decrescente, cuja razão é $\frac{1}{2}$, que ainda se avalia dividindo qualquer consequente pelo seu antecedente; e então vem: $\frac{6}{12}$, $\frac{3}{6}$, etc., fracções estas que simplicadas produzem $\frac{1}{2}$. D'aqui se deprehende que nas progressões por quociente, tanto crescentes, como decrescentes, se passa de um termo para o seguinte, multiplicando o antecedente pela razão, e que o caracteristico destas progressões é que para as crescentes a razão é um numero inteiro, e para as decrescentes a razão é uma fracção.

Progressões por differença

1.ª *Propriedade.— Um termo qualquer de uma progressão por differença é igual ao 1º, mais ou menos a razão multiplicada pelo numero de termos precedentes.*

Demonstração.—Seja em geral a progressão por differença $\div a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.$ *etc.*, e seja r a razão. Em virtude da noção que já temos de progressão por differença, isto é, que um termo qualquer é igual ao precedente, mais ou menos a razão, conforme a progressão for crescente ou decrescente, segue-se que:

2.º termo $b=a\pm r$
3.º » $c=b\pm r=a\pm r\ \pm r=a\pm 2r=a\pm r\ (3\text{-}1)$
4.º » $d=c\pm r=a\pm 2r\pm r=a\pm 3r=a\pm r\ (4\text{-}1)$
5.º » $e=d\pm r=a\pm 3r\pm r=a\pm 4r=a\pm r\ (5\text{-}1)$
etc. etc.

Analysando estes resultados, vemos que o 2º termo é igual ao 1º, mais ou menos a razão que se subtende multiplicada por 1, ou 2—1, que é o numero de termos precedentes ao 2º; o 3º termo é igual ao 1º, mais ou menos a razão multiplicada por 3—1, que é o numero de termos precedentes ao 3º, etc.; e por analogia suppondo l um termo qualquer, e que n é o numero de termos comprehendidos desde o 1º até ao ultimo, $n-1$ será o numero de termos precedentes a l, e portanto $l=a\pm r(n-1)$; formula esta que, traduzida em linguagem ordinaria, dá o principio que se queria demonstrar.

APPLICAÇÃO

A propriedade demonstrada resolve o seguinte problema: dados o 1º termo e a razão, achar um termo qualquer da progressão por differença.

Solução.—Se o 1º termo for 4, e a razão 2, pedindo-se o 20º termo, faremos applicação da fórmula geral, que para o caso particular de que se trata, é l=ao valor numerico do 20º termo, $a=4$, $r=2$ e $n=20$, por conseguinte $n-1=19$, logo $l=4+2\times19=4\times38=42$, que é o valor numerico do 20º termo procurado.

Corollario.—Da fórmula que traduz a propriedade acima demonstrada, se acha o valor da razão, quer para o caso da progressão ser crescente, quer para o caso della ser decrescente. Para o primeiro caso a fórmula é $l=a+r\ (n-1)$; e subtrahindo a ambos os membros desta igualdade a quantidade a, vem: $l-a=r\ (n-1)$; dividindo ambos os membros desta igualdade por $n-1$, vem: $\frac{l-a}{n-1}=r$.

E como n é o numero total dos termos desde a até l, e esse numero é evidentemente igual ao numero de termos médios mais os dous extremos, segue-se que, representando por m o numero de termos médios, $n=m+2$, e conseguintemente subtrahindo a unidade a ambos os membros desta igualdade, resulta: $n-1=m+2-1=m+1$; por consequencia, substituindo no valor de r, vem $r=\frac{l-a}{m+1}$; resultado que se traduz no seguinte principio: *A razão de uma progressão por differença crescente é igual ao ultimo termo menos o 1º, dividido pelo numero de meios* *mais um*. Para o 2º caso, a fórmula é $l=a-r\,(n-1)$. Subtrahindo a ambos os membros desta igualdade a quantidade a, vem: $l-a=r\,(n-1)$; trocando o signal a ambos os membros desta igualdade, o que não altera, porque equivale a multiplicar por -1, vem: $a-l=r\,(n-1)$. Dividindo ambos os membros por $n-1$, vem: $\frac{a-l}{n-1}=r$; substituindo por $n-1$ o seu valor $m+1$ vem $\frac{a-l}{m+1}=r$; resultado que se traduz do seguinte modo: *a razão de uma progressão por differença decrescente é igual ao primeiro termo menos o ultimo, dividido pelo numero de termos médios mais um.*

APPLICAÇÃO

As duas fórmulas acima estabelecidas para o valor de razão resolvem o seguinte problema: dados dous termos de uma progressão por differença e o numero dos intermedios, formar a progressão. E' a isto que se chama *inserir meios differenciaes entre dous numeros dados.*

Solução.—Sejão 2 e 29 os dous termos dados. Pede-se que entre elles se insirão 35 meios differenciaes.

