

Ado Raimundo Dalla Costa

*Teorema de Hahn-Banach*

Florianópolis

2014

Ado Raimundo Dalla Costa

*Teorema de Hahn-Banach*

Trabalho de conclusão de curso apresentado  
na Universidade Federal de Santa Catarina  
para a obtenção do título de bacharelado em  
Matemática

Orientador:  
Danilo Royer

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

2014

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática — Habilitação Bacharelado em Matemática e Computação Científica e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria 02/CCM/2014.

---

Prof. Silvia Martini de Holanda Janesch  
Coordenadora do Curso de Graduação em  
Matemática

---

Ado Raimundo Dalla Costa  
Acadêmico

Banca Examinadora:

---

Prof. Danilo Royer  
Orientador

---

Prof. Luciano Bedin  
Membro

---

Prof. Luciane Ines Assmann Schuh  
Membro

# *Resumo*

A análise funcional é um dos ramos da matemática que estuda, entre outros assuntos, espaços de funções e suas características. É uma rica fusão de conceitos de álgebra linear, análise e topologia com destaque para os espaços vetoriais de dimensão infinita. O seu desenvolvimento começou nos estudos de transformações, tais como a transformada de Fourier, e nos estudos de equações diferenciais e equações integrais. Obteve grande impulso em meados do século XX devido aos trabalhos de John von Neumann sobre os estudos de modelagem da mecânica quântica em espaços de Hilbert. A partir da segunda metade do século XX, devido aos trabalhos de von Neumann, Naimark e Gelfand, a análise funcional tem sido utilizada nos estudos de álgebras não comutativas, K-teoria algébrica e em mecânica quântica.

Tendo em vista a importância da análise funcional e sua vasta aplicação em diversos campos da ciência, a finalidade deste trabalho consistirá em apresentar um dos principais e mais utilizados teoremas da análise funcional: o *Teorema de Hahn-Banach*.

*Palavras-chave:* análise funcional, teorema de Hahn-Banach.

# *Abstract*

Functional analysis is a branch of mathematics that studies, among other things, function spaces and their characteristics. It is a rich fusion of concepts of linear algebra, analysis and topology with emphasis on vector spaces of infinite dimension. The development started in studies of transformations, such as Fourier transform, and studies of differential equations and integral equations. Got big boost in the mid-twentieth century because of the work of John von Neumann on modeling studies of quantum mechanics in Hilbert spaces. From the second half of the twentieth century due to the work of von Neumann, Naimark and Gelfand, functional analysis has been used in studies of noncommutative algebras, algebraic K-theory and quantum mechanics.

Given the importance of functional analysis and its wide application in many fields of science, the purpose of this work consists in studying one of the main theorems of functional analysis: the *Hahn-Banach Theorem*.

*Keywords:* functional analysis, Hahn-Banach theorem.

# *Sumário*

<b>Introdução</b>	p. 6
<b>1 Espaços Métricos</b>	p. 7
1.1 Conjunto Aberto, Fechado e Fecho . . . . .	p. 8
1.2 Convergência e Sequências de Cauchy . . . . .	p. 9
<b>2 Espaços Normados e Espaços de Banach</b>	p. 12
2.1 Exemplos Primordiais . . . . .	p. 13
2.2 Base de Schauder . . . . .	p. 23
<b>3 Operadores Lineares</b>	p. 26
3.1 Operadores Lineares Contínuos e Limitados . . . . .	p. 27
3.2 Funcionais Lineares . . . . .	p. 37
3.3 Extensão de Operadores Lineares . . . . .	p. 38
3.4 Espaços Duais . . . . .	p. 39
<b>4 Lema de Zorn</b>	p. 42
<b>5 Teorema de Hahn-Banach</b>	p. 45
<b>Conclusão</b>	p. 55
<b>Referências</b>	p. 56

# *Introdução*

O objetivo deste trabalho consistiu em enunciar e demonstrar um dos principais teoremas da análise funcional: o *Teorema de Hahn-Banach*. Com o foco neste intuito, iniciamos o nosso trabalho com o capítulo 1 mostrando basicamente uma breve revisão de análise e topologia para fixarmos os conceitos mais utilizados, como por exemplo, espaços métricos, sequências de Cauchy e espaços completos, assumindo que o leitor já conheça tais resultados.

De fato, no capítulo 2, iniciamos nossa jornada trabalhando em espaços mais ricos com uma noção de norma: os *Espaços Normados*. Assumindo que o leitor tenha um amplo conhecimento em álgebra linear, foi possível destacar exemplos interessantes em *Espaços de Banach* como  $l^p(\mathbb{R})$  e  $l^\infty$ . Vimos que em um mesmo espaço, porém substituindo sua norma obtemos estruturas completamente diferentes. Além disso, ampliamos o conceito de base introduzindo a *base de Schauder* para os espaços de dimensão infinita.

O capítulo 3 foi inteiramente dedicado aos operadores lineares entre espaços normados. Introduzimos os operadores limitados e os operadores contínuos e vimos que estes conceitos são inteiramente equivalentes. Vimos que em espaços normados de dimensão finita todo operador definido neste espaço é limitado, e portanto, contínuo. Mais do que isso, espaços de dimensão finita são completos e suas normas são equivalentes. Vários contraexemplos bastante interessantes surgem ao destacarmos os espaços de dimensão infinita. Ainda neste capítulo introduzimos os funcionais lineares que nada mais são do que operadores lineares cujo contradomínio é  $\mathbb{R}$ . Mais adiante começamos a discutir extensões lineares. No final, fizemos um breve estudo do espaço dual e vimos em que condição o espaço dual tem uma estrutura de espaço de Banach definida. Para um conhecimento posterior de espaços reflexivos é muito importante obter todos esses conceitos sobre espaço dual o qual, neste trabalho, não foi trabalhando com grande finalidade.

No capítulo 4 discutimos o *Lema de Zorn*, importante axioma da teoria dos conjuntos que serviu como base para a demonstração do teorema principal. E, por fim, no último e mais importante capítulo enunciamos e demonstramos o teorema de Hahn-Banach variante real.

# 1 Espaços Métricos

Um dos conceitos mais importantes da matemática é o conceito da continuidade que a propósito é relacionada com os conceitos de limite e convergência. Mas essas definições não tem sentido em quaisquer conjuntos. Precisamos de conjuntos que permitam introduzir um conceito de distância entre pontos. Com esta motivação, iniciamos esta seção mostrando e exemplificando um espaço bastante importante: **o espaço métrico**.

**Definição 1.** Um **espaço métrico** é um par  $(X, d)$  em que  $X$  é um conjunto qualquer e  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  uma **métrica**, isto é, uma função que satisfaz as seguintes propriedades:

$$M1) \quad d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X.$$

$$M2) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X.$$

$$M3) \quad d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X.$$

$$M4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X.$$

*Notação:* Vamos considerar  $X$  como sendo o espaço métrico deixando subentendido sua métrica  $d$ .

**Exemplo 1.** Um dos exemplos mais importantes de espaço métrico é a reta real. Considere o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais munido da métrica  $d(x, y) = |x - y|$ .

**Exemplo 2.** Após a reta real vêm o espaço euclidiano. Considere o conjunto  $\mathbb{R}^n$  de todas as  $n$ -uplas reais. Dado  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  definimos a métrica como sendo  $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ . Não é difícil mostrar que  $d$  satisfaz todas as propriedades porém a desigualdade triangular é mostrada devido a famosa desigualdade de Cauchy-Schwarz.

**Exemplo 3.** Todo subconjunto  $Y$  de um espaço métrico  $X$  possui uma estrutura natural de espaço métrico. Basta definir a distância entre dois pontos de  $Y$  como sendo a mesma distância do conjunto  $X$ . A métrica definida em  $Y$  é chamada de métrica induzida em  $Y$ .



pela métrica de  $X$ . Isso nos dá uma imensa variedade de exemplos de espaço métricos. Basta, por exemplo, considerar subconjuntos do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 4.** Seja  $C([a, b])$  o espaço de funções reais contínuas definidas em  $J = [a, b]$ . Dadas  $f, g \in C([a, b])$  definimos a métrica como sendo  $d(f, g) = \max_{t \in J} |f(t) - g(t)|$ . Com isso, temos que  $(C([a, b]), d)$  é espaço métrico. Uma questão interessante neste exemplo é que, como este conjunto é formado por funções contínuas definidas em um conjunto compacto  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , o teorema de Weierstrass nos garante que estas funções são limitadas e, mais do que isso, possuem um máximo e mínimo neste intervalo. Assim a métrica do máximo coincide com a métrica do supremo.

**Exemplo 5.** Considere  $l^\infty = \left\{ x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty \right\}$  como sendo o conjunto das sequências reais limitadas. Dados  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^\infty$  definimos a métrica como sendo  $d(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|$ . Assim,  $(l^\infty, d)$  é um espaço métrico.

## 1.1 Conjunto Aberto, Fechado e Fecho

É muito importante ter a noção de conjuntos abertos e fechados o qual tem como objetivo mostrar-nos mais adiante a convergência de sequências e as caracterizações desses conjuntos em termos de sequências. Usaremos esse resultados mais adiante em certas demonstrações.

**Definição 2.** Seja  $X$  um espaço métrico,  $r > 0$  um número real e  $x_0 \in X$ . Definimos a **bola aberta** de centro  $x_0$  e raio  $r$  como sendo o conjunto de pontos de  $X$  cuja distância ao ponto  $x_0$  é inferior a  $r$ , isto é,  $B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ . A **bola fechada** de centro  $x_0$  e raio  $r$  é o conjunto de pontos de  $X$  cuja distância ao ponto  $x_0$  é inferior ou igual a  $r$ , ou seja,  $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$ .

**Definição 3.** Um subconjunto  $A$  de um espaço métrico  $X$  é dito ser **aberto** se  $\forall x_0 \in A$  existir  $r > 0$  tal que  $B(x_0, r) \subseteq A$ . Por outro lado, um subconjunto  $F$  é dito ser **fechado** se o seu complementar é aberto, ou seja, se  $X \setminus F$  é aberto.

**Definição 4.** Seja  $X$  espaço métrico e  $A \subset X$ .

1. Um ponto  $a \in X$  é dito ser **ponto de acumulação** de  $A$  se para cada  $\epsilon > 0$

$$B(a, \epsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Os pontos de  $A$  que não são pontos de acumulação são chamamos de **pontos isolados**.

2. Um ponto  $a \in X$  é dito ser **ponto aderente** de  $A$  se para cada  $\epsilon > 0$

$$B(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

3. Um ponto  $a \in X$  é dito ser **ponto interior** de  $A$  se existir  $\epsilon > 0$  tal que  $B(a, \epsilon) \subset A$ .

4. O conjunto de pontos aderentes de  $A$  é chamado de **fecho** e denota-se como  $\bar{A}$ .

5. O conjunto de pontos interiores de  $A$  designa-se por **interior** de  $A$  e denota-se como  $\overset{\circ}{A}$ .

Seja  $X$  um espaço métrico e  $A, F \subset X$ . Duas propriedades bastantes importantes que caracterizam os conjuntos abertos e fechados são:

**Proposição 1.**

i)  $A$  é dito ser aberto se, e somente se,  $A = \overset{\circ}{A}$ .

ii)  $F$  é dito ser fechado se, e somente se,  $F = \bar{F}$ .

*Demonstração.* A demonstração do item i) pode ser encontrada em ([3], pag. 74) e do item ii) em ([3], pag. 81). ■

## 1.2 Convergência e Sequências de Cauchy

**Definição 5.** Uma **sequência** em um conjunto  $X$  é uma função  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  sendo o valor da aplicação  $x$  no elemento  $n \in \mathbb{N}$  indicado por  $x_n$  e chamado de  $n$ -ésimo termo da sequência  $x$ .

*Notação:*  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Definição 6.** Uma **subsequência** da sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em um conjunto  $X$  é a restrição da aplicação  $x$  a um subconjunto infinito  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots\}$  do conjunto  $\mathbb{N}$ .

*Notação:*  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}'}$ .

**Observação 1.** Note que a subsequência não é de fato uma sequência em  $X$  pois não é uma aplicação de  $\mathbb{N}$  para  $X$ . Apesar disso  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}'}$  pode ser considerada um sequência em  $X$ , de modo natural, com a aplicação  $1 \rightarrow x_{n_1}, \dots, k \rightarrow x_{n_k}$ .

**Definição 7.** A sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em um espaço métrico  $X$  é dita ser **convergente** se existir  $x \in X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ , isto é, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon, \quad \forall n > n_0.$$

*Notação:*  $x_n \rightarrow x$ .

**Definição 8.** Um sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em um espaço métrico  $X$  é dita ser **limitada** se o conjunto dos seus valores  $x_n$  for um subconjunto limitado em  $X$ .

