

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓSGRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA**

Renato S. Thiago de Carvalho

**MODELO FÍSICO DE HUYGENS NA SOLUÇÃO
DISCRETIZADA DE CAMPOS ACÚSTICOS**

Tese submetida ao Programa de
Pósgraduação em Engenharia Mecânica
da Universidade Federal de Santa
Catarina para a obtenção do Grau de
Doutor em Engenharia Mecânica
Orientador: Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.
Co-orientador: Prof. Júlio Cordioli, D.Eng.

Florianópolis

2013

de Carvalho, Renato S. Thiago
MODELO FÍSICO DE HUYGENS NA SOLUÇÃO DISCRETIZADA DE
CAMPOS ACÚSTICOS / Renato S. Thiago de Carvalho ;
orientador, Arcanjo Lenzi ; co-orientador, Júlio
Apolinário Cordioli. - Florianópolis, SC, 2013.
177 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Acústica e Vibrações. 3.
Modelagem Numérica. 4. Modelagem Discreta de Huygens. 5.
Método de Matrizes de Linha de Transmissão. I. Lenzi,
Arcanjo. II. Cordioli, Júlio Apolinário. III. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica. IV. Título.

Renato S. Thiago de Carvalho

MODELO FÍSICO DE HUYGENS NA SOLUÇÃO DISCRETIZADA DE CAMPOS ACÚSTICOS

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de “Doutor em Engenharia Mecânica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 26 de agosto de 2013.

Prof. Armando Albertazzi Gonçalves Jr, Dr. Eng.
Coordenador do Curso

Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Júlio Cordioli, D. Eng.
Co-Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof. Erasmo Felipe Vergara Miranda, D. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Hugo Armando Domínguez Almaguer, D. Eng.
Fundação Universidade Regional de Blumenau

Prof. Roberto Jordan, D. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Marcus Antonio Viana Duarte, Dr.
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Walter Pereira Carpes Júnior, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

à minha esposa.

AGRADECIMENTOS

Aos colegas do LVA (Laboratório de Vibrações e Acústica) que muito contribuíram para a realização deste trabalho: Eric, Gustavo Martins, Olavo, William, Portela e Érico.

Aos demais colegas do laboratório, pelo tempo de convívio e a oportunidade de trocar experiências.

Gostaria de dedicar um especial agradecimento e créditos ao colega Paulo Henrique Mareze, pela sua grande contribuição ao simular os modelos FEM utilizados preliminarmente durante o período de qualificação, pelos modelos de impedância variável na frequência para materiais porosos utilizados como fontes de dados no projeto dos filtros FIR, assim como pelas conversas demoradas trocando ideias e sugestões.

Aos professores Arcanjo Lenzi e Júlio Cordioli pela orientação, amizade, e principalmente pela confiança que depositaram em mim, considerando o tema desta tese, totalmente novo para o nosso grupo de pesquisa. Aos demais professores do Laboratório de Vibrações e Acústica que indiretamente contribuíram com este trabalho.

Ao Instituto Técnico em Acústica (ITA-RWTH, ALE), na pessoa do Professor Michael Vorländer, por me receber como pesquisador em programa sanduíche por um período de seis meses no ano de 2012, possibilitando o desenvolvimento de atividades relacionados ao processamento paralelo em GPU e filtros FIR. E especialmente aos colegas Pascal Dietrich e Bruno Masiero, que me deram suporte em todo o meu período de estada na Alemanha.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior - CAPES e ao CNPq pelo financiamento desta pesquisa.

All matter originates and exists only by virtue of vibration. We must assume that behind this vibration a conscious and intelligent mind exists. This mind is the matrix of all matter.

(Max Planck)

RESUMO

O objetivo geral deste trabalho é demonstrar a viabilidade de aplicação numérica do modelo físico de Huygens na descrição de ondas acústicas. Uma ampla revisão bibliográfica sobre o assunto foi realizada, incluindo trabalhos na área de Eletromagnetismo, contexto em que a primeira versão discretizada do modelo de Huygens foi proposta, utilizando a consolidada teoria de linhas de transmissão. Entretanto, ainda que o método tenha se desenvolvido consideravelmente em seu contexto original, percebe-se que as aplicações na solução de problemas em Acústica ainda são escassas. Inicialmente, dedica-se um capítulo para discorrer sobre os fundamentos da modelagem numérica, expondo as razões principais que levaram a escolha do tema do trabalho. Posteriormente, alguns tópicos fundamentais relacionados à teoria de processamento de sinal e auralização foram incluídos. A seguir é apresentada a abordagem teórica pioneira do método numérico, concebida a partir do modelo de Huygens, denominada de Método de Matrizes de Linha de Transmissão (TLM). Neste ponto, buscou-se revisar as analogias tradicionalmente estabelecidas com a teoria Acústica. Posteriormente, demonstram-se os aspectos teóricos de uma nova abordagem energética mecanicista para o modelo, denominada de Modelagem Discreta de Huygens (DHM). Em um passo seguinte, foram realizadas comparações conceituais entre a Modelagem Discreta de Huygens e outros métodos numéricos tradicionais, como o método de Volumes Finitos e também aqueles que utilizam como base a equação da onda, tais como Diferenças Finitas (FDM) e Elementos Finitos (FEM). Por último, apresenta-se uma série de resultados utilizando o conjunto de algoritmos desenvolvidos ao longo deste trabalho. Destacam-se as análises comparativas entre os tempos de simulação obtidos pelos métodos FEM e DHM para três cavidades distintas. Resultados relevantes também foram obtidos utilizando uma metodologia diferenciada para representação do coeficiente de reflexão de materiais de absorção no domínio do tempo, a partir de dados de impedância no domínio da frequência. Buscou-se estabelecer a comparação dos resultados obtidos, com modelos elaborados em FEM, assim como através de modelos analíticos consolidados, visando a confirmação das evidências iniciais quanto à potencialidade do método.

Palavras-chave: Modelagem discreta de Huygens; auralização; abordagem energética mecanicista.

ABSTRACT

The main idea of this work is to show the feasibility of applying the Huygens' physical model for the numerical description of acoustic wave propagation. An extensive literature review on the subject was performed, including some work in the field of electromagnetism, using the consolidated theory of transmission lines. Although the method has been considerably developed in their original area, applications in solving acoustic problems are still quite scarce. A chapter was dedicated to discuss the fundamentals of numerical modeling, explaining the reasons that led to the choice made for this work. Fundamental topics related to signal processing and auralization were also included. In the following, the pioneering numerical approach based on the Huygens' physical model is presented, called Transmission Line Matrix, seeking to make analogies with the acoustics theory. Subsequently, it was shown the theoretical aspects of the energetical approach to the Huygens' model, called Discrete Huygens' Modeling. In a next step, comparisons were made among the concepts of this approach and other numerical methods that apply the wave equation as the fundamental model, such as finite difference and finite element. Following, results were presented using an algorithm developed as consequence of this work, in order to solve acoustic cavities of different sizes, and then compare with results obtained from numerical models simulated using finite element and analytical models. In the Annex, some data already published by different authors for acoustical problems were considered in order to emphasize the range of applications and the quality of results.

Keywords: Discrete Huygens Modeling; auralization; energetical approach.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 - Síntese gráfica da cadeia de auralização.	49
Figura 3.2 - Delta de Dirac.	51
Figura 3.3 - Resposta Impulsiva de um sistema linear.	52
Figura 3.4 - Representação gráfica da transferência de dados entre CPU e GPU, baseado em (ROSSI, SO, <i>et al.</i> , 2008) e (ROSSI e SO, 2009).	55
Figura 4.1 - Representação simplificada do Princípio de Huygens.	59
Figura 4.2 - Modelo da linha de transmissão.	65
Figura 4.3 - Modelo tipo “T” de um segmento de linha.	66
Figura 4.4 - Circuito equivalente Thévenin de um segmento da LT.	70
Figura 4.5 - Modelo de linhas de transmissão 2D.	73
Figura 4.6 - Excitação, espalhamento e propagação em uma malha 2D.	74
Figura 4.7 - Polarização dos campos na propagação 2D.	75
Figura 4.8 - Representação esquemática do nó paralelo 2D sem <i>stubs</i>	76
Figura 4.9 - Representação esquemática do nó paralelo 2D com <i>stubs</i>	77
Figura 4.10 - Modelo de parâmetros concentrados do nó paralelo 2D.	78
Figura 4.11 - Circuito equivalente Thévenin do nó paralelo 2D.	82
Figura 4.12 - Posição cartesiana discretizada x_d, y_d de um nó arbitrário e seus adjacentes.	84
Figura 4.13 - Representação do nó simétrico condensado (JOHNS, 1987).	85
Figura 4.14 - Representação do nó 3D de Naylor (DALLA'ROSA, 2008).	86
Figura 4.15 - TLM circuital e DHM acústico.	91
Figura 4.16 - Nó D2O4 e as ondas incidentes e espalhadas.	92
Figura 4.17 - Diagrama para ilustrar o cálculo da velocidade radial.	99
Figura 4.18 - Nó D2O4S2 com " <i>stubs</i> ".	101
Figura 4.19 - Impedância de terminação na fronteira da malha.	105
Figura 5.1 - Elemento de volume infinitesimal.	110
Figura 6.1 - Radiação de um monopolo (2 kHz).	125
Figura 6.2 - Radiação de um monopolo (3,4 kHz).	126
Figura 6.3 - Resultados analítico (tracejado) e numérico (em cores) para o padrão de radiação de um dipolo (2 kHz, instante $k = 140$; $t_s = 2,86$ ms) com fontes defasadas entre si em 180°	127
Figura 6.4 - Resultados analítico (tracejado) e numérico (em cores) para o padrão de radiação de um dipolo (3,4 kHz, instante $k = 140$; $t_s = 2,86$ ms) com fontes defasadas entre si em 180°	128
Figura 6.5 - Resultados analítico (tracejado) e numérico (em cores) para o padrão de radiação de um pistão rígido (2 kHz, instante $k = 140$; $t_s = 2,86$ ms).	129
Figura 6.6 - Resultados analítico (tracejado) e numérico (em cores) para o padrão de radiação de um pistão rígido (3,4 kHz, instante $k = 140$; $t_s = 2,86$ ms).	130
Figura 6.7 - Sequência de propagação da onda (2 kHz).	131
Figura 6.8 - Sequência de propagação da onda (6 kHz).	132

Figura 6.9 - Propagação da onda com perdas (DHM2D).....	133
Figura 6.10 - Difração da onda em malha 2D (DHM2D).....	134
Figura 6.11 - Difração da onda em malha 2D (DHM2D).....	135
Figura 6.12 - Difração da onda em malha 3D (DHM3D_FRA).....	136
Figura 6.13 - Seção transversal de uma onda 3D em difração.....	136
Figura 6.14 - Cavidades "P", "M" e "G".....	138
Figura 6.15 - Respostas em frequência obtidas através do modelo analítico para uma cavidade regular e os métodos FEM e DHM (Cavidade "P").....	140
Figura 6.16 - Respostas em frequência obtidas através do modelo analítico para uma cavidade regular e o método DHM (Cavidade "M").....	141
Figura 6.17 - Respostas em frequência obtidas através do modelo analítico para uma cavidade regular e o método DHM (Cavidade "G").....	142
Figura 6.18 - Domínio e malha da cavidade acústica 3D.....	145
Figura 6.19 - Impedância de superfície e coeficiente de reflexão no domínio da frequência - material Fictício.....	147
Figura 6.20 - Comparação entre FEM-FD e DHM-TD.....	148
Figura 6.21 - Resposta em frequência antes e depois da aplicação do material de absorção.....	149
Figura 6.22 - Impedância de superfície e coeficiente de reflexão no domínio da frequência - Melamina.....	150
Figura 6.23 - Comparação entre FEM-FD e DHM-TD.....	151
Figura 6.24 - Resposta em frequência antes e depois da aplicação da Melamina.....	152
Figura 6.25 - Comparação do tempo de processamento (CPU x GPU).....	153
Figura 6.26 - Fator de aumento (<i>speedup</i>) na velocidade de processamento ao utilizar a placa GPU.....	154
Figura 9.1 - Estrutura geral do algoritmo DHM-TD.....	167
Figura 9.2 - Janela de entrada de dados.....	168
Figura 9.3 - Janela com os pontos de entrada e saída.....	168
Figura 9.4 - Fluxograma ao algoritmo básico DHM-TD.....	172
Figura 10.1 - Corte planar da cavidade e seu modelo FEM.....	173
Figura 10.2 - Comparação entre os resultados via TLM e FEM.....	174
Figura 10.3 - Nível de Pressão Sonora relativa ao campo livre para um terreno com resistividade específica do ar igual a 10^7 kPa.s.m ⁻²	175
Figura 10.4 - Nível de Pressão Sonora relativa ao campo livre para um terreno com resistividade específica do ar igual a 300 kPa.s.m ⁻²	175
Figura 10.5 - Nível de Pressão Sonora relativa ao campo livre para um terreno com resistividade específica do ar igual a 20.000 kPa.s.m ⁻²	176
Figura 10.6 - Tubo com ressonador de Helmholtz.....	176
Figura 10.7 - Perda de transmissão imposta pelo ressonador de Helmholtz.....	177

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Analogia entre as diferentes teorias 1D.	69
Tabela 4.2 - Analogia entre as diferentes teorias 2D.	80
Tabela 5.1 - Propriedades do fluido nas faces do volume de controle.	111
Tabela 6.1 - Dados geométricos e da simulação das cavidades.	138
Tabela 6.2 - Dados das cavidades utilizadas na Auralização.	143
Tabela 6.3 - Dados da simulação.....	146

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CA	<i>Cellular Automaton Modeling</i>
DHM-TD	<i>Discrete Huygens' Modeling - Time Domain</i>
DWG	<i>Digital Waveguide</i>
FDM-TD	<i>Finite Difference Method - Time Domain</i>
FEM-FD	<i>Finite Element Method - Frequency Domain</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FIR	<i>Finite Impulse Response</i>
FVM-TD	<i>Finite Volume Method - Time Domain</i>
GPU	<i>Graphics Processing Unit</i>
HRIR	<i>Head Related Impulse Response</i>
IEEE	<i>Institute of Electric and Electronic Engineers</i>
IIR	<i>Infinite Impulse Response</i>
LBM	<i>Lattice-Boltzmann Method</i>
LGA	<i>Lattice Gas Automaton</i>
LT	Linha de Transmissão
LVA	Laboratório de Vibrações e Acústica
MDWD	<i>Multidimensional Wave Digital</i>
NPS	Nível de Pressão Sonora
PML	<i>Perfectly Matched Layer</i>
RI	Resposta Impulsiva
SCN	<i>Symmetrical Condensed Node</i>
SEA	<i>Statistical Energy Analysis</i>
SLIT	Sistema Linear e Invariante no Tempo

TE	Transverso Eléctrico
TLM-TD	<i>Transmission Line Matrix Method - Time Domain</i>
TM	Transverso Magnético
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
WDF	<i>Wave Digital Filter</i>
WFS	<i>Wave Field Synthesis</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Sistema de unidades: Sistema Internacional

<i>A</i>	ampère	-
<i>H</i>	henry	$T.m/A$
<i>Hz</i>	hertz	$1/s$
<i>kg</i>	quilograma	-
<i>m</i>	metro	-
<i>N</i>	newton	$kg.m/s^2$
<i>Pa</i>	pascal	$kg/m.s^2$
<i>s</i>	segundo	-
<i>S</i>	siemens	$A^2.s^3/(kg.m^2)$
<i>T</i>	tesla	$V.s/m^2$
<i>V</i>	volt	$kg.m^2/(s^3.A)$
Ω	ohm	$1/S$

Parâmetros físicos:

<i>C</i>	capacitância de cada segmento da linha de transmissão	F
<i>c</i>	velocidade da onda eletromagnética no meio	m/s
<i>c₀</i>	velocidade da onda eletromagnética no vácuo	m/s
<i>c_a</i>	velocidade da onda acústica no meio	m/s
<i>C_d</i>	capacitância por unidade de comprimento	F/m
<i>C_{d_{sr}}</i>	capacitância por unidade de comprimento do <i>stub reativo</i>	F/m
<i>C_{dt}</i>	capacitância total do circuito por unidade de comprimento	F/m
<i>C_{dx}</i>	capacitância por unidade de comprimento da linha na direção <i>x</i>	F/m
<i>C_{dy}</i>	capacitância por unidade de comprimento da linha na direção <i>y</i>	F/m
<i>G</i>	condutância de cada segmento da linha de transmissão	S
<i>G_d</i>	condutância por unidade de comprimento	S/m
<i>G_{d_{sd}}</i>	condutância por unidade de comprimento do <i>stub dissipativo</i>	S/m
<i>G_{sd}</i>	condutância do <i>stub dissipativo</i>	S/m

G_{sd}	condutância normalizada do <i>stub dissipativo</i>	S/m
L	indutância de cada segmento da linha de transmissão	H
L_d	indutância por unidade de comprimento	H/m
L_{dx}	indutância por unidade de comprimento da linha na direção x	H/m
L_{dy}	indutância por unidade de comprimento da linha na direção y	H/m
R	resistência de cada segmento da linha de transmissão	Ω
R_d	resistência por unidade de comprimento	Ω/m
u_{LT}	velocidade da onda na linha de transmissão	m/s
v_g	velocidade na guia de onda	m/s
Y_{sr}	admitância do <i>stub</i> reativo	$1/\Omega$
Y_{sr}	admitância normalizada do <i>stub</i> reativo	$1/\Omega$
Z_g	Impedância acústica na guia de onda	$rayls$
Z_i	impedância elétrica do meio de origem da frente de onda	Ω
Z_L	impedância elétrica da carga no final da linha	Ω
Z_{LT}	impedância elétrica característica da linha	Ω
Z_n	Impedância acústica de um ramo n	$rayls$
Z_r	impedância elétrica do meio que reflete a frente de onda	Ω
ϵ_0	permissividade elétrica do vácuo	F/m
μ_0	permeabilidade magnética do vácuo	H/m
ρ_0	massa específica do meio	kg/m^3
ρ_e	resistividade elétrica do meio	$\Omega.m$
σ_0	condutividade elétrica do vácuo	$1/\Omega.m$

Variáveis geométricas:

Δl	comprimento do nó	m
Δx	comprimento do nó para a direção x	m
Δy	comprimento do nó para a direção y	m
Δz	comprimento do nó para a direção z	m
d_c	diâmetro da cavidade do ressonador	m
d_d	diâmetro do tubo maior	m
d_n	diâmetro do pescoço do ressonador	m
h_c	altura da cavidade do ressonador	m
h_n	altura do pescoço do ressonador	m

l	comprimento de uma linha de transmissão	m
v_r	velocidade radial de propagação	m/s

Variáveis de Acústica:

f_r	frequência de ressonância do ressonador de Helmholtz	Hz
$p(x,t)$	pressão sonora	Pa
$u_x(x,t)$	componente da velocidade de partícula na direção x	m/s
$u_y(x,t)$	componente da velocidade de partícula na direção y	m/s

Variáveis do Eletromagnetismo:

E_x	componente do campo elétrico na direção x	V/m
E_y	componente do campo elétrico na direção y	V/m
E_z	componente do campo elétrico na direção z	V/m
H_x	componente do campo magnético na direção x	A/m
H_y	componente do campo magnético na direção y	A/m
H_z	componente do campo magnético na direção z	A/m
$i_x(x,t)$	corrente elétrica da linha na direção x	A
$i_y(x,t)$	corrente elétrica da linha na direção y	A
$v_z(t)$	tensão elétrica no centro do nó	V
$v_{zx}(x,t)$	tensão elétrica da linha na direção x	V
$v_{zy}(y,t)$	tensão elétrica da linha na direção y	V

Variáveis no espaço e tempo discretizado

${}^n E_x$	componente do campo elétrico na direção x , instante k e nó n	A/m
${}^n E_y$	componente do campo elétrico na direção y , instante k e nó n	A/m
${}^n E_z$	componente do campo elétrico na direção z , instante k e nó n	A/m

${}^n H_x$	componente do campo magnético na direção x , no instante k e nó n	A/m
${}^n H_y$	componente do campo magnético na direção y , no instante k e nó n	A/m
${}^n H_z$	componente do campo magnético na direção z , no instante k e nó n	A/m
${}^n I$	corrente no segmento n , instante k	A
${}^n [S]$	matriz de espalhamento, instante k	-
${}^n P_r^s$	pressão espalhada no ramo r , instante k e nó n	Pa
${}^n P_r^i$	pressão incidente no ramo r , instante k e nó n	Pa
${}^n VD$	tensão à direita de n , instante k e nó n	V
${}^n VE$	tensão à esquerda de n , instante k e nó n	V
${}^n V_r^s$	tensão espalhada no ramo r , instante k e nó n	V
${}^n V_r^i$	tensão incidente no ramo r , instante k e nó n	V
${}^n V_z$	tensão no centro do nó, instante k e nó n	V
${}^n V$	tensão no segmento n , instante k e nó n	V
${}^n VD^i$	tensão que incide à direita de n , instante k e nó n	V
${}^n VE^i$	tensão que incide à esquerda de n , instante k e nó n	V
${}^n \bar{P}^s$	vetor de pressões espalhadas, instante k	Pa
${}^n \bar{P}^i$	vetor de pressões incidentes, instante k	Pa
${}^n \bar{V}^s$	vetor de tensões espalhadas, instante k	V
${}^n \bar{V}^i$	vetor de tensões incidentes, instante k	V

Variáveis independentes:

Δf	intervalo de frequência	Hz
Δt	intervalo de tempo	s
f	frequência	Hz
t	tempo no domínio contínuo	s

Operadores matemáticos:

*	operação de convolução
∂	derivada parcial
\sum	somatório
\int	integral

d	derivada
D	derivada total
T	transformação linear e invariante no tempo

Constantes, Coeficientes e Fatores:

<i>a, b</i>	constantes reais
<i>j</i>	constante complexa
<i>k</i>	índice de tempo no domínio discretizado
<i>L_h</i>	tamanho do vetor de resposta impulsiva
<i>N</i>	tamanho do vetor de um sinal de entrada arbitrário
<i>N_x</i>	número de nós na direção <i>x</i>
<i>N_y</i>	número de nós na direção <i>y</i>
<i>N_z</i>	número de nós na direção <i>z</i>
<i>α</i>	coeficiente de atenuação atmosférica
<i>β</i>	módulo adiabático de Bulk
<i>Γ</i>	coeficiente de reflexão
<i>κ</i>	coeficiente de compressibilidade do meio
<i>τ</i>	deslocamento no tempo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	29
1.1	CONTEXTO DO TRABALHO.....	29
1.2	OBJETIVOS GERAIS.....	31
1.3	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	31
1.4	ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS.....	32
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	33
2.1	MODELO FÍSICO DE HUYGENS.....	33
2.2	ABORDAGEM PARA ELETROMAGNETISMO - TLM.....	34
2.3	ABORDAGEM PARA ACÚSTICA - DHM.....	36
2.4	RELAÇÕES ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS E OUTRAS APLICAÇÕES.....	38
3	MODELAGEM NUMÉRICA E AURALIZAÇÃO.....	45
3.1	MODELAGEM NUMÉRICA.....	45
3.2	FUNDAMENTOS EM AURALIZAÇÃO.....	47
3.2.1	Aspectos gerais.....	47
3.2.2	Sistemas lineares e a resposta impulsiva.....	49
3.2.3	Convolução de um sinal discreto.....	53
3.3	PROCESSAMENTO PARALELO.....	54
4	MODELO FÍSICO DE HUYGENS.....	57
4.1	INTRODUÇÃO.....	57
4.2	PRINCÍPIO DE HUYGENS.....	58
4.3	ABORDAGEM PARA ELETROMAGNETISMO - TLM.....	61
4.3.1	Resistor.....	61
4.3.2	Capacitor.....	61
4.3.3	Indutor.....	63
4.3.4	Formulação unidimensional.....	64
4.3.5	Formulação bidimensional.....	72
4.3.5.1	Princípio de Huygens discretizado.....	72
4.3.5.2	Espalhamento e propagação.....	73
4.3.5.3	Excitação.....	74
4.3.5.4	Nó bidimensional típico.....	75
4.3.6	Formulação tridimensional.....	85
4.3.7	Fontes de erros.....	86
4.3.8	Considerações e aplicações do TLM.....	87
4.4	ABORDAGEM PARA ACÚSTICA - DHM.....	89
4.4.1	Introdução.....	89
4.4.2	Formulação bidimensional.....	90
4.4.2.1	Meios homogêneos e sem perdas.....	92
4.4.2.2	Velocidade de propagação da onda.....	97

4.4.2.3	Velocidade de partícula	99
4.4.2.4	Meios heterogêneos e com perdas	100
4.4.3	Formulação genérica.....	104
4.4.4	Condições de Contorno.....	105
5	ANALOGIAS ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS	109
5.1	EQUAÇÃO DA ONDA E SUA RELAÇÃO COM O DHM-TD	109
5.2	MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS	115
5.3	MÉTODO DE VOLUMES FINITOS	117
5.4	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....	118
6	APLICAÇÕES E RESULTADOS.....	121
6.1	DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS.....	121
6.1.1	Frequência máxima de análise	121
6.1.2	Tempo total de simulação	123
6.2	RADIAÇÃO DE FONTES ELEMENTARES	123
6.2.1	Introdução.....	123
6.2.2	Monopolo.....	124
6.2.3	Dipolo	127
6.2.4	Pistão rígido	128
6.3	DISPERSÃO DA ONDA EM PROPAGAÇÃO LIVRE.....	130
6.4	DISSIPACÃO NO MEIO DE PROPAGAÇÃO	132
6.5	DIFRAÇÃO EM MEIOS NÃO HOMOGENEOS	134
6.6	CAVIDADES COM GEOMETRIA REGULAR.....	137
6.7	SÍNTESE SONORA (AURALIZAÇÃO)	143
6.8	ABSORÇÃO VARIÁVEL COM A FREQUÊNCIA	145
6.8.1	Filtro FIR - material Fictício.....	146
6.8.2	Filtro FIR - material Melamina.....	150
6.9	PROCESSAMENTO PARALELO UTILIZANDO GPU	153
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	155
8	REFERÊNCIAS.....	161
9	APÊNDICE	167
9.1	FLUXOGRAMA DO ALGORITMO DHM-TD	167
10	ANEXO: APLICAÇÕES EXTRAÍDAS DA LITERATURA.173	
10.1	CONJUNTO CANAL E CAVIDADE.....	173
10.2	EFEITO DE ABSORÇÃO SONORA DO SOLO	174
10.3	RESSONADOR DE HELMHOLTZ	176

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo situar o leitor no tema do trabalho realizado, assim como expor os objetivos gerais e específicos, evidenciando as contribuições realizadas à Modelagem Discreta de Huygens aplicado à Acústica. Por último, apresenta-se a forma pela qual os demais capítulos estão organizados.

1.1 Contexto do trabalho

A preocupação em compreender as alterações positivas e negativas no ser humano diante a presença de fontes sonoras transformou-se nas últimas décadas em prioridade a atividades de desenvolvimento de diversas empresas e centros de pesquisa em todo o mundo. Naturalmente, este interesse está relacionado ao surgimento de políticas ambientais e de saúde a cada ano mais rígidas, especialmente em ambientes industriais.

Percebe-se também um aumento do nível de consciência do cidadão comum em relação à influência do som em nossa vida diária. Além da necessária redução de ruído nos processos e produtos industriais, tem-se buscado a melhoria do som em aspectos cotidianos, tais como, ruído nos ambientes urbanos, qualidade da fala e reprodução musical em ambientes abertos e fechados.

Uma das alternativas na abordagem deste problema é a utilização de modelos analíticos. Entretanto, esta vertente é capaz de descrever apenas um número restrito de situações reais, uma vez que necessita aplicar condições físicas e geométricas reducionistas para que haja solução das equações diferenciais do modelo proposto. No caso de medições diretas, exige-se que o ambiente analisado exista fisicamente.

Neste contexto, os métodos numéricos se fortalecem e se tornam uma das principais ferramentas utilizadas na pesquisa, projeto e desenvolvimento de soluções em Engenharia. A ideia fundamental desta abordagem consiste em reduzir o modelo contínuo¹, no qual há um número infinito de incógnitas, para um problema discretizado e com número finito de incógnitas. No caso da modelagem discreta de Huygens (DHM), tem-se um modelo numérico, deduzido a partir da

¹ As propriedades da matéria, de acordo com esta hipótese, têm um valor precisamente definido em cada ponto (volume infinitesimal), de maneira que suas propriedades podem ser representadas por funções contínuas no espaço e no tempo.

discretização direta do fenômeno físico observável, expresso pelo modelo físico de Huygens.

A dificuldade básica encontrada ao se aplicar métodos numéricos, diz respeito à necessidade de redução do tempo de processamento computacional, assim como a ampliação do espectro de análise, especialmente em situações que envolvam acústica de salas e a síntese sonora. Neste caso, a modelagem discreta de Huygens tem se mostrado muito eficiente computacionalmente, quando comparada aos métodos baseados na discretização da equação diferencial da onda.

Para a maioria dos autores, a primeira forma discretizada aplicada do modelo físico de Huygens se deu com a publicação de um artigo na área de eletromagnetismo, denominado '*Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix*', em 1971, por Johns e Beurle. Deste trabalho, originou-se a sigla TLM (*Transmission Line Matrix Method*).

Este artigo e outros que o sucederam já traziam evidências sobre o grande potencial do método em questões numéricas importantes, tais como: estabilidade; tempo de processamento; erros associados à modelagem e, principalmente, o fato de ser um método com solução no domínio do tempo. Este tipo de solução proporciona abarcar em uma única rodada de simulação, um largo espectro de frequências, assim como permite a simulação de fenômenos transientes.

Segundo alguns autores (PATANKAR, 1980), (BILBAO, 2004) e (COGAN, O'CONNOR e PULKO, 2005), entre outros, métodos numéricos como FVM (*Finite Volume Method*), FDM (*Finite Difference Method*), MDWD (*Multidimensional Wave Digital*), DWG (*Digital Waveguide*) e LBM (*Lattice-Boltzmann Method*), podem ser associados com o DHM/TLM e classificados em uma mesma família, por terem origens semelhantes e diversos aspectos em comum, mas que em geral são pouco conhecidos e explorados entre os pesquisadores.

O modelo discretizado de Huygens tem sido aplicado desde sua publicação original em diferentes áreas da ciência descritas por ondas ou equações de propagação, das quais a Acústica está incluída, porém, em uma variedade de temas e profundidade das publicações ainda bastante restritas, principalmente quando comparado a métodos mais populares, tais como diferenças finitas, elementos finitos e elementos de contorno.

Em virtude do cenário apresentado acima, sustenta-se a ideia de que a pesquisa do modelo físico de Huygens aplicado à modelagem numérica tem grande potencial no cenário de Acústica e Vibrações e, por consequência, contribuirá no processo de caracterização numérica

de ambientes fechados. As justificativas detalhadas para a escolha do método podem ser encontradas ao longo deste trabalho.

1.2 Objetivos gerais

Este trabalho visa apresentar os aspectos conceituais, investigar o potencial de aplicação em acústica de ambientes e auralização, assim como apresentar e validar os resultados obtidos ao implementar numericamente o modelo físico de Huygens, utilizando como referência uma abordagem energética para campos acústicos, conhecido pela sigla DHM (*Discrete Huygens' Modeling*).

1.3 Objetivos específicos

1. Apresentar a versão discretizada para o modelo físico de Huygens, aplicado a ondas eletromagnéticas, conhecido pela sigla TLM;
2. Apresentar a versão discretizada do modelo físico de Huygens aplicado a ondas acústicas, conhecido pela sigla DHM;
3. Apresentar analogias entre a forma tradicional do método (TLM) e a forma aplicada em ondas acústicas (DHM);
4. Implementar numericamente o método DHM através de diferentes algoritmos, considerando problemas acústicos lineares, em geometrias 2D e 3D, superfícies regulares, meios anisotrópicos, com perdas, fontes e receptores pontuais, utilizando a linguagem de programação MATLAB[®];
5. Implementar técnicas fisicamente coerentes de representação de materiais absorvedores em simulações no domínio do tempo;
6. Estabelecer analogias conceituais entre diferentes métodos numéricos tradicionais e o DHM;
7. Validar numericamente o método através de comparações com modelos analíticos consolidados e resultados obtidos pelo método de elementos finitos;

8. Obter resultados audíveis de uma fonte sonora arbitrária em interação com diferentes cavidades canônicas, utilizando as rotinas mencionadas no Item 4 desta lista.

1.4 Organização dos capítulos

O Capítulo 2 apresenta uma síntese estruturada por temas da pesquisa bibliográfica efetuada, situando o leitor sobre as origens, o panorama atual de desenvolvimento científico e a evolução da versão discretizada do modelo físico de Huygens.

No Capítulo 3 discorre-se sobre os fundamentos de modelagem numérica e sua aplicação em Auralização, incluindo aspectos básicos de processamento digital de sinais e processamento paralelo.

O Capítulo 4 apresenta a teoria básica do modelo físico de propagação da onda de Huygens. Em seguida, apresenta-se a versão pioneira do método numérico que implementa no domínio discreto o modelo físico de Huygens. Este método faz uso da teoria de linhas de transmissão e circuitos elétricos equivalentes. Finalmente, discorre-se sobre princípios fundamentais da física, tais como conservação de energia e continuidade de campos, com o intuito de explorar uma abordagem energética mecanicista para implementação numérica do modelo físico de Huygens, denominada modelagem discreta de Huygens (DHM).

O Capítulo 5 realiza uma comparação da modelagem discreta de Huygens (DHM) com alguns métodos tradicionais como volumes finitos (MVF), diferenças finitas (MDF) e elementos finitos (MEF), bem como faz-se uma analogia e mostram-se as semelhanças com o desenvolvimento da equação da onda para acústica.

O Capítulo 6 apresenta resultados para um conjunto de simulações e modelos analíticos, executados a partir de rotinas desenvolvidas ao longo do período de realização deste trabalho, utilizando o software MATLAB[®].

Para finalizar, no Capítulo 7 expõem-se as principais conclusões e contribuições durante o desenvolvimento do trabalho. Fazem-se também sugestões de temas para futuros trabalhos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo tem como objetivo elaborar uma síntese estruturada por temas da pesquisa bibliográfica efetuada, situando o leitor sobre as origens, o panorama atual de desenvolvimento científico e a evolução da versão discretizada do modelo físico de Huygens.

2.1 Modelo físico de Huygens

A analogia direta entre o modelo circuitual equivalente proposto em (JOHNS e BEURLE, 1971) e o princípio de Huygens, surgiu em (JOHNS, 1974), na qual o autor sugere que a propagação da onda possa ser representada em passos discretos. Neste trabalho mostra-se um procedimento para a solução numérica da propagação da onda obtendo diretamente equações algébricas, sem a necessidade de obtenção prévia de uma equação diferencial, como ocorre nos métodos tradicionais.

Anos mais tarde, em uma sequência de quatro artigos baseados em (JOHNS, 1974), apresentam-se as diferentes abordagens para a interpretação matemática do modelo físico de Huygens. No primeiro artigo (ENDERS, 1996), fez-se uma revisão das abordagens existentes, com o intuito de esclarecer possíveis confusões que existiam na literatura, assim como se buscou unificar as ideias básicas de propagação de Huygens, incluindo a sua forma discretizada.

Em outro trabalho (ENDERS e VANNESTE, 2001), os autores concentram-se em espaços discretos e reformulam a definição matemática rigorosa de Hadamard para o princípio de Huygens. Posteriormente, em (ENDERS e VANNESTE, 2003) mostra-se que somente ocorrerá simetria no processo de espalhamento de problemas tridimensionais quando o sinal espalhado representa apenas as *wavelets* de segunda ordem.

Em (ENDERS, 2009), na qual se recomenda a leitura prévia dos artigos anteriores, o autor faz uma revisão completa dos modelos matemáticos conhecidos para resolver o princípio de Huygens, tendo neste trabalho o objetivo básico de unificar as ideias existentes, de maneira a consolidar matematicamente os princípios físicos que estão por trás do fenômeno de propagação.

Finalmente, em (MELO, 2010), a autora realiza a pesquisa do contexto histórico que levou à formulação atual do conceito da teoria ondulatória da luz. A partir da análise histórica e também das dificuldades conceituais dos estudantes, obtidas a partir da literatura,

delimitou-se o trabalho para um estudo de caso do modelo físico de Huygens.

2.2 Abordagem para Eletromagnetismo - TLM

A primeira versão discretizada do modelo físico de Huygens foi apresentada em (JOHNS e BEURLE, 1971) através de um método numérico criado para o cálculo da impedância em guias de onda² eletromagnética. Este trabalho consolidou-se como o lançador do método TLM. Seus autores basearam-se no trabalho importante de (KRON, 1943), no qual foram derivados circuitos elétricos equivalentes para aplicação em Eletromagnetismo.

O método foi concebido e descrito inicialmente para problemas de espalhamento bidimensional, tendo sido utilizado para calcular a impedância em uma guia de onda de seção transversal retangular sob diferentes condições de carregamento, buscando comparar com resultados analíticos já bem estabelecidos à época. A partir deste ponto, estabeleceram-se os fundamentos teóricos do método numérico TLM.

Johns e Beurle ressaltaram que uma das principais características do método é a capacidade de calcular a resposta transiente, ou resposta impulsiva, em um ponto qualquer do domínio, utilizando um Impulso ou delta de Dirac³ como excitação. Isto significa que, em tese, em uma única rodada de simulação é possível obter a informação completa sobre o sistema analisado nos limites de frequência de zero até infinito. Entretanto, na prática, a rede ou malha bidimensional exerce um efeito de filtro digital, ou seja, se estabelece naturalmente um limite superior na frequência de análise, dependente do refinamento imposto à rede ou malha, assim como a resolução espectral, Δf , está condicionada ao tempo total de simulação do fenômeno.

Em (AKHTARZAD e JOHNS, 1975), desenvolve-se o primeiro modelo de nó tridimensional para o método TLM.

Em (JOHNS, 1987), desenvolve-se o mais importante modelo de nó TLM tridimensional aplicado a problemas de eletromagnetismo e utilizado até os dias atuais com algumas modificações, denominado SCN (*Symmetrical Condensed Node*). Este nó serviu de fundamento para os demais nós tridimensionais desenvolvidos posteriormente.

² Em eletromagnetismo, uma guia de onda é um sistema de fronteiras materiais ou qualquer estrutura física capaz de guiar ondas eletromagnéticas (IEEE Standard Definitions of Fundamental Waveguide Terms, 1980). Ver também nota de rodapé ¹⁶.

³ O delta de Dirac ou impulso, tem um papel fundamental na obtenção da resposta acústica no tempo de um ponto qualquer em uma cavidade. Para mais informações, consultar o Item 3.2.2.

Em (SADIKU e AGBA, 1990), apresenta-se o método TLM utilizando uma perspectiva didática, na qual a teoria de circuitos necessária para sua compreensão é desenvolvida de forma mais explícita. Os autores iniciaram o desenvolvimento algébrico com a unidade básica formadora do nó TLM unidimensional, chamado de elemento tipo "T". Este nó é considerado a unidade básica de uma malha, também denominado de circuito elementar, representado através de capacitâncias, indutâncias e resistências por unidade de comprimento.

De forma sequencial, apresenta-se o modelo bidimensional, facilitando assim o entendimento dos conceitos. O nó bidimensional é considerado uma expansão do nó unidimensional, na qual dois elementos diferenciais interconectam-se perpendicularmente entre si. Esta junção gera uma descontinuidade, ou seja, cria-se um novo circuito equivalente no qual as duas linhas de transmissão são associadas com as duas dimensões do problema.

Posteriormente, em (HERRING, 1993), deixa-se claro que não há necessidade de utilizar leis específicas da teoria de circuitos elétricos para se justificar teoricamente o método TLM. Seu mérito está na obtenção da matriz de espalhamento (*scattering matrix*) para um nó SCN (*Symmetrical Condensed Node*), unicamente aplicando determinadas leis fundamentais de conservação da carga, fluxo magnético e continuidade de campos.

As fontes bibliográficas utilizadas por este último autor levou à produção acadêmica dos pioneiros do método TLM, colegas-professores e discípulos do Professor Peter B. Johns na universidade de Nottingham. Dentre estes, se destaca Christos Christopoulos⁴, chefe do instituto George Green para pesquisa em Eletromagnetismo, responsável pelo primeiro e um dos poucos livros existente sobre o método, denominado *The Transmission-Line Modeling Method* (CHRISTOPOULOS, 1995).

Este livro serve como referência sobre conceitos fundamentais do método, principalmente em seu capítulo que discorre sobre a dedução da matriz de espalhamento utilizando o método energético. A abordagem energética foi mencionada pelo autor como a forma mais elegante e genérica de respaldar o método teoricamente. É importante pontuar que este trabalho contempla um modesto capítulo sobre a aplicação do TLM no ramo de Vibrações e Acústica.

⁴ Segundo dados da universidade de Nottingham (2011), este pesquisador escreveu outros quatro livros técnicos, assim como é autor ou coautor de mais de 300 publicações na área de eletromagnetismo.

Em (SADIKU, 2000), realiza-se um apanhado geral sobre as técnicas numéricas aplicadas ao Eletromagnetismo, tais como Diferenças Finitas, método de Raileigh-Ritz, Elementos Finitos, Método dos Momentos e finalmente o Método de Modelagem por Linhas de Transmissão. Além da abordagem didática inerente ao autor, um dos aspectos mais relevantes presente no texto é a explanação sobre os diferentes erros numéricos associados ao TLM, tais como: erro de truncamento; discretização da malha e dispersão da velocidade.

Destacam-se também alguns trabalhos do grupo de pesquisa em Eletromagnetismo da UFSC (Universidade Federal de Santa Catarina), dentre os quais, as teses de Doutorado de (FERREIRA, 1999), (FACCIONI, 2001), (SILVEIRA, 2002), (ALMAGUER, 2003) e (DALLA'ROSA, 2008). Estes trabalhos foram utilizados como referência na elaboração do resumo que trata da abordagem tradicional do TLM, apresentado no Capítulo 4, e contribuirão para o entendimento do potencial do método para aplicações futuras em Acústica.

Em virtude da natureza deste trabalho ser voltada para aplicações em Acústica, considerou-se desnecessário realizar uma revisão completa da bibliografia existente sobre o método TLM para Eletromagnetismo, dado ao grande volume de trabalhos existentes. Entretanto, considera-se necessário citar e indicar a leitura de alguns dos trabalhos mais importantes acessados durante a revisão, além dos já citados: (HOEFER, 1985), (TRENKIC, CHRISTOPOULOS e BENSON, 1993), (TRENKIC, 1995).

2.3 Abordagem para acústica - DHM

Os primeiros artigos publicados de que se tem notícia com aplicação em acústica datam dos anos de 1976 e 1977. Entretanto, não puderam ser considerados nesta revisão, por terem sido publicados exclusivamente na língua japonesa.

Passado cerca de uma década, em (O'CONNOR e CAVANAGH, 1997), apresenta-se uma sequência lógica para implementação computacional do método TLM bidimensional utilizando a linguagem Pascal. O conjunto de passos apresentados pelos autores contribuiu no desenvolvimento do programa aplicado neste trabalho. Vale a pena mencionar que este trabalho é um dos únicos encontrados fazendo referência explícita à possibilidade de aplicar a técnica como ferramenta para auralização, entretanto, não há menção à existência de um arquivo sonoro obtido como resultado do trabalho.