Como a progressão deve ser crescente, porque o ultimo termo é maior do que o primeiro, segue-se que $r=\frac{29-2}{35+1}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$. E então qualquer termo sendo igual ao antecedente mais a razão, resulta que o valor numerico do 2º termo $=2+\frac{3}{4}$; o do 3º termo $=2+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=2+\frac{6}{4}=3\frac{2}{4}=3\frac{1}{2}$; o do 4º termo $=3+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=3\frac{5}{4}=4\frac{1}{4}$, etc, e por consequencia a progressão pedida é a seguinte $\div$ 2. $2\frac{3}{4}$. $3\frac{2}{4}$. $4\frac{1}{4}$. 5. $5\frac{3}{4}$. $6\frac{2}{4}$. $7\frac{1}{4}$. 8. $8\frac{3}{4}$. $9\frac{2}{4}$. $10\frac{1}{4}$. etc. . . . . .29.

Do mesmo modo se resolve o problema para o caso de ser a progressão decrescente, comtanto que se attenda ao valor da razão, e que nas progressões por differença decrescentes passe-se de um termo para o seguinte, subtrahindo a esse termo a mesma razão.

2.ª Propriedade.—Inserindo-se entre todos os termos consecutivos de uma progressão por differença o mesmo numero de meios differenciaes, as progressões parciaes assim formadas constituem uma só progressão.

Demonstração.—Seja, por exemplo, a progressão por differença ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11., etc., e supponhamos que entre todos os termos consecutivos, isto é, entre 1 e 3, 3 e 5, 5 e 7, etc., se insiram 10 meios differenciaes; a razão para cada uma das progressões parciaes será: $r=\frac{3-1}{11}=\frac{2}{11}$; $r=\frac{5-3}{11}=\frac{2}{11}$; $r=\frac{7-5}{11}=\frac{2}{11}$, etc., razão esta que é constante, porque é constante a differença entre os termos da progressão primitiva e constante tambem o numero de meios inseridos; e como se achão ligadas entre si, porque o ultimo termo de cada uma é o primeiro da seguinte, segue-se que ellas formão uma só progressão, como se queria demonstrar.

3.ª Propriedade.—Em toda a progressão por differença quatro termos tomados de modo que sejão dous a dous equidistantes entre si, formão equidifferença.

Demonstração.—Sejão a e d os extremos; b e c os intermedios, e supponhamos que b dista tanto de a quanto c dista de d, o que quer dizer entre a e b ha o mesmo numero de termos que entre c e d. Quer-se demonstrar que $a.b:c.d$.

Applicando a fórmula que nos dá o valor de um termo qualquer á progressão parcial desde o termo a até b, vem: $b-a=r\ (m+1)$; e a progressão desde c até d, temos: $d-c=r\ (m+1)$. Comparando estas duas igualdades, vêmos que os 2^os^ membros são iguaes, logo os 1^os^ tambem o serão e portanto $b-a=d-c$; resultado este que exprime igualdade de razões por differença, e conseguintemente temos $a.\ b:\ c.\ d$, o que demonstra a propriedade.

Progressões por quociente

1.ª Propriedade.—Um termo qualquer de uma progressão por quociente é igual ao 1º, multiplicado pela razão elevada ao numero de termos precedentes.

Demonstração.—Seja em geral a progressão por quociente ∺ $a:b:c:d:e:f:$ etc., e seja r a razão. Em virtude da noção que temos de progressão por quociente, isto é, que um termo qualquer é igual ao precedente multiplicado pela razão, segue-se que:

2º termo $b=ar$
3º » $c=br=arr=ar^2=ar^{3-1}$
4º » $d=cr=ar.^2r=ar^3=ar^{4-1}$
5º » $e=dr=ar.^3r=ar^4=ar^{5-1}$
etc.