**Exemplo 6.** A sequência  $x_n = n$  em  $\mathbb{R}$  não é limitada.

**Exemplo 7.** A sequência  $x_n = \frac{n}{n+1}$  em  $\mathbb{R}$  é limitada pois  $0 < x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 8.** A sequência  $x_n = (-1)^n$  em  $\mathbb{R}$  é limitada pois  $-1 \leq x_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$  mas não é convergente.

**Proposição 2.** Seja  $X$  um espaço métrico. Então:

- i) Toda sequência convergente em  $X$  é limitada e o limite é único.
- ii) Se  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$  em  $X$ , então  $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$ .

*Demonstração.* Pode ser encontrada em ([1], pag. 26). ■

**Definição 9.** A sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em um espaço métrico  $X$  é dita ser de **Cauchy** se para todo  $\epsilon > 0$  existir um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \quad \forall m, n > n_0$$

**Teorema 1.** Toda sequência convergente em um espaço métrico é sequência de Cauchy.

*Demonstração.* Seja  $X$  um espaço métrico e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência em  $X$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Então dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  temos que  $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ . Logo, pela desigualdade triangular, obtemos que:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \forall m, n > n_0$$

Isto mostra que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy. ■

**Proposição 3.** Toda sequência de Cauchy em um espaço métrico é limitada.

*Demonstração.* Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência de Cauchy em um espaço métrico  $X$  e  $x(\mathbb{N})$  o conjunto formado por todos os elementos da sequência dada. Então para  $\epsilon = 1$  temos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_m, x_n) < 1, \forall m, n > n_0$ . Em particular, para  $n > n_0$  temos que  $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ , isto é,  $x_n \in B(x_{n_0}, 1)$ .

Logo, fazendo  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}\}$ , obtemos que  $x(\mathbb{N}) = A \cup \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots\} \subset A \cup B(x_{n_0}, 1)$ . Como  $A$  é limitado pois é finito, temos que  $A \cup B(x_{n_0}, 1)$  é limitado. Portanto  $x(\mathbb{N})$  é limitado, ou seja,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada ■

**Definição 10.** Um espaço métrico  $X$  é dito ser **completo** se toda a sequência de Cauchy é convergente.

**Exemplo 9.** Os exemplos (1), (2), (4) e (5) são exemplos de espaços métricos completos.

**Exemplo 10.** Considere o conjunto dos números racionais com a métrica usual do exemplo (1), isto é,  $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{Q}$ . Este é um exemplo de espaço métrico o qual não é completo.

**Proposição 4.** Seja  $Y$  subconjunto não vazio de um espaço métrico  $X$ . Então:

- i)  $x \in \bar{Y}$  se, e somente se, existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $Y$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .
- ii)  $Y$  é fechado em  $X$  se, e somente se, dada  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência em  $Y$  com  $x_n \rightarrow x$  implica que  $x \in Y$ .

*Demonstração.*

i) ( $\implies$ ) Seja  $x \in \bar{Y}$ . Se  $x \in Y$  então a sequência  $(x, x, \dots)$  converge para  $x$ . Se  $x \notin Y$  então  $x$  é ponto aderente de  $Y$ . Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere a bola  $B(x, 1/n)$  e tome  $x_n \in B(x, 1/n) \cap Y$ . Assim notamos que  $x_n \rightarrow x$  quando  $n \rightarrow \infty$  pois  $1/n \rightarrow 0$ .

( $\impliedby$ ) Suponha que exista  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência em  $Y$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Então  $x \in Y$  ou toda bola centrada em  $x$  contém pontos  $x_n$  o que faz com que  $x$  seja ponto aderente de  $Y$ . Assim  $x \in \bar{Y}$  por definição.

- ii)  $Y$  é fechado se e somente se  $Y = \bar{Y}$ . Assim, usando (i), segue o resultado. ■

## 2 *Espaços Normados e Espaços de Banach*

O estudo sistemático dos espaços normados, principalmente os espaços de dimensão infinita, iniciou-se no começo do século XX com os trabalhos de S. Banach, M.R. Fréchet, D. Hilbert, F. Riesz e outros. Hoje a noção de norma parece ser uma passo simples no estudo matemático mas foi um fato extraordinário notar que a definição abstrata introduz noções precisas de limite, continuidade, compacidade, etc. Além disso, essa noção abstrata possibilitou transportar muitos conceitos geométricos para sistemas de dimensão infinita. Nesta seção apresentaremos esses espaços iniciando nossa jornada rumo ao teorema principal.

**Definição 11.** *Uma **norma** em um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $X$  é uma aplicação  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes condições:*

$$N1) \|x\| \geq 0, \forall x \in X.$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in X.$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in X \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X.$$

O par  $(X, \|\cdot\|)$  é chamado de **espaço normado**.

*Notação:* Quando necessário vamos mencionar  $X$  como sendo o espaço normado deixando subentendido sua norma. É importante ressaltar também que quando não mencionado estará subentendido que o espaço vetorial será sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

**Observação 2.** *Se na definição de norma a condição  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$  for retirada, diz-se que  $\|\cdot\|$  é uma **seminorma**.*

**Observação 3.** *Cada norma em  $X$  define ou induz uma métrica  $d$  em  $X$  dada por  $d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in X$ . Isto significa dizer que todo espaço normado é um espaço*

métrico com a métrica induzida pela norma. Isso é interessante pois todos os conceitos e noções válidos para espaço métricos também valem para espaços normados.

**Observação 4.** Notamos que pela propriedade (N4) obtemos  $|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|$ ,  $\forall x, y \in X$ . Com isso, concluímos que a norma é uma aplicação contínua.

**Definição 12.** Um espaço normado que é completo com relação a métrica induzida pela norma é chamado de **espaço de Banach**.

## 2.1 Exemplos Primordiais

**Exemplo 11 (Espaço Euclidiano).** Seja o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  sobre o corpo  $\mathbb{R}$ . Defina a norma como sendo  $\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$ . Esta norma é chamada de norma euclidiana.

**Afirmção 1:**  $\|\cdot\|$  é norma.

*Demonstração.* Para isso vamos mostrar que as quatro propriedades valem.

N1) Por definição de módulo temos que  $|x_i| \geq 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Segue então que  $\|x\| \geq 0$ .

N2) Agora  $\|x\| = 0 \iff |x_i| = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \iff x = 0$ .

N3) Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então:

$$\|\alpha x\| = \left( \sum_{i=1}^n |\alpha x_i|^2 \right)^{1/2} = \left( |\alpha|^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = |\alpha| \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = |\alpha| \|x\|.$$

N4) Para mostrar a última propriedade necessitamos da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Suporemos que o leitor esteja familiarizado com o resultado e com os conceitos de produto interno que podem ser encontradas em ([3], p.34).

Considere o produto interno usual em  $\mathbb{R}^n$ . Então,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ , por definição temos:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ , obtemos

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois lados chegamos ao resultado desejado. Logo,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

■

**Afirmção 2:**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  é espaço de Banach.

*Demonstração.* Basta mostrar que  $\mathbb{R}^n$  é completo. Para isso, seja  $x_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}^n$ . Então dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|x_m - x_k\| = \left( \sum_{i=1}^n (x_i^{(m)} - x_i^{(k)})^2 \right)^{1/2} < \epsilon \quad \forall m, k > n_0. \quad (2.1)$$

Note que para  $m, k > n_0$  e  $i = 1, \dots, n$  fixado temos que

$$(x_i^{(m)} - x_i^{(k)})^2 < \epsilon^2 \quad \Rightarrow \quad |x_i^{(m)} - x_i^{(k)}| < \epsilon.$$

Isto mostra que para cada  $i = 1, \dots, n$  a sequência  $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathbb{R}$  é completo temos que a sequência é convergente, isto é,  $x_i^{(k)} \rightarrow x_i$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Com isso, defina  $x = (x_1, \dots, x_n)$  os respectivos limites. Note que  $x \in \mathbb{R}^n$ . Logo, tomando  $k \rightarrow \infty$  em (2.1) temos

$$\|x_m - x\| \leq \epsilon, \quad \forall m > n_0$$

Portanto  $x_m \rightarrow x$ . Concluimos que  $\mathbb{R}^n$  é completo. ■

**Exemplo 12 (Espaço  $l^p(\mathbb{R})$ ).** Seja  $p \geq 1$  um número real fixado. Definimos o espaço  $l^p(\mathbb{R})$  como sendo o conjunto de todas as seqüências  $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$  de elementos de  $\mathbb{R}$  tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)}|^p < \infty$ .

Definimos a norma como sendo  $\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$ .

**Afirmção 1:**  $\|\cdot\|_p$  é norma.

*Demonstração.* Os axiomas  $N1)$ ,  $N2)$  e  $N3)$  são imediatos utilizando o mesmo método do exemplo (11). Para provar o axioma  $N4)$  precisamos de uma desigualdade bastante interessante.

Desigualdade de Hölder para somas finitas: Sejam  $p > 1$  e  $q$  números reais conjugados, isto é,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então temos que a seguinte desigualdade vale

$$\sum_{i=1}^N |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^N |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

$N4)$  Sejam  $x, y \in l^p(\mathbb{R})$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Utilizando o seguinte truque

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1} \quad (2.2)$$

obtemos a seguinte desigualdade

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \quad (2.3)$$

No primeiro termo da direita da desigualdade (2.3) usaremos a desigualdade de Hölder. Assim obtemos:

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^{p-1})^q \right)^{1/q}$$

Notamos que a multiplicação dos expoentes  $(p-1)q = p$  pois são conjugados. Logo,

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^p) \right)^{1/q} \quad (2.4)$$

Utilizando o mesmo processo para o segundo termo da direita da desigualdade (2.3) obtemos

$$\sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^p) \right)^{1/q} \quad (2.5)$$



Assim, juntando as desigualdades (2.4) e (2.5) com (2.3), obtemos o seguinte resultado

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \left[ \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \right] \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/q} \quad (2.6)$$

Dividindo tudo pelo último termo e notando que  $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$  obtemos

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \quad (2.7)$$

Finalmente tomando  $n \rightarrow \infty$  segue que:

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{1/p} \quad (2.8)$$

Note que as séries convergem pois  $x, y \in l^p(\mathbb{R})$  e também  $x + y \in l^p(\mathbb{R})$ . Portanto, por (2.8)

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Essa desigualdade é a famosa Desigualdade de Minkowski. ■

**Afirmção 2:**  $(l^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$  é espaço de Banach.

*Demonstração.* Seja  $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots)$  sequência de Cauchy em  $l^p(\mathbb{R})$ . Então dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|x_m - x_n\| = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^m - x_i^n|^p \right)^{1/p} < \epsilon, \quad \forall m, n > n_0. \quad (2.9)$$

Notamos que para  $i = 1, 2, \dots$  fixado temos que

$$|x_i^m - x_i^n| < \epsilon, \quad \forall m, n > n_0.$$

Assim, notamos que  $(x_i^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy de elementos em  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathbb{R}$  é completo temos que esta sequência é convergente, isto é,  $x_i^{(m)} \rightarrow x_i$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Defina  $x = (x_1, x_2, \dots)$  os respectivos limites das sequências vistas anteriormente. Basta mostrar que  $x \in l^p(\mathbb{R})$  e  $x_m \rightarrow x$ . Note que, por (2.9), temos que  $\forall m, n > n_0$

$$\left( \sum_{i=1}^k |x_i^m - x_i^n|^p \right) \leq \epsilon^p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Tomando  $n \rightarrow \infty$  temos que  $\forall m > n_0$

$$\left( \sum_{i=1}^k |x_i^m - x_i|^p \right) \leq \epsilon^p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Finalmente tomamos  $k \rightarrow \infty$ . Assim, para todo  $m > n_0$

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^m - x_i|^p \right) \leq \epsilon^p \quad (2.10)$$

Isto mostra que  $x_m - x \in l^p(\mathbb{R})$ . Como  $x_m \in l^p(\mathbb{R})$  e  $l^p(\mathbb{R})$  é espaço vetorial segue que  $x \in l^p(\mathbb{R})$ . De fato,  $x = x_m + (x - x_m) \in l^p(\mathbb{R})$ .

Consequentemente a desigualdade (2.10) implica que  $x_m \rightarrow x$ . Concluimos que  $l^p(\mathbb{R})$  é completo. ■

**Exemplo 13 (Espaço  $l^\infty$ ).** Considere o espaço  $l^\infty$  como sendo o espaço das seqüências reais limitadas. Defina a norma como sendo  $\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$ .

**Afirmção 1:**  $\|x\|_\infty$  é norma.

*Demonstração.* Para isso vamos mostrar que as quatro propriedades valem.

N1) Pela definição de módulo temos que  $|x_i| \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}$ . Assim temos  $\|x\|_\infty \geq 0$ .

