

DJEISON MACHADO

PROPOSTAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DO NÚMERO π

FLORIANÓPOLIS, 2013.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA (NOTURNO)**

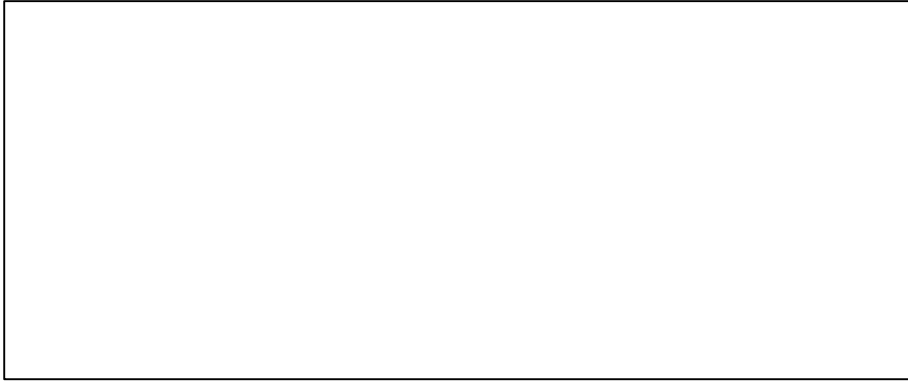
DJEISON MACHADO

PROPOSTAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DO NÚMERO π

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Rosilene Beatriz Machado, Mestre.

FLORIANÓPOLIS, 2013.



Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 34/CCM/2013.

Banca examinadora:

Prof^a. Sílvia Martini de Holanda Janesch
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Rosilene Beatriz Machado, Mestre
Orientadora

David Antonio da Costa, Doutor

Nereu Estanislau Burin, Mestre

AGRADECIMENTOS

À professora e coordenadora *Silvia Martini de Holanda Janesch*, pela compreensão e apoio para a realização da disciplina TCC II neste semestre.

À professora *Cláudia Regina Flores*, pela indicação da professora orientadora.

À professora *Rosilene Beatriz Machado*, por ter aceito a proposta de orientar este trabalho.

Ao professor *David Antonio da Costa*, por ter fornecido materiais que contribuíram para a realização deste trabalho.

À *Cássia Aline Schuck e Alice Stephanie Tapia Sartori*, por terem contribuído com algumas revisões e correções.

Ao *Bruno Bortoli*, por ter contribuído com as traduções do livro “History of Pi” e do resumo e também por algumas revisões e correções.

Aos círculos e objetos de formas redondas.

Ao $3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193851105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273724587006606315588174881520920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227938183011949129833673362440656643086021394946395224737190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132000568127145263560827785771342757789609173637178721468440901224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999983729780499510597317328160963185950244594553469083026425223...$

MACHADO, D. **Propostas didáticas para o ensino do número π** . 2013. 66f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso trata de propostas didáticas para o ensino do número π na educação básica. No primeiro capítulo é realizada uma revisão histórica sobre alguns fatos relacionadas à história do número π com registros encontrados desde os antigos egípcios e sumérios até as aproximações calculadas atualmente através de métodos computacionais. No segundo capítulo são discutidas as contribuições metodológicas e possibilidades das principais tendências atuais do ensino de matemática: história da matemática, tecnologias da informação, modelagem matemática, jogos e resolução de problemas. No último capítulo estão dispostas 8 sequências didáticas possíveis de serem aplicadas na educação básica, tituladas da seguinte forma: linha do tempo sobre o π , gincana de perguntas e respostas, embalagens de bolas de tênis, calculando o π através da tangente de um ângulo, o π no Antigo Egito, calculando o π com a calculadora, o método clássico de Arquimedes e problema da agulha de Buffon.

Palavras chave: matemática, propostas didáticas, número π .

ABSTRACT

This final paper deals with educational proposals for the teaching of number π in basic education. In the first chapter we do a historic review of some facts from the history of the number π found in records of the ancient Egyptians and Sumerians until the mathematical approximations currently calculated through computational methods. The second chapter discusses the methodological possibilities and contributions of the major current trends in the teaching of mathematics: history of mathematics, information technology, mathematical modeling, games and problem solving. In the last chapter, eight didactic sequences, likely to be applied in basic education, are placed and titled as follows: timeline of the number π , game of questions and answers, the pack of tennis balls, calculating π by a tangent angle, π in ancient Egypt, calculating π with a calculator, the classical method of Archimedes and the Buffon needle problem.

Keywords: mathematic, educacional proposals, number π .

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	9
PROPOSTAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DO NÚMERO π	11
1. UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA DO π	11
1.1 Idade Antiga (4000 a.C – 476 d.C)	11
1.2 Idade Média (séc. V – séc. XV)	19
1.3 Idade Moderna (séc. XV – séc. XVIII)	19
1.4 Idade Contemporânea (séc. XVIII até o momento)	24
1.5 Algumas considerações	25
2. TENDÊNCIAS METODOLÓGICAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA ...	27
2.1 História da Matemática	27
2.2 Tecnologias da Informação	32
2.3 Modelagem Matemática.....	36
2.4 Jogos.....	38
2.5 Resolução de Problemas.....	41
3. PROPOSTAS DIDÁTICAS.....	44
3.1 Linha do tempo sobre o π (composição do autor)	44
3.2 Gincana de perguntas e respostas (composição do autor).....	47
3.3 Embalagens de bolas de tênis (composição do autor).....	49
3.4 Calculando o π através da tangente de um ângulo (composição do autor)	50
3.5 O π no Antigo Egito (composição do autor).....	52
3.6 Calculando o π com a calculadora (retirado da Revista do Professor de Matemática).....	53
3.7 O método clássico de Arquimedes (composição do autor)	56
3.8 Problema da Agulha de Buffon (composição do autor).....	56
CONCLUSÃO.....	62
REFERÊNCIAS	64

INTRODUÇÃO

O número π é uma constante bastante presente no ensino de matemática da educação básica. Ele aparece em muitas fórmulas importantes, como, por exemplo, a do comprimento da circunferência ($C = 2\pi r$), a da área de um círculo ($A = \pi r^2$) e a do volume de uma esfera ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

De acordo com a pesquisa de Bortoletto (2008), os professores e os livros didáticos costumam definir o π como sendo: um número, um número irracional ou uma razão.

Podemos observar que dentre essas definições, a de “número”, simplesmente, pouco contribui para a o entendimento dos alunos pois dessa forma o π parece ser um número assim como todos os demais e sem nada de especial.

Por sua vez, a definição de número irracional, comumente utilizada, está relacionada à definição de número racional: um número irracional é um número real que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros, ou seja, não é uma razão pois não pode ser escrito da forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$. Para um aluno que ainda não compreendeu bem o que é um número racional, o entendimento de tal definição está comprometido e pode o confundir ainda mais.

Já a definição de π como uma razão envolve dois problemas. Pensando na definição de número racional, o aluno pode entender que “a razão π ” surge da divisão entre dois inteiros, o que é falso conforme a definição de irracional. Por outro lado, precisamos do valor do π para determinar o comprimento da circunferência para então poder definir o π como a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência. Ou seja, não podemos utilizar um objeto, nesse caso o π , como premissa para a sua definição.

Além disso, convém ressaltar que em sala de aula seu estudo parece não ser aprofundado, ficando limitado à utilização nas fórmulas das quais faz parte. No ensino fundamental o π aparece na área do círculo e no comprimento da circunferência, depois volta a ser utilizado no ensino médio para os cálculos de áreas e volumes da esfera e ainda ocupa um lugar especial no estudo de equações trigonométricas. Ou seja, em geral, em todos os momentos o π é definido de forma rápida e as vezes equivocada, sem uma mobilização para que os alunos compreendam seu real significado.

Tais fatos justificam a dificuldade dos alunos, muitas vezes, para compreender outros conceitos, definições e aplicações envolvendo o número π . Por isso é importante que conheçamos variadas formas para trabalhar com esse número em sala de aula. Cabe a nós, educadores, pensarmos em estratégias e propostas didáticas que proporcionem aos estudantes uma compreensão mais significativa acerca do número π .

O ensino do número π possui grande relevância para o ensino de matemática, não apenas por sua história, mas principalmente por estar presente nas fórmulas de corpos redondos e além disso, porque aparece ainda em outras áreas de estudo como: Estatística, Eletricidade, Mecânica, Música, Topografia, Engenharia, entre outras. Eves (2008) destaca:

Há outras razões para se calcular π com um grande número de casas decimais. Antes de mais nada, isso é muito valioso para a ciência da computação porque idear programas para cálculos tão extensos leva a uma habilidade maior em programação [...] Os dígitos do π não são verdadeiramente aleatórios, porque cada um está determinado de maneira única. Contudo, os dígitos do π podem ser suficientemente “embaralhados” de maneira a servir, na prática, como uma tábua de números aleatórios; testes (como o “teste do pôquer”) parecem indicar isso (EVES, HOWARD, 2008, p. 148).

Este trabalho busca, então, oferecer propostas didáticas para o ensino do π considerando seu desenvolvimento ao longo da história, bem como, algumas tendências atuais para o ensino de matemática como a história da matemática (HM), o uso das tecnologias da informação, a modelagem matemática, os jogos e a resolução de problemas.

Nesse sentido, no primeiro capítulo busca-se apresentar alguns elementos históricos relativos ao número π , a partir de obras de historiadores da matemática como Boyer, Eves e Beckmann.

No segundo capítulo será apresentada uma breve discussão acerca das atuais tendências para o ensino de matemática que subsidiarão a proposição de atividades para o ensino do número π .

Por fim, no terceiro capítulo serão apresentadas 8 propostas didáticas, algumas elaboradas pelo autor e outras encontradas em artigos sobre o ensino do número π , que podem ser aplicadas nas séries finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

PROPOSTAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DO NÚMERO π

1. UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA DO π

Diversos são os registros deixados ao longo da história por povos e matemáticos que encontraram aproximações para o π . Entretanto, Bortoletto (2008, p. 120), diz que professores e livros didáticos não ensinam o π através da HM.

Waldomiro (2011), apud Guichard (1986), diz que sem a perspectiva crítica que a história pode nos fornecer, a matemática ensinada torna-se pouco a pouco objeto de si própria. Quando os conteúdos matemáticos são separados das problemáticas que deram condições e possibilidades para seus desenvolvimentos, a matemática parece existir para ela mesma, sem nenhum sentido ou contribuição para outras ciências, tornando-se um punhado de definições, regras e cálculos.

André (2009) nos lembra que o progresso do ser humano na matemática deve-se a três motivos: a necessidade de resolver problemas práticos, o prazer e a curiosidade sobre a matemática, e a sua utilização para a leitura e intervenção no mundo exterior.

A história do π que será apresentada está organizada de forma cronológica. No entanto, é importante ressaltar que a história do π não foi construída pela humanidade de maneira linear e contínua como uma organização cronológica pode sugerir. Os estudos acerca deste número ocorreram em diversas épocas, regiões do globo e povos distintos, em alguns casos de forma isolada e em outros apoiados em resultados anteriores. Por isso, esta organização cronológica possui um caráter estritamente didático e não está associada a qualquer linearidade de desenvolvimento.

1.1 Idade Antiga (4000 a.C – 476 d.C)

A partir de 2000 antes de Cristo, que é quando encontram-se registros de uma história documentada da matemática, os babilônios e os egípcios (talvez outros ainda) já estavam cientes da existência do π e sabiam até o seu valor. Segundo Beckmann (1971), os babilônios detinham o valor de π como $3\frac{1}{8} = 3,125$ e os egípcios $4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,16049 \dots$. Como esses povos chegaram a esse valor? Ninguém sabe, mas é possível inferir algumas possibilidades.

Muitos historiadores defendem hoje que a matemática surgiu na Mesopotâmia¹, justamente onde surgiu a agricultura, que permitiu aos homens pensar em outras coisas além da busca por comida. A tábua encontrada em 1936 feita pelos sumérios² com seus conhecimentos matemáticos, mostra cálculos com a relação $\frac{6r}{c}$, onde r é o raio da circunferência e c é o comprimento da circunferência, conforme mostra a figura 1.

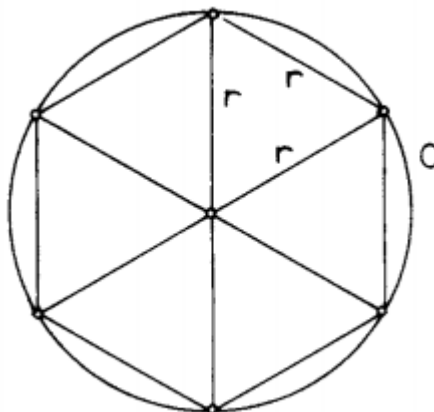


Figura 1 – Valor de π encontrado pelos babilônios (Fonte: Beckmann, 1971, p. 22).

Os babilônios sabiam que o perímetro de um hexágono regular era exatamente seis vezes o raio de uma circunferência circunscrita ao hexágono. A tábua encontrada que continha diversas figuras geométricas, trazia a informação de que a proporção entre o perímetro de um hexágono regular e o comprimento de uma circunferência circunscrita ao mesmo hexágono era de $\frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2}$ (em notação decimal, pois os babilônicos usavam base sexagesimal).

Usando a definição conhecida hoje $c = 2\pi r$, temos que

$$\frac{6r}{c} = \frac{6r}{2\pi r} = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi} = \frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2} \Rightarrow \pi = 3,125$$

Ou seja, $\pi = 3,125$ deveria ser o valor conhecido pelos babilônios para chegar à proporção encontrada na tábua.

Mais se sabe sobre a Matemática egípcia do que de qualquer outro povo antigo, não porque os egípcios sabiam mais, mas porque foram os documentos deixados por eles que mais foram encontrados por nós.

¹ Região localizada entre os rios Tigre e Eufrates, onde hoje é o Iraque. Dentre os povos que lá viviam, destacam-se babilônicos, assírios, sumérios, caldeus, amoritas e acádios.

² Os sumérios são considerados o povo mais antigo da humanidade, vivendo entre 4000 e 1950 a.C.

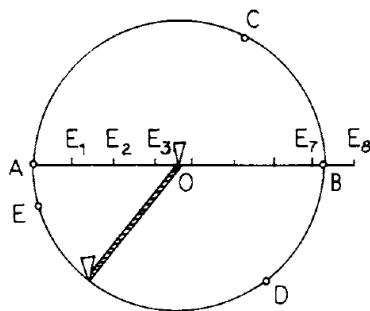


Figura 2 – Como o π era mensurado nas margens do Rio Nilo (Fonte: Beckmann, 1971, p.13).

A Figura 2 mostra um esquema de como os povos egípcios podem ter chegado a um cálculo aproximado do π . Após as alagações do Rio Nilo, era necessário que as áreas de plantação fossem remarcadas para cada agricultor não invadir ou perder as terras para os agricultores vizinhos. Com a areia molhada ao longo do Nilo, era fácil utilizar uma corda presa numa estaca fixada no chão para criar um círculo ao redor da estaca. Com o auxílio de outra corda, escolhia-se um ponto A qualquer do círculo e esticava-se a corda até a outra extremidade do círculo passando pelo centro O, onde a estaca fora fixada inicialmente, encontrando o ponto B da Figura 2. Tinha-se então uma unidade de medida de comprimento AB.

Com a corda de comprimento AB (diâmetro) com uma extremidade no ponto A e disposta sobre a marcação do círculo no chão, a outra extremidade da corda chega ao ponto C. Prosseguindo pela marcação do círculo com o comprimento AB da corda encontravam-se os pontos D e E mostrados da Figura 2. Podia-se concluir então que o comprimento do círculo era 3 vezes o comprimento do diâmetro mais um pouco.