Em (KAGAWA, TSUCHIYA, *et al.*, 1998), nós axissimétricos bidimensionais foram utilizados na aplicação em campos sonoros lineares e não lineares. Foi neste trabalho que a sigla DHM - *Discrete Huygens Modeling* foi sugerida pela primeira vez. Implementou-se um algoritmo computacional cuja validade e precisão puderam ser avaliadas através de um modelo de uma onda plana propagando-se dentro de um tubo, tendo seus resultados comparados com um modelo elaborado em Elementos Finitos.

Posteriormente, em (KAGAWA, TSUCHIYA, *et al.*, 1999), complementou-se o artigo de 1998 com outros casos aplicados, na qual a resposta acústica de uma sala é caracterizada através do tempo de reverberação⁵, assim como é proposta uma nova abordagem, chamada de *time-reversal approach*, para a identificação de fontes sonoras e também naquilo que os autores chamaram de tomografia acústica. Do mesmo grupo de autores, outras aplicações para problemas em Acústica também são encontradas nos trabalhos de (KAGAWA e TSUCHIYA, 2001), (KAGAWA, FUJITANI, *et al.*, 2002), (KAGAWA, 2005), (CHAI e KAGAWA, 2007) e (TSUCHIYA, 2007).

Em (PORTÍ e MORENTE, 2001), os autores seguem a abordagem tradicional do método e estabelecem as analogias entre as grandezas acústicas *pressão sonora* e *velocidade de partícula*, com os pulsos de *tensão* e *corrente elétrica*. Apresentam também técnicas de excitação e imposição de condições de contorno na malha TLM. No desenvolvimento de suas ideias, os autores expõem a seguinte reflexão, com o intuito de justificar a quantidade escassa de resultados apresentados no campo da Acústica:

O método TLM é conceitualmente difícil porque certo grau de entendimento do fenômeno de propagação em estudo e conceitos de linhas de transmissão são requeridos antes de sua utilização. Esta tem sido provavelmente a principal razão pela qual o método não se tornou tão popular em áreas além do eletromagnetismo, como outros métodos numéricos tais como o método dos momentos (MM) ou diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD), que possuem uma relação direta entre as equações analíticas e a

⁵ Reverberação é um efeito físico causado pelas múltiplas reflexões de uma onda sonora, fazendo com que o nosso cérebro interprete o som como se fosse único, porém estendido ou com uma cauda reverberante.

implementação numérica, independente da origem física destas equações.

Finalmente, foram apresentados exemplos numéricos bem sucedidos aplicados a campos acústicos, como o cálculo das frequências de ressonância de uma cavidade e a obtenção da curva de perda de transmissão de um tubo com ressonador de Helmholtz cilíndrico. Alguns resultados deste artigo foram incluídos no anexo deste trabalho.

Este artigo reforçou a possibilidade de alcançar um dos objetivos específicos deste trabalho, ou seja, criar uma rotina computacional própria para solução de problemas acústicos em cavidades. Serviram de base para este último trabalho, uma sequência de quatro artigos abordando aplicações do método TLM de forma geral.

O primeiro, (MORENTE, PORTI e KHALLADI, 1992) relata sobre as possíveis técnicas para aplicação de condições de fronteiras na malha.

Na sequência, (MORENTE, GIMENEZ, *et al.*, 1994) deduz expressões analíticas para as velocidades de fase e grupo no domínio da frequência, para um nó do tipo simétrico condensado (SCN).

Posteriormente, em (MORENTE, GIMENEZ, *et al.*, 1995) são obtidas as características de dispersão da velocidade de propagação em uma malha TLM, utilizando dois métodos distintos.

E por último, (PORTI, MORENTE e CARRION, 1998) demonstram uma nova técnica para derivar a matriz de espalhamento tridimensional, baseada nos trabalhos de (JOHNS, 1987) e (TRENKIC, CHRISTOPOULOS e BENSON, 1993).

A utilização do método TLM em sistemas de ultrassom para aplicação na área médica pode ser encontrada na tese de doutorado (AHMADIAN, 2001). Neste trabalho é realizada uma apresentação sobre a teoria fundamental do método, dando-se ênfase ao TLM bidimensional. O processamento paralelo é colocado como uma grande possibilidade do método, sendo mostrados alguns algoritmos com suas vantagens e desvantagens. O TLM inverso, modelagem de propagação não linear e diferentes tipos de malha também são abordados.

2.4 Relações entre métodos numéricos e outras aplicações

Segundo diversos autores, o método TLM é conceitualmente relacionado com outros métodos numéricos. No livro de (PATANKAR, 1980), referência tradicional para o FVM (*Finite Volume Method*), registra-se o objetivo audacioso de desenvolver um método numérico

geral para predição dos fenômenos de transferência de calor e massa, escoamento de fluidos e processos relacionados. Para tal, realiza-se uma exposição sobre os diferentes métodos utilizados na derivação das equações algébricas discretizadas. São particularmente citadas e comparadas as formulações que utilizam a série de Taylor, a formulação variacional, o método dos resíduos ponderados e finalmente a formulação para volume de controle. Vale registrar que o método de volumes finitos em muitos aspectos assemelha-se com o método discreto de Huygens.

Em (WILDE, ECCARD e O'CONNOR, 2001), os autores, além de demonstrar aplicações na modelagem de transdutores acústicos, expuseram a ideia de que o TLM poderia ser visto como uma particularização do método *Lattice-Boltzmann*, que obtém as equações de Navier-Stokes utilizando como referência a teoria cinética dos gases na escala mesoscópica⁶.

Em (BILBAO, 2004), apresenta-se uma abordagem diferenciada, uma vez que o livro é voltado à área de eletrônica musical, na qual o conhecimento dos conceitos de filtragem digital é fundamental. Neste trabalho, o autor classifica o TLM em um grupo de métodos ao qual denomina *Wave Scattering Methods*, ou Métodos de Espalhamento da Onda. Os métodos pertencentes a este grupo utilizam analogias entre o fenômeno físico de propagação e redes de circuitos elétricos, conforme destacado na versão, em português, do seu texto original:

O assunto deste livro é a simulação numérica de sistemas físicos. Em particular, busca-se por sistemas que sejam dinâmicos e distribuídos. Por dinâmicos, entende-se que o estado do sistema evolui à medida que o tempo passa e por distribuído, que o sistema é definido ao longo de uma região do espaço, chamado de problema domínio. As técnicas de simulação que discutiremos são baseadas em analogias entre os sistemas mencionados acima e redes de circuito elétrico, fazendo uso de princípios de espalhamento... (BILBAO, 2004)

⁶ Em Física e Química, a escala mesoscópica refere-se à escala dimensional na qual se pode considerar as propriedades de um material ou fenômeno sem a necessidade de penetrar no comportamento de átomos ou moléculas individuais. Nesta escala são representados mais detalhes do que na escala macroscópica, porém evitando dificuldades inerentes à escala microscópica (VIGGEN, 2009).

Neste mesmo trabalho, faz-se referência ao fato de que a categoria de métodos de espalhamento atraiu ao longo da história o interesse de três grandes grupos de especialistas: simulação em eletromagnetismo; projeto de filtros digitais e simulação sonora. Cada um destes grupos desenvolveu, de uma forma praticamente independente, formalismos e teorias matemáticas distintas para os métodos com os quais trabalham, entretanto utilizando a teoria de circuitos elétricos como fundamento. Diante destes fatos, Bilbao constatou que os métodos de espalhamento "sofriam" demasiadamente com os efeitos dispersivos provocados pela livre pesquisa ao redor do mundo, justificando assim a escrita de um livro no tema, com o intuito de estabelecer uma teoria unificada.

Outro livro utilizado neste trabalho como referência intitula-se *Transmission Line Matrix in Computational Mechanics* (COGAN, O'CONNOR e PULKO, 2005). Este trabalho merece uma atenção especial daqueles que pretendem pesquisar sobre este assunto, uma vez que até a presente data, parece ser a única publicação didática do método TLM totalmente dedicada a problemas da Engenharia Mecânica, incluindo Acústica e Vibrações.

Em seu capítulo de introdução, apresenta-se uma revisão histórica do TLM, mostrando as principais características e vantagens sobre os métodos que resolvem a equação da onda, assim como faz menção a outro grupo de métodos numéricos conhecidos como CA (*Celular Automaton Modeling*). Sabe-se que uma das derivações deste conjunto de métodos é o LGA (*Lattice Gas Automaton*), que por sua vez foi aperfeiçoado e deu origem ao método LBM (*Lattice-Boltzmann Method*), método recente e que tem interessado muitos pesquisadores.

No segundo capítulo, os autores do livro explicam de maneira breve uma interpretação mecanicista para o método TLM, ou seja, iniciam pela versão unidimensional do método, através das equações para uma corda vibrante. Posteriormente, abordam a propagação de ondas em meios em movimento, finalizando com uma breve exposição dos conceitos necessários para a versão bidimensional do método.

No terceiro capítulo é apresentada a versão tradicional do TLM, na qual o desenvolvimento é realizado a partir dos aspectos básicos da teoria de linhas de transmissão. Os demais capítulos são destinados a mostrar diferentes áreas de aplicação do método TLM, sendo um capítulo para cada área. As aplicações desenvolvidas no livro são: Acústica; Modelagem Térmica e Difusão de Partículas; Materiais Elásticos; Modelos de Deformação; Sistemas Hidráulicos e Mecânica dos Fluidos.

O quarto capítulo foi direcionado à Acústica e, além de desenvolver algumas técnicas relevantes ao método, trouxe contribuições importantes para o presente trabalho, uma vez que abriu os caminhos para a implementação de um código próprio, pois apresenta exemplos de algoritmos das versões unidimensional e bidimensional escritos na linguagem MATLAB®.

Buscou-se também por desenvolvimentos mais específicos e menos usuais. Um dos artigos encontrados (DUTILLEUX e KRISTIANSEN, 2003), diz respeito a diferentes formas de considerar durante a simulação a rugosidade de superfícies. Neste artigo, apresentam-se alguns modelos de reflexão difusa capazes de prover resultados precisos sem a necessidade de representar com detalhes refinados as imperfeições existentes nas superfícies do modelo.

Posteriormente, duas partes de um mesmo artigo publicados em anos subsequentes se destacam pela aplicação diferenciada, uma vez que o método TLM é estendido para resolver a Equação de Klein-Gordon, que aparece na mecânica quântica (ARROYO, 2008). Na primeira parte (O'CONNOR e CLUNE, 2001), duas soluções baseadas no TLM são apresentadas para a Equação de Klein-Gordon na sua forma básica, ou seja, com os pulsos representando a variável primária. Na segunda parte (O'CONNOR e CLUNE, 2002), outras duas abordagens são apresentadas e, os pulsos, representam derivadas da variável primária.

Outro aspecto abordado por alguns autores é a questão da aplicação de modelos TLM para meios em movimento, em que ocorre uma superposição entre a velocidade do meio e a velocidade de propagação da onda no meio em repouso.

No trabalho de (O'CONNOR, 2002) é realizada uma rápida revisão das diferentes abordagens utilizadas até aquele momento para adaptar a ideia básica do TLM ao problema de fontes em movimento. Em seguida, explica-se um método mais eficiente para controlar a velocidade da onda utilizando *link lines* suplementares com diodos. Além disso, mostram-se também algumas expressões para a velocidade da onda sem realizar a demonstração matemática.

Em outro artigo (O'CONNOR, 2002) foram desenvolvidas as demonstrações matemáticas das equações de velocidade mencionadas no artigo anterior. O mesmo autor publicou no ano seguinte em (O'CONNOR, 2003), o que foi denominado de “*refinamentos e análise de dispersão na aplicação do TLM para meios em movimento*”. Neste artigo, faz-se uma crítica aos seus dois trabalhos anteriores afirmando que a operação de diodos pode ser considerada não física numa perspectiva da teoria de circuitos. Desta forma, modelos de circuitos

alternativos, baseados em componentes-padrão da teoria de circuitos, foram desenvolvidos para evitar este problema.

Em (EL-MASRI, 2004), encontra-se uma aplicação na qual se estuda a influência de descontinuidades na excitação e na propagação de modos em tubos simétricos e não simétricos realizando uma comparação entre o método de Elementos Finitos e o método de Linhas de Transmissão, mostrando algumas vantagens e desvantagens de cada um.

O desenvolvimento de topologias de nó mais eficientes para descrição de fronteiras com geometria arbitrária pode ser encontrado nos trabalhos de (SEWEL, WYKES, *et al.*, 2004), utilizando nós triangulares para problemas bidimensionais e (SEWEL, BENSON, *et al.*, 2005) utilizando nós tetraédricos para problemas tridimensionais.

Em (SCOTT e COGAN, 2006), busca-se descrever uma nova técnica para descrição de fronteiras não regulares através da utilização de ajustes no comprimento da ramificação em contato com a fronteira, utilizando um plano de referência a partir do ponto final da ramificação original.

No trabalho (BEZDEK, ZHU, *et al.*, 2006), os autores utilizaram a teoria desenvolvida em (O'CONNOR, 2002), para resolver um caso bidimensional de um tubo sob a ação de um pistão conectado a uma cavidade com água em movimento. O mesmo caso foi calculado utilizando o método de Elementos Finitos com o intuito de validar os resultados obtidos. Alguns resultados deste artigo foram incluídos no anexo deste trabalho.

É importante mencionar os artigos mais recentes sobre o efeito de absorção sonora imposta por diferentes meios de propagação. Nos trabalhos de (CHAI e KAGAWA, 2007) e (TSUCHIYA, 2007) é possível encontrar uma abordagem completa, desde a consideração do comportamento dos materiais no domínio do tempo utilizando filtros FIR, até a obtenção do coeficiente de reflexão para diferentes padrões de incidência, na qual a incidência pode ser normal, oblíqua ou aleatória.

Mais recentemente, dois artigos muito similares, dos mesmos autores e publicados no mesmo ano em congressos diferentes (GUILLAUME, PICAUTA, *et al.*, 2008) e (GUILLAUME, PICAUTA, *et al.*, 2008), apresentam resultados obtidos pelo TLM para modelos de propagação em ambientes externos, na qual ocorre variação na velocidade do som, em função das modificações de densidade do ar causadas pelos gradientes de temperatura e a presença de vento. O efeito da absorção sonora provocada pelo solo também é considerada no primeiro trabalho mencionado. Alguns resultados destes artigos foram incluídos no anexo deste trabalho.

Nos últimos anos, o método TLM vem sendo aplicado utilizando o conceito de processamento paralelo, através de unidades de processamento gráficas, conhecidas pela sigla GPU. Dentre as publicações encontradas, podemos destacar os trabalhos de (ROSSI, SO, *et al.*, 2008), (ROSSI e SO, 2009), (ROSSI, FICHTNER e RUSSER, 2009), (SO, 2011), (GUILLAUME, FORTIN, *et al.*, 2012).

Em (BRANDÃO, 2011), busca-se simular a propagação de ondas acústicas no trato vocal humano utilizando o método das Matrizes de Linhas de Transmissão. Neste processo foi desenvolvido um aplicativo em código aberto na linguagem C⁺⁺, sendo utilizado na reconstrução dos modelos tridimensionais do trato vocal e na simulação TLM. Esta tese de Doutorado é um dos únicos trabalhos que se tem conhecimento na área de Acústica, desenvolvido no Brasil.

Uma solução alternativa para resolver o DHM é a simulação da distribuição do campo acústico utilizando *hardware*. Segundo (YIYU, INOBUCHI, *et al.*, 2011), comparando com outros métodos, o método baseado no modelo discreto de Huygens (DHM) é facilmente implementado utilizando esta abordagem. Dois esquemas para o DHM foram aplicados na análise da propagação do som em um espaço bidimensional com dimensões de 2m x 2m. Os resultados das simulações via *hardware* para ambos os esquemas mostraram boa concordância com o resultado da simulação via *software*, assim como melhoraram consideravelmente o desempenho computacional.

Concluindo, neste capítulo realizou-se uma revisão dos trabalhos publicados sobre as abordagens na discretização do modelo físico de Huygens. Esta revisão foi dividida segundo os critérios de abordagem do tema, relação teórica entre os trabalhos, assim como pelo ano de publicação. O próximo capítulo discorre sobre a modelagem numérica em Acústica, justificando a escolha do tema proposto nesta tese. Apresenta-se também determinados aspectos da teoria de processamento de sinais, auralização e processamento paralelo.

3 MODELAGEM NUMÉRICA E AURALIZAÇÃO

Neste capítulo será abordado o tema de modelagem numérica em Acústica, buscando justificar a escolha do método discreto de Huygens. Posteriormente, são apresentados alguns aspectos da teoria de processamento de sinais, Auralização, assim como processamento paralelo, utilizados na obtenção dos resultados deste trabalho.

3.1 Modelagem numérica

O objetivo da modelagem, física ou matemática, é definir componentes ou sistemas e desta forma estabelecer uma aproximação com a realidade. Um modelo nunca será idêntico ao fenômeno físico real a ser modelado, entretanto, tem-se a pretensão que seja suficientemente próximo à aplicação em questão para fornecer resultados minimamente precisos e coerentes com a física do problema.

Partindo deste conceito, pode-se dizer que a matemática é a principal ferramenta utilizada na descrição científica dos fenômenos do mundo físico real, seja por meio de modelos analíticos que fornecem respostas exatas para equações concebidas a partir de aproximações da realidade física, seja por meio de modelos discretizados que realizam aproximações numéricas. Em ambos os casos, devem-se considerar as condições iniciais e de contorno inerentes ao problema.

Sabe-se que modelos analíticos são capazes de descrever, com um bom grau de aproximação, os fenômenos físicos apenas para um número restrito de casos e, geralmente, são aplicados quando os problemas envolvem meios com diversas simplificações, tais como: homogêneos, isotrópicos, geometrias simplificadas e sistemas invariantes no tempo, entre outras características reducionistas.

Em função deste fato, os métodos numéricos tornam-se uma excelente alternativa para transpor essa limitação. A ideia fundamental está relacionada com o processo de discretização, que reduz o problema físico contínuo e com um número infinito de incógnitas ou graus de liberdade a um problema discreto e com um número finito de incógnitas, possibilitando assim a resolução em computador.

No caso do DHM-TD, pode-se dizer que o método substitui as soluções numéricas aproximadas da equação diferencial parcial que governa o fenômeno físico, como aquelas utilizadas nos métodos de diferenças finitas e elementos finitos, por um modelo aproximado, dito intrinsecamente discretizado, ou seja, obtido a partir da discretização direta do fenômeno físico observável(COGAN, O'CONNOR e PULKO,

2005). Em função disso, não há necessidade de obtenção de uma equação diferencial que descreva o fenômeno, como é realizado nos métodos tradicionais.

Em um passado recente, a implementação de métodos numéricos exigia grande conhecimento em linguagens de programação complexas e de difícil escrita e depuração. Esta exigência também estava relacionada com a necessidade de buscar as melhores opções disponíveis em termos de eficiência e assim aproveitar os escassos recursos computacionais disponíveis à época.

Entretanto, linguagens como MATLAB[®], SCILAB e OCTAVE, entre outras, apresentam características que as tornam bem mais amigáveis ao usuário não especializado em programação, tais como os pacotes de funções pré-definidas e facilidade de visualização gráfica de resultados, permitindo ao usuário a maior utilização de seu tempo e esforço mental no estudo do problema físico a ser resolvido.

A modelagem de um problema acústico linear sempre envolverá uma função de estímulo, chamada de entrada ou excitação, uma função de saída ou resposta e a relação entre essas duas funções, chamado de operador ou função de transferência, que no domínio temporal é denominado de resposta impulsiva. Desta perspectiva, os métodos podem ser classificados conforme a variável independente relacionada à sua função de resposta, que pode ser o tempo ou frequência, assim como o seu operador pode ser integral ou diferencial. Como exemplo, podem ser citados alguns dos métodos e abordagens mais utilizados em vibroacústica, além do DHM-TD para efeito de comparação:

1. FEM-FD (*Finite Element Method - Frequency Domain*): Método de Elementos Finitos no domínio da frequência e equacionamento diferencial;
2. BEM-FD (*Boundary Element Method - Frequency Domain*): Método de Elementos de Contorno no domínio da frequência e equacionamento integral;
3. FDM-TD (*Finite Difference Method - Time Domain*): Método de Diferenças Finitas no domínio do tempo e equacionamento diferencial;
4. DHM-TD⁷ (*Discrete Huygens' Modeling - Time Domain*): Modelagem Discreta de Huygens no domínio do tempo e equacionamento discretizado algébrico.

⁷ Esta sigla poderá ser utilizada de forma compacta daqui para a frente, retirando as letras "TD" que fazem referência ao domínio no tempo.

Evidentemente, a classificação de um método pode ser estabelecida utilizando diversos outros critérios. No caso da pesquisa sobre simulação de ambientes, os métodos numéricos são normalmente enquadrados em duas abordagens distintas, ou seja, aqueles baseados em técnicas geométricas, como o traçado de raios⁸ ou fontes virtuais, e os métodos baseados na propagação da onda esférica e equações diferenciais, na qual o DHM e os demais métodos citados anteriormente se enquadram.

De maneira geral, os métodos numéricos também podem ser classificados em determinísticos e estatísticos. Por exemplo, os métodos de elementos finitos, diferenças finitas e o próprio DHM são considerados métodos determinísticos, enquanto os métodos SEA (*Statistical Energy Analysis*) e traçado de raios são considerados métodos estatísticos. Os dois últimos são normalmente indicados para frequências mais altas e elevada densidade modal.

Naturalmente, a escolha do método dependerá do tipo de análise a ser realizada. Por exemplo, aqueles que utilizam a frequência como variável independente são preferencialmente utilizados para resolver casos que envolvam uma pequena quantidade de frequências, uma vez que para cada frequência se resolve um sistema linear de equações. É necessário que a situação modelada opere em regime permanente.

Os métodos que utilizam o tempo como variável são comumente utilizados em casos cujo regime é transiente, ou mesmo para resolver problemas não lineares. Os métodos no tempo são capazes de considerar uma larga faixa de frequências em uma única rodada de simulação, tendo como limite superior a frequência de corte associada à discretização no espaço e tempo. Este fato influencia fortemente na utilização do DHM em acústica de ambientes e auralização.