N2) Note  $\|x\|_\infty = 0 \iff \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| = 0 \iff |x_i| = 0, \forall i \in \mathbb{N} \iff x = 0$ .

N3) Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então:

$$\|\alpha x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\alpha x_i| = |\alpha| \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| = |\alpha| \|x\|_\infty.$$

N4) Seja  $x, y \in l^\infty$ . Então:

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i + y_i| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} (|x_i| + |y_i|) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| + \sup_{i \in \mathbb{N}} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

■

**Afirmação 2:**  $(l^\infty, \|x\|_\infty)$  é espaço de Banach.

*Demonstração.* Seja  $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots)$  sequência de Cauchy em  $l^\infty$ . Então dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|x_m - x_n\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \epsilon, \quad \forall m, n > n_0$$

Em particular, para cada  $i = 1, 2, \dots$  fixado temos que

$$|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \epsilon, \quad \forall m, n > n_0 \quad (2.11)$$

Assim, notamos que a sequência de números reais  $(x_i^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathbb{R}$  é completo temos que esta sequência converge, isto é,  $x_i^{(m)} \rightarrow x_i$ . Com isso, definimos  $x = (x_1, x_2, \dots)$  como sendo os respectivos limites. Vamos mostrar que  $x \in l^\infty$  e que  $x_m \rightarrow x$ . Por (2.11), tomando  $n \rightarrow \infty$  temos

$$|x_i^{(m)} - x_i| \leq \epsilon, \quad \forall m > n_0 \quad (2.12)$$

Como cada  $x_m \in l^\infty$  temos que existe  $k_m$  número real tal que  $|x_i^{(m)}| \leq k_m, \forall i \in \mathbb{N}$ . Pela desigualdade triangular e por (2.12), obtemos:

$$|x_i| = |x_i - x_i^{(m)} + x_i^{(m)}| \leq |x_i - x_i^{(m)}| + |x_i^{(m)}| \leq \epsilon + k_m$$

Essa desigualdade vale para todo  $i \in \mathbb{N}$  e notamos que do lado direito da desigualdade não temos dependência de  $i$ . Assim, provamos que a sequência  $(x_i^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  é limitada no qual implica que  $x \in l^\infty$ . Também por (2.12) obtemos que

$$\|x_m - x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i^{(m)} - x_i| \leq \epsilon, \quad \forall m > n_0$$

Isso mostra que  $x_m \rightarrow x$ . Concluimos que  $l^\infty$  é completo. ■

**Exemplo 14 (Espaço  $C([a, b])$ ).** Considere  $C([a, b])$  o espaço de funções contínuas definidas em  $[a, b]$ . Definimos a norma como sendo  $\|f\|_{max} = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$ .

**Afirmção 1:**  $\|\cdot\|_{max}$  é norma.

*Demonstração.* As propriedades N1), N2) e N3) são imediatas decorrente do mesmo método apresentado no exemplo anterior. Vamos provar a propriedade N4).

N4) Sejam  $f, g \in C[a, b]$ . Então:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{max} &= \max_{t \in [a, b]} |f(t) + g(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} (|f(t)| + |g(t)|) \\ &= \max_{t \in [a, b]} |f(t)| + \max_{t \in [a, b]} |g(t)| = \|f\|_{max} + \|g\|_{max}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

■

**Afirmção 2:**  $(C([a, b]), \|\cdot\|_{max})$  é espaço de Banach.

*Demonstração.* Seja  $f_m = (f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, \dots)$  sequência de Cauchy em  $C([a, b])$  e escreva  $J = [a, b]$  para facilitar a notação. Então dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|f_m - f_n\| = \max_{t \in J} |f_m(t) - f_n(t)| < \epsilon, \quad \forall m, n > n_0 \tag{2.14}$$

Em particular, para cada  $t_0 \in J$  fixado, temos que

$$|f_m(t_0) - f_n(t_0)| < \epsilon, \quad \forall m, n > n_0 \tag{2.15}$$

Isso nos mostra que, para cada  $t_0 \in J$  fixado, temos que a sequência de números  $(f_m(t_0))_{m \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathbb{R}$  é completo temos que esta sequência é convergente, isto é,  $f_m(t_0) \rightarrow f(t_0)$ . Desse modo, podemos associar cada ponto  $t_0 \in J$  com um único número real  $f(t_0)$ . Isso define uma função definida em  $J$ . Por (2.14), tomando  $n \rightarrow \infty$ , temos

$$\max_{t \in J} |f_m(t) - f(t)| \leq \epsilon, \quad \forall m > n_0 \tag{2.16}$$

Assim, para todo  $t \in J$ ,

$$|f_m(t) - f(t)| \leq \epsilon, \quad \forall m > n_0 \quad (2.17)$$

Com isso, mostramos que a sequência  $f_m(t)$  converge para  $f(t)$  uniformemente. Como sabemos que as funções  $f_m(t)$  são contínuas e a convergência é uniforme segue que o limite é contínuo em  $J$ . Então  $f \in C([a, b])$  e também que  $f_m \rightarrow f$ .

Concluimos que  $C([a, b])$  é completo. ■

Um exemplo bastante importante é o  $L^p(\Omega)$ . Este espaço mencionaremos pois é de extrema importância no desenvolvimento na teoria das séries de Fourier e espaços de Sobolev. Omitiremos todos os detalhes somente com o objetivo de ilustrar.

**Exemplo 15 (Espaço  $L^p(\Omega)$ ).** *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto mensurável e seja  $1 \leq p < \infty$ . Definimos o espaço  $L^p(\Omega)$  como sendo o espaço das classes de equivalência de funções reais  $p$ -integráveis no sentido de Lebesgue, ou seja,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f|^p < \infty \right\}$$

*Definindo a norma como sendo*

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p}$$

*temos que  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  é espaço de Banach.*

**Exemplo 16.** *Vamos mostrar um contraexemplo bastante interessante. Considere o espaço  $C[0, 1]$  do exemplo (14) com a seguinte norma*

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

*Não é difícil verificar que  $\|\cdot\|$  é uma norma. Apesar de algebricamente o espaço  $C[0, 1]$  ser igual ao exemplo (14) eles possuem características muito diferentes. O espaço  $C[0, 1]$  munido desta norma  $\|\cdot\|$  não é um espaço de Banach.*

*De fato, considere a sequência de funções contínuas*

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ n(t - \frac{1}{2}), & 1/2 < t < 1/2 + 1/n \\ 1, & 1/2 + 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Afirmação 1:**  $f_n$  é sequência de Cauchy em  $C[0, 1]$ .

*Demonstração.* Para isso, note que para  $n > m$  temos

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\| &= \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)| dt = \int_{1/2}^{1/2+1/n} |(m-n)(t-1/2)| dt + \\ &+ \int_{1/2+1/n}^{1/2+1/m} |m(t-1/2) - 1| dt \leq \int_{1/2}^{1/2+1/n} |m-n| |t-1/2| dt \\ &+ \int_{1/2+1/n}^{1/2+1/m} |m(t-1/2) - 1| dt =^* |m-n| \frac{1}{2n^2} - \frac{m}{2} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) + \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \\ &=^{**} -\frac{m}{2n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} + \frac{m}{2n^2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

(\*) Observe que  $\frac{1}{n} < t - \frac{1}{2} < \frac{1}{m}$ , o que implica que  $0 < \frac{m}{n} < m(t - \frac{1}{2}) < 1$ . Assim,  $|m(t - \frac{1}{2}) - 1| = -m(t - \frac{1}{2}) + 1$ .

(\*\*) Como  $n > m$  segue que  $|m - n| = n - m$ .

Continuando, tome  $n_0 = \frac{2}{\epsilon}$ . Assim, para todo  $n > m > n_0$ , obtemos que

$$\|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right) < \epsilon.$$

Portanto,  $f_n$  é sequência de Cauchy em  $C[0, 1]$ . ■

**Afirmação 2:**  $f_n$  não converge em  $C[0, 1]$ .

*Demonstração.*  $\forall f \in C[0, 1]$ ,

$$\|f_n - f\| = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt = \int_0^{1/2} |f(t)| dt + \int_{1/2}^{1/2+1/n} |f_n(t) - f(t)| dt + \int_{1/2+1/n}^1 |1 - f(t)| dt$$

Desde que os integrandos são não negativos, nos temos que cada integral está bem definida.

Agora suponha que  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ . Então isso implicaria que cada integral se aproximaria de 0 e, por  $f$  ser contínua, nós teríamos que

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ em que } f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 1, & 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

Mas isso é impossível para funções contínuas. Portanto  $f_n$  não converge em  $C[0, 1]$ . Logo,  $(C[0, 1], \|\cdot\|)$  não é espaço de Banach. ■

Um subespaço  $Y$  de um espaço normado  $X$  é um subespaço normado com a norma obtida pela restrição da norma de  $X$  para o subespaço  $Y$ . Esta norma é dita induzida pela norma de  $X$ . Porém note que se  $X$  for completo não necessariamente temos que o subespaço  $Y$  é completo.

**Exemplo 17.** Para exemplificar a afirmação acima basta considerarmos a sequência de números reais  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \frac{1}{n} \subset (0, 1]$ . Notamos que esta sequência é sequência de Cauchy mas não converge em  $(0, 1]$  pois se convergisse, teríamos que  $x_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Mas  $0 \notin (0, 1]$ . Portanto apesar de  $\mathbb{R}$  ser completo, o conjunto  $(0, 1]$  não é completo.

**Teorema 2.** Um subespaço  $Y$  de um espaço de Banach  $X$  é completo se e, somente se, o conjunto  $Y$  é fechado em  $X$ .

*Demonstração.*

( $\Rightarrow$ ) Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência convergente em  $Y$ , isto é, existe  $x_0 \in X$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$ . Vamos provar que  $x_0 \in Y$ . Para isso, lembre que toda sequência convergente é sequência de Cauchy. Como por hipótese  $Y$  é completo então existe  $x_1 \in Y$  tal que  $x_n \rightarrow x_1$ . Como o limite é único, então segue que  $x_0 = x_1 \in Y$ . Logo,  $Y$  é fechado em  $X$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha  $Y$  fechado em  $X$  e seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência de Cauchy em  $Y$ . Como  $X$  é completo então existe  $x_0 \in X$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$ . Como  $Y$  é fechado em  $X$  então temos que  $x_0 \in Y$ . Logo, toda sequência de Cauchy em  $Y$  é convergente para um ponto de  $Y$ . Portanto,  $Y$  é completo. ■

**Observação 5.** Podemos verificar que  $\mathbb{R}^n$  também é espaço normado com as seguintes normas:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \quad \text{ou} \quad \|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Na verdade, veremos mais adiante que todas as normas em espaços de dimensão finita são equivalentes. Em particular, todas as normas em  $\mathbb{R}^n$  são equivalentes.

**Definição 13.** Uma norma  $\|\cdot\|_a$  em um espaço vetorial  $X$  é dita ser equivalente a norma  $\|\cdot\|_b$  em  $X$  se existem números positivos  $\alpha$  e  $\beta$  tal que para todo  $x \in X$  tenhamos

$$\alpha\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq \beta\|x\|_b.$$

**Observação 6.** Esta definição é importante pois tem como consequência o fato de que normas equivalentes definem a mesma topologia em  $X$ .

## 2.2 Base de Schauder

Como vimos em álgebra linear uma **base de Hamel** ou simplesmente base de um espaço vetorial  $X$  é um conjunto  $B \subset X$  linearmente independente tal que  $\text{span}(B) = X$ . Como sabemos, o termo  $\text{span}(B)$  significa o gerador linear, o conjunto das combinações lineares finitas dos elementos de  $B$ . Porém a base de Hamel pode ser bastante complicada quando trabalhamos em espaços de dimensão infinita pois estes podem não ser enumeráveis. Por exemplo, conseguiríamos imaginar uma base de Hamel para o espaço  $C[0, 1]$ ? Tal base pode não ser enumerável. Como também o espaço  $l^\infty$  onde o conjunto de infinitos vetores canônicos não formam uma base de Hamel.

O que precisamos é uma definição mais geral de base que possa incluir estes espaços tão importantes. Nesta seção, discutiremos uma noção mais ampla de base para esses espaços, chamada de **base de Schauder**.

**Definição 14.** Seja  $X$  um espaço normado. Uma sequência  $(e_n)_n \subseteq X$  é dita uma **base de Schauder** para  $X$  se para todo  $x \in X$  existir uma única sequência  $(a_n)_n \subseteq \mathbb{K}$  tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Notamos que o conceito de base de Hamel faz sentido para qualquer espaço vetorial. Porém, para bases de Schauder, é necessário que espaço em questão tenha uma noção de distância entre vetores bem definida para que qualquer vetor possa ser "aproximado" por combinações lineares finitas. Neste caso, precisamos trabalhar com os espaços normados.