Para melhorar essa aproximação, podia-se medir com outra corda o comprimento do arco AE e marcar essa medida sobre o diâmetro AB quantas vezes fosse possível, encontrando entre 7 e 8 partes ao longo da unidade de medida. Tinha-se então uma aproximação para o comprimento do círculo entre $3\frac{1}{8}$ e $3\frac{1}{7}$, que nos dá o valor de

$$3,125 < \pi < 3,142857 \dots$$

Utilizando frações simples, acredita-se que os egípcios conseguiram realizar tais aproximações e melhorá-las com o passar do tempo.

O egípcio Ahmes, por volta de 1700 a.C., autor do famoso papiro de Rhind³, deixou a solução de um problema em que constava o valor para $\pi = 3,1604 \dots$. O problema trazia escrito: *a área de um círculo é igual a de um quadrado cujo lado (d) é o diâmetro (2r) do círculo subtraindo-se sua nona parte.*

Ou seja:

$$S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64d^2}{81} = \frac{64(2r)^2}{81} = \frac{64 \times 4r^2}{81} = \frac{256r^2}{81}$$

$$S = \pi r^2 \Rightarrow \frac{256r^2}{81} = \pi r^2 \Rightarrow \frac{256}{81} = \pi \Rightarrow \pi \cong 3,1604 \dots$$

Este problema é na verdade uma “solução” para o famoso problema da quadratura do círculo. Neste caso, os egípcios mostram, de forma equivocada, através do Papiro de Rhind, que para resolver o problema basta tomar o lado do quadrado igual a $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo dado. Mais adiante traremos com mais detalhes a demonstração de Lindemann, publicada em 1886 d.C., mostrando que o problema da quadratura do círculo é impossível de ser resolvido.

Acredita-se que os antigos povos provavelmente utilizavam rearranjos de figuras para encontrar aproximações da área do círculo. Segundo este mesmo autor, uma contribuição grega que permitiu o cálculo aproximado da área do círculo foi a percepção da igualdade entre as áreas de um paralelogramo e de um retângulo com as mesmas bases e alturas, como podemos ver na Figura 3.

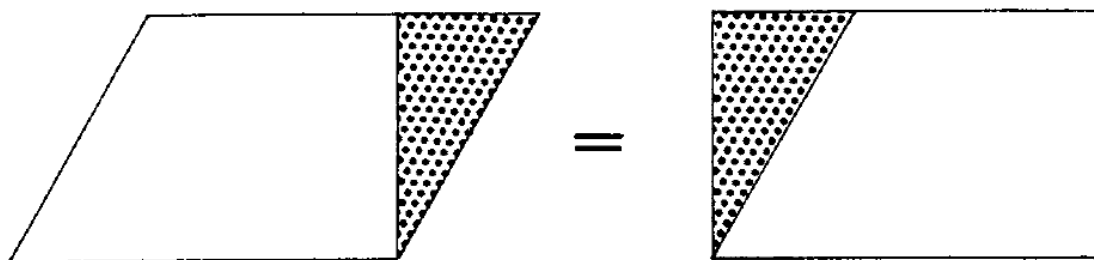


Figura 3 – O paralelogramo e o retângulo tem áreas iguais, como pode-se destacar com a área dos triângulos indicados (Fonte: Beckmann, 1971, p.17).

³ É um dos mais famosos documentos da Matemática que chegaram até os dias de hoje. Continha a solução detalhada de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria.

Pensemos então em um círculo dividido em várias partes, como mostra a Figura 4(a). Se reorganizarmos todas as partes do círculo conforme a Figura 4(b), temos uma figura que se aproxima muito da área de um paralelogramo

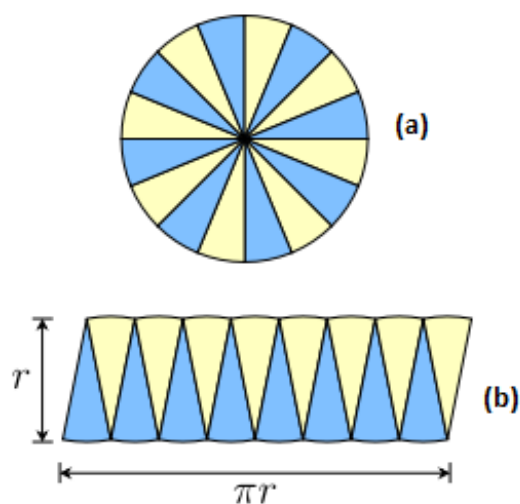


Figura 4 – Aproximação da área do círculo através da área do paralelogramo

(Fonte: Wikipédia, 2012).

O método por rearranjo das áreas é encontrado também em um documento japonês de 1698 e em documentos de Leonardo Da Vinci, de acordo com Beckmann (1971). Podemos então imaginar que era esta a estratégia que os antigos povos utilizavam para calcular a área de figuras curvilíneas antes da descoberta do cálculo integral.



Figura 5 – O método do rearranjo registrado pelos japoneses no século XVII. (Fonte: Beckmann, 1971, p. 19).

No livro bíblico do Antigo Testamento também temos indícios do conhecimento do cálculo do π . No Segundo Livro das Crônicas, temos a história de que Salomão, ao fazer um altar, “fez também o Mar de metal fundido, redondo, com cinco metros de diâmetro e dois metros e meio de altura com quinze de circunferência” (2 Crônicas, capítulo 4, versículo 2), mostrando-nos uma aproximação para $\pi = \frac{15}{5} = 3$. A mesma história está presente no Primeiro Livro dos Reis, capítulo 7, versículo 23, que relata

acontecimentos ocorridos entre 971 e 561 a.C., mas com o personagem Hiram, porém com o mesmo objetivo de Salomão.

Quanto ao povo indiano, pouco se sabe por falta de documento, mas tem-se o conhecimento de um documento datado de 380 a.C. em que o valor de π conhecido por eles era de 3,1416.

Assim como pouco sabemos do que ocorreu na Índia, o mesmo acontece na China. Beckmann (1971) aponta que os chineses foram singulares ao utilizar o sistema decimal desde o começo e conseguiram a aproximação $3,141024 < \pi < 3,142704$. A aproximação encontrada pelos chineses datada em 130 d.C. foi alcançada pelos europeus somente no século XVII. Infelizmente não encontramos registros de como os chineses chegaram nesses valores.

Já o povo maia, com seu profundo conhecimento em astronomia, nos leva a crer que eles conheciam melhor o valor de π do que os egípcios. Apesar de não encontrarmos registros do valor conhecido pelos maias, a não necessidade da correção do seu calendário em determinados períodos de tempo, sugere que esse povo possuía uma excelente aproximação do π . Para exemplo de comparação, nosso calendário, o gregoriano⁴, tem uma defasagem anual de seis horas entre a contagem dos dias e o movimento de revolução da Terra em torno do Sol, necessitando de um dia a mais a cada quatro anos (bissexto) para corrigir a defasagem, correção que não é necessária no calendário maia. A correção da defasagem ocorria também no calendário egípcio.



Figura 6 – Calendário maia (Fonte: Como Tudo Funciona, 2013)

⁴ Promulgado pelo Papa Gregório em XIII, é o calendário utilizado oficialmente pela maioria dos países e demarca o ano civil no mundo inteiro, facilitando o relacionamento entre as nações.

Na Idade Antiga os valores obtidos para o π não foram encontrados apenas através de medições ou pela necessidade de se resolver problemas envolvendo áreas e perímetros. Através de cálculos empíricos, Arquimedes (287-212 a.C) inscreveu e circunscreveu um círculo por polígonos regulares de 96 lados e concluiu que o comprimento da circunferência era menor que o perímetro do polígono circunscrito e maior que o perímetro do polígono inscrito, como indica a ilustração da Figura 7. Nessa experiência Arquimedes conseguiu situar o valor de π entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$.

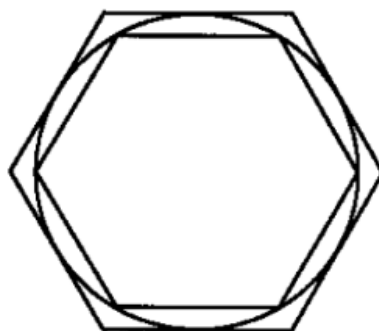


Figura 7 – Círculo inscrito e circunscrito por polígonos regulares (composição do autor).

Para calcular uma aproximação para π , Arquimedes trabalhou com polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência, tal que “começando com o hexágono regular inscrito, ele calculou os perímetros dos polígonos obtidos dobrando-se sucessivamente o número de lados até chegar a noventa e seis lados” (Boyer, 1996, p. 86). Esse método é conhecido como *método clássico para o cálculo do número π* .

O grande mérito no trabalho de Arquimedes reside no fato de ele não tentar apresentar o valor exato de π , mas somente um limite inferior e um superior para esta constante. Para Contador (2006), “o método de Arquimedes [...] foi com certeza a primeira tentativa científica de buscar um valor para π ” (p. 265).

Eves (2008) conta que em 150 d.C., Ptolomeu fez a primeira aproximação notável de π após a aproximação de Arquimedes. O valor foi obtido a partir de uma tábua de cordas que há no tratado *Syntaxis mathematica* publicado por Ptolomeu. A tábua fornece os comprimentos das cordas de um círculo correspondentes aos ângulos centrais de 0° a 180° , com incrementos de meio grau. Multiplicando-se o comprimento da corda do ângulo central de 1° por 360 e dividindo-se o resultado pelo comprimento do diâmetro do círculo, obtém-se o valor de $\pi = 3,1416$.

1.2 Idade Média (séc. V – séc. XV)

Com a destruição da Biblioteca de Alexandria muita coisa se perdeu. Acredita-se que a biblioteca em seu apogeu reuniu mais de meio milhão de pergaminhos. Foram perdidos diversos trabalhos de Arquimedes e talvez até de outros matemáticos que fizeram estudos que envolviam o número π .

Muitos conhecimentos se perderam também com a conversão romana ao cristianismo. A Igreja Católica impôs punições severas àqueles que tivessem discursos diferentes dos discursos que a Bíblia possuía e muitos livros foram queimados. Segundo Backmann (1971), nessa época muitos matemáticos nem sabiam da existência do π e os poucos que sabiam usavam valores da época dos egípcios. Os árabes conseguiram preservar muito da matemática que conheciam e eram os únicos a manter contato com a matemática dos povos da Ásia.

Neste período destacamos os cálculos de Leonardo de Pisa (1180-1250), mais conhecido por Fibonacci. Ele trabalhou com o π usando o mesmo método de Arquimedes, entretanto com o sistema de numeração de notação posicional, o que lhe permitiu conseguir um valor de $\pi = 3,141818$.

1.3 Idade Moderna (séc. XV – séc. XVIII)

A matemática na Europa volta a caminhar em passos largos apenas na época dos descobrimentos e das grandes navegações. Outro aliado nessa época foi a impressão de livros, que permitiu que o conhecimento viajasse junto com as caravelas. No final do século XVII já se tinha o valor de π com 30 casas decimais.

Até o século XVIII sempre existiu a dúvida se o π poderia ser expresso na forma de fração (ou seja, se o π seria um número racional).

Lambert em 1761 apresentou à Academia de Berlin a primeira prova de que π é um número irracional. “Lambert mostrou que se x é um número racional não nulo então $\operatorname{tg} x$ não pode ser racional. Como $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ é um número racional, segue-se que $\frac{\pi}{4}$ não pode ser racional, portanto π tampouco.” (Boyer, p. 320). Mas esta prova não pôs fim ao problema da quadratura do círculo encontrado no Papiro de Rhind. O assunto foi finalmente decidido em 1882 em um artigo de Lindemann (1852 – 1939) na *Mathemastische Annalen* de Munique. O artigo mostrava que π é também um número

transcendente⁵. Lindemann, em sua prova, primeiro mostrou que a equação $e^{ix} + 1 = 0$ não pode ser satisfeita se x é algébrico. Como Euler tinha mostrado que o valor de $x = \pi$ satisfaz a equação, segue-se que π não é algébrico. Finalmente, havia se dado a resposta ao problema da quadratura do círculo. Para que a quadratura do círculo fosse possível o número π teria que ser raiz de uma equação algébrica, ou seja, precisaria ser um número algébrico, o que não ocorre pois ele é transcendente.

No Japão, em 1722 um matemático chamado Tekebe⁶ ainda usava um polígono de 1024 lados pra calcular o número π . Entretanto, desenhos sugerem que os japoneses tinham outros métodos baseados na aproximação de áreas através de polígonos retangulares, conforme ilustrado na Figura 8.

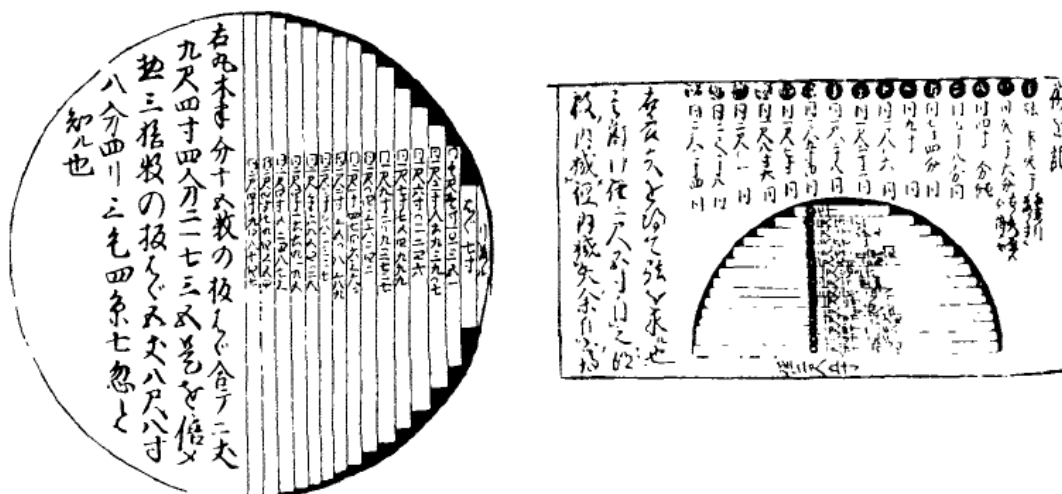


Figura 8 – Suposto método japonês para calcular o π através de polígonos (Fonte: Beckmann, 1971, p. 127).

De acordo com Beckmann (1971), Newton (1643 – 1727), de forma idêntica a de Leibniz, partiu de $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x$, donde recorrendo ao desenvolvimento binomial que ele próprio descobrira, obteve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots \right) dx \text{ por}$$

$$\arcsen x = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^5 + \dots,$$

⁵ Um número é chamado de transcendente se ele não for raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes racionais.

⁶ Não foi encontrado, nas literaturas pesquisadas, o nome completo desse matemático. Todas as fontes encontradas o citam apenas como “Tekebe”.

que é uma série que converge incomparavelmente mais rápido que a de Leibniz (em que são necessários cerca de 5 bilhões de termos da série para se obter π com dez casas decimais exatas).

Daqui, podemos obter π , fazendo $\frac{\pi}{6} = \arcsen \frac{1}{2}$, donde

$$\pi = 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{(1 \cdot 3)}{(2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5)} + \dots \right)$$

Apesar de ser isso o que normalmente os livros dizem sobre a forma como Newton calculou π , Bortoletto (2008) destaca que se tivermos um olhar atento sobre *Method of Fluxions and Infinities* de Newton, constatamos que ele seguiu outro caminho que consiste em considerar um círculo de raio $\frac{1}{2}$ e centro $(\frac{1}{2}, 0)$, conforme mostra a figura 9.

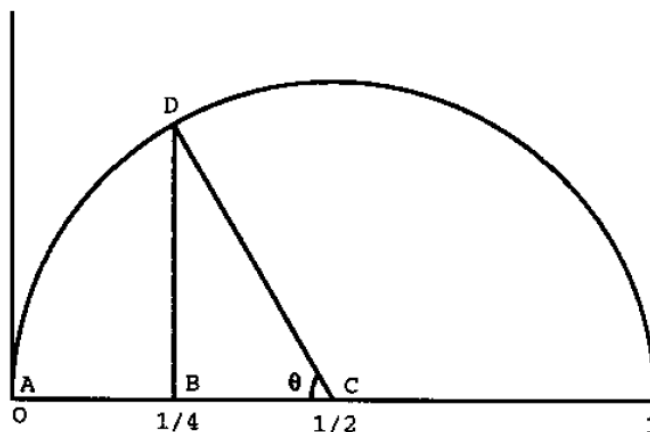


Figura 9 – Como Newton calculou π (Fonte: Bortoletto (2008), p. 35).