3.2 Fundamentos em auralização

3.2.1 Aspectos gerais

Sabe-se da modelagem numérica tradicional que os resultados utilizados nas análises de engenharia são geralmente quantidades numéricas apresentadas em termos de gráficos e tabelas. Entretanto, em Acústica, esta forma de avaliar o problema apresenta certa limitação.

Imagine explicar os traços de uma pintura para uma pessoa que não tem acesso a visualizá-la. A caracterização verbal seria baseada em

⁸ Tradução livre de *Ray Tracing*.

alguns descritores tais como: tamanho, cor, brilho, dados sobre os objetos ou mesmo a resolução de alguns de seus detalhes. Entretanto, a reprodução desta pintura de acordo com descrições verbais nunca será capaz de descrever fielmente o original, uma vez que sempre estará revestida de interpretações subjetivas dos participantes, ainda que os descritores sejam parâmetros objetivos (VORLÄNDER, 2007). Nesta situação fica muito claro que seria mais assertivo se simplesmente a pessoa pudesse visualizar diretamente a pintura, apreciá-la, e assim tirar suas próprias conclusões, sem intermediários.

Assim como no exemplo da pintura, em Acústica ocorre um processo semelhante. Nem toda informação necessária a uma completa interpretação do evento sonoro pode ser reproduzida através de dados numéricos representados em termos de gráficos e tabelas. Existem aspectos específicos ao processo de audição, como questões fisiológicas e também questões subjetivas do indivíduo, que não são contempladas pelos descritores normalmente utilizados.

Sabe-se que em processos nos quais o sentido da visão é envolvido, o "tornar visível" é naturalmente denominado de Visualização. Da mesma maneira, conclui-se que o processo de "tornar audível" estabelece um processo análogo, porém, aplicado ao sentido humano da audição (VORLÄNDER, 2007). Desta forma, cunhou-se um novo termo denominado Auralização, que alguns preferem denominar de Síntese Sonora, um termo tradicional.

Estes termos têm o objetivo de englobar todas as técnicas que pretendam de alguma maneira criar impressões audíveis (KUTTRUFF, 2001) ou, em outras palavras, as técnicas de criar arquivos sonoros audíveis a partir de dados numéricos simulados, medidos ou sintetizados (VORLÄNDER, 2007). Qualquer som, ruído ou sinal, que seja gerado, transmitido ou radiado e percebido pelas pessoas, pode ser mais adequadamente interpretado e comparado, se for colocado no formato de um arquivo eletrônico de áudio, em vez de somente interpretar dados numéricos em tabelas ou gráficos.

Para facilitar a compreensão, afirma-se que o processo ou cadeia de auralização divide-se em quatro partes principais, que podem ou não interagir entre si, tal qual ilustrado pela Figura 3.1. Em geral, a cadeia de auralização é um processo híbrido, na qual cada modelo representado pelas caixas no fluxograma pode ser tanto analítico, numérico ou experimental. As setas tracejadas indicam um possível acoplamento entre os modelos apresentados.

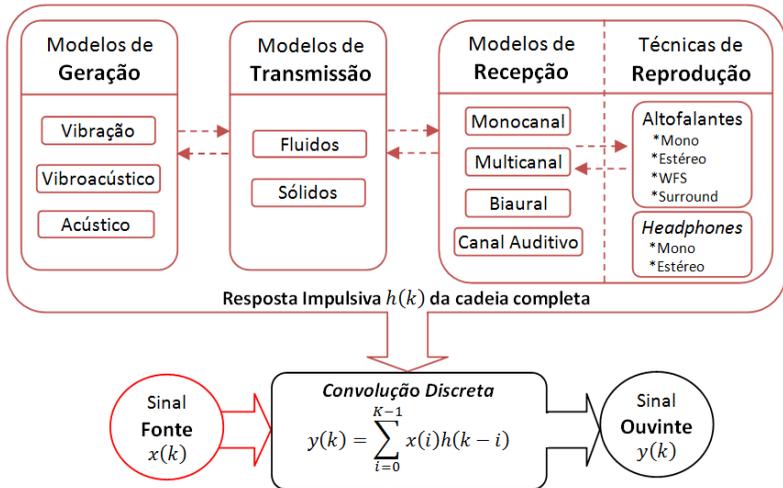


Figura 3.1 - Síntese gráfica da cadeia de auralização.

Segundo (VORLÄNDER, 2007), o sinal da fonte primária $x(k)$ pode ser imposto por uma fonte de velocidade de volume⁹ pontual, pela imposição de potência sonora com direcionalidade¹⁰ de uma fonte com geometria qualquer, por um conjunto de fontes distribuídas ou por uma saída de força ou velocidade de partícula de uma fonte de vibração.

Em suma, o conjunto de modelos distribuídos em sequência na figura fornece a resposta impulsiva $h(k)$, que representa o comportamento completo do sistema acústico que se pretende auralizar. Esta resposta impulsiva do sistema será convoluída com o sinal da fonte primária $x(k)$, resultando no sinal $y(k)$ percebido pelo Ouvinte. A seguir, descreve-se a forma de obtenção da resposta impulsiva $h(k)$ para sistemas lineares e invariantes no tempo.

3.2.2 Sistemas lineares e a resposta impulsiva

Uma importante classe de sistemas consiste naqueles que possuem resposta ou saída linear à medida que se modifica a intensidade da excitação ou entrada, assim como apresentam propriedades invariantes ao longo do tempo, denominados pela sigla SLIT (Sistema Linear e Invariante no Tempo).

⁹ Movimento causado pela onda sonora em um volume de um meio capaz de transmiti-la, através de uma área unitária, por unidade de tempo.

¹⁰ Propriedade de uma fonte sonora de emitir ondas com um determinado padrão direcional.

Segundo (OPPENHEIM e SCHAFER, 1989), a classe de sistemas lineares é definida pelo princípio da superposição, ou seja, se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são as respostas de um sistema arbitrário quando $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são as respectivas entradas, então, o sistema será linear se e somente se:

$$T\{x_1(t) + x_2(t)\} = T\{x_1(t)\} + T\{x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t), \quad 3.1$$

e

$$T\{ax(t)\} = aT\{x(t)\} = ay(t), \quad 3.2$$

na qual a é uma constante arbitrária, $T\{x_1(t)\} = y_1(t)$ e $T\{x_2(t)\} = y_2(t)$. A primeira igualdade é chamada de propriedade aditiva e a segunda de propriedade da homogeneidade ou escalonamento. Estas duas propriedades podem ser combinadas, resultando no princípio da superposição, matematicamente descrito pela seguinte equação:

$$T\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aT\{x_1(t)\} + bT\{x_2(t)\}. \quad 3.3$$

Um sistema invariante no tempo é aquele que um deslocamento no tempo ou atraso num sinal de entrada resulta em um correspondente atraso no sinal de saída. Supondo que um sistema transforme o sinal de entrada $x(t)$ em um sinal de saída $y(t)$, diz-se que o sistema é invariante no tempo se para qualquer t_0 , o sinal de entrada com valores $x_1(t) = x(t - t_0)$ produz valores de saída iguais a $y_1(t) = y(t - t_0)$.

Segundo (VORLÄNDER, 2007), este tipo de sistema é encontrado na maioria das aplicações para Acústica, e ao ser "alimentado" com um sinal de entrada $x(t)$, responderá com o seguinte sinal de saída $y(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t), \quad 3.4$$

sendo $h(t)$ a resposta impulsiva do sistema no domínio contínuo.

A Equação 3.4 é o fundamento para todas as considerações teóricas de sistemas lineares e invariantes no tempo, sendo conhecida

como Integral de Convolução. Para realizar esta operação é necessário obter a resposta impulsiva do sistema. Em Auralização, muitas vezes o que se faz é obtê-la experimentalmente realizando medições em ambientes já construídos, entretanto, simulações numéricas podem ser utilizadas com este mesmo objetivo.

O delta de Dirac ou impulso, $\delta(t)$, tem um papel fundamental na obtenção da resposta impulsiva. Para entender este conceito de maneira intuitiva, sem necessariamente utilizar o completo formalismo matemático tradicional, considera-se uma aproximação de um conjunto de impulsos retangulares de área idêntica, cuja largura tende a zero, mas a área é mantida constante.

Quando o tempo t_0 tornar-se tão pequeno quanto possível e a amplitude do impulso tender a infinito, tal qual ilustrado pela Figura 3.2, pode-se afirmar que se tem um impulso unitário, já que a área mencionada é mantida unitária.

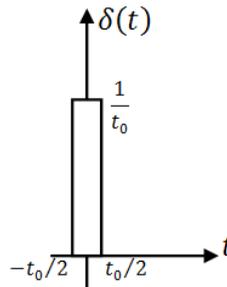


Figura 3.2 - Delta de Dirac.

Aplicando este pulso ideal como excitação, tem-se a resposta impulsiva de um sistema de transmissão ideal sem distorções, que conterà, idealmente, infinitas frequências do espectro:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad 3.5$$

A obtenção da resposta impulsiva também pode ser interpretada de uma forma gráfica através da Figura 3.3.

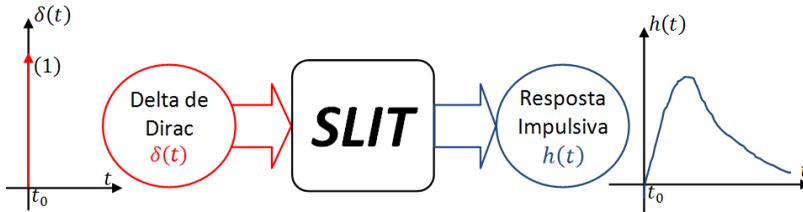


Figura 3.3 - Resposta Impulsiva de um sistema linear.

Entretanto, em situações práticas, é necessário utilizar uma função de excitação que funcione como um filtro *anti-aliasing*¹¹, denominada *sinc*. Este é um tipo de filtro capaz de remover do sinal de entrada, as componentes de frequência acima da banda requerida. A resposta impulsiva deste filtro é a própria função *sinc* no domínio do tempo, o que implica em uma função retangular no domínio da frequência, atuando desta forma como um filtro passa-baixa. Baseando-se em (SHIN e HAMMOND, 2008), a função *sinc* ideal pode ser escrita da seguinte maneira:

$$h(t) = \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi f_c t} = \text{sinc}(\pi f_c t), \quad -\infty < t < \infty \quad 3.6$$

no qual f_c é a frequência de corte requerida no problema.

Em sistemas SLIT, é possível realizar a conversão entre domínios, ou seja, entre a resposta impulsiva no domínio do tempo e a função de transferência no domínio da frequência. Para tal, utilizam-se as transformações direta e inversa de Fourier (SHIN e HAMMOND, 2008), descritas como:

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt, \quad 3.7$$

¹¹ *Aliasing* é uma preocupação na amostragem de sinais. Em música, por exemplo, há componentes de alta frequência inaudíveis para seres humanos. Se uma peça de música é amostrada com taxa de 32 kHz, as componentes de frequência acima de 16 kHz (frequência de Nyquist) implicarão em erro de *aliasing* quando a música for reconvertida para um sinal analógico. Para prevenir este fato, utiliza-se um filtro *anti-aliasing* para remover as componentes acima da frequência de Nyquist.

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j\omega t} dt. \quad 3.8$$

Portanto, outra forma de descrever um sistema, análoga à resposta impulsiva, é a função de transferência $H(f)$ no domínio da frequência, ou seja, a forma como o sistema responde a uma excitação estacionária. A função de transferência estacionária, relacionada a sinais harmônicos, é definida como:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}. \quad 3.9$$

Desta forma, a integral de convolução no domínio do tempo possui o resultado equivalente a uma simples multiplicação termo a termo no domínio da frequência:

$$Y(f) = H(f)X(f), \quad 3.10$$

que, posteriormente, pode ser reconvertida para o domínio do tempo, através da transformada inversa de Fourier.

Entretanto, vale observar que o processo de audição só é efetivado pela experiência no domínio do tempo, portanto, a interpretação matemática da oscilação sonora no domínio da frequência em geral não é algo intuitivo ou compreendido diretamente por pessoas que não sejam especialistas.

3.2.3 Convolução de um sinal discreto

Nas análises numéricas, sabe-se que os dados estão disponíveis em um domínio discreto, em função disso, utiliza-se a forma discretizada da integral de convolução. O sinal de entrada $x(k)$ e a resposta impulsiva $h(i)$ são gravados em vetores de sequências temporais. Com estes vetores, é possível realizar a operação de convolução para sistemas causais utilizando a seguinte expressão (VORLÄNDER, 2007):

$$y(k) = x(k) * h(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)h(k-i). \quad 3.11$$

Este processo requer $N \cdot L_h$ multiplicações de ponto-flutuante¹², com N representando o tamanho do vetor de entrada e L_h o tamanho do vetor de resposta impulsiva, que pode ser encarado como os coeficientes de um filtro FIR. Para finalizar, da mesma forma que um sinal contínuo, a resposta discretizada no domínio da frequência pode ser obtida por uma simples multiplicação da entrada $X(K)$, pela função de transferência $H(K)$, conforme indicado abaixo:

$$Y(K) = X(K)H(K), \quad 3.12$$

na qual $X(K), Y(K), H(K)$ são as respectivas transformações discretizadas de Fourier das funções no tempo $x(k), y(k), h(k)$.

3.3 Processamento paralelo

Os avanços dos últimos anos na tecnologia de *hardware* computacional viabilizaram o processamento paralelo em computadores pessoais. Neste período, os processadores *multicore* se popularizaram, assim como uma nova abordagem para a computação paralela surgiu com base em unidades de processamento gráfico, conhecidos pela sigla GPU (*Graphics Processing Unit*).

GPU é a denominação adotada para um determinado tipo de dispositivo destinado originalmente para acelerar o processamento de gráficos. As GPUs são capazes de manipular gráficos com eficiência superior às CPUs, em função da sua arquitetura de processamento paralelo. Entretanto, engenheiros e cientistas têm estudado a utilização de GPUs para cálculos não gráficos que envolvam operações com matrizes de grande dimensão em diversas aplicações.

Segundo (ROSSI e SO, 2009), os projetos de placas GPU se baseiam na arquitetura de hardware denominada SIMD (*Single Instruction Multiple Data*). Esta arquitetura utiliza múltiplos processadores com o objetivo de executar as mesmas tarefas em uma grande quantidade de dados.

¹² Diretamente do inglês *floating point*, ponto flutuante é um formato de representação digital de números reais, utilizada por computadores.

Em geral, a CPU exerce o papel de *host* no conjunto e assim torna-se a unidade controladora do dispositivo GPU. Para efetivar a comunicação entre esses dois sistemas, utiliza-se o barramento PCI *express*. O processamento com a GPU se tornará mais vantajoso em relação à CPU, quanto maior for o tempo total de simulação, em relação ao tempo necessário para transferência de dados através do barramento PCI *express*.

Este barramento pode ser programado utilizando a arquitetura CUDA-NVIDIA[®], que consiste em um conjunto de ferramentas de desenvolvimento, bibliotecas e diretrizes de programação para computação GPU (ROSSI, SO, *et al.*, 2008). Foi concebida utilizando como referência as linguagens C e Fortran, de maneira a tornar mais prática a elaboração de programas aplicáveis ao dispositivo.

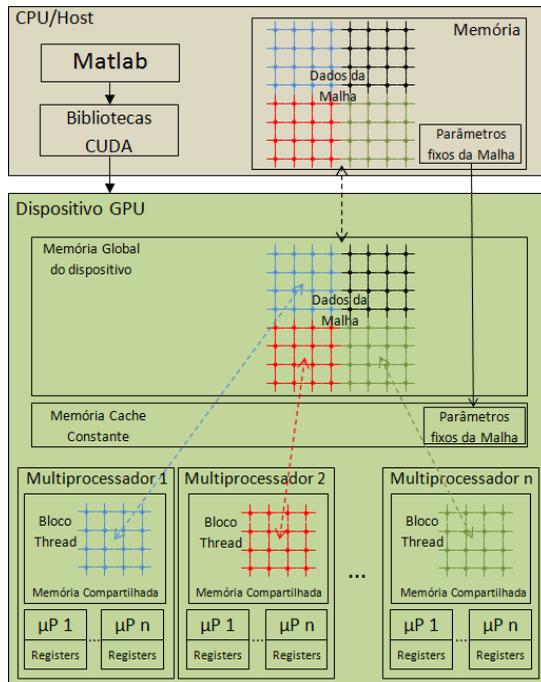


Figura 3.4 - Representação gráfica da transferência de dados entre CPU e GPU, baseado em (ROSSI, SO, *et al.*, 2008) e (ROSSI e SO, 2009).

O dispositivo GPU-NVIDIA[®] é provavelmente o mais difundido entre as unidades de processamento paralelo disponíveis no mercado. Constitui-se por um conjunto de multiprocessadores, memória global,

além das memórias compartilhadas e cache, conforme ilustrado pela Figura 3.4. As memórias utilizadas são de alta velocidade e dedicadas ao trabalho paralelizado, apresentando características específicas com o objetivo de melhorar o desempenho global do dispositivo.

O processamento do algoritmo inicia na transferência dos dados da malha gravados na memória da CPU, para as memórias global e constante da GPU. É importante notar que os multiprocessadores somente compartilham informação através da memória global. Em seguida, ocorre a distribuição eficiente da demanda computacional entre os multiprocessadores, utilizando a estrutura de dados denominada de bloco *threads*¹³. Estes blocos consistem em uma parcela da matriz de dados original que é processada de forma paralela em um dado multiprocessador.

Portanto, o número de elementos da matriz de dados enviada para o multiprocessador deve ser sempre menor ou igual a capacidade total de *threads* do multiprocessador. Cada multiprocessador pode ler um bloco de dados da memória global, processá-lo através de uma única instrução aplicável a todos os *threads*, e então reescrever os dados na memória global. É importante observar que o processamento e a transferência dos resultados de saída dos multiprocessadores para a memória global da GPU deve ser realizada utilizando algum tipo de algoritmo de sincronização.

Diante das informações apresentadas anteriormente, assim como em função da disponibilidade, o modelo Tesla M2075 NVIDIA[®] foi utilizado neste trabalho para o processamento do algoritmo DHM3D_GPU através do *Toolbox* de processamento paralelo existente no MATLAB[®]. Desta linguagem é possível programar o que se deseja, sem a necessidade de se tornar proficiente na filosofia de programação paralela e nas bibliotecas de programação CUDA[®] de baixo nível, uma vez que este *Toolbox* estabelece esta interface através de comandos e funções internas pré-programadas. Os resultados e comparações com a versão linear do código podem ser verificados no Item 6.9.

Revisando, este capítulo abordou o tema de modelagem numérica em Acústica, assim como alguns aspectos da teoria de processamento de sinais, Auralização e processamento paralelo. O próximo capítulo abordará o tema cerne deste trabalho, ou seja, a aplicação numérica do modelo físico de Huygens.

¹³ Linha ou encadeamento de execução (em inglês: *Thread*), é uma maneira de um processo dividir a si mesmo em duas ou mais tarefas que podem ser executadas paralelamente.

4 MODELO FÍSICO DE HUYGENS

Este capítulo tem como objetivo apresentar os conceitos fundamentais do modelo físico de propagação da onda de Huygens, incluindo duas diferentes abordagens para sua forma discretizada, o TLM (*Transmission Line Matrix Method*) e o DHM (*Discrete Huygens Modeling*).

4.1 Introdução

A primeira forma discretizada do modelo físico de propagação da onda de Huygens foi concebida para uma aplicação específica. O objetivo era obter uma ferramenta computacional capaz de simular casos bidimensionais na área de Eletromagnetismo. Para tal, fez-se uso do modelo de Huygens paralelamente a conceitos específicos da teoria de linhas de transmissão, com o intuito de respaldar teoricamente o método.

Inicialmente são expostos os conceitos fundamentais relacionados ao modelo físico de Huygens. Em seguida, no Item 4.3, apresenta-se uma breve revisão dos componentes de um circuito elétrico do tipo RLC. Esta revisão é de fundamental importância para a adequada compreensão da abordagem tradicional do método TLM (*Transmission Line Matrix Method*) e, por esta razão, foi incluída neste capítulo.

Em seguida, apresentam-se as formulações tradicionais 1D, 2D e de forma breve a formulação 3D, com o objetivo de introduzir a teoria utilizada na abordagem clássica do método. Ressalta-se que não serão explorados os diversos tipos de topologias tradicionais de nó 2D e 3D criados desde o lançamento do método em 1971, uma vez que para este objetivo recomenda-se a consulta de fontes relacionadas ao Eletromagnetismo. Ao longo deste item serão mostradas também as analogias tradicionalmente realizadas em Acústica Linear.

O método TLM vem sendo desenvolvido e utilizado em outras áreas da engenharia, levando ao desenvolvimento de novas abordagens. Em função deste fato, no Item 4.4 apresenta-se o modelo de Huygens utilizando uma abordagem energética para Acústica. Esta abordagem diferenciada foi adotada neste trabalho, por ser considerada mais abrangente em termos conceituais, uma vez que não necessita recorrer a aspectos específicos da teoria de circuitos elétricos para expressar o método matematicamente. O Item 4.4 pode ser antecipado ao Item 4.3, caso o leitor assim preferir, em virtude da não familiaridade com a teoria de circuitos elétricos.

4.2 Princípio de Huygens

A modelagem por Matrizes de Linhas de Transmissão (TLM - *Transmission Line Matrix Method*) ou também denominado de Modelagem Discreta de Huygens (DHM - *Discrete Huygens' Modeling*), como será visto em detalhes no Item 4.3, define-se como uma técnica para modelagem numérica de um fenômeno ondulatório transcrito no domínio do tempo, alicerçado no princípio¹⁴ de Huygens e leis físicas fundamentais associadas a este princípio.