**Observação 7.** No caso de  $X$  ser espaço normado com  $\dim X = m$ , a definição contempla este caso. Basta supor que  $a_n = 0$  se  $n > m$ .



**Exemplo 18.** Uma base de Schauder para o espaço  $l^p(\mathbb{R})$  é dada por  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq l^p(\mathbb{R})$  onde  $e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-ésima}}, 0, \dots)$  é a sequência cujo  $n$ -ésimo termo é 1 e o resto é 0.

*Demonstração.* De fato, seja  $x \in l^p(\mathbb{R})$  da forma  $x = (x_1, x_2, \dots)$ . De maneira natural, notamos que  $x$  pode ser escrito como  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots$

Bom, para provar realmente isso, note que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|x - (x_1e_1, x_2e_2, \dots, x_Ne_N)\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} = \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Como  $x \in l^p(\mathbb{R})$  então

$$\|x\|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty.$$

Como  $\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p$  é o resto de uma série convergente, logo tende para zero quando  $N \rightarrow \infty$ . Assim provamos que cada elemento  $x \in l^p(\mathbb{R})$  pode ser escrito como combinação linear infinita de elementos da base  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Basta mostrar que esta maneira de escrever é única.

Suponha por absurdo que o vetor  $x$  pode ser escrito de duas maneiras distintas, ou seja,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \quad \text{e} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$$

onde  $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ . Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) e_n = 0.$$

Temos que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) e_n \right\| = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n|^p \right)^{1/p} = 0$$

Portanto,  $|\alpha_n - \beta_n| = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Segue que  $\alpha_n = \beta_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Assim temos que todo elemento de  $l^p(\mathbb{R})$  se exprime de modo único. Segue que  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é base de Schauder para  $l^p(\mathbb{R})$ . ■

**Exemplo 19.** *Aqui esta um exemplo de base de Schauder que não é base de Hamel.*

*Seja  $Y$  subespaço de  $l^\infty$  formado pelas seqüências com apenas um número finito de entradas não nulas. Notamos que a base de Schauder canônica  $\{e_j\}_{j=1}^\infty$  também é uma base de Hamel para  $Y$  pois  $Y = \text{span}\{e_j\}$ . No entanto mostraremos que o subespaço  $Y$  possui uma base de Schauder o qual não é base de Hamel.*

*Demonstração.* De fato, ao considerarmos a seqüência  $\left\{ \eta_k = \frac{e_k}{k} - \frac{e_{k+1}}{(k+1)} \right\}_{k=1}^\infty$ , notamos que esta seqüência não é base de Hamel do subespaço  $Y$  pois a única representação não nula de  $e_1$ , por exemplo, é  $e_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k$  (uma soma infinita). Entretanto, essa é uma base de Schauder de  $Y$  pois cada elemento  $x = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$  de  $Y$  pode ser escrito na forma

$$x = \sum_{k=1}^n a_k \eta_k + a_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \eta_k$$

onde  $\{a_k\}_{k=1}^n$  são a solução do sistema linear  $x_1 = a_1, x_j = \frac{a_j - a_{j-1}}{j}, 2 \leq j \leq n$ . ■

### 3 Operadores Lineares

No decorrer do estudo de álgebra linear nos deparamos com as transformações lineares, importantes no estudo dos espaços vetoriais. No entanto, neste contexto, chamaremos as transformações lineares entre espaços normados de operadores lineares. Nesta seção estudaremos algumas propriedades de operadores lineares dando início ao estudo de funcionais lineares contínuos e limitados.

**Definição 15.** Um **operador linear** entre espaços normados  $X$  e  $Y$  é uma aplicação  $T : X \rightarrow Y$  tal que  $T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y)$ ,  $\forall x, y \in X$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 20 (Operador Identidade).** O operador identidade  $I : X \rightarrow X$  definido por  $I(x) = x$ ,  $\forall x \in X$  é um operador linear.

*Demonstração.* De fato, sejam  $x, y \in X$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então:

$$I(x + \alpha y) = x + \alpha y = I(x) + \alpha I(y).$$

■

**Exemplo 21 (Operador Nulo).** O operador nulo  $\theta : X \rightarrow X$  tal que  $\theta(x) = 0$ ,  $\forall x \in X$  é um operador linear.

**Exemplo 22 (Operador Derivada).** Considere  $X = \mathcal{P}([a, b])$  o conjunto de todos os polinômios definidos em  $[a, b]$ . Defina o operador  $T : X \rightarrow X$  tal que  $T(x(t)) = x(t)'$ ,  $\forall x(t) \in X$ . Então este operador é linear.

*Demonstração.* De fato, sejam  $x(t), y(t) \in \mathcal{P}([a, b])$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$T(x(t) + \alpha y(t)) = (x(t) + \alpha y(t))' = x(t)' + \alpha y(t)' = T(x(t)) + \alpha T(y(t))$$

■

Porém este operador não é limitado, e conseqüentemente não contínuo, como veremos mais adiante.

**Exemplo 23.** Considere  $X = C([a, b])$  e defina o operador  $T : X \rightarrow X$  tal que

$$T(f) = \int_a^t f(s)ds, \text{ para } t \in [a, b].$$

Este operador é linear.

*Demonstração.* De fato, sejam  $f, g \in C([a, b])$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} T(f + \alpha g) &= \int_a^t (f + \alpha g)(s)ds = \int_a^t (f(s) + \alpha g(s))ds \\ &= \int_a^t f(s)ds + \int_a^t \alpha g(s)ds \\ &= \int_a^t f(s)ds + \alpha \int_a^t g(s)ds = T(f) + \alpha T(g). \end{aligned} \tag{3.1}$$

■

### 3.1 Operadores Lineares Contínuos e Limitados

**Definição 16.** Sejam  $(X, \|\cdot\|_1)$  e  $(Y, \|\cdot\|_2)$  espaços normados e  $T : X \rightarrow Y$  um operador linear. O operador é dito ser **limitado** se existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\|T(x)\|_2 \leq c\|x\|_1, \forall x \in X$ .

**Definição 17.** Um operador é dito ser **contínuo** em  $x_0 \in X$  se dado  $\epsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que  $\|x - x_0\| < \delta$  implica que  $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$ . Dizemos que  $T$  é contínuo se  $T$  for contínuo para todo  $x \in X$ .

**Definição 18.** Um operador é dito ser **uniformemente contínuo** se dado  $\epsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que para todo  $x, y \in X$  com  $\|x - y\| < \delta$  implica que  $\|T(x) - T(y)\| < \epsilon$ .

**Observação 8.** Para uma função ser contínua em todos os pontos, basta ser possível escolher  $\delta$  para cada  $x$ , enquanto que a continuidade uniforme exige que um  $\delta$  global, isto é, um mesmo  $\delta$  para todo  $x$ .

**Exemplo 24 (Operador Shift).** O operador shift à esquerda  $T : l^p(\mathbb{R}) \rightarrow l^p(\mathbb{R})$  definido como sendo

$$T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

é limitado.

*Demonstração.* De fato, seja  $x \in l^p(\mathbb{R})$ . Pela definição de norma de  $l^p(\mathbb{R})$  temos que

$$\|x\| = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

Então

$$\|T(x)\|^p = \left\| \sum_{n=2}^{\infty} e_{n-1}x_n \right\|^p = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^p \leq |x_1|^p + \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \|x\|^p.$$

Segue que

$$\|T(x)\|^p \leq \|x\|^p.$$

O que implica

$$\|T(x)\| \leq \|x\|.$$

Portanto,  $T$  é limitada. ■

Na definição de operador limitado surge a seguinte pergunta: Qual o menor  $c$  possível tal que ainda vale a desigualdade  $\|T(x)\| \leq c\|x\|$  para todo  $x \in X$ ?

Para isso, notamos que para  $x \neq 0$  podemos escrever, pela definição que

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq c.$$

Isso nos mostra que o menor  $c$  possível é o supremo deste número. Logo, definimos a norma do operador linear  $T$  como sendo

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

Se  $X = \{0\}$  definimos  $\|T\| = 0$ .

Assim, se  $T$  é operador linear limitado, por definição, segue que

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Esta fórmula é de extrema importância e aplicaremos com bastante frequência.

**Proposição 5.** *Seja  $T$  operador linear. Então:*

i)  $\|T\|$  é norma.

ii) Podemos escrever  $\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|T(x)\|$ .

*Demonstração.* i) Vamos mostrar que as quatro propriedades são válidas.

N1) Imediato.

N2) Por um lado temos que se  $T = 0$  segue que  $\|T\| = \|0\|$ . Por outro lado, se  $\|T\| = 0$  temos que  $\|T(x)\| = 0, \forall x \in X$  com  $x \neq 0$ . Então  $T = 0$ .

N3) Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$  temos:

$$\|\alpha T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|\alpha T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|\alpha| \|T(x)\|}{\|x\|} = |\alpha| \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = |\alpha| \|T\|.$$

N4) Finalmente, dados  $T_1, T_2$  operadores lineares obtemos

$$\begin{aligned} \|T_1 + T_2\| &= \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|(T_1 + T_2)(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T_1(x) + T_2(x)\|}{\|x\|} \leq \\ &\leq \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T_1(x)\| + \|T_2(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T_1(x)\|}{\|x\|} + \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T_2(x)\|}{\|x\|} = \|T_1\| + \|T_2\|. \end{aligned}$$

ii) Seja  $x \in X$  tal que  $x \neq 0$ . Tome  $y = \frac{x}{\|x\|}$ . Então  $\|y\| = 1$  e como  $T$  é linear segue que

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \left\| T \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \sup_{\substack{y \in X \\ \|y\|=1}} \|T(y)\|.$$

■

**Teorema 3.** *Seja  $T : X \rightarrow Y$  um operador linear entre espaços normados. Então as seguintes proposições são equivalentes:*

- (i)  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| < \infty$ .
- (ii)  $\exists k \geq 0$  tal que  $\|T(x)\| \leq k\|x\|, \forall x \in X$ .
- (iii)  $T$  é uniformemente contínua.
- (iv)  $T$  é contínua.
- (v)  $T$  é contínua em 0.

*Demonstração.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

Seja  $k = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$ . Dado  $x \in X$  com  $x \neq 0$  tome o vetor  $y = \frac{x}{\|x\|}$ . Com isso notamos que  $\|y\| \leq 1$  e portanto temos que

$$\|T(y)\| = \left\| T \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| < k \implies \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < k.$$

Assim  $\|T(x)\| < k\|x\|, \forall x \in X$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)

Dado  $\epsilon > 0$  e suponha que (ii) vale. Então tome  $\delta = \frac{\epsilon}{k}$ . Assim,  $\forall x, y \in X$  com  $\|x - y\| < \delta$  obtemos que

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq k\|x - y\| < k \frac{\epsilon}{k} = \epsilon$$

Portanto  $T$  é uniformemente contínua.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) e (iv)  $\Rightarrow$  (v) são imediatos.

(v)  $\Rightarrow$  (i)

Como  $T$  é contínuo em 0 então existe  $\delta > 0$  tal que para  $\|x\| = \|x - 0\| \leq \delta$  temos que  $\|T(x) - T(0)\| = \|T(x)\| \leq 1$ .

Assim, se  $\|x\| \leq 1$ , segue que  $\|\delta x\| \leq \delta$  e isso implica que  $\|T(\delta x)\| \leq 1$ . Portanto,  $\|T(x)\| \leq 1/\delta$ , isto é, (i) vale. ■

**Observação 9.** *O que podemos notar nesta proposição é que existem muitas maneiras de provar que tanto a norma de  $T$  é finita como  $T$  é contínua e limitada. Na verdade por esta proposição obtemos que operador linear limitado e contínuo são sinônimos.*

**Proposição 6.** *Seja  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $T$  operador linear limitado definido em um subespaço  $\mathcal{D}(T)$  de  $X$ . Então:*

- i) Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência em  $\mathcal{D}(T)$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Então,  $T(x_n) \rightarrow T(x)$ .*
- ii) Espaço nulo  $\text{Ker}(T)$  é fechado.*

*Demonstração.*

i) Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência em  $\mathcal{D}(T)$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Pela linearidade de  $T$  e por  $T$  ser limitado temos que

$$\|T(x_n) - T(x)\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\| \|x_n - x\| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto  $T(x_n) \rightarrow T(x)$ .

ii) Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência convergente em  $\text{Ker}(T)$ , isto é,  $x_n \rightarrow x$ . Pelo item i) temos que  $T(x_n) \rightarrow T(x)$ . Segue que  $T(x) = 0$  pois  $T(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $x \in \text{Ker}(T)$ . ■

A seguir veremos que todo operador linear definido em um espaço normado de dimensão finita é limitado. Antes, porém, vamos enunciar um resultado que utilizaremos com o intuito de demonstrarmos o lema posterior.