Newton calculou a área A do conjunto definido pelos pontos ABD, isto é,

$$A = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x - x^2} dx = \frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \dots$$

recorrendo mais uma vez ao desenvolvimento binomial. Como aquela área é igual à do setor circular ACD menos a do triângulo BCD, vem $A = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}$. (Beckmann, 1971).

Desta forma, podemos obter π com certa facilidade, pois 22 termos da série são suficientes para calculá-lo com 15 decimais exatos.

O fato é que após o experimento de Arquimedes, diversos foram os matemáticos que se dedicaram ao estudo do valor do π para encontrar uma forma mais rápida de calculá-lo. De acordo com Eves (2004), destacamos de forma sucinta alguns desses métodos e o início da notação utilizada atualmente:

(1579) Produto infinito de Viète: O matemático francês François Viète encontrou o π corretamente até a nona casa decimal pelo método clássico, usando polígonos de $6(2^{16}) = 393.216$ lados. Descobriu também o equivalente do interessante produto infinito

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}}{2} \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}})}}{2} \dots$$

(1621) Método de Snell: O físico holandês Willebrord Snell descobriu um aperfeiçoamento trigonométrico do método clássico tal que, para cada par de limites para π dado pelo método clássico, ele era capaz de obter limites consideravelmente mais próximos. Com seu método conseguiu atingir 35 casas decimais que van Ceulen com apenas um polígono de 2^{30} lados.

(1650) Expressão de John Wallis: O matemático inglês John Wallis obteve a curiosa expressão:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \dots}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \dots}$$

(1650) Lord Brouncker: Converteu o resultado de Wallis na fração contínua:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}$$

(1671) James Gregory: O matemático escocês James Gregory obteve a série infinita:

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Passou despercebido para Gregory que, para $x = 1$, a série torna-se

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Essa série que converge muito lentamente, era conhecida de Leibniz em 1674. Gregory tentava provar que é impossível uma solução euclidiana do problema da quadratura.

(1706) William Jones: Utiliza o símbolo π para designar a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo. Porém, o símbolo só encontrou aceitação geral depois que Euler o adotou em 1737. A notação com a letra grega π provém das palavras de origem grega "*περιφερια*" (periferia) e "*περιμετρον*" (perímetro).

(1777) Conde de Buffon: concebeu seu famoso problema da agulha pelo qual pode-se aproximar π por métodos probabilísticos. Suponhamos que se tracem em um plano horizontal um número grande de retas paralelas equidistantes entre si. Sendo a a distância entre duas retas vizinhas quaisquer, Buffon mostrou que a probabilidade P de que uma agulha de comprimento $l < a$, lançada ao acaso sobre o plano, caia tocando ou cruzando uma das retas é dada por:

$$P = \frac{2l}{\pi a} \Rightarrow \pi = \frac{2l}{Pa}$$

Eves (2008) fala que o melhor resultado por esse caminho foi conseguido pelo italiano Mario Lazzarini em 1901 que obteve π corretamente até a sexta casa decimal após realizar 3408 lançamentos. Bortoletto (2008), apoiada nos trabalhos de Willerding (1971) e Beckmann (1971), afirma que:

[...] O número π tem um papel importante nas leis da probabilidade, por isso precisamos falar também no seu cálculo através do método de Monte Carlo⁷, que consiste em calcular um número a partir de um fenômeno aleatório. Uma das muitas maneiras de aplicá-lo na determinação de π é através do chamado problema da agulha de Buffon. (BORTOLETTO, 2008, p. 36).

Portanto, para além de estar relacionado com o cálculo infinitesimal e a geometria, o π também apresenta relações com as probabilidades, como ilustra o problema da agulha de Buffon e os seguintes problemas:

- ✓ A probabilidade de que dois números inteiros positivos escolhidos ao azar sejam primos entre si é $\frac{6}{\pi^2}$
- ✓ Se for escolhido ao azar dois números positivos menores que 1, a probabilidade de que junto com o número 1 possam ser os lados de um triângulo obtusângulo é $\frac{\pi-2}{4}$

⁷ Qualquer método de uma classe de métodos estatísticos que se baseiam em amostragens aleatórias massivas para obter resultados numéricos, isto é, repetindo sucessivas simulações um elevado número de vezes, para calcular probabilidades.

- ✓ O número médio de formas de escrever um número inteiro positivo como soma de dois quadrados perfeitos é $\frac{\pi}{4}$ (a ordem é relevante).

1.4 Idade Contemporânea (séc. XVIII até o momento)

Após a Revolução Francesa em 1789, alguns outros matemáticos como William Shanks (1812 – 1882), Zacharias Dase (1824 – 1861) e William Rutherford (1871 – 1937), obtiveram sucesso em aprimorar métodos conhecidos para o cálculo do π . Entretanto, destacam-se nesse período os métodos computacionais.

Desde a construção do primeiro computador eletrônico surgiram programas para o cálculo do número π com a maior quantidade de casas possíveis. Em 1949 o ENIAC⁸ foi capaz de romper todos os recordes obtendo 2037 casas decimais em 70 horas. Pouco a pouco foram surgindo computadores que batiam novos recordes e, desta forma, poucos anos depois (1954) um NORAC chegou a 3092 casas após a vírgula. Durante quase toda a década dos anos 1960 os computadores da International Business Machine (IBM)⁹ foram batendo recordes, até que um IBM7030 pode chegar, em 1966, a 250.000 cifras decimais (8h23min).

Na década de 2000, os computadores foram capazes de obter um número imensamente grande de decimais. Em 2009 se chegou a mais de dois bilhões e meio de decimais, em 73h36min, mediante o uso de um supercomputador T2K Tsukuba System.

A tabela 1 mostra a quantidade de casas (cifras) decimais do número π obtidas por computadores.

⁸ Primeiro computador digital eletrônico de grande escala bem sucedido criado em 1946.

⁹ Fabricante de computadores.

Ano	Descobridor	Computador utilizado	Número de cifras decimais
1949	G.W. Reitwiesner et al.	ENIAC	2.037
1954		NORAC	3.092
1959	Guilloud	IBM 704	16.167
1967		CDC 6600	500.000
1973	Guillord e Bouyer	CDC 7600	1.001.250
1981	Miyoshi e Kanada	FACOM M-200	2.000.036
1982	Guilloud		2.000.050
1986	Bailey	CRAY-2	29.360.111
1986	Kanada e Tamura	HITAC S-810/20	67.108.839
1987	Kanada, Tamura, Kobo et al	NEC SX-2	134.217.700
1988	Kanada e Tamura	Hitachi S-820	201.326.000
1989	Hermanos Chudnovsky	CRAY-2 y IBM-3090/VF	480.000.000
1989	Hermanos Chudnovsky	IBM 3090	1.011.196.691
1991	Hermanos Chudnovsky		2.260.000.000
1994	Hermanos Chudnovsky		4.044.000.000
1995	Kanada e Takahashi	HITAC S-3800/480	6.442.450.000
1997	Kanada e Takahashi	Hitachi SR2201	51.539.600.000
1999	Kanada e Takahashi	Hitachi SR8000	68.719.470.000
1999	Kanada e Takahashi	Hitachi SR8000	206.158.430.000
2002	Kanada et al.	Hitachi SR8000/MP	1.241.100.000.000
2004		Hitachi	1.351.100.000.000
2009	Daisuke Takahashi	T2K Tsukuba System	2.576.980.370.000

Tabela 1 – Quantidade de casas decimais do número π encontradas através de métodos computacionais. (Fonte: Wikipedia, 2012)

Nosso caminhar pela história do número π encerra aqui. Para um aprofundamento do tema, sugerimos, além dos referenciais aqui utilizados, a leitura de H. C. Schepler, “The Cronology of π ”, Mathematics Magazines, janeiro-fevereiro de 1950, p. 165-170; março-abril de 1950, p. 216-228; maio-junho de 1950, p. 279-283, que trazem mais de 120 registros do cálculo do π ao longo da história.

1.5 Algumas considerações

Este capítulo buscou mostrar alguns elementos históricos acerca do número π para que sirvam não apenas de referencial teórico e histórico, mas também de motivação para a elaboração de sequências didáticas envolvendo o número π .

Segundo Balestri (2008), ter conhecimento da HM auxilia o professor a:

- ✓ Propor a seus alunos problemas que de fato favoreçam a aprendizagem;

- ✓ Entender alguns aspectos do processo de aprendizagem de seus alunos e também as dificuldades e possíveis erros cometidos por eles durante esse processo;
- ✓ Elaborar estratégias nas quais os alunos superem as dificuldades enfrentadas no processo de aprendizagem;
- ✓ Responder alguns “porquês”, satisfazendo a curiosidade dos alunos e motivando-os.

O professor de matemática, portanto, deve utilizar o conteúdo histórico como fonte de problematização no processo de ensino e aprendizagem. Para Schneider (2009) o professor pode utilizar, entre tantos recursos, a leitura, a escrita, a reescrita, as narrativas e a dramatização para o aluno compreender a história.

Não há uma receita nem fórmula pronta para que isso ocorra. Cada educador usa os recursos nos momentos em que entender oportuno. Uma sugestão frequentemente encontrada é mencionar fatos da vida e descobertas de um matemático para iniciar um novo conteúdo. Entretanto, o uso da HM não deve se restringir a isso, pois nesse caso a história torna-se apenas uma nota de rodapé, sem que seja explorado suas tantas potencialidades metodológicas de ensino.

2. TENDÊNCIAS METODOLÓGICAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

O grande desafio da educação matemática (EM) atualmente é possibilitar o aluno a construir e desenvolver conceitos e procedimentos matemáticos, sempre compreendendo e atribuindo significado ao que ele está fazendo, evitando a simples memorização e mecanização. Para atingir tal objetivo, muito se utiliza da sistemática que se inicia com as situações-problemas contextualizadas e se estende para generalizações de conceitos até chegar nas aplicações em situações cotidianas, na própria matemática ou em outras áreas do conhecimento. Por outro lado, é de entendimento que não existe um caminho que pode ser eleito como único e melhor para o ensino de matemática (nem de qualquer outra disciplina).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele percebe entre os diferentes temas matemáticos. Assim, conhecer diversas metodologias e estratégias de ensino é algo fundamental para que o professor possa enfrentar a enorme pluralidade de aptidões, afinidades e necessidades de seus alunos.

Ainda segundo o PCN e pesquisas em EM, podemos destacar, dentre outras, as seguintes tendências atuais para o ensino de matemática na educação básica: história da matemática, uso das tecnologias da informação, modelagem matemática, jogos e resolução de problemas. Este capítulo traz, então, uma análise de relevâncias e contribuições de tais tendências, uma vez que elas subsidiam as propostas didáticas para o ensino do número π apresentadas no capítulo 3.

2.1 História da Matemática

Conforme discutido no capítulo anterior, durante séculos, diversos foram os povos e matemáticos que encontraram valores para o π . Esses valores foram obtidos para resolver algum problema de ordem prática ou para saciar a curiosidade humana sobre este número ou para a resolução de problemas idealizados.

Pensar na HM não é apenas pensar em como os egípcios, os gregos e os maias, por exemplo, representavam suas quantidades, números e valores para o π . Schneider (2009) fala que é importante que o aluno entenda que o conhecimento produzido é construído, reconstruído e utilizado para calcular, medir, desenhar os momentos

históricos, incluindo os dias atuais, e por muitas pessoas, inclusive pelo professor de matemática e por ele próprio. Através da HM podemos propor aos alunos descobrir uma matemática que não é apenas resolução de problemas e amontoados de fórmulas que parecem desconexas entre si.

A história da matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em matemática. (BRASIL, 2008, p. 34)

De acordo com a investigação realizada por Viana e Silva¹⁰ com professores da rede pública estadual de Ouro Preto – MG, acerca de suas concepções sobre a utilização da HM como metodologia de ensino, os professores pesquisados afirmaram contar histórias de fatos ocorridos ou como se deu a construção do saber ensinado. Para eles, a HM representa um material de apoio, base imprescindível para lecionar; justifica o surgimento da matemática e proporciona uma motivação aos alunos, pois geralmente permite aulas mais dinâmicas e práticas, e também ajuda muito na conscientização dos alunos de que a Matemática não é algo pronto, acabado e completo por si.

A investigação constatou também que 75% dos professores pesquisados utilizam a HM como motivação para iniciar um assunto, geralmente valendo-se de textos trazidos nos livros didáticos e da Internet.

Nesse sentido, Bortoletto (2008) conta que durante sua formação docente sempre fazia uso da HM como instrumento motivador, mas depois de leituras sobre o tema, percebeu que a HM transcende o aspecto da simples motivação e exemplifica através situação vivida ao realizar a leitura do seguinte texto para uma turma da 8ª série:

O símbolo usado para designar a constante obtida pela razão entre a medida do contorno de uma circunferência e seu diâmetro é a letra grega π , inicial da palavra contorno, escrita em grego: περιμετροξ. Foi popularizado pelo matemático suíço Leonhard Euler, em 1937 (BIGODE, 1994, p. 32).

“Uma aluna comentou que se soubesse disso na primeira vez que teve contato com o número π - na 5ª série do Ensino Fundamental - teria “entendido melhor aquela letra (número), pois tem a ver com o contorno de uma circunferência” (BORTOLETTO, 2008, p. 16).

¹⁰ O artigo de autoria de Viana e Silva não possui informações de data de publicação. Solicitamos aos autores, via email, a referência completa do texto, mas não recebemos resposta até a conclusão deste trabalho. O artigo pode ser visualizado no seguinte endereço eletrônico: <<http://limc.ufrj.br/hitem4/papers/15.pdf>>.

Bortoletto (2008) afirma que a HM pode ajudar o aluno e o professor a conhecerem a existência das dificuldades e limitações presentes antes e durante o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos hoje estudados. A autora ainda argumenta que a visão do desenvolvimento da matemática pela matemática em si é “derrubada” quando se utiliza a HM, dialogando passado e presente, dentro das práticas sociais do passado, pois a evolução dos conceitos passa a ser vista de maneira diferente da que se pensa que eles tenham acontecido. Portanto, através da HM podemos discutir como ocorreu a evolução do conceito do número π e os problemas matemáticos envolvidos com ele.

Tal argumentação pode ser reforçada pela pesquisa realizada por Gomes e Roque (2011) ao analisarem uma atividade realizada com três turmas do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de Belo Horizonte – MG em 2010. Tal pesquisa buscou averiguar qual era a concepção dos alunos sobre a natureza da matemática através de uma abordagem histórica para ensinar os números negativos, ou seja, se os alunos enxergavam a matemática como um conhecimento que sempre existiu ou como um conhecimento que se desenvolveu ao longo do tempo.

De acordo com os resultados obtidos por questionários respondidos pelos alunos, ficou claro que a história da matemática fez os alunos perceberem que ter dificuldade em algum conteúdo matemático é normal, mesmo para aqueles que se saem bem com a matemática; que um conteúdo que é fácil para uma pessoa pode ser difícil para outra; que mesmo os grandes matemáticos tiveram dificuldades em compreender e trabalhar com novos conceitos e que a matemática é uma criação humana que se desenvolve ao longo do tempo de acordo com as necessidades.

Cabe ao professor propor situações que permitam aos alunos conhecer as necessidades, desafios e dificuldades vivenciadas pela humanidade durante a construção dos conhecimentos estudados hoje nas aulas de matemática.

Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. (BRASIL, 2008, p. 39)

É bastante recente (a partir de 1990) a inserção da história de conceitos matemáticos em livros didáticos da disciplina. Entretanto, segundo Bortoletto (2008), os livros didáticos trazem (quando o fazem) a história de forma fragmentada, fora de seu

contexto histórico, político e cultural, não sendo um bom apoio aos professores que desejam elaborar sequências didáticas baseadas na história da matemática.

O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam problematizar com os alunos a matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

Para Motta (2005) enxergar a HM na educação matemática proporciona a possibilidade para a discussão não só de aspectos cognitivos envolvidos na criação da matemática, mas também permite a apresentação de crenças, emoções e os afetos envolvidos nas práticas sociais em que tal criação ocorreu, podendo favorecer uma reelaboração mental do aluno similar à que historicamente ocorreu na abstração dos conceitos matemáticos e gerar uma aprendizagem mais rica em significados.

Gasperi e Pacheco (2007) destacam que a HM pode favorecer a comunicação oral e escrita e ainda fornece uma nova visão da matemática, uma visão cultural, histórica, integrada ao conhecimento como um todo, como sugerem os PCN.

A construção e a utilização do conhecimento matemático não são feitas apenas por matemáticos, cientistas ou engenheiros, mas, de formas diferenciadas, por todos os grupos socioculturais, que desenvolvem e utilizam habilidades para contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar e explicar, em função de suas necessidades e interesses. Valorizar esse saber matemático, intuitivo e cultural, aproximar o saber escolar do universo cultural em que o aluno está inserido, é de fundamental importância para o processo de ensino e aprendizagem. (BRASIL, 2008, p. 27 - 28)

Segundo Viana e Silva é por meio da história que podemos entender e destacar que a matemática teve origens nas culturas da Antiguidade Mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média mas se organizou como um conhecimento apenas a partir do século XVI, em que criou estilo próprio e começou a estar presente no sistema escolar de diversos países. Para Viana e Silva ensinar a matemática recorrendo à sua história é tratá-la como uma manifestação cultural e o número π é um dos melhores exemplos para ser usado sob essa perspectiva.

Através da HM, Otte (1991) e Ferreira (1992) “apostam” na contextualização e, conseqüentemente, na busca de “significação” do conhecimento matemático. A história do número π pode ajudar a superar o “mar de falta de significação” que inunda as salas de aula acerca desse número irracional.

Além disso, conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos é de grande utilidade para que o professor compreenda melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos.

O conhecimento matemático formalizado precisa, necessariamente, ser transformado para se tornar passível de ser ensinado/aprendido; ou seja, a obra e o pensamento do matemático teórico não são passíveis de comunicação direta aos alunos. Essa consideração implica rever a idéia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência. Esse processo de transformação do saber científico em saber escolar não passa apenas por mudanças de natureza epistemológica, mas é influenciado por condições de ordem social e cultural que resultam na elaboração de saberes intermediários, como aproximações provisórias, necessárias e intelectualmente formadoras. É o que se pode chamar de contextualização do saber. Por outro lado, um conhecimento só é pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram para lhe dar origem. Para que sejam transferíveis a novas situações e generalizados, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem contextualizados novamente em outras situações. Mesmo no ensino fundamental, espera-se que o conhecimento aprendido não fique indissolivelmente vinculado a um contexto concreto e único, mas que possa ser generalizado, transferido a outros contextos. (BRASIL, 2008, p.).

Balestri, Cyrino e Savioli (2012) compilam as contribuições da HM para o aprendizado dos alunos em 9 tópicos. Fizemos algumas adaptações desses tópicos para destacar as potencialidades do uso da HM para o ensino do número π :

- ✓ A HM pode satisfazer a curiosidade do aluno e o motivar a compreender como o número π surgiu na história da humanidade e onde está presente;
- ✓ A HM pode ajudar veicular a descoberta e o cálculo do número π como uma criação humana, uma manifestação cultural;
- ✓ A HM pode ajudar a mudar as concepções a respeito da origem do número π que não está presente apenas na razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência;
- ✓ A HM pode ajudar a compreender como o estudo do número π na escola está organizado, porque ele aparece principalmente no estudo de geometria e trigonometria;
- ✓ A HM pode fornecer respostas a alguns “por quês” com relação ao número π e a ao desenvolvimento da matemática;
- ✓ A HM pode oferecer um contexto para a compreensão de tendências da educação matemática.

- ✓ A HM pode oferecer um campo comum aos interesses de especialistas de várias áreas do conhecimento, favorecendo a realização de trabalhos multidisciplinares;
- ✓ A HM pode auxiliar na compreensão da noção do rigor matemático para o cálculo do número π estendendo até os métodos de aproximação de outros resultados;
- ✓ A HM pode contribuir para valorização da dimensão ético-política da matemática.

Entretanto, reforça-se que é preciso ter o cuidado de não utilizarmos a HM apenas como um fator motivador, mas sempre como uma metodologia completa para o ensino de matemática conforme falam Baroni e Nobre (1999):

Ao desenvolvermos estudos relativos às contribuições da história da matemática para a educação matemática, percebemos que é necessária muita cautela, pois pode-se incorrer no erro de simplesmente assumir a história da matemática como elemento motivador ao desenvolvimento do conteúdo. “Sua amplitude extrapola o campo da motivação e engloba elementos cujas naturezas estão voltadas a uma interligação entre o conteúdo e sua atividade educacional” (BARONI e NOBRE, 1999, p. 132 apud VIANA e SILVA)

Questionar as potencialidades pedagógicas da HM para o ensino, permite lembrarmo-nos de não sermos ingênuos a ponto de assumir que a HM é a solução para todos os problemas da educação básica, em especial o ensino do número π .

De acordo com o que foi dito aqui, podemos concluir que o recurso à história, além de esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelos alunos, tornando a aprendizagem significativa, coloca-os em contato com um processo do qual faz parte o formular e testar hipóteses, o raciocínio indutivo, a analogia, a intuição e a criatividade na resolução de problemas enfrentados pela humanidade ao estudar os conceitos e relações envolvendo o número π . É importante que o aluno perceba o caráter acumulativo que o número π possui, ou seja, que em alguns momentos conseguiu-se obter novas aproximações e realizar aplicações aperfeiçoando técnicas outrora descobertas, para que compreendam que os estudos realizados hoje em sala de aula são fruto de diversas contribuições humanas ao longo do tempo.

2.2 Tecnologias da Informação

Negar o impacto provocado pela tecnologia da informação e comunicação no comportamento social atual é impossível, pois temos a inserção dessa tecnologia no dia a

dia da escola e na sociedade, exigindo indivíduos com capacitação para usá-la, seja ele educador ou aluno.

Uma dúvida que permeia muitos educadores está relacionada à etapa da aprendizagem em que o aluno poderá utilizar calculadoras, softwares e computadores. Bittar (2010) ressalta ainda que o uso da tecnologia para ensinar não deve ser visto como uma forma de tornar a aprendizagem mais fácil aligeirando o ensino.

“[...] A aprendizagem deve ser favorecida com situações que a tornem mais significativa e que os alunos possam interagir entre si e com a máquina, construindo conhecimentos, vivenciando situações que, muitas vezes, não tinha sentido no ambiente com papel e lápis” (BITTAR, 2010, p.220).

Parece, então, que o momento mais ideal para utilizarmos a tecnologia como ferramenta de ensino, são os conteúdos e situações que se tornam difíceis de compreender em aulas tradicionais. A aproximação do número π com várias casas decimais é um desses conteúdos que podemos explorar com o auxílio das máquinas.

Além disso, todos os meios tecnológicos de que hoje dispomos podem ser utilizados também para a superação de aulas repetitivas, conforme o relato de uma professora que participou de uma pesquisa sobre o uso de tecnologias nas aulas de matemática: “Uma coisa com a qual tive muita dificuldade como professora de sala de aula tradicional foi deixá-los soltos, deixar os alunos experimentarem uma nova maneira de fazer as coisas”. (SANDHOLTZ; RINGSTAFF; DWYER, 1997, p.46).

Entretanto, não basta só identificarmos a situação e o momento ideal. Para Schneider (2009) precisamos do conhecimento matemático e domínio sobre as ferramentas de um software para que possamos utilizar planilhas ou outros programas educacionais.

O computador torna-se uma ferramenta essencial, se usado de forma criativa. O educador, ao usar um software, além de possibilitar ao aluno uma aula diferenciada, favorece a aprendizagem de conceitos matemáticos. Lembremo-nos da chegada do televisor e do aparelho de vídeo na escola e em sala de aula, ocasião em que muitos educadores pensaram, com pavor, que a substituição do educador estava próxima. Lá se foram mais de 20 anos, e o professor continua na sala de aula, com tecnologias inovadoras, como os quadros digitais. (SCHNEIDER, 2009, p. 31).

Ao utilizarmos softwares durante o processo de ensino e aprendizagem, permitimos que os alunos possam pensar matematicamente, ou seja, que eles testem

hipóteses, façam experimentos, esboquem ideias e criem estratégias para resolver problemas ou formulá-los.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 88) podemos encontrar as características de softwares que são potenciais candidatos para trabalharmos conteúdos matemáticos:

- ✓ Conter um certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento;
- ✓ Oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica;
- ✓ Possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções;
- ✓ Permitir a manipulação dos objetos que estão na tela.

Entretanto, o uso da tecnologia ainda está longe de ser uma realidade comum nas salas de aulas, seja pela falta de experiência dos professores em ensinar matemática de uma forma diferente, ou pela falta de conhecimento sobre o uso do computador em si. Mesmo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 87), que destacam: “É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a matemática”, é fácil ver o uso das tecnologias serem ignorados. Estamos perdendo um potencial recurso para ensinar a matemática e ganhando, algumas vezes, um problema, pois a tecnologia na sala de aula se torna uma distração aos alunos que a utilizam apenas para o lazer (jogos, redes sociais, etc.).

Além disso, Bittar (2010, p. 219) fala que o uso dos laboratórios de informática nas escolas é utilizado basicamente de duas formas: aulas de informática desconexas com a sala de aula ou aplicações de conteúdos vistos na sala de aula:

Muitas escolas, públicas e privadas, dos Ensinos Fundamental e Médio, têm sido equipadas com laboratórios de informática e têm feito uso das tecnologias com seus alunos. É possível verificar duas formas de uso da tecnologia na Educação: a) criação de uma disciplina de informática educativa desenvolvida por um professor de laboratório, que trata de variados assuntos com os alunos, mas, em geral, não há ligação entre a aula de informática com as outras aulas, como Ciências, Matemática ou Português; b) aulas realizadas com o professor de uma determinada disciplina, por exemplo, Matemática, que leva seus alunos ao laboratório para realizar tarefas relativas ao conteúdo estudado.

A autora lembra que não podemos correr o risco de usar a informática como um “apêndice” das aulas tradicionais e exemplifica isso com a situação em que os alunos

realizam atividades computacionais apenas para verificar resultados anunciados em sala de aula. “Ora, nesse caso o computador foi usado de forma artificial e não foi explorado em sua potencialidade máxima como um meio que pode oportunizar mudanças no processo de ensino e aprendizagem que sejam de ordem do conhecimento” (BITTAR, 2010, p. 239 -240).

Uma vez que a escola possua um laboratório de informática disponível aos alunos, cabe ao professor escolher como irá trabalhar com esses equipamentos. Assim, para elaborar situações de aprendizagem sobre o número π ou como encontrá-lo em outros objetos, precisamos pensar em softwares que contribuam de forma direta para isso. Se pensamos em ensinar o π através de relações geométricas por exemplo, um software que pode contribuir com isso é o GeoGebra. Se por outro lado pensarmos em atividades cujo objetivo seja calcular o valor de π através de aproximações ou cálculos extensos, pode ser mais interessante usar um programa de planilhas eletrônicas como o Excel ou Open Office Calc. O importante é que essas atividades proporcionem uma nova forma de interação dos alunos com os conceitos e conteúdos relacionados ao π .

Bittar (2010) também nos trás alguns questionamentos que podem nos ajudar na escolha de um software para ser usado em sala de aula.

Nas diversas experiências que temos tido com o uso da informática aplicada à Educação, sempre aparecem questões ligadas aos requisitos a serem considerados no momento de escolher o material para uso em sala de aula. Podemos tentar, inicialmente, listar alguns itens ou questões que devem ser observados para orientar o estudo desse material: Qual o conteúdo que o software permite tratar? Que teoria de aprendizagem fundamenta o software? Qual o grau de interatividade possível entre aluno e objeto do conhecimento? Trata-se de um software aberto ou fechado? Que atividades são possíveis de serem realizadas? Trata-se de uma interface “amigável” (ou qual a facilidade de manuseio)? Quais os ganhos obtidos com o uso do software em relação ao ambiente papel e lápis? (BITTAR, 2010, p. 222 – 223).

O que propomos é a utilização dos recursos tecnológicos para auxiliar na produção do conhecimento matemático. Isto, seguramente, levará o aluno a uma aprendizagem significativa, mediada pela ação do professor. O professor e o aluno poderão usar o computador na escola ou em casa para pesquisar na Internet sobre o número π , poderão também utilizar softwares para realizar cálculos em busca de aproximações, escrever, ampliar e reescrever textos com as informações pesquisadas, permitindo assim situações em que o processo de ensino e aprendizagem ganhe um novo significado se comparado com as aulas tradicionais.

2.3 Modelagem Matemática

Para Biembengut e Hein (2000) a modelagem matemática pode ser definida da seguinte forma:

[...] é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além do conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. (BIEMBENGUT e HEIN, 2000, p. 13).

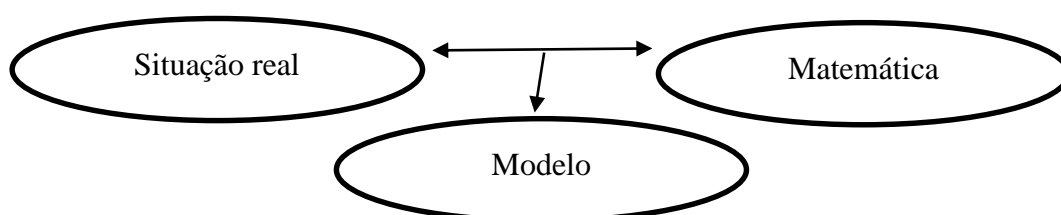


Figura 10 – Esquema do processo de modelagem matemática

(Fonte: Biembengut e Hein, 2000, p. 13)

A modelagem então, pode se utilizar de modelos matemáticos já conhecidos, busca determinar o modelo possível de aplicação e que atenda ao estudo em questão e também tem por finalidade compreender ou prever como se comporta o fenômeno do objeto modelado.

Para Barbosa (2004) a modelagem matemática é conceituada diversas vezes em termos genéricos como a aplicação de matemática em outras áreas do conhecimento. Entretanto, o autor critica essa definição por acreditar que a modelagem é um grande “guarda-chuva”, onde cabe quase tudo.

Muito se tem discutido sobre as razões para a inclusão de modelagem no currículo (BASSANEZI, 1994). Em geral, são apresentados cinco argumentos: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sócio cultural da matemática.

Martins e Mendes (2009, p. 1) afirmam que “os modelos matemáticos são vistos como formas de estruturar e formalizar fenômenos do dia a dia, a fim de que o aluno se torne mais consciente da utilidade da matemática para resolver e analisar problemas do cotidiano”.

A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças. Salientamos, mais uma vez, que a aplicabilidade de um modelo depende substancialmente do contexto em que ele é desenvolvido – um modelo pode ser “bom” para o biólogo e não para o matemático e vice versa. Um modelo parcial pode atender às necessidades imediatas de um pesquisador mesmo que não comporte todas as variáveis que influenciam na dinâmica do fenômeno estudado. (BASSANEZI, 2002, p. 31).

Biembengut e Hein (2000) dividem uma atividade de modelagem em três etapas:

- ✓ Interação: reconhecimento da situação problema; familiarização com o assunto a ser modelado (referencial teórico);
- ✓ Matematização: formulação do problema (hipótese); resolução do problema em termos do modelo desejado;
- ✓ Modelo matemático: interpretação da solução; validação do modelo (avaliação).