Conforme mencionado anteriormente, este método foi desenvolvido inicialmente para uma aplicação no ramo do Eletromagnetismo, fazendo uso de um conceito da teoria de linhas de transmissão, encontrando uma solução para problemas de espalhamento quando há mudanças de impedância do meio. Posteriormente, em (JOHNS, 1974), estabeleceu-se uma relação deste conceito com o modelo físico de propagação e espalhamento da onda, concebido pelo matemático neerlandês Christiaan Huygens.

Huygens propôs uma teoria na qual a luz apresenta um comportamento ondulatório que torna possível prever uma posição da frente de onda em um dado instante futuro, desde que seja conhecida a sua posição no instante atual (DALLA'ROSA, 2008). Em 1690 Huygens define em seu Tratado da Luz (HUYGENS, 1920) que:

“... na propagação da luz é necessário considerar que cada partícula do meio através do qual a onda evolui não somente transmite o seu movimento à partícula seguinte ao longo da reta que parte do ponto luminoso, mas também às partículas que a rodeiam e que se opõem ao movimento.”

Segundo (SILVEIRA, 2002), o modelo mecanicista de Huygens para o comportamento da luz pode ser interpretado como um encadeamento múltiplo de choques elásticos que obedecem aos seguintes princípios:

1. A quantidade de movimento é espalhada igualmente em todas as direções;

¹⁴ Princípio significa começo ou causa básica de algum fenômeno.

2. A quantidade de movimento é conservada no processo de espalhamento;
3. A energia é conservada no processo de espalhamento, o que implica na conservação de massa.

A Figura 4.1 ilustra de forma simplificada as frentes de onda se propagando pelo resultado da superposição de infinitas fontes puntiformes radiando ondas esféricas.

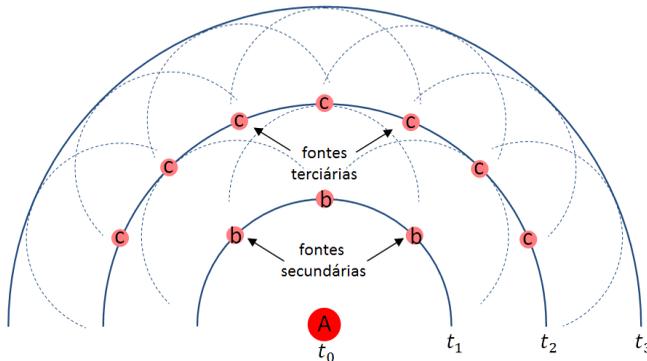


Figura 4.1 - Representação simplificada do Princípio de Huygens.

A luz proveniente do ponto A se expande em uma frente de onda inicial, na qual cada ponto desta frente se comporta como uma nova fonte de onda luminosa. As fontes secundárias (b, b, b), partindo da frente de onda no instante t_1 , formam um conjunto de pequenas ondulações que formarão uma nova frente de onda no instante t_2 . Novamente fontes terciárias (c, c, c, \dots) darão origem a pequenas ondulações que formarão uma nova frente de onda e, assim, sucessivamente. Através deste modelo físico de propagação é possível prever uma posição futura da frente de onda a partir de sua posição atual.

É possível encontrar na literatura alguns trabalhos com diferentes tratamentos matemáticos para o princípio de Huygens, buscando analogias com a solução de Green para a equação da onda. Entretanto, por não ser de fundamental importância para a compreensão e aplicação numérica do princípio, este aspecto não será explorado ao longo deste trabalho. Aqueles que buscam mais conhecimento a respeito poderão recorrer aos seguintes trabalhos de referência: (JOHNS, 1974),

(ENDERS, 1996), (ENDERS e VANNESTE, 2001), (ENDERS e VANNESTE, 2003) e (ENDERS, 2009).

Segundo (ENDERS, 2009), o princípio de Huygens pode ser aplicado não somente à propagação da luz, mas também na difusão de calor e matéria e todos os fenômenos de propagação que possam ser descritos através de equações diferenciais ou *equações a diferenças*. De acordo com (HOEFER, 1985), apesar das dificuldades em se formular matematicamente o mecanismo descrito acima, suas aplicações levam a uma descrição precisa do fenômeno de propagação da onda e espalhamento.

Finalizando, pode-se criar uma falsa ideia, inclusive em função de sua denominação tradicional, de que o método TLM é aplicável somente aos fenômenos associados à eletricidade. Entretanto, após uma análise mais cuidadosa, identifica-se que o princípio mecanicista de Huygens está fundamentado em leis físicas de conservação e continuidade de campo e, por consequência, claramente ajusta-se à modelagem de qualquer fenômeno de propagação de ondas.

4.3 Abordagem para Eletromagnetismo - TLM

Este item visa apresentar a teoria fundamental utilizada na abordagem tradicional de discretização do modelo físico de Huygens. Inicialmente, especialmente para os leitores não familiarizados com a teoria de circuitos¹⁵, faz-se uma breve revisão dos componentes básicos de um circuito elétrico do tipo RLC. Em seguida, apresentam-se os aspectos teóricos fundamentais da abordagem para eletromagnetismo.

4.3.1 Resistor

O resistor é um elemento capaz de dissipar energia elétrica, análogo a um dispositivo que impõe perda de carga ao fluxo de um fluido em um tubo. Em hidráulica, o fluxo é proporcional ao gradiente de pressão aplicado ao fluido, que decai ao longo da passagem pelo dispositivo. Analogamente em eletricidade, a corrente I é o fluxo de carga elétrica, que é proporcional a tensão elétrica V aplicada entre dois terminais. A relação de proporcionalidade entre estas duas grandezas é exatamente a constante associada à resistência elétrica, expressa pela lei de Ohm $V = RI$, em um circuito idealmente resistivo.

A magnitude R da resistência de um circuito, com unidade Ohm, depende da resistividade elétrica ρ_e , propriedade atribuída a um material condutor, e também de sua geometria, através dos parâmetros dimensionais de comprimento l e área da seção transversal A , conforme indicado por:

$$R = \frac{\rho_e l}{A}. \quad 4.1$$

4.3.2 Capacitor

O capacitor é um armazenador de energia, tal qual a mola em um contexto mecânico. Este componente armazena carga elétrica com polaridades opostas em suas superfícies, gerando um campo elétrico. Para uma dada geometria há uma relação entre a carga Q e a tensão elétrica ($Q = CV$), em que a capacitância C é a constante de proporcionalidade, cuja unidade é o Farad.

¹⁵ Neste contexto, usualmente as letras maiúsculas V e I , representam respectivamente a tensão e corrente no domínio da frequência (regime permanente) e as letras minúsculas v e i , a tensão e corrente no domínio do tempo (regime transiente)

A forma tradicional de representar um capacitor, por ser o caso mais simples, é através do arranjo de duas placas paralelas com área A , separadas pela distância l no vácuo, resultando em um elemento com capacitância total expressa pela equação:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{l}, \quad 4.2$$

na qual ε_0 é chamado de permissividade elétrica do espaço livre com valor de $8,854 \times 10^{-12}$ F/m.

Entretanto, se o meio entre as duas placas não for o vácuo, que é o mais usual, haverá influência na capacidade de armazenamento de carga elétrica, e neste caso, utiliza-se a permissividade relativa ε_r , constante que relaciona a permissividade elétrica de um meio arbitrário, com a permissividade do espaço livre, através da expressão $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$.

Genericamente, a constante ε representa numericamente o quão permissivo ou receptivo um meio se apresenta para acumulação de carga e, conseqüentemente, para o estabelecimento de um campo elétrico. Conforme definido no Item 4.3.5, este parâmetro é equivalente ao módulo de compressibilidade β em Acústica, ou seja, o parâmetro que estabelece o quão compressível é um fluido e, assim, capaz de armazenar energia potencial mecânica.

Considerando a característica ondulatória do fenômeno em questão, a introdução de um ângulo de fase entre as funções que descrevem a tensão e a corrente elétrica é outro aspecto importante de um capacitor. Em um circuito idealmente capacitivo, considerando ondas harmônicas, o ângulo de adiantamento da corrente em relação à tensão será de 90 graus. A tensão nos terminais é usualmente expressa através da lei de Ohm:

$$V = ZI, \quad 4.3$$

na qual $Z = 1/j\omega C$ é denominado de impedância elétrica do capacitor.

Ainda que representadas por números complexos, as operações com impedâncias seguem as mesmas regras das operações com resistências puras, ou seja, realiza-se a soma direta para impedâncias em série, assim como se considera para impedâncias em paralelo, o inverso, da soma dos inversos das impedâncias individuais.

4.3.3 Indutor

O indutor é um componente capaz de armazenar energia na forma magnética e que tem seu análogo mecânico em uma massa, ou seja, este elemento é capaz de impor uma inércia ou resistência a mudança de estado do sistema. Entretanto, este fato ocorre ao se alterar a corrente que passa através da bobina que forma um indutor e que mantém este campo magnético, gerando-se uma tensão elétrica que tentará impedir esta alteração de estado (inércia), dada pela lei de Lenz:

$$v(t) = -L \frac{di(t)}{dt}, \quad 4.4$$

na qual $di(t)/dt$ é a taxa de variação da corrente com o tempo e L a constante de proporcionalidade denominada de indutância magnética, cuja unidade é o Henry. Esta equação deixa claro que a tensão no indutor só ocorrerá se houver variação da corrente através do indutor. Portanto, o indutor é um curto-circuito para corrente contínua.

Se o meio que preenche a bobina for ferromagnético, o indutor será capaz de armazenar um campo magnético significativamente maior que no vácuo. Desta forma, a indutância L de um material qualquer é relacionada com a indutância de referência do vácuo L_0 , através da permeabilidade magnética relativa μ_r , descrito por $L = \mu_r L_0$. Apenas como exemplo, podemos citar um indutor tipo bobina com a forma de hélice que possui uma indutância dada por:

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}, \quad 4.5$$

na qual N é o número de espiras, A é a área da seção transversal da bobina e l é o comprimento da bobina. Conceitualmente, a permeabilidade magnética representa o quão permeável um meio se apresenta em relação à existência ou passagem de um campo magnético, sendo análoga à densidade volumétrica do meio para ondas acústicas.

De forma oposta ao capacitor, para um circuito idealmente indutivo, o sinal da corrente apresenta um atraso de 90 graus em relação à tensão, sendo sua impedância igual a $Z = j\omega L$. Conexões circuitais estabelecidas entre capacitores e indutores possuem uma particularidade, uma vez que os capacitores armazenam energia na forma de campo

elétrico, enquanto os indutores armazenam energia na forma de campo magnético.

Desta forma, ao excitar o sistema com um impulso, estabelece-se sua frequência natural, na qual a energia continuamente oscila de uma forma para outra. Esta situação pode ser comparada a sistemas mecânicos oscilatórios, tal qual um pêndulo em movimento harmônico simples. Neste caso a energia mecânica permanece continuamente alternando entre potencial e cinética, considerando neste caso a ausência de perdas por atrito.

4.3.4 Formulação unidimensional

Invariavelmente em fenômenos físicos aos quais a equação diferencial da onda se aplica, há duas variáveis que podem ser associadas diretamente com a existência da onda. Essas variáveis estão correlacionadas e aparecem na mesma equação, tendo na velocidade de propagação da onda no meio um valor constante em comum.

Normalmente, uma destas variáveis pode ser considerada como algum tipo de "esforço", "força", "pressão", "tensão" e a outra um "fluxo", "escoamento", "velocidade", "corrente". Sabe-se também que o produto destas variáveis tem a unidade de potência e a razão representa um tipo de impedância ou oposição à propagação da onda. Matematicamente, a formação das ondas ocorrerá quando a derivada temporal de uma destas variáveis citadas é proporcional à derivada espacial negativa da outra e vice-versa.

Ainda que a forma original do método TLM tenha se originado de uma configuração de circuitos elétricos para aplicações bidimensionais, como veremos no próximo item, a teoria que o fundamenta está ligada à utilização de um tipo de equação de onda unidimensional obtida a partir da teoria de circuitos elétricos, pré-existente à criação do método TLM. Nesta teoria, utiliza-se o conceito de uma linha de transmissão¹⁶ a dois fios, dividida ou discretizada em N elementos diferenciais imaginários, tal qual ilustrado pela Figura 4.2.

¹⁶ Arranjo de condutores elétricos utilizados para guiar o fluxo de energia eletromagnética (COGAN, O'CONNOR e PULKO, 2005), sendo equivalente ao termo guia de onda. Ver também nota de rodapé ².

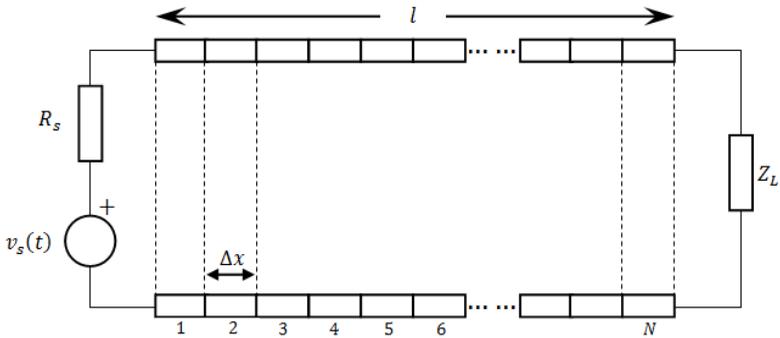


Figura 4.2 - Modelo da linha de transmissão.

A linha de transmissão é um tipo de circuito elétrico no qual se estabelece a ligação de elementos elétricos, tais como resistores, indutores, capacitores, fontes de tensão, fontes de corrente, de modo que formem pelo menos um caminho fechado para a passagem da corrente elétrica. Resumidamente, consiste em uma fonte de tensão conectada a um par de fios ou mesmo num único fio junto à terra, que intrinsecamente possuem resistência, capacitância e indutância elétrica distribuídos ao longo de seu comprimento, sendo capaz de transmitir esta energia para uma determinada carga presente na linha.

Qualquer sistema elétrico que apresenta uma fonte, fio condutor e carga, pode ser modelado como uma linha de transmissão, nos quais $v_s(t)$ é a fonte de tensão variável com o tempo, R_s a resistência inerente à fonte de tensão, Z_L a impedância da carga, N é o número de segmentos da linha de transmissão, Δx o comprimento de cada segmento e l o comprimento total da linha de transmissão.

Um cabo coaxial é um exemplo corriqueiro de uma linha de transmissão, podendo ser comparado a um duto, que é um tipo de guia de onda capaz de propagar ondas acústicas. Os segmentos da linha de transmissão são idênticos e possuem tamanho igual a $\Delta x = l/N$. Cada segmento pode ser modelado, dentre outras representações circuitais possíveis, por um circuito equivalente denominado tipo T , conforme ilustrado pela Figura 4.3.

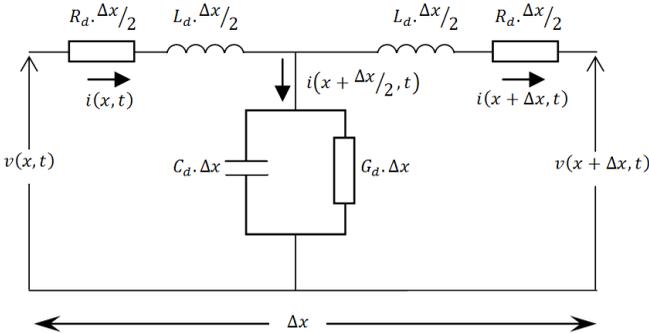


Figura 4.3 - Modelo tipo "T" de um segmento de linha.

Neste segmento, R_d e L_d ; C_d e G_d são respectivamente a resistência e a indutância em série, a capacitância e a condutância em paralelo, definidas por unidade de comprimento e, por isto, a utilização do índice d . As tensões $v(x, t)$ e correntes $i(x, t)$ no segmento são funções das variáveis independentes distância x , e tempo t . Analogamente a onda acústica unidimensional apresenta as variáveis pressão acústica $p(x, t)$ e velocidade de partícula $u(x, t)$.

Segundo (SADIKU e AGBA, 1990) e (SILVEIRA, 2002), aplicando as leis de tensão e corrente de Kirchoff¹⁷ respectivamente no *loop* esquerdo e para o nó principal do circuito, e posteriormente aplicando-se o limite quando a distância $\Delta x \rightarrow 0$, obtêm-se:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = - \left(L_d \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + R_d i(x, t) \right), \quad 4.6$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = - \left(C_d \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + G_d v(x, t) \right). \quad 4.7$$

As Equações 4.6 e 4.7 são os resultados típicos obtidos de derivações matemáticas para as leis físicas que descrevem o movimento da onda unidimensional. Ou seja, duas variáveis dependentes entre si, comumente chamadas de variáveis de campo, neste caso tensão e corrente, estão acopladas por duas equações diferenciais parciais de primeira ordem.

¹⁷ Leis válidas para parâmetros concentrados.

Para se deduzir as equações diferenciais de segunda ordem para a tensão e corrente, elimina-se uma das variáveis de campo derivando as Equações 4.6 e 4.7 em relação às variáveis t e x e ocultando alguns termos por substituição, obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = C_d L_d \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + (C_d R_d + G_d L_d) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + G_d R_d v(x, t), \quad 4.8$$

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = C_d L_d \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} + (C_d R_d + G_d L_d) \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + G_d R_d i(x, t). \quad 4.9$$

Na modelagem TLM aplicada ao Eletromagnetismo são estabelecidas equivalências entre as equações rotacionais de Maxwell em coordenadas cartesianas aplicáveis aos problemas de propagação de ondas eletromagnéticas com as equações de circuito elétrico, que descrevem as relações entre tensões e correntes utilizadas no modelo para linhas de transmissão.

Primeiramente, derivam-se as equações de Maxwell em relação às variáveis t e x . Posteriormente, segundo (SILVEIRA, 2002), eliminando alguns termos por substituição, chega-se respectivamente às equações simplificadas dos campos elétrico e magnético, conforme descrito abaixo:

$$\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t}, \quad 4.10$$

$$\frac{\partial^2 H_z(x, t)}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_z(x, t)}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial H_z(x, t)}{\partial t}. \quad 4.11$$

Vale lembrar que a onda eletromagnética caracteriza-se pela transversalidade oscilatória, ou seja, apresenta as direções de vibração dos campos elétrico, em y , e magnético, em z , perpendiculares entre si e também em relação à direção de propagação em x .

Deste ponto em diante é possível estabelecer mais claramente uma das formas de aplicar o método TLM para ondas acústicas, ou seja, realizando analogias entre as equações de linhas de transmissão e campo

eletromagnético, com as equações de onda utilizadas em Acústica, que apresentam as variáveis físicas interdependentes pressão sonora $p(x, t)$ e velocidade de partícula $u(x, t)$.

Como será mostrado em detalhes no Capítulo 5, a partir das equações de conservação da massa e de simplificações das equações de Navier-Stokes¹⁸ para Acústica Linear, obtêm-se as seguintes equações diferenciais parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad 4.12$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{K_{ad}} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t}. \quad 4.13$$

Para se obter as equações diferenciais de segunda ordem, derivam-se as Equações 4.12 e 4.13 em relação às variáveis t e x e substituindo uma equação na outra, obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{K_{ad}} \rho_0 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2}, \quad 4.14$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{K_{ad}} \rho_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad 4.15$$

considerando $p(x, t)$ a pressão sonora, $u(x, t)$ a velocidade de partícula, ρ_0 a densidade volumétrica do meio e $K_{ad} = \rho_0(c_a)^2$ é o módulo adiabático de *Bulk*.

Comparando termo a termo as equações das tensões e correntes, assumindo que as perdas impostas pela resistência R_d do fio tendem a zero, com as equações dos campos elétrico e magnético e considerando que para todo circuito elétrico é possível encontrar um sistema mecânico análogo e vice-versa, constata-se uma equivalência matemática entre os parâmetros de cada tipo de onda, evidenciada pela Tabela 4.1.

¹⁸ As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais que descrevem o escoamento de fluidos Newtonianos, cuja tensão viscosa é proporcional à taxa de deformação por cisalhamento (FOX e MCDONALD, 1998). São derivadas parciais que, juntamente com a equação da continuidade e a equação de estado, determinam a relação linear entre a pressão sonora e velocidade de partícula.

Tabela 4.1 - Analogia entre as diferentes teorias 1D.

Linhas de Transmissão		Campos Eletromagnéticos		Campos Acústicos
$v(x, t)$	\equiv	$E_y(x, t)$	\equiv	$p(x, t)$
$i(x, t)$	\equiv	$H_z(x, t)$	\equiv	$u(x, t)$
C_d	\equiv	ε	\equiv	$1/K_{ad}$
L_d	\equiv	μ	\equiv	ρ_0
G_d	\equiv	σ	-	s/ perdas

Uma vez estabelecidas analogias entre as variáveis no tempo dos diferentes campos, aplica-se o método TLM para resolver o circuito da linha de transmissão e recorre-se aos parâmetros correspondentes para transpor os resultados e, assim, calcular os campos de interesse.

Continuando com a derivação para as linhas de transmissão, tem-se que o circuito elementar mostrado na Figura 4.3 pode ser representado de uma forma sintética, no domínio da frequência, substituindo a indutância série e a capacitância paralela de cada segmento por uma única impedância característica Z_{LT} de uma linha sem perdas, considerando $R_d = G_d = 0$, resultando:

$$Z_{LT} = \sqrt{\frac{R_d + j\omega L_d}{G_d + j\omega C_d}} = \sqrt{\frac{L_d}{C_d}} = \sqrt{\frac{L/\Delta l}{C/\Delta l}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad 4.16$$

Esta equação demonstra que a impedância de uma linha de transmissão considerada aproximadamente sem perdas resistivas não depende do seu comprimento, mas está associada com as propriedades intrínsecas do meio de propagação em questão.