**Definição 19.** *Um conjunto  $K$  em um espaço normado  $X$  é dito ser **compacto** se toda a sequência em  $K$  tem subsequência convergente em  $K$ .*

**Teorema 4.** *Em um espaço normado de dimensão finita  $X$ , um conjunto  $K \subset X$  é compacto, se e somente se,  $K$  é fechado e limitado em  $X$ .*

*Demonstração.* Esta demonstração pode ser encontrada em ([1], pag. 77 e 78). ■



**Corolário 1 (Teorema de Heine-Borel).** *Um subespaço  $K \subset \mathbb{R}^n$  (com a topologia usual) é compacto se, e somente se, é limitado e fechado.*

**Observação 10.** *Já em um espaço de dimensão infinita conjuntos fechados e limitados nem sempre são compactos. Um contraexemplo bastante interessante é considerar o subespaço  $A = \{(x_n) \in l^\infty \mid x_n = 0, \text{ exceto para um número finito de índices}\}$  de  $l^\infty$ . Tome a esfera unitária  $S = \{x \in A \mid \|x\|_\infty = 1\}$  como um subconjunto de  $A$ . Portanto temos que  $S$  é limitada e fechada no entanto não é compacta, pois a sequência*

$$x_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-ésima}}, 0, \dots) \in S$$

*não admite subsequência convergente.*

**Lema 1.** *Seja  $X$  espaço normado e seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um conjunto linearmente independente. Então existem constantes  $C, D > 0$  tal que para quaisquer escalares  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tem-se que*

$$C \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| \leq D \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

*Demonstração.* Para a desigualdade da direita basta tomarmos  $D = \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|$ . Assim temos:

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \|e_i\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \left( \sum_{i=1}^n |a_i| \right) = D \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Por outro lado, considere a aplicação  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  dada por  $T(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  onde  $\mathbb{R}^n$  é equipado com a métrica induzida pela norma  $\|\cdot\|_1$  (mencionada na observação (5)).

**Afirmção 1:**  $T$  é contínua.

*Demonstração.* De fato, seja  $x_k = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$  sequência em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $x_k \rightarrow x$  em que  $x = (a_1, \dots, a_n)$ . Então, para cada  $i = 1, \dots, n$ , temos que

$$|a_i^{(k)} - a_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_j^{(k)} - a_j| = \|x_k - x\|_1 \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Isso nos mostra que  $a_i^{(k)} \rightarrow a_i$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Logo,

$$\|T(x_k) - T(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i^{(k)} e_i - \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i^{(k)} - a_i| \|e_i\| \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

■

Como  $\{e_i\}_{i=1}^n$  é linearmente independente então  $T$  é injetora. Assim, considere o subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  dado por  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |a_i| = 1\}$  (esfera unitária). Então  $S$  é fechado e limitado. Pelo teorema de Heine-Borel segue que  $S$  é compacto.

Portanto existe  $x_0 \in S$  tal que  $\|T(x_0)\| \leq \|T(x)\|, \forall x \in S$ . Tomaremos  $C = \|T(x_0)\|$ . Notamos que como  $x_0 \in S$  então  $x_0 \neq 0$ . Como  $T$  é injetora temos que  $\|T(x_0)\| \neq 0$  e portanto segue que  $C > 0$ .

Assim, sendo  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  não todos nulos, defina  $b_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^n |a_j|}$ .

Notamos que  $\sum_{i=1}^n |b_i| = 1$  e portanto temos que  $y = (b_1, \dots, b_n) \in S$ . Com isso, vemos que

$$C \leq \|T(y)\| = \left\| \sum_{i=1}^n b_i e_i \right\| = \left\| \frac{1}{\sum_{j=1}^n |a_j|} \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| = \frac{1}{\sum_{j=1}^n |a_j|} \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|$$

Portanto temos  $C \sum_{j=1}^n |a_j| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|$ . ■

**Teorema 5.** *Todo espaço normado de dimensão finita é completo.*

*Demonstração.* Seja  $X$  espaço normado de dimensão finita e  $\{e_i\}_{i=1}^n$  uma base para  $X$ . Dada uma sequência de Cauchy  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $X$  podemos escrever  $x_k$  na base para cada  $k$ , isto é,  $x_k = \sum_{i=1}^n a_i^{(k)} e_i$ . Então, usando o Lema (1),  $\forall i = 1, \dots, n$  fixado e  $\forall k, l \in \mathbb{N}$  temos

$$|a_i^{(k)} - a_i^{(l)}| \leq \sum_{j=1}^n |a_j^{(k)} - a_j^{(l)}| \leq \frac{1}{C} \left\| \sum_{j=1}^n (a_j^{(k)} - a_j^{(l)}) e_j \right\| = \frac{1}{C} \|x_k - x_l\|.$$

Logo  $\{a_i^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathbb{R}$  é completo temos que esta

sequência é convergente, isto é,  $a_i^{(k)} \rightarrow a_i$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Definimos  $x = (a_1, \dots, a_n)$  os respectivos limites e podemos escrevê-lo na base, ou seja,  $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ . Basta mostrar que a sequência  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge para  $x$ .

**Afirmção:**  $x_k \rightarrow x$ .

Notamos que

$$\begin{aligned} \|x_k - x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n a_i^{(k)} e_i - \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n (a_i^{(k)} - a_i) e_i \right\| \leq D \sum_{i=1}^n |a_i^{(k)} - a_i| \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donde segue  $x_k \rightarrow x$ . ■

**Corolário 2.** *Todo subespaço  $Y$  de um espaço normado  $X$  com  $\dim Y < \infty$  é fechado em  $X$ .*

*Demonstração.* Pelo teorema (5) segue que  $Y$  é completo. Pelo teorema (2) segue que  $Y$  é fechado. ■

**Exemplo 25.** *Um contraexemplo deste corolário bastante interessante é o subespaço de  $l^2(\mathbb{R})$  definido da seguinte maneira:  $Y = \{x \in l^2(\mathbb{R}) \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall m > n \ x_m = 0\}$ . Para gerar este contraexemplo, vamos provar que  $Y$  não é fechado em  $l^2(\mathbb{R})$ , ou seja, vamos encontrar uma sequência convergente em  $Y$  cujo limite não pertence ao conjunto.*

*Para isso, considere a sequência  $x_k = (1, 1/2, 1/4, \dots, 1/k, 0, 0, \dots)$ . Claramente notamos que  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ . Seja  $x = (1, 1/2, 1/4, \dots) \notin Y$ .*

**Afirmção:**  $x_k \rightarrow x$ .

*Demonstração.* Notamos que

$$\|x - x_k\|_2 = \left\| \left( 0, \dots, 0, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots \right) \right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}} \rightarrow 0$$

pois a série em questão é convergente (via teste de comparação).

Logo,  $x_k \rightarrow x$  mas  $x \notin Y$ . Portanto,  $Y$  não é fechado em  $X$ . ■

**Teorema 6.** *Todas as normas em um espaço normado de dimensão finita são equivalentes.*

*Demonstração.* Seja  $X$  um espaço normado de dimensão finita,  $\{e_i\}_{i=1}^n$  base de  $X$  e considere duas normas quaisquer  $\|\cdot\|_a$  e  $\|\cdot\|_b$ .

Então para todo  $x \in X$  podemos representar da seguinte maneira:  $x = a_1e_1 + \dots + a_n e_n$ .

Pelo Lema (1) temos que existe  $C > 0$  tal que

$$\|x\|_b \geq C(|a_1| + \dots + |a_n|)$$

Assim, usando a desigualdade triangular, segue que

$$\|x\|_a \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \|e_i\|_a \leq \underbrace{\left(\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|_a\right)}_k \sum_{i=1}^n |a_i|$$

Portanto temos que  $\|x\|_a \leq \frac{k}{c} \|x\|_b$ . A outra desigualdade obtemos repetindo o mesmo argumento trocando os papéis das normas. ■

**Exemplo 26.** *Notamos que em espaços de dimensão infinita isso nem sempre é verdadeiro. Considere o espaço  $C([0, 1])$  e as normas do máximo e da integral apresentadas nos exemplos (14) e (16), respectivamente. Mostraremos que estas normas não são equivalentes neste espaço.*

*Para isso, seja a sequência de funções  $f_n \in C([0, 1])$  tal que  $f_n(t) = t^n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Note que*

$$\|f_n\|_{max} = \max_{t \in [0, 1]} |t^n| = 1$$

e,

$$\|f_n\| = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

*Agora suponha que as normas fossem equivalentes. Então existiria uma constante  $\alpha > 0$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$\|f_n\|_{max} \leq c\|f_n\| \implies \frac{\|f_n\|_{max}}{\|f_n\|} = n + 1 < c$$

Mas isso é impossível para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto as normas não são equivalentes em  $C[0, 1]$ .

**Teorema 7.** Se  $T : X \rightarrow Y$  é linear e  $\dim X < \infty$ , então  $T$  é limitado.

*Demonstração.* Seja  $\dim X = n$  e seja  $\{e_i\}_{i=1}^n$  base para  $X$ . Assim,  $\forall x \in X$ , podemos escrever  $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  em que  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Considere  $T : X \rightarrow Y$  um operador linear qualquer. Logo, uma vez que  $T$  é linear, segue que:

$$\|T(x)\| = \left\| T \left( \sum_{i=1}^n a_i e_i \right) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|a_i T(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \|T(e_i)\| \leq \left( \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\| \right) \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Pelo Lema (1) segue que existe  $D > 0$  tal que  $\sum_{i=1}^n |a_i| \leq D\|x\|$ . Assim, temos que

$$\|T(x)\| \leq \left( \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\| \right) \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \left( \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\| \right) D\|x\|$$

Portanto, temos que  $\|T(x)\| \leq C\|x\|$  onde  $C = D \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\|$ . ■

**Exemplo 27.** Um contraexemplo do teorema anterior é considerar o subespaço definido como  $Y = \{(x_n) \in l^p(\mathbb{R}) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |n^2 x_n|^p < \infty\} \subset l^p(\mathbb{R})$ . Note que este subespaço em questão é de dimensão infinita. Consequentemente defina o operador  $T : Y \rightarrow l^p(\mathbb{N})$  tal que

$$T(x_n) = n^2 x_n.$$

Este operador é linear, no entanto não é limitado, pois se considerarmos  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  a base canônica de  $l^p(\mathbb{R})$  teríamos que  $\|e_n\|_p = 1$ , mas  $\|T(e_n)\|_p = n^2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 28.** Outro contraexemplo é considerar  $X = \mathcal{P}([0, 1])$  o conjunto dos polinômios definidos em  $[0, 1]$  e a norma do supremo. Seja o operador derivada definido no exemplo (22). Vamos mostrar que este operador não é limitado e, consequentemente, não é contínuo.

*Demonstração.* De fato, seja o polinômio  $x_n(t) = t^n$ . Notamos que:

$$\|x_n(t)\| = \sup_{t \in [0,1]} |x_n(t)| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

e,

$$\|T(x_n(t))\| = \sup_{t \in [0,1]} |x'_n(t)| = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, ficamos com  $\|T(x_n(t))\| = n\|x_n\|$ . Como  $n \in \mathbb{N}$  é arbitrário, segue que não existe constante  $c$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  tenhamos

$$\|T(x_n)\| \leq c\|x_n\|.$$

■

## 3.2 Funcionais Lineares

**Definição 20.** Um **funcional linear** é uma aplicação linear  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  em que o domínio é um espaço normado  $X$  e o contradomínio é um corpo  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 29.** A norma  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional no entanto não é linear.

**Exemplo 30.** Considere a função  $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $T(f) = \int_a^b f(t)dt$ .  $T$  é funcional linear limitado.

*Demonstração.* De fato, não é difícil mostrar que  $T$  é linear. No entanto, para mostrarmos que  $T$  é limitado precisamos lembrar que estamos no espaço  $C([a, b])$  o qual é constituído por funções contínuas definidas em  $[a, b]$ . Logo,

$$|T(f)| = \left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq (b-a) \max_{t \in [a,b]} |f(t)| = (b-a)\|f\|_{max}.$$

Tomando o supremo sobre todos  $f \in C([a, b])$  com norma 1 obtemos, por definição, que  $\|T\| \leq (b-a)$ . Logo,  $T$  é limitada. ■

Um conceito muito importante é o conceito de funcional sublinear.

**Definição 21.** Um **funcional sublinear** é uma aplicação  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $X$  é um espaço vetorial e que satisfaz

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X.$$

$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall \alpha \geq 0, \forall x \in X.$$

**Exemplo 31.** A norma  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional sublinear.

### 3.3 Extensão de Operadores Lineares

**Definição 22.** Seja  $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$  um operador linear definido no subespaço  $\mathcal{D}(T) \subset X$  onde  $X, Y$  são espaços normados. Definimos uma extensão de  $T$  como sendo  $\tilde{T}$  um operador definido no subespaço  $\mathcal{D}(\tilde{T}) \supseteq \mathcal{D}(T)$  tal que  $\tilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$ , ou seja,  $\tilde{T}(x) = T(x)$ ,  $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ .

**Observação 11.** Em espaços normados de dimensão finita, extensões lineares de um subespaço para todo o espaço são feitas através de sua base. Por exemplo, considere  $\{e_i\}$  uma base de Hamel para o subespaço  $Z \subset X$  e  $\{e_i\} \cup \{h_j\}$  uma base de Hamel para espaço  $X$ . Dado um funcional  $f$  definido em  $Z$  queremos um funcional que estenda  $f$  para todo o espaço  $X$ . Para isso, para qualquer coleção de escalares  $\{\alpha_k\}$ , definimos o funcional  $F$  como sendo (as somas a seguir são finitas)

$$F \left( \sum_i a_i e_i + \sum_j b_j h_j \right) = f \left( \sum_i a_i e_i \right) + \sum_j b_j \alpha_j$$

$F$  é extensão linear de  $f$  a todo espaço  $X$ .

Aqui está um teorema que nos garante que podemos estender um operador linear definido em um subespaço a seu fecho preservando sua norma.

**Teorema 8.** Seja  $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$  operador linear limitado definido no subespaço  $\mathcal{D}(T) \subset X$  onde  $X$  é um espaço normado e  $Y$  espaço de Banach. Então existe uma extensão  $\tilde{T}$  definida em  $\overline{\mathcal{D}(T)}$  em que  $\tilde{T}$  é um operador linear limitado com  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$ . Pelo teorema (4) existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{D}(T)$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Em particular,  $x_n$  é sequência de Cauchy. Uma vez que  $T$  é linear e limitado temos que:

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\|.$$

Isto nos mostra que a sequência  $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  em  $Y$  é sequência de Cauchy. Como, por hipótese,  $Y$  é completo então existe  $y_0 \in Y$  tal que  $T(x_n) \rightarrow y_0$ . Assim, defina  $\tilde{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \rightarrow Y$  como sendo  $\tilde{T}(x) = y_0$ .

**Afirmção 1:**  $\tilde{T}$  está bem definido.

*Demonstração.* Isso significa mostrar que a definição independe da escolha da sequência em  $\mathcal{D}(T)$ . Para isso, dado  $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$  e suponha que exista  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequências convergindo para  $x$ . Construa a sequência  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  da seguinte forma:  $(z_1, w_1, z_2, w_2, \dots)$ . Note que  $v_m \rightarrow x$ . Como  $T$  é limitado, pela proposição (6), segue que a sequência  $(T(v_m))_{m \in \mathbb{N}}$  é convergente. Sabemos que subsequências de sequências convergentes são também convergentes. Isso significa dizer que as subsequências  $(T(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(T(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$  são convergentes e necessitam convergir para o mesmo limite. Assim  $\tilde{T}$  está bem definido para todo  $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$ . ■

**Afirmção 2:**  $\tilde{T}$  é extensão linear limitada.

*Demonstração.* Claramente  $\tilde{T}$  é linear e  $\tilde{T}(x) = T(x)$ ,  $\forall x \in \mathcal{D}(T)$ , isto é,  $\tilde{T}$  é extensão de  $T$ . Basta provar que  $\tilde{T}$  é limitada. Para isso, usaremos o fato de que  $\|T(x_n)\| \leq \|T\| \|x_n\|$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Com isso, tomando  $n \rightarrow \infty$  temos que  $T(x_n) \rightarrow y_0 = \tilde{T}(x)$ . Como a norma é uma aplicação contínua obtemos  $\|\tilde{T}(x)\| \leq \|T\| \|x\|$ . Portanto  $\tilde{T}$  é limitada e  $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$ . Por outro lado, como  $\tilde{T}$  é extensão e por definição de norma temos que  $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$ , concluindo que  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ . ■

### 3.4 Espaços Duais

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados. Considere o conjunto dos operadores lineares limitados de  $X$  em  $Y$ , que denotaremos por  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

Será que este espaço tem estrutura de um espaço normado? A resposta é sim.

Assim, dados  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  definimos o operador soma como sendo

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x), \forall x \in X$$



e o produto por escalar sendo como

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x), \forall x \in X.$$

Assim  $\mathcal{L}(X, Y)$  tem estrutura de espaço vetorial. Lembrando do que vimos anteriormente temos que a norma neste espaço é definida como  $\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|T(x)\|$ . Isto é, temos uma estrutura fixa de espaço normado. Será que podemos ir além disso e nos perguntarmos se este espaço é de Banach? A resposta está no teorema a seguir.

**Teorema 9.** *Se  $Y$  é espaço de Banach então  $\mathcal{L}(X, Y)$  é espaço de Banach.*

*Demonstração.* Considere  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Então,  $\forall \epsilon_1 > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall m, n > n_0$  temos

$$\|T_m - T_n\| < \epsilon_1.$$

Observe que  $\forall x \in X$  temos que

$$\|T_m(x) - T_n(x)\| = \|(T_m - T_n)(x)\| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| \leq \epsilon_1 \|x\|, \quad \forall m, n > n_0 \quad (3.2)$$

Agora para cada  $x \in X$  fixado e dado  $\epsilon > 0$  tome  $\epsilon_1$  tal que  $\epsilon_1 \|x\| < \epsilon$ . Por (3.2) temos que para cada  $x \in X$ ,  $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy em  $Y$ . Como  $Y$  é completo então existe  $T(x) \in Y$  tal que  $T_n(x) \rightarrow T(x)$ . Perceba que o limite  $T(x)$  depende exclusivamente da escolha de  $x \in X$ . Assim, defina o operador  $T : X \rightarrow Y$  tal que  $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ . Vamos mostrar que  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  e  $T_n$  converge para  $T$  em  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

**Afirmção 1:**  $T$  é linear.

*Demonstração.* Dados  $x, y \in X$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  temos que

$$T(x + \alpha y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x + \alpha y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(y) = T(x) + \alpha T(y)$$

■

**Afirmção 1:**  $T$  é limitada.

*Demonstração.* Usando (3.2) e a continuidade da norma temos que  $\forall n > n_0$  e  $\forall x \in X$

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \|T_n(x) - \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T_n(x) - T_k(x)\| \leq \epsilon_1 \|x\|.$$

Isto mostra que o operador  $T_n - T$  é limitado. Uma vez que  $\forall n \in \mathbb{N}$  temos  $T_n$  limitado então  $T = T_n - (T_n - T)$  é limitado. Portanto  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

Finalmente, notamos que por definição, temos que

$$\|T_n - T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T_n(x) - T(x)\|}{\|x\|} \leq \epsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Logo,  $T_n \rightarrow T$  em  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

■

**Definição 23.** *Seja  $X$  espaço normado. Definimos o **espaço dual** de  $X$ , denotado por  $X'$ , como sendo o conjunto dos funcionais lineares contínuos de  $X$  em  $\mathbb{R}$ .*

**Observação 12.** *Como  $\mathbb{R}$  é completo temos que o espaço dual é um espaço de Banach.*

Vamos ilustrar alguns exemplos de espaços duais omitindo qualquer demonstração.

**Exemplo 32.** *O espaço dual de  $\mathbb{R}^n$  é  $\mathbb{R}^n$ . Demonstração pode ser encontrada em ([1], pag. 121).*

**Exemplo 33.** *O espaço dual de  $l^1(\mathbb{R})$  é o  $l^\infty(\mathbb{R})$ . Demonstração pode ser encontrada em ([1], pag. 121).*

**Exemplo 34.** *O espaço dual de  $l^p(\mathbb{R})$  é o  $l^q(\mathbb{R})$ . Demonstração pode ser encontrada em ([1], pag. 122).*

## 4 Lema de Zorn

Além de todos os conceitos apresentados até momento, a demonstração do teorema de Hahn-Banach requer o uso de uma forma de indução transfinita baseada em um dos axiomas mais importantes da teoria dos conjuntos: o **Lema de Zorn**. Equivalente ao Axioma da Escolha, o Lema de Zorn é um princípio de maximalidade em conjuntos parcialmente ordenados e certamente é um dos mais difundidos.

Nesta capítulo apresentaremos alguns conceitos importantes com o objetivo de enunciar este importante axioma.

**Definição 24.** Um *conjunto parcialmente ordenado* é um par  $(M, \preceq)$  onde  $M$  é um conjunto no qual existe uma ordenação parcial, ou seja, uma relação binária denotada por  $\preceq$  que satisfaz as seguintes condições:

PO1)  $a \preceq a, \forall a \in M.$  (Reflexiva)

PO2) Se  $a \preceq b$  e  $b \preceq a$  então  $a = b, \forall a, b \in M.$  (Antissimétrica)

PO3) Se  $a \preceq b$  e  $b \preceq c$  então  $a \preceq c, \forall a, b, c \in M.$  (Transitiva)

O termo “parcial” aparece pois não sabemos ao certo se todos os elementos são comparáveis. Caso existam  $a$  e  $b$  elementos de  $M$  o qual não vale  $a \preceq b$  e nem  $b \preceq a$ , esses elementos são chamados de **elementos incomparáveis**. Em contraste, dois elementos são chamados de **elementos comparáveis** se eles satisfizerem  $a \preceq b$  ou/e  $b \preceq a$ .

**Definição 25.** Um conjunto é dito *conjunto totalmente ordenado* se for parcialmente ordenado tal que quaisquer dois elementos do conjunto são comparáveis.

A partir do momento que podemos ”comparar” elementos de um conjunto, uma pergunta natural surge: Será que dado um conjunto podemos saber se existe algum elemento que é maior do que todos? Seguem duas definições importantes neste contexto.

**Definição 26.** *Seja  $M$  um conjunto parcialmente ordenado. Então:*

1. Um **limitante superior** de um subconjunto  $A \subseteq M$  é um elemento  $a \in M$  tal que  $x \preceq a, \forall x \in A$ . De maneira análoga definimos um **limitante inferior**.
2. Um **elemento maximal** em  $M$  é um elemento  $a \in M$  tal que  $\forall x \in M$  com  $a \preceq x$  temos  $a = x$ . De maneira análoga definimos um **elemento mínimo**.

Vejamos alguns exemplos para fixarmos as ideias apresentadas até então.

**Exemplo 35.** *Considere o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a ordenação usual.  $(\mathbb{R}, \leq)$  é um conjunto totalmente ordenado o qual não possui elemento maximal.*

**Exemplo 36.** *Seja  $\mathcal{P}(X)$  o conjunto das partes de  $X$  com a ordenação parcial inclusão, isto é, dados  $A, B \in \mathcal{P}(X)$ ,  $A \preceq B$  se, e somente se,  $A \subset B$ . Assim  $(\mathcal{P}(X), \preceq)$  define um conjunto parcialmente ordenado. Observe que se  $X$  tiver mais de um elemento esta ordem não é total pois dados  $x, y \in X$  temos que  $\{x\} \not\subseteq \{y\}$  e  $\{y\} \not\subseteq \{x\}$ . Além disso, o único elemento maximal neste caso é o  $X$ .*

**Axioma 1 (Lema de Zorn).** *Um conjunto não vazio parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui um limite superior, possui um elemento maximal.*

Vejamos um resultado bastante interessante que exemplifica a aplicação do Lema de Zorn.

**Teorema 10.** *Todo espaço vetorial não vazio admite base de Hamel.*

*Demonstração.* Seja  $X$  um espaço vetorial não vazio e considere  $M$  o conjunto de todos os subconjuntos linearmente independentes de  $X$ . Claramente  $M \neq \emptyset$  pois  $X \neq \emptyset$ . Defina uma ordenação parcial em  $M$  dada pela inclusão de conjuntos, isto é, dados  $A, B \subset M$ ,  $A \preceq B$  se, e somente se,  $A \subset B$ . Seja  $C \subset M$  um subconjunto totalmente ordenado e considere  $W$  a união de todos elementos de  $C$ . A união de subconjuntos linearmente independentes nem sempre é linearmente independente mas neste caso será pois estamos tratando de subconjuntos linearmente independentes com uma ordem parcial dada. Portanto  $W$  é um limitante superior de  $C$ . Aplicando o Lema de Zorn temos que  $M$  possui um elemento maximal denotado por  $N$ . Basta provar que  $N$  é base de Hamel para  $X$ .