Schneider (2010) fala que a modelagem matemática é relevante e viável em todos os níveis de ensino e lembra que, muitos educadores desenvolvem algumas etapas da modelagem matemática mas deixam de realizar o mais importante: o modelo matemático. Podemos ilustrar isso com um caso relatado por Biembengut (1990), em que os alunos investigaram quanto custa construir uma casa. Para isto, eles listaram os materiais necessários, coletaram os preços, efetuaram cálculos e organizaram os resultados, sem construírem um modelo matemático propriamente dito. Outra ilustração pode ser trazida do relato de pesquisa de Araújo (2000), que aponta um grupo de alunas que criou uma situação problema imaginária para abordá-la matematicamente: a temperatura no decorrer do ano de uma cidade fictícia.

Os modeladores profissionais, ao contrário, investigam situações concretas trazidas por outras áreas do conhecimento que não a matemática. Acabamos tendo uma inversão de ordem quando propomos a modelagem matemática na sala de aula, pois torna-se deveras complexo para alunos da educação básica solucionar problemas de outras áreas do conhecimento com matemática básica. Pensamos no conteúdo matemático primeiro e depois em uma situação real, ou as vezes fictícia, para trabalhar com modelagem. O que precisamos, é ter o cuidado para que a modelagem matemática proposta fique o mais próxima possível daquela feita pelos modeladores profissionais.

Barbosa (2001) fala que podemos ter limitações para trabalhar com a modelagem matemática. “A principal dificuldade diz respeito aos quadros de referências postos pelo

contexto escolar; aqui, os propósitos, a dinâmica do trabalho e a natureza das discussões matemáticas diferem dos modeladores profissionais” (BARBOSA, 2001, p. 2). Matos e Carreira (1996) concluem que estas diferenças contextuais levam a distinções entre o que os alunos fazem em suas atividades de modelagem e o que é esperado dos matemáticos aplicados. “Esta situação tem levado a algumas incoerências entre a perspectiva teórica e a prática de modelagem na sala de aula” (BARBOSA, 2001, p. 2), como percebemos nos exemplos citados.

A modelagem, visando aplicações, que é mais comum, faz sempre apelo à realidade na qual está inserido o sistema que deu origem ao modelo com o qual trabalhamos, sempre procurando verificar a adequação dos parâmetros selecionados e as implicações dessa seleção.

A modelagem é eficiente a partir do momento em que nos conscientizamos de que estamos sempre trabalhando com aproximações da situação real, que, na verdade, estamos elaborando sobre representações. Assim, a modelagem pode ser uma metodologia de ensino muito útil e se enquadra no Programa Etnomatemática¹¹, que inclui a crítica, também de natureza histórica, sobre representações, que deve estar subjacente ao processo de modelagem. (DANTE, 2010, p. 37).

O que podemos entender é que, ao trabalharmos com problemas e situações reais, fazendo uma possível previsão e usando a matemática, trabalharemos com modelagem matemática. Podemos assim ter não só aprendizagem sobre o conteúdo matemático, mas também de conteúdos ligados a outras ciências.

2.4 Jogos

Conforme as orientações dos PCN, as atividades com jogos podem representar um importante recurso pedagógico.

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações. (BRASIL, 1998, p. 47).

¹¹ “Etnomatemática é a arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender nos diversos contextos culturais. Ela procura compreender o saber/fazer matemático ao longo da história da humanidade, contextualizando em diferentes grupos de interesse, comunidades, povos e nações”(DANTE, 2010, p. 36).

Em um jogo, o aluno desempenha papel ativo na construção de seu conhecimento, desenvolvendo raciocínio, autonomia, além de interagir com seus colegas.

As crianças gastam grande parte do seu tempo brincando, jogando e desempenhando atividades lúdicas. Grandó (2000) em sua tese de doutorado afirma que muitas crianças ficam horas prestando atenção em um único jogo e não se cansam. E muitas dessas crianças são diagnosticadas com dificuldade de concentração e observação nas atividades escolares.

Frequentemente se ouvem pais dizendo: “Se você fizer seus deveres poderá brincar. Do contrário, não”. Ou seja, a brincadeira, nesse caso, representa um prêmio e não é compreendida como uma necessidade da criança. A criança, em decorrência, pode começar a se desinteressar pelas atividades escolares, pois estas representam um empecilho à brincadeira, uma forma de “punição” [...] Então, por que não se pode desenvolver o estudo e a brincadeira, ambos necessários ao desenvolvimento do indivíduo a partir de uma atividade única, comum, onde seja possível aprender brincando? (GRANDÓ, 2000, p. 19).

Ao observarmos o comportamento de uma criança em situações de brincadeiras e jogos, percebemos o quanto ela desenvolve sua capacidade de fazer perguntas, buscar diferentes soluções, repensar situações, avaliar suas atitudes, encontrar e reestruturar novas relações, ou seja, resolver problemas.

Quando os jogos são realizados em grupo, consegue-se melhorar o espírito de cooperação, estimular a criatividade e promover a responsabilidade na busca de objetivos comuns. Mesmo que fique caracterizada uma competição, os jogos promovem o espírito de corresponsabilidade e de respeito entre os jogadores.

Por meio dos jogos as crianças não apenas vivenciam situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia (jogos simbólicos): os significados das coisas passam a ser imaginados por elas. Ao criarem essas analogias, tornam-se produtoras de linguagens, criadoras de convenções, capacitando-se para se submeterem a regras e dar explicações. (BRASIL, 2010, p. 35).

O desenvolvimento do raciocínio lógico, da criatividade e do pensamento independente, bem como da capacidade de resolver problemas, só é possível através do ensino da matemática se nos dispormos a realizar trabalhos que vão ao encontro da realidade dos nossos alunos onde seja possível. Lara (2011) destaca o uso de jogos em uma tentativa de trazer o lúdico para dentro da sala de aula.

A pretensão da maioria dos professores com a sua utilização é a de tornar as aulas mais agradáveis com o intuito de fazer com que a aprendizagem torne-se fascinante. Além disso, as atividades lúdicas podem ser consideradas como uma estratégia que estimula o raciocínio,

levando o aluno a enfrentar situações conflitantes relacionadas com o seu cotidiano. Contudo, muitas vezes é concebido apenas como um passa tempo ou uma brincadeira e não como uma atividade que pretende auxiliar o aluno a pensar com clareza, desenvolvendo sua criatividade e raciocínio lógico. E, muito menos, como sendo um instrumento para a construção do conhecimento matemático. (LARA, 2011, p. 21).

Para Schneider (2009, p. 45) “a contribuição do jogo no processo educativo passa pela intencionalidade do professor. A escolha do tipo de jogo deve estar relacionada com o principal objetivo [...] o jogo deve conter elementos de associação e/ou relacionados a esse conteúdo.”

Quando são propostas atividades com jogos para os alunos, a reação mais comum é de alegria e prazer pela atividade a ser desenvolvida [...]. Este interesse natural pelo jogo já é concebido no senso comum. Entretanto, alguns educadores acreditam que, pelo fato de o aluno estar durante todo o jogo, envolvido na ação, participando, jogando, isto garante a aprendizagem. É necessário fazer mais do que simplesmente jogar um determinado jogo. [...] é necessário o processo de intervenção pedagógica a fim de que o jogo possa ser útil à aprendizagem, principalmente para os adolescentes e adultos. Além disso, é necessário que a atividade do jogo proposta, represente um verdadeiro desafio ao sujeito, ou seja que seja capaz de gerar “conflitos cognitivos” ao sujeito, despertando-o para a ação, para o envolvimento com a atividade [...] (GRANDO, 2000, p. 26 – 27).

Lara (2011) lembra que podemos utilizar jogos no ensino de matemática com a pretensão de resgatar a vontade de aprender e conhecer mais sobre algum conteúdo matemático. A autora conclui que se concebermos o ensino de matemática como sendo um processo de repetição, treinamento e memorização, desenvolveremos um jogo como sendo outro tipo de exercício. “Mas, se concebermos esse ensino como sendo um momento de descoberta, de criação e de experimentação, veremos o jogo não só como um instrumento de recreação, mas, principalmente, como um veículo para a construção do conhecimento” (Lara, 2011, p. 23).

Quando nos referimos à utilização de jogos para o ensino do número π como suporte metodológico, consideramos que tenha utilidade em todos os níveis de ensino. O importante é que os objetivos com o jogo sejam claros, a metodologia a ser utilizada esteja adequada ao nível de ensino e principalmente que represente uma atividade desafiadora ao aluno e contribua no processo de ensino e aprendizagem.

Se o objetivo for trabalhar alguns fatos históricos relacionados ao π podemos elaborar uma cruzadinha, um caça palavras, um quiz de perguntas e respostas ou um quebra cabeças com questões do tipo “Autor do método científico para calcular o π ” ou

“Documento do Egito Antigo que contém o problema da quadratura”. Agora se o professor desejar propor atividades envolvendo os cálculos com o número π podem ser desenvolvidos jogos de dominó em que os lados das peças que se combinam podem ser o método e sua aproximação encontrada, ou um bingo com problemas sobre o π , ou um jogo de cartas modificado, ou jogos de tabuleiro que contenham informações sobre o π , por exemplo.

2.5 Resolução de Problemas

Ao propor atividades em que os alunos possam utilizar conceitos matemáticos para a resolução de situações-problema, estamos favorecendo o desenvolvimento de uma atitude positiva do aluno em relação à matemática. Não é recomendado fazer mecanicamente a resolução de um problema, é preciso saber como e quando utilizar técnicas e conceitos aprendidos anteriormente pois esse é um dos papéis da matemática.

Uma aula de matemática onde os alunos, incentivados e orientados pelo professor, trabalhem de moto ativo – individualmente ou em pequenos grupos – na aventura de buscar a solução de um problema que os desafia é mais dinâmica e motivadora do que a que segue o clássico esquema de explicar e repetir [...] (DANTE, 1994, p. 13 – 14).

Precisamos superar a ideia de que o professor é o detentor do saber e o aluno é aquele que não sabe, que apenas consegue reproduzir aquilo que lhe foi mostrado. Para Cury (2003, p. 1) “a arte da pergunta faz parte da educação dos nossos sonhos. Ela transforma a sala de aula [...] num ambiente poético, agradável e inteligente”. Precisamos deixar nossos alunos questionarem mais, pois assim saberemos que eles estão pensando mais. Expor conteúdos e pedir que os alunos apenas repitam os procedimentos durante as aulas e nas avaliações, são atitudes que vão na contra mão do incentivo a autonomia, crítica, matematização e busca pelo conhecimento que precisamos propor aos alunos.

Pensando assim, é necessário que diferenciemos problema de exercício.

Tomemos como “resolvedor” um aluno de final do primeiro grau (é importante apontar a pessoa, pois o que pode ser um problema para uma pessoa, pode não o ser para outra).

Exercício: resolver a equação $x^2 - 3x + 1 = 0$ (supõe-se que tal aluno conheça a fórmula de Bhaskara)

Problema: provar a fórmula de Bhaskara (supõe-se que tal aluno conheça a fórmula de Bhaskara)

Problema (mais difícil): descobrir, provando, uma fórmula para resolver toda e qualquer equação algébrica do segundo grau (supõe-se que tal aluno não conheça a fórmula de Bhaskara)

Problema (mais difícil): descobrir uma fórmula diferente da de Bhaskara e capaz de resolver toda e qualquer equação algébrica do segundo grau. (SILVEIRA, 2009, p. 2)

Schneider (2011) fala que devemos ser capazes de levar o aluno a resolver exercícios por meio da pesquisa em sala de aula e fora dela, além de argumentar, defender uma ideia logicamente, desenvolvendo a matemática e resolvendo problemas matemáticos.

Situações-problema são problemas de aplicação que retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da matemática para serem resolvidos [...] Através de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos, procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações, etc. Em geral, são problemas que exigem pesquisa e levantamento de dados. Podem ser apresentados na forma de projetos a serem desenvolvidos usando conhecimentos e princípios de outras áreas que não a matemática, desde que a resposta se relacione a algo que desperte interesse. (DANTE, 2003, p. 20).

Ao nos depararmos com os problemas, é de fundamental importância conhecermos suas características. Vejamos as características levantadas por Resnick e resumidas por Silveira (2009, p. 1):

- ✓ Sem algoritmização: o caminho da resolução é desconhecido, ao menos em boa parte;
- ✓ Complexos: precisam de vários pontos de vista;
- ✓ Exigentes: a solução só é atingida após intenso trabalho mental, embora o caminho possa ser curto, ele tende a ser difícil;
- ✓ Exigem lucidez e paciência: para na aparente desordem, vemos regularidades, os padrões que permitirão a construção do caminho até a solução;
- ✓ Nebulosos: pode ocorrer que nem todas as informações necessárias estejam aparentes, por outro lado, pode ocorrer também que existem conflitos entre as condições estabelecidas pelo problema;
- ✓ Não há resposta única: além de normalmente ocorrer de existirem várias maneiras de se resolver um dado problema, pode ocorrer de não existir uma melhor solução e até de não existir solução, ao contrário do que a escola ensina: resolver um problema não é o mesmo que achar a resposta.

Schneider (2009) fala que ao apresentarmos situações-problema que envolvam as experimentações do aluno, o levamos a pensar de forma a criar processos mentais

relacionados com a sua vivência, o desafiando a resolvê-las utilizando seu raciocínio lógico matemático.

Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantida de apropriação do conhecimento envolvido. Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam provar os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar à importância do processo de resolução. (BRASIL, 1998, p. 42).

Portanto, a resolução de problemas busca novos caminhos e não somente utilizar as já conhecidas soluções. A resolução de situações-problema deve ser vista como um meio de desenvolver habilidades e atitudes no processo de formação de conceitos pelo aluno.

3. PROPOSTAS DIDÁTICAS

Com base nas tendências atuais de ensino da matemática apresentadas no capítulo anterior, foram reunidas 8 propostas didáticas para o ensino do número π , algumas coletadas em artigos (estas devidamente referenciadas) e outras desenvolvidas pelo autor.

3.1 Linha do tempo sobre o π (composição do autor)

Objetivo: criar uma linha do tempo da história do número π .

Nível de ensino adequado: Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

Duração: pelo menos duas aulas de 45 minutos cada, preferencialmente aulas seguidas.

Pré Requisitos: informática básica (uso de navegador da Internet).

Recursos: computador, projetor, papel, lápis, borracha, giz e quadro negro.

Sequência Didática

1) Inicie a aula com uma apresentação sobre alguns fatos históricos sobre o número π . Em sua apresentação tente destacar pelo menos cinco fatos que você julgar serem mais atraentes aos seus alunos. No decorrer da apresentação tente destacar os cálculos matemáticos envolvidos e os métodos utilizados para encontrar o valor aproximado do π . Você pode utilizar programas de apresentação gráfica como o Power Point ou o Libre Office Impress ou o webapp¹² Prezi¹³.

¹² Software utilizado através de um navegador de um computador que tenha acesso à Internet, não necessita de instalação na máquina.

¹³ Disponível no endereço www.prezi.com que permite a criação de apresentações mais dinâmicas e atraentes. Neste link <http://www.youtube.com/watch?v=ijSDqstB1nk>, você encontra o vídeo “Apresentações Fantásticas com o Prezi”, disponível no You Tube, onde Sam Adam mostra alguns recursos do Prezi e como utilizá-lo.