Sabendo-se que o sinal de tensão propaga-se ao longo da linha de transmissão e que cada segmento representa um elemento diferencial ou nó da malha unidimensional, é necessário obter as tensões incidentes e refletidas e, posteriormente, determinar a tensão e a corrente nestes segmentos. Sabe-se que a expressão para o coeficiente de reflexão em cada segmento é dada por (COGAN, O'CONNOR e PULKO, 2005):

$$\Gamma = \frac{Z_t - Z_i}{Z_t + Z_i} = \frac{Z_t - Z_{LT}}{Z_t + Z_{LT}}, \quad 4.17$$

na qual Z_i é a impedância do meio de origem da frente de onda incidente e Z_t é a impedância na terminação ou meio que reflete a frente de onda.

Obtém-se, desta forma, as tensões incidentes e refletidas para cada segmento. Aplicando o teorema de Thévenin¹⁹, considerando a presença dos segmentos adjacentes a um segmento arbitrário n da linha de transmissão, simplifica-se a análise e obtêm-se as equações essenciais do método. A Figura 4.4 ilustra o circuito equivalente Thévenin mencionado anteriormente.

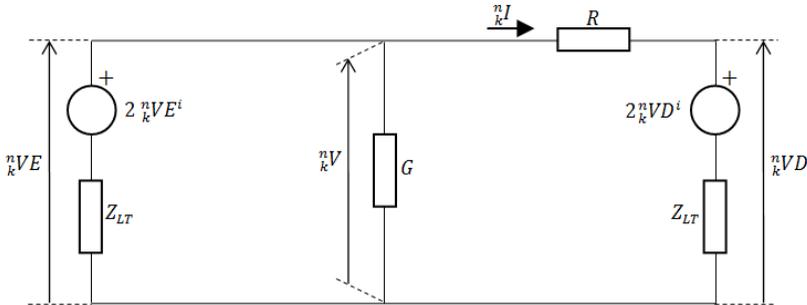


Figura 4.4 - Circuito equivalente Thévenin de um segmento da LT.

Segundo (SILVEIRA, 2002), utiliza-se o teorema de Millman²⁰ para resolver este circuito, obtendo-se os valores de tensão e corrente para o nó em questão, conforme descrito pelas Equações 4.18 e 4.19:

$$n_k V = \frac{\frac{2^n_k V E^i}{Z_{LT}} + \frac{2^n_k V D^i}{R + Z_{LT}}}{\frac{1}{Z_{LT}} + \frac{1}{R + Z_{LT}} + G}, \quad 4.18$$

$$n_k I = \frac{n_k V - 2^n_k V D^i}{R + Z_{LT}}, \quad 4.19$$

¹⁹ Segundo (COGAN, O'CONNOR e PULKO, 2005), o teorema de Thévenin diz que qualquer circuito, no qual se realiza uma medição entre dois terminais pode ser substituído por uma fonte de tensão que é equivalente à tensão que seria observada se não houvesse qualquer conexão externa aos terminais e uma impedância equivalente a todas as impedâncias do circuito se as fontes independentes de tensão fossem substituídas por curto-circuitos.

²⁰ O teorema de Millman é um método rápido para o cálculo da tensão elétrica nos terminais de um circuito construído apenas com circuitos em série e paralelo.

aos quais n_kV e n_kI , n_kVE e n_kVD , ${}^n_kVE^i$ e ${}^n_kVD^i$ são respectivamente a tensão e corrente, tensões à esquerda e à direita e as tensões que incidem à esquerda e direita no segmento n , no instante k .

Os valores de tensão à esquerda e direita do segmento são obtidos, respectivamente, pelas equações que representam o processo de conexão:

$${}^n_kVE = {}^n_kV, \quad 4.20$$

$${}^n_kVD = 2{}^n_kVD^i + {}^n_kI \cdot Z_{LT}. \quad 4.21$$

Conforme a teoria de linhas de transmissão, as tensões que incidem em um segmento arbitrário n são parcialmente refletidas e retornam ao nó adjacente. Essas tensões refletidas podem ser obtidas através das Equações 4.22 e 4.23:

$${}^n_kVE^r = {}^n_kVE - {}^n_kVE^i, \quad 4.22$$

$${}^n_kVD^r = {}^n_kVD - {}^n_kVD^i. \quad 4.23$$

Os pulsos incidentes em um segmento arbitrário n , no instante seguinte $(k + 1)\Delta t$, resulta dos pulsos refletidos em seus nós adjacentes no instante atual. As seguintes igualdades são utilizadas computacionalmente no processo de propagação do sinal:

$$\begin{aligned} {}^{n-1}_{k+1}VE^i &= {}^{n-1}_kVD^r; \\ {}^{n+1}_{k+1}VD^i &= {}^{n+1}_kVE^r. \end{aligned} \quad 4.24$$

É necessário determinar também o intervalo de tempo Δt para que o sinal percorra o espaço Δx entre dois nós adjacentes. Este intervalo de tempo é a diferença entre os tempos discretos $k\Delta t$ e $(k + 1)\Delta t$ em segundos. Para tal, utiliza-se a relação:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u_{LT}}. \quad 4.25$$

Finalizando, sabe-se da teoria de linhas de transmissão (SILVEIRA, 2002) que no caso unidimensional sem perdas $u_{LT} = \frac{1}{\sqrt{L_d C_d}}$, sendo $L_d = L/\Delta l$ e $C_d = C/\Delta l'$, portanto:

$$\Delta t = \sqrt{LC}, \quad 4.26$$

na qual u_{LT} é a velocidade de propagação da onda na linha de transmissão, L a indutância do segmento e C a capacitância do segmento da linha de transmissão.

Os conceitos apresentados até este ponto do trabalho podem ser estendidos a fim de obter as versões bidimensional e tridimensional, conforme demonstrado nos itens a seguir.

4.3.5 Formulação bidimensional

4.3.5.1 Princípio de Huygens discretizado

Inspirado especialmente no trabalho de (KRON, 1943) para modelagem de problemas de eletromagnetismo utilizando circuitos equivalentes, em 1971, (JOHNS e BEURLE, 1971) introduziram uma nova aplicação para as redes de circuitos elétricos na solução de problemas de espalhamento bidimensionais, traduzida por uma técnica denominada pelos autores de *Transmission Line Matrix Method*.

Posteriormente em (JOHNS, 1974), este método passou a ser interpretado como uma versão discretizada do princípio contínuo de Huygens para propagação da onda, obedecendo às leis fundamentais de conservação e continuidade de campos, tal qual descrito por (CHRISTOPOULOS, 1995):

1. Princípio de conservação da carga;
2. Conservação do fluxo magnético;
3. Continuidade do campo elétrico;
4. Continuidade do campo magnético.

No trabalho lançador do método, mencionado anteriormente, o espaço bidimensional ou domínio foi modelado utilizando duas linhas de transmissão unidimensionais, interconectadas perpendicularmente entre si, criando uma matriz ou rede cartesiana de nós discretos que estão separados por uma distância $\Delta x = \Delta y = \Delta l$, compatível com a discretização espacial requerida para a análise.

Para facilitar a representação e visualização do método, em muitas situações de problemas bidimensionais, as linhas de transmissão são representadas no plano, utilizando apenas um traço simples para representar os ramos, conforme ilustrado pela Figura 4.5.

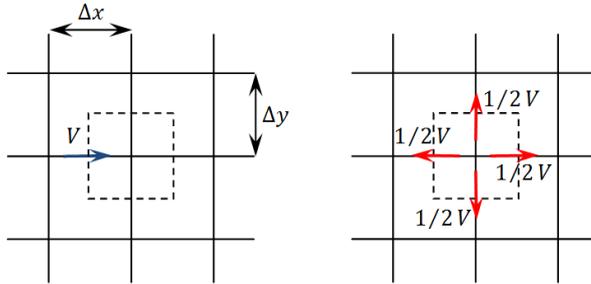


Figura 4.5 - Modelo de linhas de transmissão 2D.

Na mesma figura é possível verificar o espalhamento do sinal incidente (em azul) em um nó arbitrário, gerando quatro novas ondas espalhadas (em vermelho).

4.3.5.2 Espalhamento e propagação

Diante das informações já apresentadas, pode-se resumir o mecanismo de propagação do sinal na malha TLM em três passos principais, a citar:

1. Excitação ou incidência de um pulso em um nó arbitrário;
2. Espalhamento desta energia incidente e;
3. Conexão com os ramos dos nós adjacentes.

A cada passo discreto de tempo Δt , os pulsos viajam do centro de um nó até os centros dos nós imediatamente adjacentes, através dos ramos que os conectam. Quando um pulso atinge um nó, é chamado de pulso incidente, sendo que uma parcela da sua energia é distribuída para os outros ramos deste nó, enquanto a parcela restante é refletida para o nó que deu origem ao pulso incidente.

A Figura 4.6 mostra este processo sequencial de propagação da onda à medida que os passos discretos de tempo decorrem. As setas de cor vermelha indicam os pulsos incidentes e as setas azuis indicam o processo de espalhamento. Considera-se, neste modelo, que o

espalhamento ocorre simultaneamente à incidência do sinal em um nó arbitrário e por isto não contabiliza um novo passo de tempo.

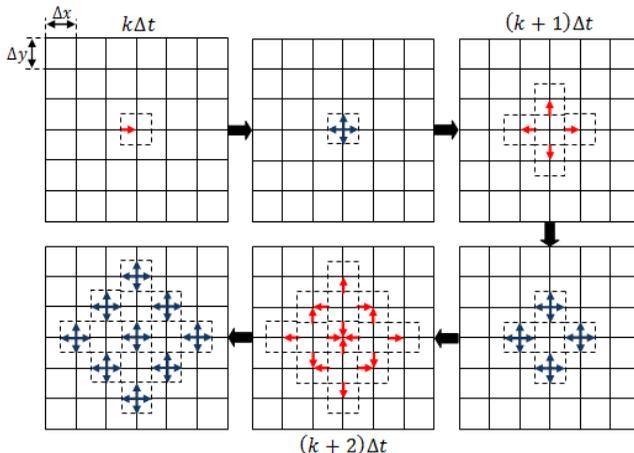


Figura 4.6 - Excitação, espalhamento e propagação em uma malha 2D.

A excitação pode ocorrer em um ou mais passos de tempo, um ou mais ramos, de um ou mais nós, dependendo da geometria da fonte e natureza do sinal de entrada. Posteriormente, os pulsos gerados pelo espalhamento (*scattering*) em um nó se tornam no intervalo discretizado de tempo seguinte, novos pulsos incidentes nos ramos dos nós adjacentes. Este mecanismo de espalhamento e propagação da energia na malha repete-se durante todo o intervalo de tempo definido para a simulação.

4.3.5.3 Excitação

A excitação consiste na aplicação de pulsos incidentes de tensão (pressão sonora) ou corrente (velocidade de partícula) em um ou mais passos de tempo, um ou mais ramos de um ou mais nós da malha, denominados de nós de excitação. Estes pulsos são aplicados através de uma forma de onda arbitrária cujo valor no domínio do tempo discreto é representado na forma de um vetor. Exemplos são o delta de *kroncker* e a função *sinc*, empregados em Acústica para obter a resposta impulsiva do sistema. Outras funções normalmente utilizadas são as cossenoidais, ondas quadradas, onda gaussiana, entre outras.

A incorporação no algoritmo de fontes de excitação pontuais e omnidirecionais²¹ no TLM é considerada relativamente simples. Por esta razão, esta forma de excitação foi utilizada neste trabalho para obtenção da resposta impulsiva de uma cavidade acústica.

Entretanto, em outras situações, modelos mais elaborados de fonte sonora são necessários, uma vez que geometrias complexas possuem padrões de direcionalidade arbitrária e não podem, em princípio, serem modeladas com uma forma de excitação pontual que radia igualmente em todas as direções.

4.3.5.4 Nó bidimensional típico

A situação considerada por (JOHNS e BEURLE, 1971) diz respeito à propagação de um campo eletromagnético bidimensional. Em função disso, o problema pode ser abordado utilizando duas formas de polarização, ou seja, dependente de qual tipo de campo, elétrico ou magnético, que oscila no plano transversal à direção de propagação da onda z . A Figura 4.7 ilustra estas duas formas de polarização:

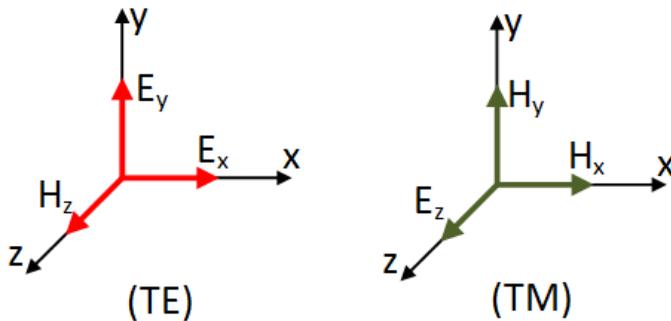


Figura 4.7 - Polarização dos campos na propagação 2D.

- a) TE (Transverso Elétrico): quando os modos de vibração do campo elétrico \vec{E} (componentes E_x e E_y) ocorrem em um plano transversal à direção de propagação z e $E_z = 0$;
- b) TM (Transverso Magnético): quando os modos de vibração do campo magnético \vec{H} (componentes H_x e H_y) ocorrem em um plano transversal à direção de propagação z e $H_z = 0$.

²¹ Quando a fonte radia igualmente em todas as direções.

Para cada polarização é utilizada uma topologia diferente de nó, existindo nós do tipo paralelo (*shunt*) ou do tipo série. A versão escolhida para ser apresentada a seguir foi o nó paralelo, por ser análoga à versão desenvolvida no Item 4.4 para Acústica. Nesta versão, assumem-se as componentes da corrente como sendo equivalentes às componentes do campo magnético, e a tensão, equivalente ao campo elétrico.

O modelo básico deste tipo de nó é formado pela intersecção perpendicular de duas linhas de transmissão iguais e sem perdas, conforme pode ser observado na Figura 4.8. Observa-se que o nó é desenhado utilizando dois pares de segmentos de reta, apenas com o intuito de deixar evidente a diferença de potencial elétrico. Entretanto, ao longo do texto outras formas de representação mais simplificadas e convenientes são preferencialmente utilizadas. Vale lembrar que o nó é a unidade básica de uma malha na teoria do método TLM.

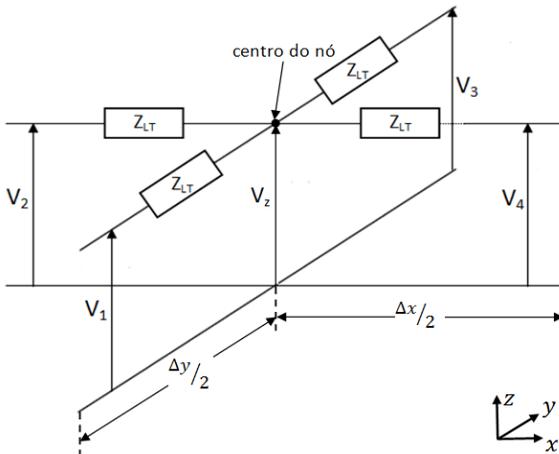


Figura 4.8 - Representação esquemática do nó paralelo 2D sem stubs.

A intersecção destes segmentos no centro do nó resulta na formação de quatro pares de segmento, denominados ramos, com impedância característica da linha de transmissão Z_{LT} . As tensões V_1 , V_2 , V_3 e V_4 identificam os terminais de cada ramo, chamados de portas, por onde é feita a interligação com os nós vizinhos e também com a fronteira da malha.

Diversos trabalhos posteriores ao artigo de Johns e Beurle incorporaram, através de modificações na topologia do nó, a análise de problemas contendo materiais dielétricos diferentes, ou seja, meios não

homogêneos e com perdas. Para tal, introduziram-se elementos reativos e dissipativos em paralelo na topologia do nó, denominados *stubs*, que na verdade são pares de ramos adicionais, mas que não estão conectados aos nós adjacentes.

O *stub* reativo é utilizado em Eletromagnetismo para modelar o aumento da permissividade elétrica do meio e, assim, modificar a velocidade de propagação na linha de transmissão. É um segmento de linha de transmissão terminado em aberto, ou seja, é uma porta não conectada ao nó adjacente, unicamente capaz de retornar o sinal para o nó de origem, sendo representada por uma capacitância ou impedância característica Z_{sr} , conforme pode ser observado na Figura 4.9.

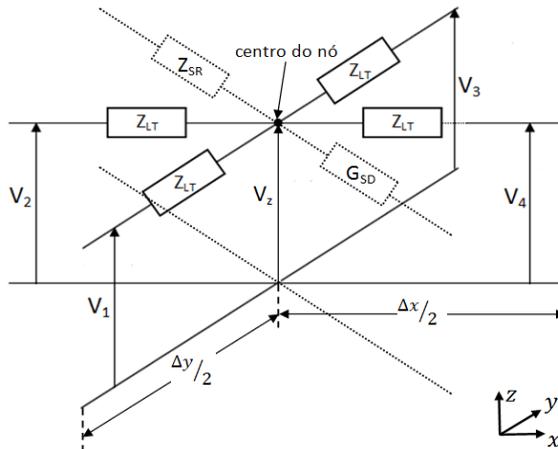


Figura 4.9 - Representação esquemática do nó paralelo 2D com *stubs*.

O *stub* dissipativo, utilizado em Eletromagnetismo para modelar a dissipação do meio, é representado por uma condutância em paralelo G_{sd} para todo o circuito elementar, recíproco da resistência R_{sd} em série, sendo que o sinal não é refletido no sentido do centro do nó, uma vez que é totalmente dissipado pelo *stub*. Este valor é o resultado da soma das capacitâncias de todos os ramos do nó, com a capacitância do *stub* reativo.

Se diferentes materiais forem modelados, divide-se a malha em regiões homogêneas para cada material modelado, dimensionando os *stubs* conforme o meio em questão. É importante lembrar que os modelos descritos pelos *stubs* em geral são mais apropriados para análises de uma única frequência, uma vez que a mudança de impedância causada pela presença dos *stubs* é constante e, assim,

implica que o meio modelado seja necessariamente não dispersivo para que análises multifrequenciais possam ser efetuadas em uma única rodada de simulação.

Entretanto, em Acústica, os materiais de absorção geralmente apresentam propriedades variáveis com a frequência. Desta forma, modelos mais sofisticados como filtros no tempo devem ser utilizados. Estes filtros são utilizados na reflexão, de maneira a reproduzir no domínio do tempo a resposta em frequência do material, através da convolução do sinal incidente com o vetor de coeficientes associado ao material modelado (TSUCHIYA, 2007).

Na representação do circuito equivalente do nó considerando os *stubs*, tal qual mostrado pela Figura 4.10, tem-se que o *stub* reativo é desta vez incluído como uma das parcelas da capacitância total C_t .

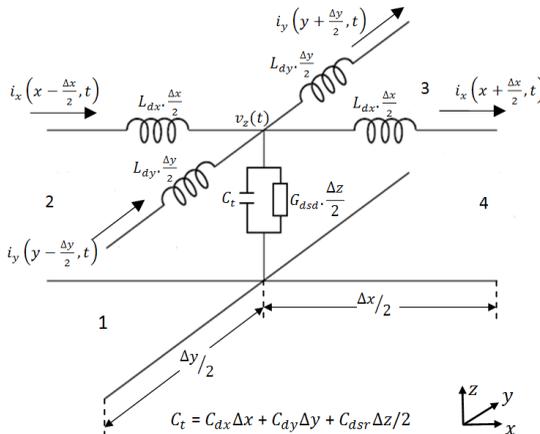


Figura 4.10 - Modelo de parâmetros concentrados do nó paralelo 2D.

Se o nó da malha é considerado um elemento infinitesimal, então, suas dimensões são muito menores do que o menor comprimento de onda avaliado e, portanto, aplicam-se as leis de Kirchhoff no circuito elementar, que considera parâmetros concentrados, com o objetivo de obter as equações diferenciais de tensão e corrente.

Baseando-se em (JOHNS e BEURLE, 1971) e (SADIKU, 2000), assim como considerando as dimensões do nó Δx , Δy , Δz iguais entre si, obtêm-se desta forma as equações diferenciais parciais de primeira ordem para um nó bidimensional. Omitindo-se por clareza as variáveis x , y , t das funções de tensão e corrente, tem-se:

$$\frac{\partial v_{zx}}{\partial x} = -L_{dx} \frac{\partial i_x}{\partial t}, \quad 4.27$$

$$\frac{\partial v_{zy}}{\partial y} = -L_{dy} \frac{\partial i_y}{\partial t}, \quad 4.28$$

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} = -(C_{dx} + C_{dy} + C_{dsr}/2) \frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{G_{dsd}}{2} v_z, \quad 4.29$$

considerando v_{zx} e v_{zy} a tensão elétrica da linha nas direções x e y , i_x e i_y a corrente elétrica da linha nas direções x e y , L_{dx} e L_{dy} são a indutância por unidade de comprimento da linha nas direções x e y , C_{dx} e C_{dy} são as capacitâncias por unidade de comprimento da linha nas direções x e y , C_{dsr} é a capacitância por unidade de comprimento do *stub* reativo, C_t é a capacitância total do circuito e G_{dsd} a condutância por unidade de comprimento do *stub* dissipativo.

Com o objetivo de mostrar a equivalência destas equações com a teoria de campos eletromagnéticos, aplica-se um procedimento semelhante ao realizado para o modelo unidimensional, porém desta vez admitindo-se uma polarização TM da onda em relação ao plano xy , na qual $H_z = 0$. Segundo (CHRISTOPOULOS, 1995) e (ALMAGUER, 2003), temos as seguintes equações para o modo de vibração TM:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad 4.30$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad 4.31$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z, \quad 4.32$$

na qual E_z é a componente do campo elétrico na direção z , H_x e H_y são as componentes do campo magnético nas direções x e y , μ é a permeabilidade magnética do meio, ε é a permissividade elétrica do meio e σ é a condutividade elétrica do meio.