**Afirmção:**  $N$  é base de Hamel para  $X$ .

Seja  $Y = \text{span}\{N\}$ . É claro que  $Y \subseteq X$ . Se  $Y \neq X$  existe  $0 \neq x \in X \setminus Y$ . Mas se tomarmos o conjunto  $N \cup \{x\}$  teríamos um conjunto linearmente independente contendo propriamente  $N$ , o que contradiria sua maximalidade. Portanto  $Y = X$  e  $N$  é uma base de Hamel para  $X$ . ■

## 5 Teorema de Hahn-Banach

Este capítulo é dedicado exclusivamente a demonstração do Teorema de Hahn-Banach variante real. Sua primeira versão apareceu no trabalho de Eduard Helly em 1922 mas foi amplamente conhecida devido aos trabalhos de Hans Hahn em 1927 e, de forma mais geral, de Stefan Banach em 1929. O Teorema de Hahn-Banach é um resultado sobre extensões de funcionais lineares definidos em subespaços a todo espaço vetorial. Aplicações importantes como a noção de operador adjunto e convergência fraca fazem do teorema um dos resultados mais importantes de análise funcional. Em seu trabalho Banach usou o funcional sublinear  $p$ , até então não utilizado, com o intuito de generalizar o teorema e contribuir no desenvolvimento da teoria dos espaços localmente convexos. Sua variante complexa surgiu aproximadamente uma década após a variante real e pode ser demonstrada utilizando este teorema, bastando relacionar funcionais lineares complexos com os reais.

Iniciamos nossa demonstração com o seguinte lema:

**Lema 2.** *Seja  $X$  um espaço vetorial real e  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional sublinear. Seja  $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$  funcional linear definido em um subespaço vetorial próprio  $Z \subset X$  tal que  $f$  é dominado por  $p$ , isto é,  $f(x) \leq p(x)$ ,  $\forall x \in Z$ . Dado  $x_0 \in X \setminus Z$  existe  $g$  extensão linear de  $f$  definida no subespaço  $\text{span}\{Z \cup \{x_0\}\}$  tal que  $g$  é dominado por  $p$ , ou seja,  $g(x) \leq p(x)$   $\forall x \in \text{span}\{Z \cup \{x_0\}\}$ .*

*Demonstração.* Seja  $x_0 \in X \setminus Z$  e considere o subespaço  $Y \subseteq X$  como sendo o subespaço gerado por  $Z \cup \{x_0\}$ . Note que  $x_0 \neq 0$  pois  $0 \in Z$ . Logo,  $\forall x \in Y$  podemos escrever  $x = z + \alpha x_0$  com  $z \in Z$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Afirmção 1:** Esta representação é única.

*Demonstração.* De fato, sejam duas representações de  $Y$  dadas por  $z + \alpha x_0 = \hat{z} + \beta x_0$  com  $z, \hat{z} \in Z$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Isso implica que  $z - \hat{z} = (\beta - \alpha)x_0$ . Notamos que  $z - \hat{z} \in Z$

porém  $x_0 \notin Z$ . Assim só existe uma única solução  $z - \hat{z} = 0$  e  $\beta - \alpha = 0$ . Portanto, a representação é única. ■

Esta representação única será importante para definirmos o candidato a extensão linear de  $f$ .

Com isso, dados  $y, z \in Z$  temos

$$f(y) - f(z) = f(y - z) \leq p(y - z) = p(y + x_0 - x_0 - z) \leq p(y + x_0) + p(-x_0 - z)$$

Isso implica que

$$-p(-x_0 - z) - f(z) \leq p(y + x_0) - f(y) \quad (5.1)$$

Como do lado esquerdo da desigualdade (5.1) não temos dependência de  $y$  e do lado direito não temos dependência de  $z$  então a desigualdade continua valendo se tomarmos o supremo sobre  $z \in Z$  do lado esquerdo e o ínfimo sobre  $y \in Z$  do lado direito. Isso é importante para garantir mais adiante que essa desigualdade vale para todo elemento em  $Z$ .

Logo, tome  $c$  um número real tal que:

$$\underbrace{\sup_{z \in Z} \{-p(-x_0 - z) - f(z)\}}_{d_1} \leq c \leq \underbrace{\inf_{y \in Z} \{p(y + x_0) - f(y)\}}_{d_2} \quad (5.2)$$

Portanto defina o funcional  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo

$$g(z + \alpha x_0) = f(z) + \alpha c$$

**Afirmção 2:**  $g$  é linear.

*Demonstração.* Basta observar que  $f$  é linear e, por definição, temos que  $g$  é linear. ■

**Afirmção 3:**  $g$  é extensão de  $f$ .

*Demonstração.* Repare que para  $\alpha = 0$  temos que  $g(z) = f(z)$ ,  $\forall z \in Z$ . Segue que  $g$  tem a propriedade de ser extensão de  $f$ . ■

**Afirmção 4:**  $g$  é dominado por  $p$ .

*Demonstração.* Para isso temos que provar que  $g(x) \leq p(x), \forall x \in Y$ . Para facilitar, vamos dividir esta afirmação em 3 casos.

**Caso 1)**  $\alpha < 0$ .

Seja  $x = z + \alpha x_0 \in Y$ . Pela desigualdade (5.2) temos que  $d_1 \leq c$ . Tomando o vetor  $\frac{z}{\alpha} \in Z$  segue que:

$$-p(-x_0 - \frac{z}{\alpha}) - f(\frac{z}{\alpha}) \leq c$$

Multiplicando por  $-\alpha > 0$  dos dois lados

$$\alpha p(-x_0 - \frac{z}{\alpha}) + \alpha f(\frac{z}{\alpha}) \leq -\alpha c \implies \alpha f(\frac{z}{\alpha}) + \alpha c \leq -\alpha p(-x_0 - \frac{z}{\alpha})$$

Como  $f$  é linear

$$f(z) + \alpha c \leq -\alpha p(-x_0 - \frac{z}{\alpha})$$

Como  $p$  é sublinear

$$f(z) + \alpha c \leq p(\alpha x_0 + z) \tag{5.3}$$

Portanto, pela desigualdade (5.3), obtemos

$$g(x) = g(z + \alpha x_0) = f(z) + \alpha c \leq p(z + \alpha x_0) = p(x)$$

**Caso 2)**  $\alpha = 0$ .

Neste caso temos  $x \in Z$  e portanto  $g(x) = f(x) \leq p(x)$ .

**Caso 3)**  $\alpha > 0$ .

Este caso se torna inteiramente análogo utilizando a outra parte da desigualdade (5.2).

Seja  $x = z + \alpha x_0 \in Y$ . Pela desigualdade (5.2) temos que  $c \leq d_2$ . Tomando o vetor  $\frac{z}{\alpha} \in Z$  segue que:



$$c \leq p\left(\frac{z}{\alpha} + x_0\right) - f\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

Multiplicando por  $\alpha > 0$  dos dois lados

$$\alpha c \leq \alpha p\left(\frac{z}{\alpha} + x_0\right) - \alpha f\left(\frac{z}{\alpha}\right) \implies \alpha f\left(\frac{z}{\alpha}\right) + \alpha c \leq \alpha p\left(\frac{z}{\alpha} + x_0\right)$$

Como  $f$  é linear

$$f(z) + \alpha c \leq \alpha p\left(\frac{z}{\alpha} + x_0\right)$$

Como  $p$  é sublinear

$$f(z) + \alpha c \leq p(z + \alpha x_0) \tag{5.4}$$

Portanto, pela desigualdade (5.4), obtemos

$$g(x) = g(z + \alpha x_0) = f(z) + \alpha c \leq p(z + \alpha x_0) = p(x)$$

■

Finalmente iremos demonstrar o teorema de Hahn-Banach variante real. Enunciaremos e demonstraremos mais duas versões do teorema com o objetivo de complementar o estudo. Uma versão generalizará de certa forma o teorema principal e a segunda versão nos proporcionará uma visão do teorema sobre os espaços normados.

**Teorema 11 (Teorema de Hahn-Banach Real).** *Seja  $X$  um espaço vetorial real e  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional sublinear. Seja  $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$  funcional linear definido em um subespaço vetorial  $Z \subset X$  tal que  $f$  é dominado por  $p$ , isto é,  $f(x) \leq p(x)$ ,  $\forall x \in Z$ . Então  $f$  possui uma extensão linear  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  que é dominada por  $p$ , ou seja,  $F$  satisfaz  $F(x) \leq p(x)$ ,  $\forall x \in X$ .  $F$  é dita ser extensão de Hahn-Banach de  $f$ .*

*Demonstração.* Considere  $E$  o conjunto de todos os pares da forma  $(\mathcal{D}(g), g)$  onde  $\mathcal{D}(g)$  é subespaço de  $X$  e  $g : \mathcal{D}(g) \rightarrow \mathbb{R}$  extensão linear de  $f$  dominada por  $p$ . Isto significa dizer que  $g$  satisfaz  $g(x) \leq p(x)$ ,  $\forall x \in \mathcal{D}(g)$  e  $g|_Z = f$ . Claramente  $E \neq \emptyset$  pois  $(Z, f) \in E$ . Observe que os elementos do conjunto  $E$  são pares constituídos de conjuntos e extensões

lineares o qual nos permite ter uma ideia intuitiva de comparação de elementos. Assim definimos uma ordem parcial no conjunto  $E$  dada por:  $(\mathcal{D}(g), g) \preceq (\mathcal{D}(h), h)$  se, e somente se,  $\mathcal{D}(g) \subset \mathcal{D}(h)$  e  $h|_{\mathcal{D}(g)} = g$  ( $h$  extensão linear de  $g$ ). Portanto construímos um conjunto parcialmente ordenado. Mas afinal qual o objetivo de construir este conjunto? O intuito de toda essa construção é utilizar o Lema de Zorn e conseguir um candidato para ser a extensão linear que queremos.

Então dado um conjunto  $C \subset E$  totalmente ordenado queremos encontrar um limitante superior. Para isso, definimos o candidato  $(\mathcal{D}(\hat{g}), \hat{g})$  de forma que  $\mathcal{D}(\hat{g}) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{D}(g_i)$  e  $\hat{g} : \mathcal{D}(\hat{g}) \rightarrow \mathbb{R}$  funcional linear tal que  $\hat{g}|_{\mathcal{D}(g_i)} = g_i, \forall i \in I$  ( $I$  conjunto de índices). Vamos mostrar que o candidato  $(\mathcal{D}(\hat{g}), \hat{g})$  é realmente o limitante superior de  $C$ .

**Afirmção 1:**  $\mathcal{D}(\hat{g})$  é subespaço vetorial de  $X$ .

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in \mathcal{D}(\hat{g})$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então existem  $(\mathcal{D}(g_1), g_1), (\mathcal{D}(g_2), g_2) \in C$  tal que  $x \in \mathcal{D}(g_1)$  e  $y \in \mathcal{D}(g_2)$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $(\mathcal{D}(g_1), g_1) \preceq (\mathcal{D}(g_2), g_2)$ . Então  $x \in \mathcal{D}(g_1) \subset \mathcal{D}(g_2)$  e também  $\lambda y \in \mathcal{D}(g_2)$ . Assim,  $x + \lambda y \in \mathcal{D}(g_2) \subset \mathcal{D}(\hat{g})$ . ■

**Afirmção 2:**  $\hat{g}$  está bem definido.

*Demonstração.* Suponha que exista  $x \in \mathcal{D}(g_1) \cap \mathcal{D}(g_2)$  com  $(\mathcal{D}(g_1), g_1), (\mathcal{D}(g_2), g_2) \in C$ . Como  $\mathcal{D}(g_1) \cap \mathcal{D}(g_2) \subset \mathcal{D}(g_1)$  e  $\mathcal{D}(g_1) \cap \mathcal{D}(g_2) \subset \mathcal{D}(g_2)$  segue que ou  $(\mathcal{D}(g_1) \cap \mathcal{D}(g_2), g_1) \preceq (\mathcal{D}(g_2), g_2)$  ou  $(\mathcal{D}(g_1) \cap \mathcal{D}(g_2), g_2) \preceq (\mathcal{D}(g_1), g_1)$ . Ambos os casos temos que  $g_1(x) = g_2(x), \forall x \in \mathcal{D}(g_1) \cap \mathcal{D}(g_2)$ . Portanto  $\hat{g}$  está bem definida. ■

**Afirmção 3:**  $\hat{g}$  é funcional linear.

*Demonstração.* Seja  $x, y \in \mathcal{D}(\hat{g})$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então existem  $(\mathcal{D}(g_1), g_1), (\mathcal{D}(g_2), g_2) \in C$  tal que  $x \in \mathcal{D}(g_1)$  e  $y \in \mathcal{D}(g_2)$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $(\mathcal{D}(g_1), g_1) \preceq (\mathcal{D}(g_2), g_2)$ . Como já vimos, temos que  $x + \lambda y \in \mathcal{D}(\hat{g})$ . Como  $\hat{g}|_{\mathcal{D}(g_2)} = g_2$  segue que  $\hat{g}(x + \lambda y) = g_2(x + \lambda y) = g_2(x) + \lambda g_2(y) = \hat{g}(x) + \lambda \hat{g}(y)$ . Logo  $\hat{g}$  é linear. ■

Observamos que, por definição,  $\hat{g}$  é extensão de  $g_i, \forall i \in I$ . Portanto obtemos que  $(\mathcal{D}(g_i), g_i) \preceq (\mathcal{D}(\hat{g}), \hat{g}), \forall i \in I$ . Segue então que  $(\mathcal{D}(\hat{g}), \hat{g})$  é um limitante superior de  $C$ . Aplicando o Lema de Zorn temos que  $E$  possui um elemento maximal denotado por  $(\mathcal{D}(F), F)$ . Note que por definição do próprio conjunto  $E$ , já temos que  $F$  é extensão linear de  $f$  dominada por  $p$ . Falta mostrar que o domínio da  $F$  é todo espaço vetorial  $X$ .