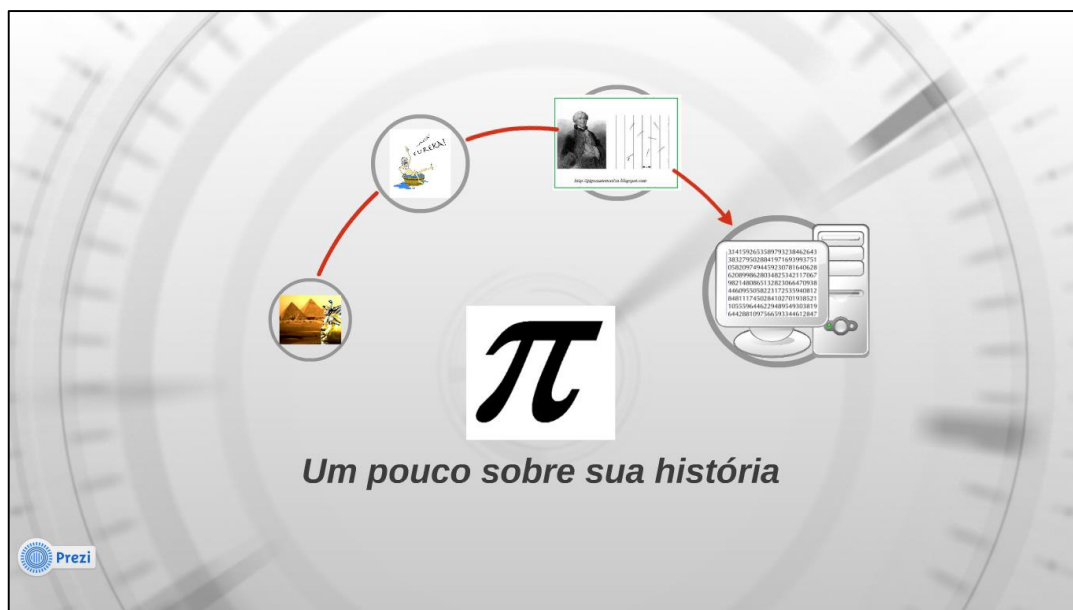


Figura 11 – Apresentação sobre alguns fatos históricos sobre o π através do Prezi. (Fonte: composição do autor)

- 2) Explique aos alunos que em duplas ou trios eles deverão criar um linha do tempo sobre a história do número π utilizando o webapp Dipity.
- 3) Mostre como utilizar o webapp Dipity¹⁴, conforme mostra a Figura 12. Para exemplificar, crie uma linha do tempo com pelo menos três fatos sobre a história do π .

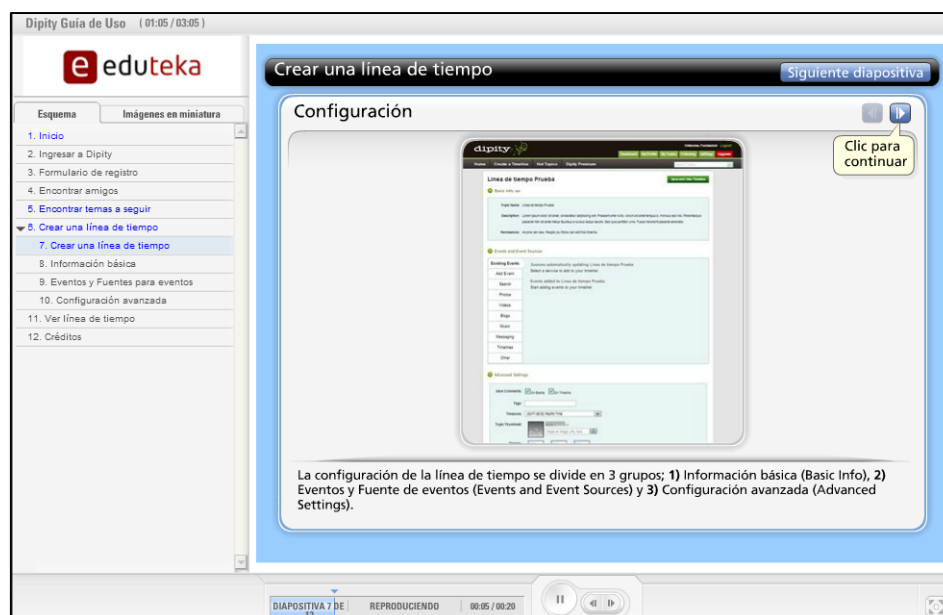


Figura 12 – “Dipity Guia de Uso” (Fonte: Eduteka, 2013).

¹⁴ Disponível no endereço www.dipity.com Para isso, você pode dar uma olhada no tutorial “Dipity Guia de Uso” do portal Eduteka, disponível no site <http://www.eduteka.org/Objetos/Dipity/player.html>.

O Dipity é gratuito e permite a criação de linhas do tempo que possuam além da descrição, imagens e vídeos. As linhas do tempo podem ser visualizadas de várias formas: modo cronograma, formato de lista, modo de livro e modo de mapa, onde os alunos podem incluir a localização dos acontecimentos, como mostra a figura 13.

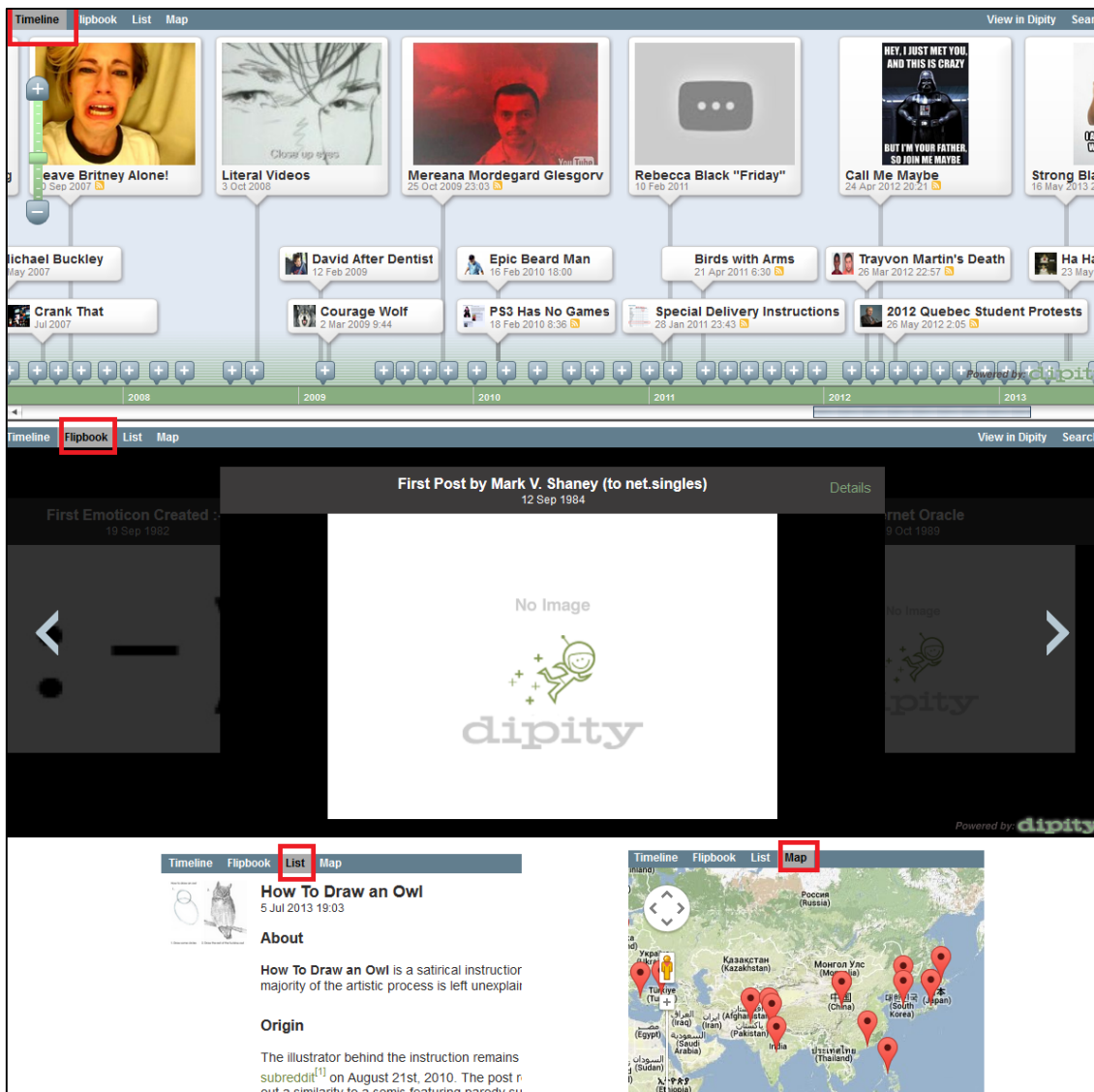


Figura 13 - Modos de visualização do Dipity (Fonte: composição do autor)

Qualquer linha do tempo criada pode ser comentada por qualquer pessoa que a veja. Além disso, existe a possibilidade de trabalhar de forma colaborativa, em que vários alunos podem sugerir contribuições para a mesma linha do tempo. O recurso reduz o nível do famoso “copia e cola” pois exige que os alunos analisem e selecionem as informações encontradas sobre a história do π . Oriente os alunos para realizarem pesquisas na Internet e se possível, traga livros para sala de aula que falem sobre a história do π .

4) Por último, solicite aos alunos que criem individualmente um texto com pelo menos 10 linhas sobre o enunciado abaixo:

“De acordo com a sua linha do tempo e as pesquisas realizadas sobre a história do número π , fale sobre a importância do cálculo do π para o desenvolvimento da humanidade. Cite exemplos”

3.2 Gincana de perguntas e respostas (composição do autor)

Objetivo: resolver exercícios, problemas e conhecer fatos históricos sobre o π .

Nível de ensino adequado: Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

Duração: pelo menos duas aulas de 45 minutos cada, preferencialmente aulas seguidas.

Pré Requisitos: história do número π , fórmulas para o cálculo do comprimento e área de uma circunferência, volume da esfera.

Recursos: computador, projetor, papel, lápis, borracha, giz e quadro negro.

Sequência Didática

- 1) Divida a turma em equipes.
- 2) Crie uma apresentação explicando as regras da gincana:
 - a. Cada equipe, em sua vez, deverá escolher uma questão para responder;
 - b. O nível de dificuldade da questão determinará a quantidade de tempo para a equipe dar a resposta e a quantidade de pontos que poderão receber caso acertem a resposta (por exemplo, nível A: 1 minuto e 1 ponto; nível B: 2 minutos e 2 pontos);
 - c. Caso a equipe erre a resposta, todas as outras equipes deverão entregar ao professor a sua resposta em um papel e ganharão os pontos se a resposta estiver correta;
 - d. Vence a equipe que fizer mais pontos.
O prêmio pode ser combinado com a turma. Pode ser por exemplo uma guloseima ou alguns pontos na próxima avaliação de matemática.

Você pode elaborar uma apresentação em Power Point ou no Libre Office Calc contendo as questões da gincana. Para isso crie um quadro de questões com o nível de dificuldade (A, B, C, ...) e o número da questão (1, 2, 3, ...), conforme o modelo abaixo.

GINCANA SOBRE O NÚMERO π				
A	B	C	D	E
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5

Figura 14 – Modelo de quadro com link para as questões da gincana (Fonte: composição do autor).

Para cada questão crie um slide com o enunciado e o slide seguinte com a resposta. Você pode colocar como enunciados exercícios, problemas e fatos históricos envolvendo o número π . Exemplos:

- a. *Qual o diâmetro aproximado de uma circunferência cujo comprimento mede 31,4 cm?*
- b. *O contorno de cada um dos relógios do Big Ben de Londres possui aproximadamente 6,9 metros. Qual é o comprimento do ponteiro dos minutos desses relógios?*
- c. *Qual o nome do matemático autor do método que ficou conhecido como “método clássico” para o cálculo do número π ?*

Procure também questões de vestibulares e do ENEM. As questões podem ter uma resposta aberta (caso em que as respostas é um valor numérico), ou podem ter alternativas. Inclua ilustrações e se preocupe com as cores que irá utilizar para deixar os slides atraentes aos alunos.

Após criar todos os slides (perguntas e respostas), crie hiperlinks para que você possa clicar em uma figura geométrica escolhida por alguma equipe (exemplo: B12) e apareça o slide que contém a questão escolhida. Existem diversos tutoriais em texto e vídeo disponíveis na Internet que ensinam como utilizar os hiperlinks, é um recurso bem simples que fará uma grande diferença. Não se esqueça de colocar no slide que contém a resposta um hiperlink para retornar ao slide que contém o quadro de questões.

3.3 Embalagens de bolas de tênis (composição do autor)

Objetivo: reconhecer a importância da obtenção de melhores aproximações para o π através de uma situação problema.

Nível de ensino adequado: Ensino Médio.

Duração: pelo menos duas aulas de 45 minutos cada, preferencialmente em dias diferentes para que os alunos possam realizar pesquisas em casa.

Pré Requisitos: volume de sólidos.

Recursos: Papel, lápis, borracha, giz e quadro negro.

Sequência Didática

Proponha aos alunos a resolução do seguinte problema:

“A empresa Raquete S/A fabrica bolas de tênis e utiliza embalagens cilíndricas para transportá-las. Cada embalagem contém três bolas, com raio r cada, empilhadas umas sobre as outras. A empresa deseja aumentar a quantidade de embalagens transportadas da fábrica da empresa até as lojas de revenda. Cada caminhão possui um baú em formato retangular com as seguintes dimensões: altura 3 m, largura 2, 5 m e comprimento 5 m. Além disso a empresa busca um novo formato de embalagem que utilize menos material para ser fabricado.”

- (a) Qual é a razão entre a altura e a circunferência da base da embalagem cilíndrica utilizada atualmente pela empresa Raquete S/A?

- (b) Os antigos babilônios sabiam que o perímetro de um hexágono regular era exatamente seis vezes o raio de uma circunferência circunscrita ao hexágono. A tábua encontrada continha diversas figuras geométricas e trazia a informação de que a proporção do perímetro de um hexágono regular entre o comprimento de uma circunferência circunscrita ao mesmo hexágono era de $\frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2}$. Qual é a relação entre o conhecimento dos babilônios e a razão encontrada na questão anterior? Utilizando esta relação calcule um valor para o π que possivelmente os babilônios conheciam.
- (c) Qual é o formato de embalagem que melhor atende as expectativas da empresa Raquete S/A? Justifique sua resposta.
- (d) Calcule a área da superfície externa da embalagem determinada na questão anterior utilizando o valor do π possivelmente conhecido pelos babilônios e com o valor do π conhecido atualmente (utilize pelo menos 5 casas decimais).
- (e) Se ainda utilizássemos o valor para o π possivelmente conhecido pelos babilônios, faltaria ou sobraria material para a empresa Raquete S/A confeccionar cada embalagem? Isso seria um lucro ou prejuízo financeiro caso a empresa fizesse um planejamento para a compra do material necessário para construir 100 embalagens?
- (f) Cite alguma situação em que uma aproximação ruim para o número π possa acarretar em algum problema.

3.4 Calculando o π através da tangente de um ângulo (composição do autor)

Objetivo: obter uma aproximação para o π através do gráfico cartesiano.

Nível de ensino adequado: Ensino Fundamental.

Duração: uma aula de 45 minutos.

Pré Requisitos: construção de retas no plano cartesiano e razões trigonométricas.

Recursos: Barbante, objetos redondos, régua, transferidor, tabela trigonométrica, papel, lápis, borracha, giz e quadro negro.

Sequência Didática

- 1) Divida a turma em equipes com dois ou três alunos cada. Entregue aos alunos objetos com formatos redondos (garrafas, pratos, tampas, copos, ...) e um barbante. Solicite que,

com o auxílio de uma régua, eles meçam o comprimento da circunferência e o diâmetro de cada objeto.