Analysando estes resultados, vemos que o 2º termo é igual ao 1º multiplicado pela razão elevada ao expoente 1, que se subentende, ou 2—1, que é o numero de termos precedentes ao 2º; o 3º termo é igual ao 1º multiplicado pela razão elevada ao expoente 2 ou 3—1, que é o numero de termos precedentes ao 3º, o 4º termo é igual ao 1º multiplicado pela razão elevada ao expoente 3, ou 4—1, que é o numero de termos precedentes ao 4º, etc. Então por analogia, suppondo que l é um termo qualquer, e n é o numero de termos comprehendidos desde o primeiro até o ultimo, $n-1$ será o numero de termos precedentes a l, e portanto $l=ar^{n-1}$; fórmula esta que, traduzida em linguagem ordinaria, dá o principio que se queria demonstrar.

APPLICAÇÃO

A propriedade demonstrada resolve o seguinte problema: dados o 1º termo e a razão, achar um termo qualquer da progressão por quociente.

Solução.—Se o 1º termo for 6, e a razão for $\frac{2}{3}$ e pedir-se o 8º termo, particularisando a fórmula geral, para o que faz-se $l=8º$ $a=6$, $r=\frac{2}{3}$, $n=8$, e por consequencia $n-1=7$, vem: valor numerico do 8º termo=

$$=6\times\left(\frac{2}{3}\right)^7=6\times\frac{2^7}{3^7}=6\times\frac{128}{2187}=\frac{6\times128}{2187}=\frac{768}{2187}=\frac{256}{729}.$$

Corollario.—Da fórmula $l=ar^{n-1}$, que traduz a propriedade acima demonstrada, se deduz o valor da razão;

porque dividindo ambos os membros por a, vem $\frac{l}{a}=r^{n-1}$, e extrahindo a ambos os membros desta ultima igualdade a raiz do gráo $n-1$, vem $\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}=r$; ou, substituindo por $n-1$ o seu valor $m+1$, $r=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$: resultado este que se traduz do seguinte modo: *a razão de uma progressão por quociente é igual á raiz do gráo designado pelo numero de termos médios mais um do quociente entre o ultimo termo e o primeiro.*

APPLICAÇÃO

A formula acima estabelecida para o valor da razão resolve o seguinte problema. dados dous termos de uma progressão por quociente, e o numero dos intermedios formar a progressão. E' a isto que se chama *inserir meios proporcionaes entre dous numeros dados.*

Solução.—Sejão 5 e 23 os dous termos dados. Pede-se que entre elles se insirão 15 meios proporcionaes. Para illudir a difficuldade que apresenta o calculo do valor da razão, visto como elle depende da extracção da raiz de um gráo qualquer, e nós só demos regras para a quadrada e cubica, em lugar de inserirmos de uma vez todos os meios pedidos, inserimos successivamente um entre cada dous termos consecutivos. Assim, começando por inserir um meio entre 5 e 23, temos que a razão ou $r=\sqrt{\frac{23}{5}}=\sqrt{\frac{23.5}{5\,5}}=\frac{\sqrt{23.5}}{5}=\frac{\sqrt{115}}{5}=\frac{10.724}{5}=2,145$; e multiplicando o antecedente 5 pela razão, que é 2,145, vem para o meio pedido 10,725, e então temos:

$$\because 5 : 10,725 : 23.$$

Inserindo um meio entre cada dous termos consecutivos desta progressão, isto é, entre 5 e 10,725, e 10,725 e 23, a primeira razão é $r=\sqrt{\frac{10.725}{5}}=\sqrt{\frac{10,725\times5}{5\times5}}=\sqrt{\frac{10.725\times5}{5^2}}=$ $=\frac{\sqrt{53.625}}{5}=\frac{7,32}{5}=\frac{732}{500}=\frac{366}{250}=\frac{183}{125}=1,464$; e a segunda é $r=\sqrt{\frac{23}{10,725}}=\sqrt{\frac{23\times10,725}{10,725\times10,725}}=\frac{\sqrt{23\times10,725}}{10,725}=\frac{\sqrt{246,675}}{10,725}=$ $=\frac{15,70}{10,725}=\frac{15700}{10725}=\frac{3140}{2145}=\frac{628}{429}=1,463$. Multiplicando o 1º termo 5 pela 1ª razão, que é 1,464, vem: $5\times1,464=7,320$; e multiplicando o 2º termo 10,725 pela razão 1,463, vem: $10,725\times1,463=15,691$; e então resulta:

$$\div5:7,320:10,725:15,691:23.$$

Agora insere-se um meio entre 5 e 7,320, outro entre 7,320 e 10,725; outro entre 10,725 e 15,691 e finalmente outro entre 15,691 e 23; e assim se continúa até que se tenha obtido os 15 meios pedidos.