**Afirmação 4:**  $\mathcal{D}(F) = X$ .

*Demonstração.* Suponha que seja falso. Então existe  $x_0 \in X \setminus \mathcal{D}(F)$ . Pelo lema 2 existe  $g$  extensão linear de  $F$  dominada por  $p$ , ou seja,  $\exists (\mathcal{D}(g), g) \in E$  tal que  $(\mathcal{D}(F), F) \preceq (\mathcal{D}(g), g)$ . Isto contradiz o fato de  $(\mathcal{D}(F), F)$  ser elemento maximal de  $E$ . Segue que  $\mathcal{D}(F) = X$ .

■

**Teorema 12 (Teorema de Hahn-Banach Real Generalizado).** *Seja  $X$  um espaço vetorial real e  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional o qual satisfaz:*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X \quad (5.5)$$

$$p(\alpha x) = |\alpha|p(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X \quad (5.6)$$

*Seja  $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$  funcional linear definido em um subespaço vetorial  $Z \subset X$  tal que*

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in Z \quad (5.7)$$

*Então  $f$  possui uma extensão linear  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $|F(x)| \leq p(x), \forall x \in X$ .*

*Demonstração.* Não é difícil mostrar usando o teorema anterior. Basta notar que por (5.7) temos que  $|f(x)| \leq p(x), \forall x \in Z$  o que implica que  $f(x) \leq p(x), \forall x \in Z$ . Assim usando o Teorema de Hahn-Banach (11) existe  $F$  extensão linear de  $f$  definida em todo  $X$  satisfazendo  $F(x) \leq p(x), \forall x \in X$ .

Por outro lado, usando (5.6) obtemos que  $\forall x \in X$

$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x) \implies F(x) \geq -p(x).$$

Concluimos então que  $|F(x)| \leq p(x), \forall x \in X$ .

■

**Teorema 13 (Teorema de Hahn-Banach para Espaços Normados).** *Seja  $X$  um espaço normado e  $f$  um funcional linear limitado definido em um subespaço  $Z$  de  $X$ . Então existe  $F$  funcional linear limitado definido em todo o espaço  $X$  tal que  $F$  é extensão de  $f$  o qual preserva norma, isto é, satisfaz*

$$\|F\|_X = \|f\|_Z$$

onde

$$\|F\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |F(x)| \quad e \quad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

*Demonstração.* Caso  $Z = \{0\}$  é trivial pois temos  $f = 0$  e sua extensão será  $F = 0$ .

Então seja  $Z \neq \{0\}$ . Queremos usar o teorema (12). Para isso, temos que descobrir um funcional  $p$  satisfazendo as propriedades do teorema (12). Sabemos que, para todo  $x \in Z$  temos  $|f(x)| \leq \|f\|_Z \|x\|$ . Assim obtemos uma ideia para o nosso funcional linear  $p$ .

Definimos o funcional  $p$  como sendo

$$p : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } p(x) = \|f\|_Z \|x\|.$$

■

**Afirmção 1:**  $p$  satisfaz as condições do teorema (12).

*Demonstração.* Notamos que, pela desigualdade triangular, obtemos

$$p(x + y) = \|f\|_Z \|x + y\| \leq \|f\|_Z (\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y).$$

Também,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  temos que

$$p(\alpha x) = \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha| \|f\|_Z \|x\| = |\alpha| p(x).$$

■

Agora podemos usar o teorema (12). Assim, existe  $F$  funcional linear definida em  $X$  o qual é extensão de  $f$  e satisfaz

$$|F(x)| \leq p(x) = \|f\|_Z \|x\|, \quad \forall x \in X \tag{5.8}$$

Basta mostrar que  $F$  preserva a norma. Logo, tomando o supremo em (5.8) sobre todos  $x \in X$  com norma 1 obtemos

$$\|F\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |F(x)| \leq \|f\|_Z.$$

Por outro lado, como  $F$  é extensão de  $f$  e por definição de norma temos que  $\|F\|_X \geq \|f\|_Z$ . Portanto obtemos que  $\|F\|_X = \|f\|_Z$ . ■

A seguir, apresentaremos algumas aplicações do teorema de Hahn-Banach relacionados com os assuntos vistos até então.

**Teorema 14.** *Seja  $X$  espaço normado e  $x_0 \in X \setminus \{0\}$ . Então existe  $g$  funcional linear limitado definido em  $X$  tal que  $g(x_0) = \|x_0\|$  e  $\|g\|_X = 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $X$  espaço normado e  $x_0$  um elemento de  $X$  não nulo. Considere o subespaço  $Z = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  de  $X$ . Neste subespaço defina o funcional linear  $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$ .

Observe que  $\forall y \in Z$  temos que

$$|f(y)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|y\|$$

Esta observação nos diz que  $\|f\|_Z = 1$ , isto é,  $f$  é limitada. Com isso, pelo teorema (13) existe  $g$  funcional linear limitado definido em todo o espaço  $X$  tal que  $g$  é extensão de  $f$  e, mais do que isso,  $\|g\|_X = \|f\|_Z = 1$ . Finalmente observamos que pela definição do funcional  $f$  e por  $g$  ser extensão linear de  $f$ , segue que  $g(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$ . ■

**Teorema 15.** *Seja  $X, Y$  espaços normados em que  $X \neq \{0\}$ . Se  $\mathcal{L}(X, Y)$  é espaço de Banach então  $Y$  é espaço de Banach.*

*Demonstração.* Seja  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência de Cauchy em  $Y$ . Dado  $x_0 \in X \setminus \{0\}$  fixado, pelo teorema (14), existe  $g_{x_0} \in X'$  tal que  $g_{x_0}(x_0) = \|x_0\|$  e  $\|g_{x_0}\| = 1$ .

Primeiramente, considere as aplicações  $T_n : \mathbb{R} \rightarrow Y$  tal que  $T_n(\lambda) = \lambda y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Claramente observamos que  $\forall n \in \mathbb{N}, T_n$  é linear e  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  temos

$$\|T_n(\lambda)\| = \|\lambda y_n\| = |\lambda| \|y_n\| \Rightarrow \|T_n\| = \sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \neq 0}} \frac{\|T_n(\lambda)\|}{|\lambda|} = \|y_n\|.$$

Como  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy em  $Y$  então  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada. Pela observação acima, isso implica que os operadores  $T_n$  são limitados. Com isso, temos que  $T_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Agora, considere os operadores  $T_n \circ g_{x_0} : X \rightarrow Y$  tal que  $(T_n \circ g_{x_0})(x) = \frac{\|g_{x_0}(x)\| y_n}{\|x_0\|}$ . Vamos mostrar que  $T_n \circ g_{x_0} \in \mathcal{L}(X, Y)$  e, posteriormente, que estes operadores são de fato sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

Certamente  $T_n \circ g_{x_0}$  é linear pois  $T_n$  e  $g_{x_0}$  são lineares,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Afirmção 1:**  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n \circ g_{x_0}$  é limitada.

*Demonstração.* Basta notar que  $\forall x \in X$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \|(T_n \circ g_{x_0})(x)\| &= \left\| \frac{\|g_{x_0}(x)\| y_n}{\|x_0\|} \right\| = \|g_{x_0}(x)\| \frac{\|y_n\|}{\|x_0\|} \leq \underbrace{\|g_{x_0}\|}_1 \|x\| \frac{\|y_n\|}{\|x_0\|} \Rightarrow \\ \|T_n \circ g_{x_0}\| &= \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|(T_n \circ g_{x_0})(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{\|y_n\|}{\|x_0\|} \end{aligned}$$

Pela mesma observação que usamos anteriormente, como  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy em  $Y$  então  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada. Portanto,  $T_n \circ g_{x_0}$  é limitada,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . ■

Concluimos então que  $T_n \circ g_{x_0} \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Afirmção 2:**  $(T_n \circ g_{x_0})_{n \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

*Demonstração.* Como  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy em  $Y$  então  $\|y_m - y_n\| \rightarrow 0$  quando  $m, n \rightarrow \infty$ .

Logo  $\forall x \in X$ ,

$$\|(T_m \circ g_{x_0})(x) - (T_n \circ g_{x_0})(x)\| = \frac{\|g_{x_0}(x)\|}{\|x_0\|} \|y_m - y_n\| \leq \underbrace{\|g_{x_0}\|}_1 \frac{\|x\|}{\|x_0\|} \|y_m - y_n\| \Rightarrow$$

$$\|T_m \circ g_{x_0} - T_n \circ g_{x_0}\| \leq \frac{\|y_m - y_n\|}{\|x_0\|} \rightarrow 0 \text{ quando } m, n \rightarrow \infty.$$

Portanto  $(T_n \circ g_x)_{n \in \mathbb{N}}$  é sequência de Cauchy em  $\mathcal{L}(X, Y)$ . ■

Finalmente, usando a hipótese de que  $\mathcal{L}(X, Y)$  é de Banach então existe  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  tal que  $T_n \circ g_{x_0} \rightarrow T$  em  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

Isso significa que dado  $\epsilon_1 > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|T_n \circ g_{x_0} - T\| < \epsilon_1, \forall n > n_0$ . Isso implica que  $\forall x \in X$

$$\|(T_n \circ g_{x_0})(x) - T(x)\| \leq \|T_n \circ g_{x_0} - T\| \|x\| < \epsilon_1 \|x\|. \quad (5.9)$$

Assim, dado  $\epsilon > 0$ , tome  $\epsilon_1$  de modo que  $\epsilon_1 \|x_0\| < \epsilon$ . Como a equação anterior (5.9) vale  $\forall x \in X$ , em particular vale para  $x_0$ . Logo,

$$\|y_n - T(x_0)\| = \|(T_n \circ g_{x_0})(x_0) - T(x_0)\| \leq \|T_n \circ g_{x_0} - T\| \|x_0\| < \epsilon_1 \|x_0\| < \epsilon$$

Portanto  $y_n \rightarrow T(x_0) \in Y$ . Logo  $Y$  é espaço de Banach. ■

## *Conclusão*

Começamos o trabalho no aspecto de revisão de análise e topologia com o intuito de chegarmos aos espaços normados, grande foco do trabalho. Introduzimos noções de topologia e convergência de sequências bastantes utilizadas em grande parte do trabalho para provarmos se certos espaços eram espaços de Banach ou não.

No avanço dos estudos de espaços normados percebemos que as dimensões dos espaços nos davam grandes exemplos e contraexemplos de resultados bastante interessantes. Espaços normados de dimensão finita nos garantem normas equivalentes, completamento e operadores limitados. Porém em espaço de dimensão infinita mudamos nossos conceitos e aprimoramos nossos conhecimentos devido a contraexemplos bastante interessantes.

A partir de toda essa introdução dentro do contexto do teorema principal surge um fato marcante e curioso: não é simplesmente a existência da extensão do funcional linear que o teorema garante mas sim a existência de um funcional linear definido em todo o espaço  $E$ , mais do que isso, dominado por  $p$ . Aplicações interessantes surgem a partir deste teorema como a garantia de funcionais lineares não-nulos, por exemplo. Outra aplicação deste teorema - demonstrada no trabalho - é a recíproca do teorema (9), isto é, se  $\mathcal{L}(X, Y)$  é de Banach então  $Y$  é de Banach. Isso motiva e incorpora o estudo de espaços reflexivos, convergência fraca e operadores adjuntos.



## *Referências*

- [1] KREYSZIG, Erwin; **Introductory functional analysis with applications**; John Wiley & Sons. Inc., 1978. 688p.
- [2] OLIVEIRA, César R. de; **Introdução à análise funcional**; César R. de Oliveira, Rio de Janeiro: IMPA, 2010. 257p.
- [3] LIMA, Elon Lages; **Elementos de Topologia Geral**; Elon Lages Lima, Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009. 297p.
- [4] LIUSTERNIK, Lazar Aronovich; **Elements of functional analysis**; Lazar Aronovich Liusternik. 227p.
- [5] SUNDER, Viakalathur S.; **Functional analysis: spectral theory**; V. S. Sunder. - Basel, Boston: 1998. 241p.