2) Construa no quadro um plano cartesiano conforme abaixo:

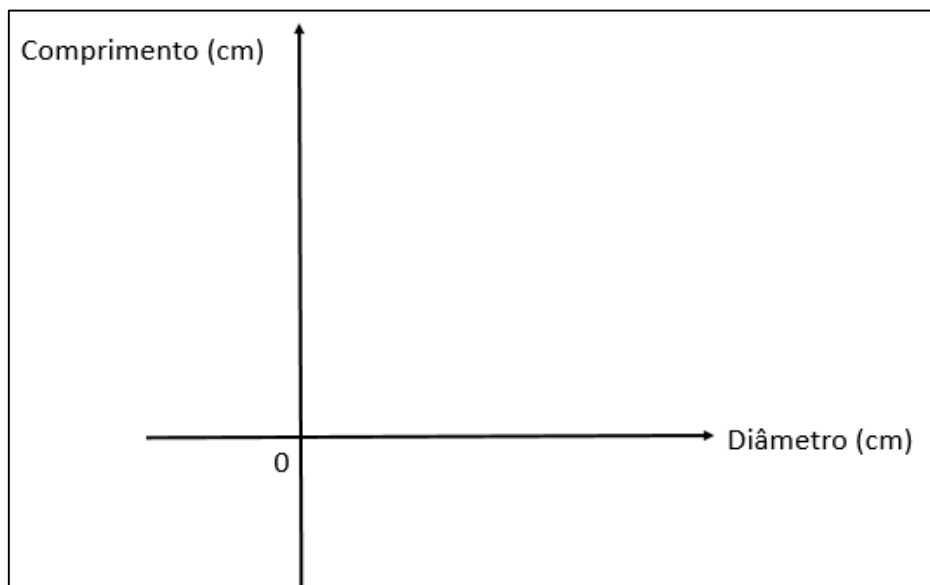


Figura 15 – Modelo do plano cartesiano modificado para ser exposto no quadro (Fonte: composição do autor).

3) Solicite aos alunos que copiem o plano cartesiano em uma folha de papel A4 e representem através de pontos sobre os eixos ordenados os valores dos comprimentos de diâmetros encontrados e tracem uma reta unindo os pares de pontos do tipo $P_A = (\text{medida do diâmetro}, 0)$ e $P_B = (0, \text{medida da circunferência})$. Eles devem obter esboços de gráficos como os da figura abaixo.

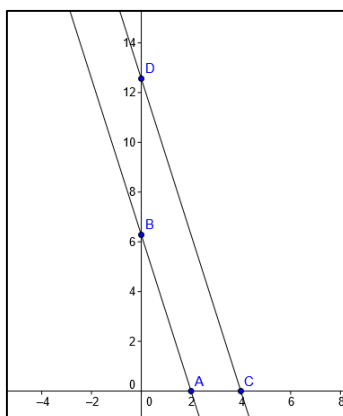


Figura 16 – Modelo de representação dos pontos sobre o plano cartesiano (Fonte: composição do autor)

4) Com o auxílio do transferidor solicite que os alunos meçam o menor ângulo criado entre o eixo dos diâmetros e as retas.

- 5) Proponha a resolução das seguintes questões:
- Qual a definição da tangente de um ângulo com relação ao comprimento dos lados de um triângulo retângulo?
 - Qual o valor aproximado da tangente dos ângulos encontrados?
 - Por que todos os triângulos formados no gráfico possuem as mesmas medidas de ângulos?
 - Sendo $d = \text{diâmetro}$, $c = \text{circunferência}$ e $\alpha = \text{medida de um ângulo}$, relacione em uma equação $\text{tg}\alpha, d, c$.
 - O que podemos afirmar sobre a divisão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência?
- 6) Formalize com os alunos o valor da tangente é o número π e sua aproximação mais comum é $\pi = 3,14$.

3.5 O π no Antigo Egito (composição do autor)

Objetivo: obter uma aproximação para o π através de elementos da HM.

Nível de ensino adequado: Ensino Fundamental.

Duração: pelo menos duas aulas de 45 minutos cada, preferencialmente aulas seguidas.

Pré Requisitos: geometria plana.

Recursos: computador, barbante, papel, lápis, borracha, giz e quadro negro.

Sequência Didática

- Inicie a aula com a exibição do vídeo “Quis TV Escola – Quem inventou a fração?”, disponível no link http://www.youtube.com/watch?v=Z0Wcmr_xWj4.
- Chame a atenção dos alunos para o uso do comprimento da corda como unidade de medida para marcar as áreas cultiváveis dos agricultores.
- Entregue aos alunos uma folha com várias circunferências marcadas com seus respectivos diâmetros e um pedaço de barbante. Proponha os seguintes exercícios:
 - Pesquise na Internet quais eram as unidades de medidas utilizadas pelos antigos egípcios? A quais valores em centímetros essas unidades são correspondentes?
 - Em cada circunferência, meça com o barbante o comprimento do diâmetro e calcule quantas vezes esse comprimento precisa ser utilizado para percorrer o comprimento da circunferência.

Oriente os alunos para descobrirem uma proporção do pedaço restante para completar o comprimento da circunferência relacionado com a unidade de medida utilizada (o diâmetro), conforme demonstramos no capítulo 1.

- (c) Expresse o comprimento das circunferências do item (b) utilizando alguma unidade de medida do sistema de numeração egípcio. Considere o diâmetro da circunferência equivalente a 1 da unidade de medida escolhida.
- (d) Determine um valor mínimo e um valor máximo para a quantidade de vezes que o comprimento do barbante pode ser colocado sobre o comprimento da circunferência. Expresse esses valores em notação de fração e de número decimal.
- (e) O Papiro de Rhind, criado pelos antigos egípcios, possuía o seguinte problema:
A área de um círculo é igual à de um quadrado cujo lado (d) é o diâmetro (2r) do círculo subtraindo-se sua nona parte.
 De acordo com o problema do Papiro de Rhind, qual é a área A de um círculo de raio r ?
- (f) Relacione a fórmula para o cálculo da área do círculo $A = \pi r^2$, com o valor da área encontrado na questão anterior e encontre um valor aproximado para o π .

Deixamos aqui como sugestão a elaboração de um projeto maior envolvendo esta atividade. Em um projeto interdisciplinar maior com história e educação artística, outras atividades sobre a cultura egípcia podem ser elaboradas, permitindo aos alunos atribuírem mais significados para essa atividade. Podemos destacar:

- ✓ A função do homem das cordas;
- ✓ A economia no Antigo Egito;
- ✓ Vestimentas egípcias;
- ✓ Religião;
- ✓ Relações sociais entre os faraós, escravos e demais cidadãos egípcios;
- ✓ Construção das pirâmides (geometria e técnicas de construção);
- ✓ Instrumentos e sistemas de medidas egípcios;
- ✓ Sistema de numeração egípcio.

3.6 Calculando o π com a calculadora (retirado da Revista do Professor de Matemática – nº 66)

Objetivo: obter uma aproximação para o π através de relações geométricas e do uso da calculadora.

Nível de ensino adequado: Ensino Médio.

Duração: uma aula de 45 minutos.

Pré Requisitos: geometria plana.

Recursos: calculadora, papel, lápis, borracha, giz e quadro negro.

Sequência Didática

Essa sequência didática foi encontrada na Revista do Professor de Matemática (RPM) publicada em 2008, edição nº 66, página 3, de autoria de Gilberto Garbi. A etapa 1 é parte integral da proposta de Garbi. A etapa 2 é de composição do autor.

1) De forma expositiva e dialogada, faça as seguintes construções.

Sejam, conforme a figura, uma circunferência de centro C e nela inscrito um polígono regular de n lados, dos quais apenas um, AB , está mostrado. Então, o ângulo ACB é o ângulo central dos polígonos regulares de n lados. Seja, também, CM o apótema de tal polígono.

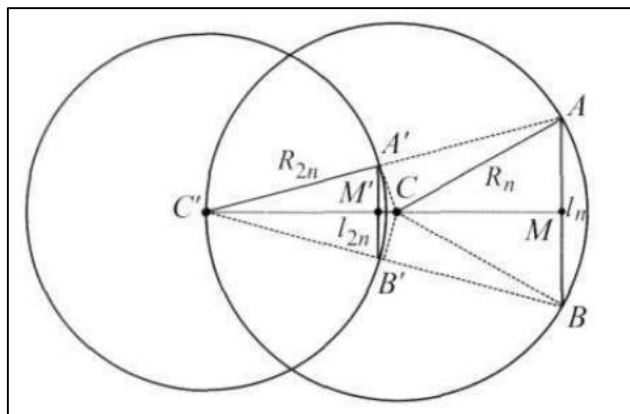


Figura 17 - Circunferência de centro C e nela inscrito um polígono regular de n lados, dos quais apenas um, AB , está mostrado (Fonte: Revista do Professor de Matemática, 2008, p. 2).

Chamemos o raio da circunferência de R_n , o apótema CM de a_n e o lado AB de l_n . Prolonguemos CM até que ele corte a circunferência no ponto C' , com C entre C' e M . O ângulo inscrito $AC'B$ é o ângulo central dos polígonos regulares de $2n$ lados. Os segmentos AC' e BC' são congruentes porque $C'M$ é perpendicular a AB . Por C tracemos as perpendiculares CA' e CB' a AC' e BC' , respectivamente. A' e B' são os pontos médios de AC e BC , porque os triângulos ACC' e BCC' são isósceles. Logo, o segmento de reta

$A'B'$, que une aqueles pontos médios, é a metade de AB . Como $A'C' = B'C'$, $A'B'$ é o lado do polígono regular de $2n$ lados inscrito na circunferência de raio $A'C' = B'C'$, que chamaremos de R_{2n} . O perímetro do polígono inscrito na circunferência de raio R_n é nl_n . O perímetro inscrito na circunferência de raio R_{2n} é $2nl_{2n}$. Mas, como $l_{2n} = \frac{1}{2}l_n$, os perímetros são iguais.

Em resumo, essa construção nos permitiu, partindo de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência, construir, em outra circunferência, um polígono regular com $2n$ lados em com o mesmo perímetro do primeiro.

O apótema $C'M'$ (que chamaremos de a_{2n}) do novo polígono é a metade de $C'M'$ (pois $A'B' // AB$). Mas $C'M = C'C + CM = R_n + a_n$. Logo $a_{2n} = \frac{R_n + a_n}{2}$, ou seja, a_{2n} é a média aritmética entre R_n e a_n . No triângulo retângulo $A'C'C$, $(A'C')^2 = CC' \times C'M'$ ou $R_{2n}^2 = R_n \times a_{2n}$ ou $R_{2n} = \sqrt{R_n \times a_{2n}}$, ou seja, R_{2n} é a média geométrica entre R_n e a_{2n} .

Portanto, conhecidas as medidas do raio do apótema de um polígono regular de n lados, podemos com essas fórmulas calcular as medidas do raio do apótema de um polígono regular de $2n$ lados, isoperimétrico com o inicial. Essa operação pode, agora, ser repetida indefinidamente, calculando-se as medidas dos raios dos respectivos apótemas de polígonos isoperimétricos com $4n, 8n, 16n, 32n$, etc., lados. À medida que o número de lados cresce, diminui a diferença entre o raio e o apótema. No limite, quando o raio e o apótema forem iguais, o polígono e a circunferência coincidirão, ou seja, o perímetro do polígono será o comprimento da circunferência. Mas não é preciso realizar uma infinidade de cálculos: quando julgarmos que a diferença entre o raio e o apótema de um dos polígonos a que chegamos está suficientemente pequena, podemos parar e calcular π dividindo o perímetro (que é conhecido desde o início) pelo dobro do raio calculado (ou do apótema, já que ambos estarão muito próximos).

2) Solicite aos alunos que façam os cálculos partindo de um polígono regular de 4 lados de comprimento 1 cm inscrito em uma circunferência que terá raio $R_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e o apótema será $a_4 = \frac{1}{2}$. Neste momento os alunos poderão usar a calculadora para encontrar os valores. Determine que o valor aproximado para π deverá ter pelo menos 5 casas decimais corretas após a vírgula. Chame a atenção para o fato de que, neste caso, $\pi = \frac{4}{2 \times R_n}$.

3.7 O método clássico de Arquimedes (composição do autor)

Objetivo: obter uma aproximação para o π baseado no método clássico de Arquimedes.

Nível de ensino adequado: Ensino Médio.

Duração: pelo menos duas aulas de 45 minutos cada, preferencialmente aulas seguidas.

Pré Requisitos: informática básica (equações em planilhas eletrônicas), perímetro de polígonos regulares, lei dos senos.

Recursos: calculadora, tabela trigonométrica, papel, lápis, borracha, giz e quadro negro.

Sequência Didática

1) Proponha aos alunos as seguintes questões:

- (a) Qual a medida x do comprimento do lado de um polígono regular n lados inscritos numa circunferência de raio 1 cm?

Os alunos precisam observar que o comprimento x de um lado de qualquer polígono regular inscrito numa circunferência é a base de um triângulo isósceles com um ângulo α e dois ângulos β . Logo, pela lei dos senos temos que:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} \Rightarrow x = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \text{ e } \beta = \left(\frac{180^\circ - \alpha}{2} \right) = \left(\frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{2} \right) = n360^\circ - 720^\circ$$

$$\text{Portanto, } x = \frac{\operatorname{sen} \frac{360^\circ}{n}}{\operatorname{sen} (n360^\circ - 720^\circ)}$$

- (b) Calcule o perímetro e o diâmetro de polígonos com 6, 12, 24, 48 e 96 lados.
- (c) Utilizando a fórmula $C = 2\pi r$, utilize o valor do perímetro de cada polígono da questão anterior como uma aproximação para C e encontre um valor aproximado para π .
- (d) Pesquise sobre o “método clássico” de Arquimedes para encontrar aproximações de π . Que relação há entre o “método clássico” e a aproximação que você calculou?

3.8 Problema da Agulha de Buffon (composição do autor)

Objetivo: obter uma aproximação para o π através do Problema da Agulha de Buffon.

Nível de ensino adequado: Ensino Médio.

Duração: pelo menos duas aulas de 45 minutos cada, preferencialmente aulas seguidas.

Pré Requisitos: trigonometria e probabilidade.

Recursos: palitos de dente, régua, papel, lápis, borracha, giz e quadro negro.

Sequência Didática

1) Proponha aos alunos que, em equipe, resolvam o seguinte problema:

“Jogando uma palito de comprimento a , sobre linhas desenhadas numa folha de papel de largura d , onde a é menor ou igual a d , qual é a probabilidade P do palito tocar ou cruzar uma das linhas?”

Os alunos poderão utilizar os recursos descritos acima. Sugira que eles façam o lançamento de dois palitos simultaneamente pelo menos x vezes, totalizando pelo menos $2x$ lançamentos para cada aluno. Lembre que Lazzerini em 1901 conseguiu uma boa aproximação ao realizar pelo menos 3408 lançamentos. Por isso, tenha em mente que numa turma de y alunos serão necessários $x = \frac{3000}{2y}$ lançamentos de cada aluno para que tenhamos ao todo 3000 lançamentos. Por exemplo, numa turma de 40 alunos, seriam necessários $x = \frac{3000}{80} = 37,5$ lançamentos simultâneos de dois palitos para cada aluno. Oriente os alunos a anotar os dados em uma tabela conforme o exemplo abaixo.

Lançamento nº	Palitos que cruzaram ou tocaram	Palitos que não cruzaram nem
	umas das linhas	tocaram qualquer linha
1	2	0
2	1	1
3	0	2
...
TOTAL: 2n		

n = quantidade de lançamentos

Figura 18 – Modelo de tabela para ser utilizada pelos alunos (Fonte: composição do autor)

Estima-se o tempo máximo de 15 minutos para a realização do experimento.

2) Organize no quadro uma tabela com duas colunas: quantidade de lançamentos e quantidade de vezes que o palito tocou ou cruzou alguma linha. Solicite que cada aluno

coloque nesta tabela os valores que encontrou. Some com os alunos todos os valores da tabela e calcule a probabilidade P de algum palito tocar ou cruzar alguma linha da seguinte forma:

$$P = \frac{P_f}{P_t} = \frac{\text{quantidade de vezes que o palito tocou ou cruzou alguma linha}}{\text{quantidade de lançamentos}}$$

3) Mostre aos alunos a seguinte demonstração:

Total de possibilidades do palito tocar/cruzar ou não uma das linhas. Sejam:

d = distância entre duas linhas (L1 e L2);

a = comprimento da agulha;

c = centro da agulha;

x = distância do centro c da agulha à linha L1;

B = ângulo entre a agulha e a horizontal paralela as linhas L1 e L2.