Tendo em vista a aplicação deste método para Acústica é oportuno estabelecer as analogias entre as equações de linhas de transmissão e de campo eletromagnético, com as equações de onda utilizadas em Acústica Linear. Conforme (KUTTRUFF, 2001) e (PORTÍ e MORENTE, 2001), tem-se a seguinte tríade de equações diferenciais de primeira ordem da onda no espaço bidimensional:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t}, \quad 4.33$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho_0 \frac{\partial u_y}{\partial t}, \quad 4.34$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{K_{ad}} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad 4.35$$

na qual p é a pressão sonora, u_x e u_y são as componentes da velocidade nas direções x e y , K_{ad} é o módulo adiabático de bulk e ρ_0 e c_a são respectivamente a densidade volumétrica e a velocidade de propagação da onda acústica do meio.

Adotando o mesmo procedimento utilizado no desenvolvimento do modelo unidimensional, a Tabela 4.2 mostra as analogias possíveis entre os parâmetros do meio de propagação da onda eletromagnética e linha de transmissão com a onda acústica.

Tabela 4.2 - Analogia entre as diferentes teorias 2D.

Linhas de Transmissão		Campos Eletromagnéticos		Campos Acústicos
v_z	≡	E_z	≡	p
i_x	≡	H_y	≡	u_x
i_y	≡	$-H_x$	≡	u_y
$-\left(C_{dx} + C_{dy} + \frac{C_{dsr}}{2}\right)$	≡	ϵ	≡	$-1/K_{ad}$
$L_{dx} = L_{dy} = L_d$	≡	μ	≡	ρ_0
G_{dsd}	≡	σ	-	$s/perdas$

No contexto da teoria de circuitos, a letra u foi excepcionalmente utilizada para descrever o vetor velocidade nas direções x e y , com o objetivo de evitar confusões com a variável que indica tensão elétrica v

ou V . Portanto, segundo (ALMAGUER, 2003) e (COGAN, O'CONNOR e PULKO, 2005), a velocidade de propagação dos pulsos nos ramos da linha de transmissão sem perdas é:

$$u_{LT} = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{L_d C_d}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \frac{\varepsilon}{2}}} = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \sqrt{2} c = \sqrt{2} u_r, \quad 4.36$$

na qual $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta l$, $C_{dx} = C_{dy} = C_d$, u_r é a velocidade de propagação radial²² e c a velocidade da luz no meio.

É importante ressaltar que para a correta modelagem do fenômeno, u_r deve ser igual à velocidade de propagação da onda no meio. Como consequência da Equação 4.36, o passo discretizado de tempo Δt é calculado utilizando:

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{u_{LT}} = \frac{\Delta l}{\sqrt{2} c}. \quad 4.37$$

A partir das correlações apresentadas na Tabela 4.2, pode-se expressar a impedância característica de uma linha de transmissão com ramos idênticos e sem perdas, em termos de suas indutâncias e capacitâncias:

$$Z_{LT} = \sqrt{\frac{L_{LT}}{C_{LT}}} = \sqrt{\frac{L_d \frac{\Delta l}{2}}{C_d \frac{\Delta l}{2}}} = \sqrt{\frac{L_d}{C_d}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{2} Z, \quad 4.38$$

na qual Z é a impedância característica no meio analisado.

Analogamente ao que se fez no modelo unidimensional, a análise do processo de espalhamento dos pulsos na malha e a quantificação dos valores de tensões e correntes são realizados no domínio da frequência, a partir da substituição dos ramos que formam o nó paralelo pelo circuito equivalente Thévenin, conforme representado na Figura 4.11:

²² Velocidade de propagação da onda na direção radial de uma onda esférica. Para mais informações verificar Item 4.4.2.2.

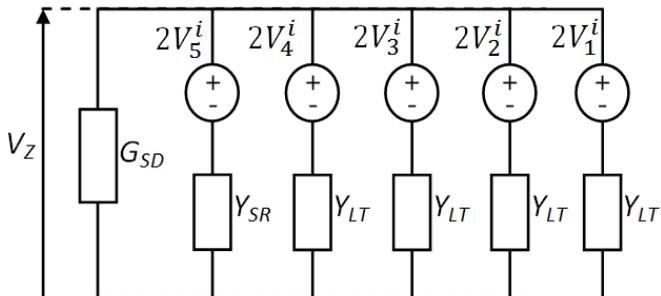


Figura 4.11 - Circuito equivalente Thévenin do nó paralelo 2D.

No circuito elétrico equivalente da Figura 4.11, V_1^i , V_2^i , V_3^i e V_4^i , são as tensões incidentes em cada um dos quatro ramos do nó bidimensional, V_5^i é a tensão incidente no *stub* reativo, e V_Z é a tensão existente no ponto central do nó. Considerando o índice k , associado ao instante discreto $k\Delta t$ de propagação da onda, aplica-se o teorema de Millman (ALMAGUER, 2003) e desta maneira a tensão e as correntes que atravessam o nó analisado podem ser expressas por:

$${}_kV_Z = \frac{\sum_1^r I}{\sum_1^r Y} = \frac{2[({}_kV_1^i + {}_kV_2^i + {}_kV_3^i + {}_kV_4^i)Y_{LT} + {}_kV_5^i Y_{SR}]}{4Y_{LT} + Y_{SR} + G_{SD}}, \quad 4.39$$

$${}_kI_x = \frac{{}_kV_4^i - {}_kV_2^i}{Z_{LT}}, \quad 4.40$$

$${}_kI_y = \frac{{}_kV_1^i - {}_kV_3^i}{Z_{LT}}. \quad 4.41$$

Na Figura 4.11, G_{SD} é a condutância em paralelo do *stub* dissipativo, $Y_{LT} = 1/Z_{LT}$ é a admitância das linhas e $Y_{SR} = 4(\epsilon_r - 1)Y_{LT}$ a admitância do *stub* reativo. Considerando ${}_kV_r = {}_kV_Z$, a tensão total para um ramo r arbitrário do nó será:

$${}_kV_r = {}_kV_r^i + {}_kV_r^s, \quad 4.42$$

portanto, a tensão espalhada (*scattered*) no ramo do nó será:

$${}_k V_r^s = {}_k V_r - {}_k V_r^i. \quad 4.43$$

Esse processo também pode ser representado na forma matricial:

$${}_k \bar{V}^s = {}_k [S] {}_k \bar{V}^i, \quad 4.44$$

na qual ${}_k \bar{V}^s$ e ${}_k \bar{V}^i$ são os vetores das tensões espalhadas e incidentes respectivamente, e ${}_k [S]$ é a matriz chave no processo de propagação da onda, sendo reconhecida por matriz de espalhamento ou *scattering matrix*. Segundo (ALMAGUER, 2003) é possível evidenciar os termos da equação na forma matricial, obtendo-se:

$${}_k \begin{bmatrix} V_1^s \\ V_2^s \\ V_3^s \\ V_4^s \\ V_5^s \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{Y}} \begin{bmatrix} 2 - \hat{Y} & 2 & 2 & 2 & 2\bar{Y}_{SR} \\ 2 & 2 - \hat{Y} & 2 & 2 & 2\bar{Y}_{SR} \\ 2 & 2 & 2 - \hat{Y} & 2 & 2\bar{Y}_{SR} \\ 2 & 2 & 2 & 2 - \hat{Y} & 2\bar{Y}_{SR} \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2\bar{Y}_{SR} - \hat{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^i \\ V_2^i \\ V_3^i \\ V_4^i \\ V_5^i \end{bmatrix}, \quad 4.45$$

na qual $\hat{Y} = 4 + \bar{Y}_{SR} + \bar{G}_{SD}$, com \bar{Y}_{SR} e \bar{G}_{SD} respectivamente representando Y_{SR} e G_{SD} normalizadas em relação à admitância das linhas de transmissão da malha.

O pulso incidente em um nó arbitrário na posição (x_d, y_d) , no instante $k\Delta t$, resulta dos pulsos espalhados em seus nós adjacentes no instante anterior $(k-1)\Delta t$. As seguintes igualdades são utilizadas computacionalmente no processo de propagação do sinal:

$$\begin{aligned} {}_k V_1^i(x_d, y_d) &= {}_{k-1} V_3^s(x_d, y_d - 1); \\ {}_k V_2^i(x_d, y_d) &= {}_{k-1} V_4^s(x_d - 1, y_d); \\ {}_k V_3^i(x_d, y_d) &= {}_{k-1} V_1^s(x_d, y_d + 1); \\ {}_k V_4^i(x_d, y_d) &= {}_{k-1} V_2^s(x_d + 1, y_d); \\ {}_k V_5^i(x_d, y_d) &= {}_{k-1} V_5^s(x_d, y_d). \end{aligned} \quad 4.46$$

A Figura 4.12 mostra a posição relativa dos nós adjacentes ao nó em análise em uma malha bidimensional, tornando mais claro os caminhos possíveis para o processo de conexão.

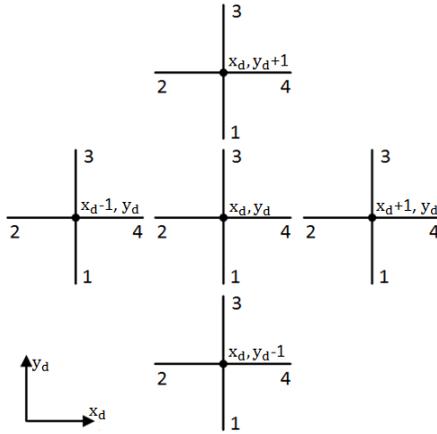


Figura 4.12 - Posição cartesiana discretizada (x_d, y_d) de um nó arbitrário e seus adjacentes.

É possível observar que a inclusão do *stub* dissipativo (sexto ramo) não aumenta o número de equações e consequentemente as linhas ou colunas na matriz de espalhamento. Isto ocorre porque o pulso espalhado pelo *stub* de perdas não é refletido ao nó, uma vez que é totalmente dissipado ao longo do *stub*. Se não ocorre reflexão, não há necessidade de realizar um processo de conexão deste pulso com o instante de tempo seguinte.

Para o caso bidimensional em questão, utilizando as analogias estabelecidas na Tabela 4.2, o campo elétrico pode ser generalizado para um nó arbitrário n através da seguinte equação:

$${}^n E_x = \frac{{}^n V_z}{\Delta l} = \frac{2[(\frac{{}^n V_1^i}{k} + \frac{{}^n V_2^i}{k} + \frac{{}^n V_3^i}{k} + \frac{{}^n V_4^i}{k})Y_{LT} + \frac{{}^n V_5^i}{k}Y_{SR}]}{(4Y_{LT} + Y_{SR} + G_{SD})\Delta l}, \quad 4.47$$

De maneira análoga, as relações entre as componentes de campo magnético e as correntes do nó nas direções x e y serão dadas por:

$${}^n H_x = \frac{-\frac{{}^n I}{k}y}{\Delta l} = \frac{\frac{{}^n V_3^i}{k} - \frac{{}^n V_1^i}{k}}{Z_{LT}\Delta l}, \quad 4.48$$

$${}^n_k H_y = \frac{{}^n_k I_x}{\Delta l} = \frac{{}^n_k V_4^i - {}^n_k V_2^i}{Z_{LT} \Delta l}. \quad 4.49$$

Observa-se que a divisão por Δl se deve ao fato de que as funções associadas à excitação são normalmente impostas à malha em termos de valores conhecidos de tensão e corrente. Entretanto, se os valores de campo elétrico ou magnético fossem utilizados diretamente como excitação, não haveria necessidade desta divisão.

4.3.6 Formulação tridimensional

Sabe-se que a formulação tridimensional para eletromagnetismo originou-se das células básicas utilizadas na versão série bidimensional. Entretanto, esta lógica foi aperfeiçoada resultando na estrutura que deu origem as versões mais atuais do nó TLM 3D, o SCN (*Symmetrical Condensed Node*) ou Nó Simétrico Condensado, lançado em (JOHNS, 1987) e ilustrado pela Figura 4.13.

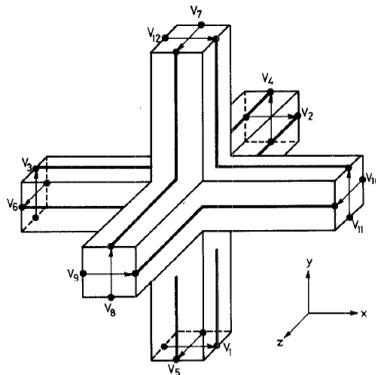


Figura 4.13 - Representação do nó simétrico condensado (JOHNS, 1987).

Entretanto, segundo (ALMAGUER, 2003), o nó SCN de Johns resultava em matrizes de espalhamento muito específicas, ou seja, qualquer modificação, a matriz de espalhamento precisaria ser recalculada. Por esta razão, Naylor propôs representar o nó tridimensional através de três planos, sendo cada plano formado por dois nós bidimensionais, um de topologia série e outro paralelo, tal qual mostrado na Figura 4.14.

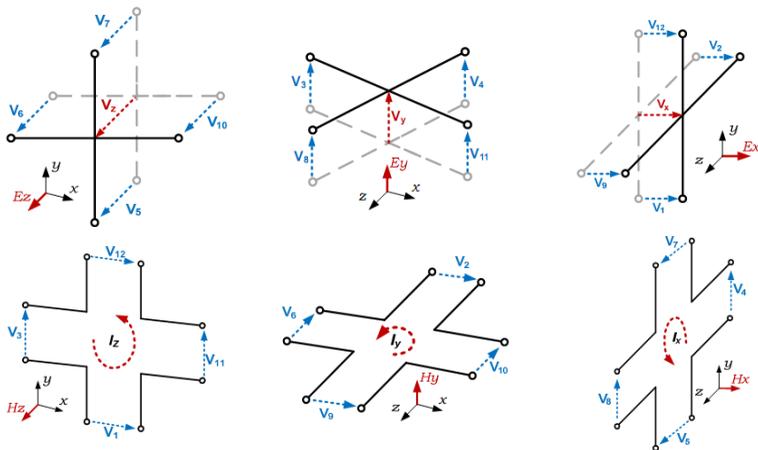


Figura 4.14 - Representação do nó 3D de Naylor (DALLA'ROSA, 2008).

Os três planos representados seriam xy , xz e yz , nos quais os nós tipo paralelo estariam associados com a modelagem dos campos elétricos \vec{E} (E_x , E_y e E_z) e os nós tipo série com a modelagem do campo magnético \vec{H} (H_x , H_y e H_z). Diz-se que a maior contribuição dada por Naylor ao desenvolvimento da topologia SCN foi a simplificação do complexo processo de espalhamento através da matriz SCN e do processamento dos campos associados ao nó TLM 3D. Através da topologia SCN de Naylor, a determinação das componentes do campo elétrico e magnético é realizada diretamente, da mesma forma que no modelo bidimensional.

4.3.7 Fontes de erros

Conforme descrito por (SADIKU, 2000), (ALMAGUER, 2003), (CHRISTOPOULOS, 2006), (DALLA'ROSA, 2008), assim como muitos outros autores, há algumas fontes de erros que interferem no resultado obtido a partir de um fenômeno modelado via TLM/DHM, dentre os quais se destacam:

- **Erro de discretização:** Ocorre quando a discretização espacial da malha é insuficiente para gerar boa representação da propagação de campos com variações acentuadas. Este tipo de situação torna-se mais crítica em malhas que representam estruturas com formas geométricas complexas. Com o intuito de minimizar este problema,

pode-se aumentar o número de nós da malha, resultando em um custo maior de tempo de processamento e utilização de memória. Utilizam-se também nós com topologias diferentes para o tratamento de regiões específicas da malha. Entretanto, para implementar esta solução é necessário um algoritmo diferenciado;

- **Erro de dispersão**²³: Este é um erro causado pela má discretização espacial da malha. Parte-se do pressuposto de que a velocidade de propagação da onda é a mesma em todas as direções, entretanto, mesmo para um meio não dispersivo, a discretização do espaço provoca a dependência da velocidade com a direção de propagação e a frequência. Consequentemente, para minimizar este erro e desta forma assumir velocidade constante em todas as direções, busca-se aplicar valores de $\Delta l \ll \lambda_{min}$. Como regra usualmente aplicada, recomenda-se $\Delta l \leq 0,1\lambda_{min}$;
- **Erro de truncamento**: Sabe-se que a série de valores de resposta no domínio do tempo provenientes de uma simulação é finita, causando a perda de resolução espectral, quando se aplica a transformada de Fourier. Este erro pode ser minimizado aumentando-se o número de iterações (causando um aumento no tempo de processamento), e utilizando excitações mais eficientes no que tange a capacidade de excitação dos modos de vibração.

4.3.8 Considerações e aplicações do TLM

A abordagem tradicional para o modelo discretizado de Huygens apresentada até este ponto do trabalho, dentre outras características, torna o método facilmente compreendido por pesquisadores da área de eletricidade, em contrapartida, pode dificultar o entendimento de outros interessados nas virtudes do método. Este fato ocorre, pois é uma forma específica de abordar o problema, no qual as leis fundamentais da Física estão implícitas em outras leis aplicadas no âmbito da teoria de linhas de transmissão.

Sabe-se que o método TLM vem sendo utilizado também em outras aplicações descritas por ondas ou equações de propagação e difusão, das quais a Acústica está incluída, porém, em uma variedade de temas e profundidade das publicações ainda restrita, reforçando a importância deste trabalho. As principais aplicações encontradas foram:

²³ Mais informações, verificar Item 4.4.2.2.

- Ultrassom aplicado na medicina (AHMADIAN, 2001);
- Ressonadores de Helmholtz (PORTI e MORENTE, 2001);
- Modelagem de superfícies de transdutores acústicos (WILDE, ECCARD e O'CONNOR, 2001);
- Propagação no espaço aberto (GUILLAUME, PICAUTA, *et al.*, 2008);
- Análise de dutos (O'CONNOR e CAVANAGH, 1997)(EL-MASRI, 2004), (BEZDEK, ZHU, *et al.*, 2006);
- Acústica de Salas (KAGAWA, TSUCHIYA, *et al.*, 1999);
- Modelagem do trato vocal (BRANDÃO, 2011).

Diante destas considerações, o próximo item foi incluído neste trabalho com o intuito de apresentar uma abordagem energética mecanicista para o modelo físico de Huygens voltada para aplicações em Acústica. Observe que são expostos prioritariamente novos conceitos e aspectos relevantes à implementação computacional utilizada no trabalho.

4.4 Abordagem para Acústica - DHM

Este item visa apresentar a teoria fundamental para discretização do modelo físico de Huygens na propagação da onda acústica. Apresentam-se aspectos tradicionais da teoria, como formas de excitação, meios de propagação, velocidade na guia de onda e também aspectos inovadores, como a dedução passo a passo de um nó bidimensional sem perdas utilizando os princípios de conservação e também a utilização de coeficientes de reflexão aplicáveis no domínio do tempo, obtidos a partir de técnicas de projeto de filtros FIR.

4.4.1 Introdução

Segundo (KAGAWA, TSUCHIYA, *et al.*, 1998), a denominação *Discrete Huygens' Modeling* (DHM) é uma forma equivalente de referência ao método numérico denominado originalmente no ramo de eletromagnetismo por *Transmission Line Matrix Method* (TLM). Esta nomenclatura surgiu como consequência de uma abordagem energética para acústica e faz referência direta à forma discretizada do princípio de Huygens. Assim, a utilização de circuitos elétricos torna-se um recurso teórico dispensável no desenvolvimento das equações.

Da mesma forma que em outros métodos numéricos, o DHM é um processo de discretização. Entretanto, diferentemente dos métodos tradicionais, tais como diferenças finitas e elementos finitos, que aplicam uma abordagem matemática na discretização da equação diferencial, independente da origem física do problema, o DHM é uma abordagem essencialmente baseada na física do problema. A ideia consiste em desenvolver as equações algébricas diretamente no domínio discretizado, balizando-se nos princípios fundamentais da Física.

Há diferentes formas de explicar o modelo discretizado de Huygens ainda que todas elas, em sua essência, baseiem-se nas mesmas leis e princípios básicos, porém, apresentados de forma distinta dependendo do contexto de aplicação. Utilizando esta linha de raciocínio, considera-se que para desenvolver a teoria do DHM é necessária a aplicação das seguintes leis físicas fundamentais:

1. Conservação da massa;
2. Conservação da quantidade de movimento;
3. Conservação da energia;
4. Continuidade de campos.

Com o objetivo de ilustrar e estabelecer uma ligação destas leis apresentadas acima com os conceitos energéticos utilizados em eletromagnetismo, podem-se descrever leis análogas, tal qual (CHRISTOPOULOS, 1995) enunciou como sendo os quatro princípios para modelagem do processo de espalhamento:

1. Conservação da carga elétrica;
2. Conservação do fluxo magnético;
3. Continuidade do campo elétrico;
4. Continuidade do campo magnético.

Resumindo, o desenvolvimento exposto a seguir apresenta uma abordagem energética para o método TLM, denominada modelagem discreta de Huygens. Nesta abordagem, as leis e princípios físicos fundamentais tornam-se, no ponto de vista deste autor, mais explícitos que no desenvolvimento tradicional utilizado em eletromagnetismo, uma vez que são aplicados de forma direta durante a modelagem, em contraponto ao que ocorre quando se aplicam leis e conceitos específicos da teoria de linhas de transmissão.

4.4.2 Formulação bidimensional

O primeiro passo na definição do método DHM é reafirmar o princípio de Huygens, porém através de uma abordagem energética que considera diretamente o domínio discretizado, o que implica em não utilizar equações diferenciais contínuas para descrever matematicamente o método, tal qual ocorre nas formas tradicionais, que usualmente estão vinculadas a algum tipo de equação diferencial da onda.

A ideia básica do método consiste em dividir o domínio analisado em subdomínios (nós) e aplicar individualmente as leis de conservação e, conseqüentemente, o equilíbrio para o domínio completo será atendido.