N. B.—Cumpre observar que este processo, para evitar as difficuldades actuaes da inserção de meios, nem sempre é applicavel, maxime quando a inserção é de um numero par de meios.

2.ª Propriedade.—*Inserindo-se entre todos os termos consecutivos de uma progressão por quociente o mesmo numero de meios proporcionaes, as progressões parciaes assim formadas constituem uma só progressao.*

Demonstraçao.—Seja, por exemplo, a progressão por quociente $\div2:8:32:128$: etc., e supponhamos que entre todos os termos consecutivos, isto é, 2 e 8. 8 e 32, 32 e 128, etc., se insere um meio proporcional; a razão para cada uma das progressães parciaes será: $r=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$; $r=\sqrt{\frac{32}{8}}=\sqrt{4}=2$; $r=\sqrt{\frac{128}{32}}=\sqrt{4}=2$, etc.; razão esta que é constante (e ainda o seria no caso de inserirmos 2, 3, 4, etc., e qualquer numero de meios, com tanto que fosse o mesmo entre todos os termos consecutivos), porque o quociente entre termos da progressão primitiva é o mesmo, e é tambem o mesmo o numero de meios inseridos; e como se achão ligadas entre si, porque o ultimo termo de cada uma é o primeiro da seguinte, segue-se que ellas formão uma só progressão, como se queria demonstrar.

3.ª Propriedade.—*Em qualquer progressão por quociente, dous termos tomados a vontade, e outros dous respectivamente equidistantes daquelles dous, formão proporção.*

Demonstração. — Sejão a e d os extremos; b e c os intermedios; e supponhamos que b dista tanto de a quanto c dista de d; o que quer dizer que entre a e b ha o mesmo numero de termos que entre c e d. Quer se demonstrar que $a:b::c:d$. Applicando a formula que nos dá o valor de um termo qualquer á progressão parcial desde o termo a até b, vem: $b=ar.^{m+1}$ ou, dividindo ambos os membros por a, $\frac{b}{a}=r^{m+1}$; e a progressão parcial desde c até d, temos: $\frac{d}{c}=r^{m+1}$. Comparando estas duas igualdades vemos que os segundos membros são iguaes, logo os primeiros tambem o são, e por tanto $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; resultado este que exprime igualdade de razões por quociente, e conseguintemente a proporção $a:b::c:d$, que demonstra a propriedade. (*)

(*) Ha ainda duas formulas, uma das progressões por differença e outra das progressões por quociente, que por não serem elementares, priucipalmente a segunda, não vão inscriptas no corpo da doutrina respectiva; porém como para diante precisaremos dellas, fizemos por isso esta nota.

As formulas são as seguintes: $S=\frac{(a+l)\,n}{2}$ e $S=\frac{a\,(r^{n}-1)}{r-1}$. A 1ª se traduz do modo seguinte: *A somma dos termos de uma progressão por differença é igual á semi-somma dos extremos multiplicada pelo numero dos termos;* e a 2ª tem a seguinte significação; *A somma dos termos de uma progressão por quociente é igual ao producto do 1º termo pela differença entre a razão elevada ao numero de termos e a unidade, dividido pela razão menos um.* De sorte que, se tivermos a progressão ÷3.5.7 9. etc., e quizermos a somma dos 8 primeiros termos, fazendo applicação da primeira formula, vem: $\frac{(3+17)8}{2}=\frac{20\times8}{2}=\frac{160}{2}=80$. E se tivermos a progressão ÷÷2:6:18: etc., e quizermos a somma dos 10 primeiros termos, fazendo applicação da segunda formula, vem: $\frac{2(3^{10}-1)}{3-1}=\frac{2(59049-1)}{2}=$ $=59049-1=59048$.