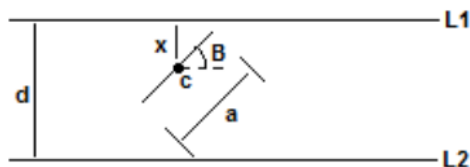


Figura 19 – Representação da posição da agulha de comprimento a e das linhas paralelas L1 e L2 distantes d uma da outra (Fonte: Giga Matemática, 2011).

A distância x , do ponto c a linha L1, independente do comprimento da agulha, deverá estar entre 0 (quando c estiver em L1) e $\frac{d}{2}$ (metade das distâncias entre L1 e L2). Observe que x pode estar tanto entre c e L1, c e L2 ou c e Ln (linha qualquer).

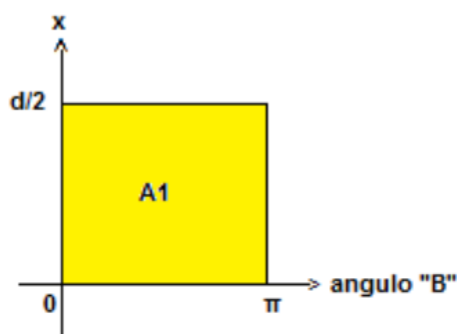
$$\text{Logo: } 0 \leq x \leq \frac{d}{2} \text{ (I)}$$

O ângulo B independente da posição de c estará situado entre 0 e 180° (0 e π).

$$\text{Logo: } 0 \leq B \leq \pi \text{ (II)}$$

Portanto toda região situada nas condições (I) e (II), graficamente representada ao lado, satisfazem o total de possibilidades (P_t) de posição da agulha entre ou cruzando o feixe de linhas.

Figura 20 – Quadro de possibilidade totais da agulha tocar ou cruzar alguma linha (Fonte: Giga Matemática, 2011)



$$P_t = A_1 = \pi \cdot \frac{d}{2} = \frac{d\pi}{2}$$

Agora consideraremos as possibilidades favoráveis (P_f) em que a agulha toque ou cruze uma das linhas. A primeira condição é que x seja menor ou igual a y , conforme mostra a figura abaixo.

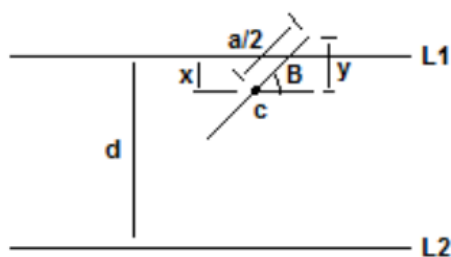


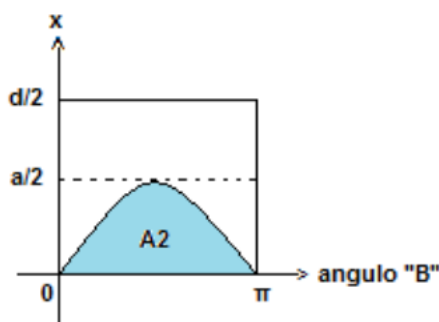
Figura 21 – Situação favorável para a agulha tocar ou cruzar alguma das linhas (Fonte: Giga Matemática, 2011)

Temos que $x \leq y$.

Fazendo $\text{sen } B = \frac{y}{\frac{a}{2}} \Rightarrow y = \frac{a}{2} \text{ sen } B$.

Portanto, $x \leq \frac{a}{2} \sin B$ nas seguintes condições: $0 \leq B \leq \pi$ e $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$. Esta região está definida conforme abaixo:

Figura 22 – Quadro de possibilidades favoráveis para a agulha tocar ou cruzar alguma das linhas



(Fonte: Giga Matemática, 2011)

Portanto,

$$P_f = A_2 = \left| \int_0^\pi \frac{a}{2} \sin B \right| = \left| \frac{a}{2} (-\cos \pi + \cos 0) \right| = \left| \frac{a}{2} (1 + 1) \right| = \frac{a}{2} \cdot 2 = a$$

(Veja a nota de rodapé sobre a presença da integral¹⁵)

Portanto, a probabilidade P da agulha tocar ou cruzar uma das linhas é dada por:

$$P = \frac{P_f}{P_t} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{a}{\frac{d\pi}{2}} = \frac{2a}{d\pi}$$

4) Proponha aos alunos que comparem os valores encontrados pelo experimento com o valor fornecido pela expressão. Nesse momento o professor pode discutir com a turma quais fatores podem ter contribuído para que o valor obtido pelo experimento seja diferente pelo valor obtido idealmente na demonstração.

5) Chame a atenção dos alunos que a equação encontrada pode ser escrita da seguinte forma:

$$\pi = \frac{2a}{dP}$$

Proponha que encontrem um valor aproximado para π utilizando o valor da probabilidade encontrada através do experimento.

¹⁵ A presença da integral durante a demonstração pode ser contornada de duas formas: o professor pode contar aos alunos que a integral é um método para o cálculo de áreas curvas, que será estudado com detalhes no Ensino Superior, e apresentar a resolução em um tom de definição; ou, pode ser trabalhado previamente o cálculo de áreas de figuras curvas através de aproximações com quadriláteros e, neste caso, essa parte da demonstração deverá ser reformulada com este método.

6) Conte aos alunos que esse problema foi idealizado pelo conde de Buffon, que viveu no século XVIII e que este é um dos métodos de se calcular uma aproximação do número π . Neste momento poderão ser citados outros métodos como o de Arquimedes, dos chineses, citação do cálculo do π na Bíblia e métodos computacionais.

7) Peça aos alunos que respondam, individualmente, a seguinte questão:

“A atividade para o cálculo de uma aproximação do número π através do Problema da Agulha de Buffon nos mostra que a matemática pode ser vista como uma interpretação da natureza e seus fenômenos naturais? Justifique sua resposta.”

8) Abra um espaço de discussão para os alunos debaterem suas respostas.

CONCLUSÃO

No capítulo 1 pudemos verificar que temos hoje poucas coisas sobre o conhecimento de povos como os maias, indianos e chineses a respeito do π . Já os egípcios, por termos encontrado diversos registros, sabemos que detinham uma aproximação de $3,125 < \pi < 3,142857$ e os sumérios $\pi = 3,125$. Todavia, muito do que sabemos hoje está baseado em suposições ou fragmentos de tábuas, papiros e outros documentos deixados pelos antigos. A perda de registros históricos sobre o π ocorreu desde a Idade Antiga até a Idade Média com a destruição da Biblioteca de Alexandria, dificultando um estudo mais detalhado e preciso sobre a história antiga do número π .

O método de Arquimedes, conhecido como o método clássico para o cálculo do π é um dos poucos registros da Idade Antiga que se manteve intacto até os dias atuais. Arquimedes chegou a uma aproximação do π através do perímetro de um polígono regular de 96 lados inscrito e circunscrito numa circunferência, obtendo o valor de π entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$. Tal método serviu de base e motivação para diversos outros matemáticos encontrarem posteriormente uma aproximação para o π .

Atualmente o uso de computadores permitiu que encontrássemos aproximações com milhares de casas decimais, ampliando ainda mais as possibilidades de uso do número π na matemática e em outras áreas de conhecimento como engenharia, biologia e estatística.

No capítulo 2 realizamos uma análise de relevâncias e contribuições das principais tendências atuais para o ensino de matemática, que subsidiaram as propostas didáticas para o número π .

Vimos que a HM possui um grande potencial para o ensino do número π . Através do recurso à história, o aluno pode perceber como a construção de ideias, definições e aplicações acerca do número π surgiram ao longo do desenvolvimento humano. Assim permitimos ao aluno atribuir um significado a este número, que aparece diversas vezes ao longo da formação básica. Destacamos também que precisamos ter o cuidado para não minimizar a HM como notas de rodapé, buscando sempre dar um destaque central a esta proposta para que ela possa atingir seu potencial maior na construção de novos saberes.

Aproximações do número π com várias casas decimais podem ser trabalhadas facilmente através do uso das tecnologias da informação, pois estas permitem que os alunos explorem e testem hipóteses de formas que não seriam possíveis com lápis e papel.

Há um campo amplo de softwares e atividades que podem ser utilizados, mas parece que ainda não aprendemos a utilizar essas tecnologias em sala de aula, pois exigem um conhecimento profundo sobre o conteúdo a ser ensinado e sobre o software a ser utilizado.

Os jogos trazem para a sala de aula contribuições que vão além de uma aula descontraída. Além da motivação dos alunos gerada pela competição e todos os outros aspectos implícitos como cooperação, respeito e organização, os jogos são uma forma interessante de propor problemas aos alunos pois favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções.

A modelagem matemática e resolução de problemas se confundem. Ambas exigem do aluno criatividade, atenção, interpretação, pesquisa e seleção de conhecimentos que ajudem na resolução do problema. Geralmente partem de situações reais envolvendo alguma aplicação em outra área do conhecimento. Parece que atividades maiores, com um grau de complexidade mais elevado e duração maior, são consideradas por alguns autores como modelagem matemática e, atividades menores, mais curtas, são consideradas resolução de problemas.

No capítulo 3 foram propostas 8 atividades que podem ser aplicadas na educação básica. Tais atividades buscaram criar formas alternativas para trabalharmos o π em sala de aula. Destacamos aqui a dificuldade em elaborar essas propostas, não só pela ausência de sugestões na literatura, mas principalmente pela falta de prática do pensar em atividades sobre o número π . Todas as atividades propostas foram motivadas por algum elemento que desencadeou uma epifania de ideias que permitiram a construção das sequências didáticas. Talvez, sem o contato desses elementos no momento certo, essas atividades não teriam sido elaboradas.

Mais difícil ainda é propor atividades que se limitem a uma única tendência de ensino. É fácil confundir e utilizar mais de uma tendência ao mesmo tempo. Precisamos ter o cuidado para não criar confusões na hora de elaborar esses tipos de propostas. Por outro lado, pudemos perceber que não há uma metodologia que se destaque como a melhor opção, mas que existem algumas com mais potencial do que outras para determinados conceitos e propostas.

Por fim, deixamos aqui a sugestão para aplicar essas atividades e realizar um estudo mais aprofundado afim de que tenhamos condições de analisar as reais potencialidades dessas propostas em sala de aula para o ensino do número π na educação básica.

REFERÊNCIAS

- ANDRÉ, N. **Reaprender a aprender e ensinar matemática**. Campo Mourão, 2009, 33 p.
- ARAÚJO, J. de L. **A função é contínua ou não? – discussões que decorrem de uma atividade de Modelagem Matemática em um ambiente computacional**. In: Anais do IV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Rio Claro (SP): Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, 2000. p. 47-52.
- BALESTRI, R. D. [et. all]. **A Participação da História da Matemática na Formação de Professores de Matemática na Óptica de Professores/Pesquisadores**. Disponível em: < http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/345-1-A-GT4_balestri_tc.pdf>. Acesso em 9 de dezembro de 2013.
- BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, São Paulo, n. 4, p. 73-80, 2004.
- BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. **A Pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática**, in BICUDO, M. A. V. (org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: UNESP, p. 129-136, 1999.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BECKMANN, P. **A Hystory of π** . St. Martin's Press, N.Y., 1971.
- BIEMBENGUT, M.S. **Modelagem matemática e implicações no ensino-aprendizagem de matemática**. Blumenau: FURB, 1999.
- BIEMBENGUT, M.S; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.
- BIGODE, A. J.L. **Matemática Atual - 8ª série**. São Paulo: Atual Editora, 1994.
- BITTAR, M. A Escolha do Software Educacional e a Proposta Didática do Professor: Estudo de Alguns Exemplos em Matemática. **Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores: Algumas Reflexões**, FECILCAM, Campo Mourão - PR, pp 215-242, 2010
- BORTOLETTO, A. S. **Reflexões relativas às definições do número π (pi) e à presença da sua história em livros didáticos de matemática**. Piracicaba, 2008, 139 p.
- BOYER, Carl B. **História da matemática**; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, Ed. da USP, 1974.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. 3 ed. – Brasília, 2001.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. Ministério da Educação. secretaria de Educação Básica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Orientações curriculares para o ensino médio. v. 2. secretaria de Educação Básica. Brasília: 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2009.

CONTADOR, P. R. **Matemática, Uma Breve História.** (Vol. I). São Paulo: Livraria da Física., 2006.

CURY, A. J. **Pais brilhantes, professores fascinantes.** Rio de Janeiro, Sextante, 2003.

DANTE, L R. **Matemática: contexto e aplicações,** volume 1. São Paulo, Ática, 2010.

_____. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática: 1ª a 5ª séries, para estudantes do curso de magistério e professores do 1º grau.** 4 ed. São Paulo, Ática, 1994.

_____. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática: 1ª a 5ª séries, para estudantes do curso de magistério e professores do 1º grau.** 12 ed. São Paulo, Ática, 2003.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 2ª edição, Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.

FERREIRA, E. S. [et all]. O Uso da História da Matemática na Formalização dos Conceitos. **Bolema**, Especial n. 2, Rio Claro : UNESP, pp. 26-41, 1992.

GARBI, G. Calculando π em sala de aula. **Revista do Professor de Matemática**, n. 66, SBM, São Paulo, p. 1 -3, 2º quadrimestre de 2008.

GASPERI, W. N. H.; PACHECO. E. R. **A história da matemática como instrumento para a interdisciplinaridade na educação básica.** Disponível em <<http://ead.bauru.sp.gov.br/efront/www/content/lessons/37/e2t1.pdf>>. Acesso em 09 de dezembro de 2013.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** Campinas – SP, 2000.

LARA, I. C. M. **Jogando com a Matemática do 6º ao 9º ano.** Ráspel, São Paulo, 2011.

MARTINS, A. F. P.; MENDES, I. A. **Tendências em educação matemática**. Disponível em: <<http://scribd.com/doc/4421088/Didatica-Aula-10-463>>. Acesso em 14 de dezembro de 2013.

MOTTA, C. D. V. B. **Resumo: o papel psicológico da História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem**. Disponível em: <http://www.proceedings.scielo.br/scielo.php?pid=MSC0000000082005000200056&script=sci_arttext>. Acesso em 10 de dezembro de 2013.

OTTE, M. Construtivismo e os objetos da teoria matemática. **Bolema**, ano 6, n.7, Rio Claro : UNESP, pp. 47-67, 1991.

ROQUE, A. C. C; GOMES, M. L. M. **História da Matemática na sala de aula**. XIII CIAEM – IACME, Recife, Brasil, 2011.

SANDHOLTZ, J. H.; RINGSTAFF, C. e DWAYER, D. **Ensinando com tecnologia. Criando salas de aula centradas nos alunos**. Porto Alegre: Artmed, 1997.

SCHNEIDER, M. R. [et. all]. **Tendências Atuais do Ensino e Aprendizagem de Matemática e os PCNs**. UNIASSELVI, 2009.

SILVEIRA, J. F. P. **Resolução de problemas: o que é um problema matemático?** Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html>>. Acesso em 14 de dezembro de 2013.

SOUSA, D. **A agulha de Buffon**. Giga Matemática. Disponível em: <<http://gigamatematica.blogspot.com.br/2011/05/agulha-de-buffon.html>>. Acesso em 09 de dezembro de 2013.

VIANA, M. C. V.; SILVA, C. M. **Concepções de professores de matemática sobre a utilização da história da matemática no processo de ensino-aprendizagem**. Disponível em <<http://limc.ufrj.br/htem4/papers/15.pdf>>. Acesso em 09 de dezembro de 2013.

WALDOMIRO, T. C. **Abordagem histórico – epistemológica do Ensino da geometria fazendo uso da geometria dinâmica**. São Paulo, 2011.

WIKIPÉDIA. Desenvolvido pela Wikimedia Foundation. **Pi**. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Pi>>. Acesso em 20 de setembro de 2012.