Conforme ilustrado pela Figura 4.15, a versão discretizada do princípio de Huygens consiste na divisão do domínio analisado em pequenas partes, utilizando coordenadas cartesianas²⁴. Como consequência, uma rede ou matriz de nós é formada, separados pelas distâncias Δx e Δy nas direções x e y , respectivamente, descrevendo assim o espaço discretizado e possibilitando o cálculo das variáveis

²⁴ Sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas também podem ser utilizadas conforme a necessidade da aplicação.

associadas ao campo em cada nó da malha. Os valores destas variáveis em pontos intermediários aos nós podem ser obtidos através de diferentes técnicas matemáticas de interpolação.

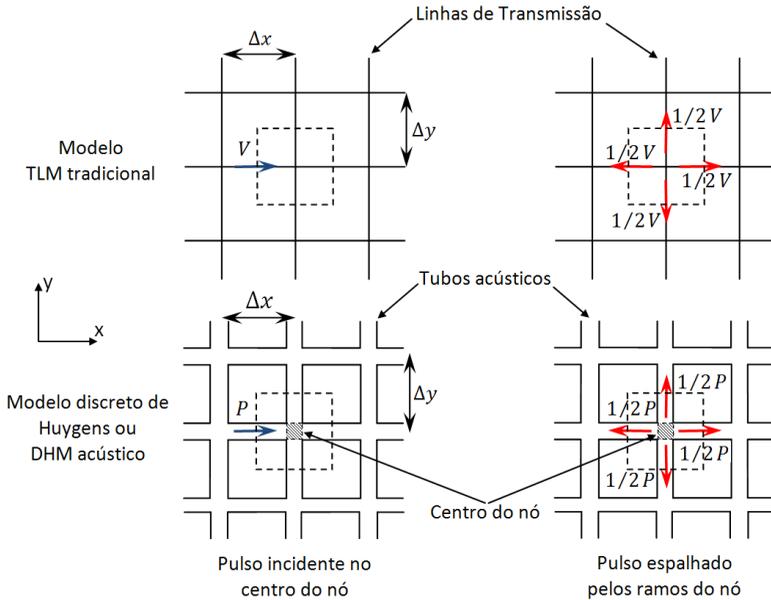


Figura 4.15 - TLM circuital e DHM acústico.

Na versão para Acústica, os nós ou unidades básicas da malha são provenientes do cruzamento ortogonal de elementos tubulares virtuais que, conectados pelas suas ramificações com os nós adjacentes, formam uma malha finita de nós. Apenas com o objetivo de tornar mais simples a exposição da metodologia, utiliza-se o espaço bidimensional, porém, o mesmo procedimento aqui demonstrado pode ser aplicado quando se tratar do espaço tridimensional.

Estes elementos tubulares virtuais têm a função de uma guia de onda e a propagação ocorrerá quando nós arbitrários da matriz receberem um pulso ou sinal incidente e, posteriormente, seguindo os princípios físicos de conservação, o pulso espalha-se pelas portas ou ramos conforme a regra definida para o meio, propagando-se no sentido dos nós adjacentes e, assim, soma-se aos pulsos provenientes de outras regiões da malha.

4.4.2.1 Meios homogêneos e sem perdas

Com o objetivo de facilitar a exposição matemática deste conceito, será considerado o nó sem perdas bidimensional D2O4²⁵, com a dimensão z colapsada. Entretanto, o mesmo raciocínio pode ser aplicado para topologias tridimensionais. Este nó é formado por quatro ramificações ortogonais denominadas de ramos ou portas, com impedâncias acústicas $Z_1; Z_2; Z_3; Z_4$ e áreas da seção transversal $S_1; S_2; S_3; S_4$ respectivamente. Na região compartilhada entre os ramos, é definido um volume de controle V , finito, fixo e indeformável, denominado centro do nó, tal qual ilustrado pela Figura 4.16.

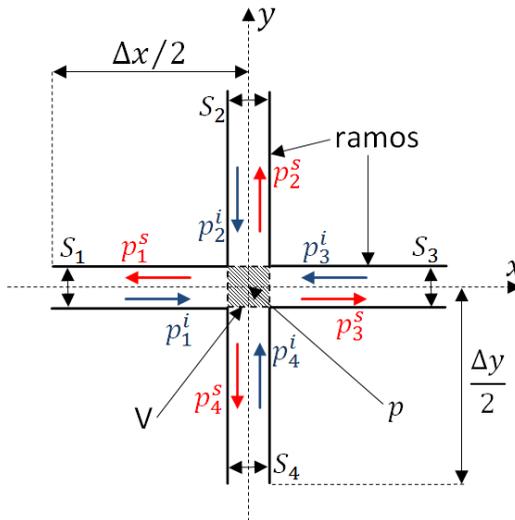


Figura 4.16 - Nó D2O4 e as ondas incidentes e espalhadas.

Considera-se que para cada um dos r ramos, sendo $r = 1 : 4$, há uma onda ou sinal acústico incidente p_r^i . Para cada onda incidente nos ramos do nó, geram-se ondas espalhadas parciais, uma refletida no ramo de incidência e as outras transmitidas para os demais ramos do nó. A soma de todas as pressões espalhadas parciais em cada ramo r , resulta nas pressões espalhadas totais, denominadas p_r^s .

²⁵ Esta sigla foi inspirada na nomenclatura utilizada no trabalho de (KOWALCZYK, 2008) para o método de diferenças finitas.

Nesta dedução, assume-se uma abordagem Euleriana²⁶ para descrever o movimento da onda e a região central do nó é utilizada como referencial geométrico. Consideram-se ondas planas conhecidas e harmônicas incidentes $p_r^i(x, k\Delta t)$ em um nó arbitrário, com intuito de calcular as ondas espalhadas $p_r^s(x, k\Delta t)$, conforme o conjunto de expressões:

$$\begin{aligned} p_1^i(x, k\Delta t) &= P_1^i e^{j\kappa x} e^{-j\omega k\Delta t}, \\ p_2^i(x, k\Delta t) &= P_2^i e^{-j\kappa y} e^{-j\omega k\Delta t}, \\ p_3^i(y, k\Delta t) &= P_3^i e^{-j\kappa x} e^{-j\omega k\Delta t}, \\ p_4^i(y, k\Delta t) &= P_4^i e^{j\kappa y} e^{-j\omega k\Delta t}, \end{aligned} \quad 4.50$$

$$\begin{aligned} p_1^s(x, k\Delta t) &= P_1^s e^{-j\kappa x} e^{-j\omega k\Delta t}, \\ p_2^s(x, k\Delta t) &= P_2^s e^{j\kappa y} e^{-j\omega k\Delta t}, \\ p_3^s(y, k\Delta t) &= P_3^s e^{j\kappa x} e^{-j\omega k\Delta t}, \\ p_4^s(y, k\Delta t) &= P_4^s e^{-j\kappa y} e^{-j\omega k\Delta t}, \end{aligned} \quad 4.51$$

sendo P_r^i e P_r^s as amplitudes das ondas incidentes e espalhadas, x e y as posições cartesianas, $k\Delta t$ o instante discreto de tempo, $\kappa = \omega/v_g$ o número de onda, ω e v_g respectivamente a frequência angular e a velocidade de propagação na guia de onda.

Vale observar que as ondas incidentes e refletidas cruzam uma pela outra em sentidos opostos sem causar interferência mútua na continuidade de sua propagação, entretanto, no ponto do espaço onde se encontram, suas amplitudes são somadas. Outro aspecto relevante diz respeito a algumas condições básicas ou hipóteses físicas que devem ser atendidas ao longo da dedução do nó básico, tais como:

- Atuação desprezível da força gravitacional;
- Fluido homogêneo, não viscoso, sem condução térmica e comportamento isotrópico e homoentrópico;
- Fluxo uniforme em cada seção onde a onda acústica cruza as fronteiras do volume de controle;

²⁶ A descrição Euleriana identifica as propriedades do fluido e de seu movimento, tais como pressão e velocidade em um dado ponto e instante. Definem-se funções de campo que descrevem estas propriedades independentemente da partícula ou massa de partículas que ocupam o ponto em consideração.

- Não há fonte de massa ou energia no interior do volume de controle.

O nó bidimensional sem perdas analisado apresenta características geométricas e propriedades idênticas em todas as ramificações, entretanto, independente da configuração adotada, para se obter as equações capazes de expressar os pulsos espalhados em termos dos pulsos incidentes é fundamental que as seguintes leis físicas sejam atendidas no volume de controle para um dado instante $k\Delta t$:

1. Lei de conservação da massa: O Fluxo de massa²⁷ líquido que atravessa a superfície de controle definida pelo centro do nó ($x = 0$; $y = 0$) em um instante Δt deve ser igual a zero, obtendo a seguinte equação algébrica discretizada para o nó considerado:

$$\rho[S_1 (u_1^i + u_1^s) + S_2 (u_2^i + u_2^s) + S_3 (u_3^i + u_3^s) + S_4 (u_4^i + u_4^s)]\Delta t = 0. \quad 4.52$$

Esta equação expressa o princípio de conservação da quantidade física *massa*. Colocando-a em termos de pressão sonora, uma vez que $Z = p/u$, obtém-se:

$$\rho S_1 \left(\frac{p_1^i}{Z_1} - \frac{p_1^s}{Z_1} \right) + \rho S_2 \left(\frac{p_2^i}{Z_2} - \frac{p_2^s}{Z_2} \right) + \rho S_3 \left(\frac{p_3^i}{Z_3} - \frac{p_3^s}{Z_3} \right) + \rho S_4 \left(\frac{p_4^i}{Z_4} - \frac{p_4^s}{Z_4} \right) = 0. \quad 4.53$$

Ao se considerar condições simplificadas de geometria e propriedades do fluido para o nó analisado, tem-se que: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_g$ para a área da seção transversal de uma guia de onda e $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_g$ para a impedância acústica da guia de onda, sendo V o volume de controle e ρ a densidade volumétrica do meio. Desta forma, a equação algébrica da continuidade para um volume de controle discreto resulta em:

²⁷ Variáveis de fluxo: vazão; velocidade de partícula; corrente elétrica.

$$\frac{p_1^i - p_1^s}{Z_1} + \frac{p_2^i - p_2^s}{Z_2} + \frac{p_3^i - p_3^s}{Z_3} + \frac{p_4^i - p_4^s}{Z_4} = 0. \quad 4.54$$

2. Lei da continuidade de campos: A pressão sonora²⁸ p deve ser igual para todos os ramos na posição cartesiana $x = 0$ e $y = 0$, ou seja, na região central do nó. Expressando matematicamente esta condição, tem-se:

$$p = p_1^i + p_1^s = p_2^i + p_2^s = p_3^i + p_3^s = p_4^i + p_4^s. \quad 4.55$$

Em seguida, as Equações 4.55 são rearranjadas em termos de cada uma das pressões espalhadas. Iniciando por p_1^s , obtém-se:

$$\begin{aligned} p_2^s &= p_1^s + p_1^i - p_2^i, \\ p_3^s &= p_1^s + p_1^i - p_3^i, \\ p_4^s &= p_1^s + p_1^i - p_4^i. \end{aligned} \quad 4.56$$

Posteriormente, as Equações 4.50, 4.51 e 4.56 são inseridas na Equação 4.54, escrevendo-as em termos da admitância acústica $Y_g = 1/Z_g$ de cada ramo. Considerando a posição cartesiana $x = 0$ e $y = 0$, para um dado instante de tempo $k\Delta t$, tem-se:

$$P_1^s = \frac{(Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4)P_1^i + 2Y_2P_2^i + 2Y_3P_3^i + 2Y_4P_4^i}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}. \quad 4.57$$

Considerando um nó com topologia homogênea, tem-se que a admitância em todos os ramos é igual:

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = Y_g = 1/Z_g, \quad 4.58$$

obtendo-se a primeira equação do sistema que descreve a versão sem perdas para o nó bidimensional:

$$4P_1^s = -2P_1^i + 2P_2^i + 2P_3^i + 2P_4^i. \quad 4.59$$

²⁸ Variáveis de esforço: força; pressão sonora; tensão elétrica.

Procedendo de forma análoga para as demais pressões espalhadas em cada uma das portas, ou seja, p_2^s, p_3^s, p_4^s , chega-se a um sistema de equações lineares com quatro equações e quatro incógnitas em termos das amplitudes ou pulsos discretizados das ondas incidentes e espalhadas:

$$\begin{aligned}
 4P_1^s &= -2P_1^i + 2P_2^i + 2P_3^i + 2P_4^i; \\
 4P_2^s &= +2P_1^i - 2P_2^i + 2P_3^i + 2P_4^i; \\
 4P_3^s &= +2P_1^i + 2P_2^i - 2P_3^i + 2P_4^i; \\
 4P_4^s &= +2P_1^i + 2P_2^i + 2P_3^i - 2P_4^i.
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Uma vez que se tem estas equações algébricas para um ponto discreto arbitrário e, em cada uma delas, as pressões incidentes resultam das pressões espalhadas pelos nós vizinhos no instante anterior, pode-se extrapolar a solução numérica para cada nó n da malha de forma independente e desacoplada do restante da malha. Portanto, considerando meios homogêneos e sem perdas, em um instante discreto $k\Delta t$, pode-se representar o sistema na forma matricial:

$$\begin{matrix} n \\ \left\{ \begin{matrix} P_1^s \\ P_2^s \\ P_3^s \\ P_4^s \end{matrix} \right\} \\ k \end{matrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ \left\{ \begin{matrix} P_1^i \\ P_2^i \\ P_3^i \\ P_4^i \end{matrix} \right\} \\ k \end{matrix}, \tag{4.61}$$

$$\text{ou } {}_k^n \bar{P}^s = [S] \cdot {}_k^n \bar{P}^i, \tag{4.62}$$

na qual ${}_k^n \bar{P}^s$ e ${}_k^n \bar{P}^i$ são os vetores das pressões espalhadas e incidentes respectivamente, em cada um dos r ramos dos n nós da malha, e $[S]$ é a matriz de espalhamento (*scattering matrix*).

A matriz de espalhamento é considerada fundamental no processo de propagação da onda, sendo reconhecida por determinar como se dará o processo de espalhamento e, por consequência, como ocorrerá a propagação da onda. Esta matriz determina se há perdas, mudanças de meio e consequentemente a velocidade de propagação, ou mesmo se o material apresenta comportamento não isotrópico.

É válido lembrar que os mesmos resultados podem ser obtidos ao se realizarem os balanços dos fluxos de quantidade de movimento e da energia carregada pela massa através do volume de controle, uma vez que todas as propriedades associadas a um fluido estão sujeitas aos princípios de conservação.

Analogamente ao caso bidimensional para Eletromagnetismo, ${}^n P_{k^1}^i$, ${}^n P_{k^2}^i$, ${}^n P_{k^3}^i$ e ${}^n P_{k^4}^i$, são as amplitudes das pressões sonoras incidentes nos r ramos dos n nós da malha e a pressão sonora resultante ${}^n P_k$ na região central do nó será o resultado da razão entre a soma das velocidades incidentes e a admitância total do nó:

$${}^n P_k = \frac{\sum_1^r ({}^n V_r)}{\sum_1^r (Y_r)} = \frac{(2{}^n P_{k^1}^i Y_1 + 2{}^n P_{k^2}^i Y_2 + 2{}^n P_{k^3}^i Y_3 + 2{}^n P_{k^4}^i Y_4)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}. \quad 4.63$$

Considerando a igualdade 4.63, a pressão sonora no centro do nó analisado para o instante discreto $k\Delta t$, para um nó com quatro ramificações é calculado através da equação:

$${}^n P_k = \frac{{}^n P_{k^1}^i + {}^n P_{k^2}^i + {}^n P_{k^3}^i + {}^n P_{k^4}^i}{2}. \quad 4.64$$

4.4.2.2 Velocidade de propagação da onda

Em Acústica Linear o fluido é considerado como homoentrópico e as variações de pressão são suficientemente pequenas de maneira que, pela teoria geral dos gases, a velocidade de propagação da onda acústica²⁹ em um meio arbitrário é um valor que pode ser obtido a partir de seus parâmetros físicos utilizando uma das seguintes formas apresentadas em (FOX e MCDONALD, 1998), (AHMADIAN, 2001), (KUTTRUFF, 2001) e (JACOBSEN, POULSEN, *et al.*, 2006):

$$c_a = \sqrt{\frac{K_{ad}}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{1}{\beta \rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma RT}, \quad 4.65$$

²⁹ Note que o índice "a" foi adotado neste capítulo apenas para diferenciar a velocidade de propagação do som, da velocidade da onda eletromagnética no meio analisado.

sendo γ a razão do calor específico a pressão e volume constante, p_0 a pressão estática do gás, K_{ad} o módulo adiabático de *Bulk*, $\beta = 1/K_{ad}$ o fator de compressibilidade, ρ_0 a densidade no equilíbrio do gás, R e T respectivamente a constante termodinâmica e a temperatura do gás.

Entretanto, para situações de propagação multidimensionais em domínios discretizados, surge o efeito de dispersão, ou seja, dependência da velocidade com a frequência e direção de propagação da onda. Este fato pode ser constatado, uma vez que a velocidade radial de propagação v_r é menor que a velocidade de propagação axial na guia de onda v_g .

Com objetivo de obter uma velocidade axial na guia de onda v_g que compense este efeito de dispersão, multiplica-se a velocidade radial desejada v_r , que deve ser igual à velocidade do som no meio analisado, por um coeficiente relacionado matematicamente com a estrutura geométrica do nó, conhecido analogamente em outros métodos numéricos como sendo o número de *Courant*.

A rede de nós DHM será capaz de reproduzir um meio de propagação isotrópico quando as componentes de frequência da onda estiverem consideravelmente abaixo da frequência de corte da rede, caso em que a velocidade de propagação radial v_r converge para um percentual constante da velocidade de propagação na guia de onda v_g :

$$\frac{v_g}{v_r} = const. \quad 4.66$$

Segundo (JOHNS e BEURLE, 1971), este fato ocorre quando a relação entre o tamanho do elemento, Δl , e o menor comprimento de onda analisado, λ_{min} , se torne tão pequena quanto possível. Como regra usualmente aplicada (JOHNS e BEURLE, 1971), (CHRISTOPOULOS, 1995), (KAGAWA, TSUCHIYA, *et al.*, 1998), (AHMADIAN, 2001), recomenda-se $\Delta l \leq 0,1\lambda_{min}$. Desta forma, para um nó bidimensional sem perdas, a velocidade na guia de onda é expressa por:

$$v_g = \sqrt{2}v_r = \sqrt{2}c_a. \quad 4.67$$

Segundo (AHMADIAN, 2001), uma das formas de demonstrar a Equação 4.67 é através da Figura 4.17. Considere que um sinal espalhado com amplitude A , parte do nó "1" em direção ao nó "2", conforme indicado pelas setas em vermelho. Para se calcular a velocidade radial v_r é preciso primeiramente obter a distância Δr

percorrida na diagonal. Se $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ e $\Delta x = \Delta y = \Delta l$, então $\Delta r = \sqrt{2}\Delta l$.

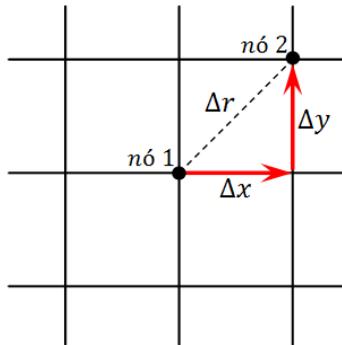


Figura 4.17 - Diagrama para ilustrar o cálculo da velocidade radial.

Em seguida, sabendo que o sinal precisou percorrer de forma sincronizada a distância correspondente a dimensão de dois nós para alcançar o nó "2", o tempo total será igual a $2\Delta t$, sendo Δt o tempo necessário para um pulso percorrer a distância entre dois nós adjacentes. Desta forma, obtém-se:

$$v_r = \frac{\Delta r}{2\Delta t} = \frac{\sqrt{2}\Delta l}{2\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_g = c_a. \quad 4.68$$

Consequentemente, é possível calcular a impedância acústica da guia de onda utilizando:

$$Z_g = \rho_0 v_g = \rho_0 \sqrt{2} c_a = \sqrt{2} Z_a = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\rho_0}{\beta}}, \quad 4.69$$

na qual Z_a é a impedância acústica no meio de propagação.

4.4.2.3 Velocidade de partícula

As componentes para o campo de velocidade de partícula nas direções x e y em um nó arbitrário são obtidas indiretamente a partir dos valores de pressão sonora. Desta forma tem-se:

$${}^nV_{kx} = \frac{2 {}^n P_1^i - 2 {}^n P_3^i}{(Z_1 + Z_3)} = \frac{{}^n P_1^i - {}^n P_3^i}{Z_g}, \quad 4.70$$

$${}^nV_{ky} = \frac{2 {}^n P_2^i - 2 {}^n P_4^i}{(Z_2 + Z_4)} = \frac{{}^n P_2^i - {}^n P_4^i}{Z_g}. \quad 4.71$$

Finalizando, utiliza-se o seguinte conjunto de equações para estabelecer a conexão e propagação do sinal acústico de pressão entre um nó arbitrário na posição cartesiana discretizada (x_d, y_d) e seus adjacentes:

$$\begin{aligned} {}^k P_1^i(x_d, y_d) &= {}_{k-1} P_2^s(x_d - 1, y_d); \\ {}^k P_2^i(x_d, y_d) &= {}_{k-1} P_1^s(x_d + 1, y_d); \\ {}^k P_3^i(x_d, y_d) &= {}_{k-1} P_4^s(x_d, y_d - 1); \\ {}^k P_4^i(x_d, y_d) &= {}_{k-1} P_3^s(x_d, y_d + 1). \end{aligned} \quad 4.72$$

Estas equações informam que cada uma das pressões espalhadas nos n ramos de um nó arbitrário, em um instante discreto $(k - 1)\Delta t$, se tornarão pressões incidentes nos respectivos nós adjacentes em um instante seguinte $k\Delta t$. Este processo de espalhamento e propagação da onda deve ser considerado em malhas estruturadas e comportamento isotrópico. Observe que ao estabelecer as dimensões do elemento tão pequenas quanto possível, a representação discretizada do campo será cada vez mais próxima de sua forma contínua, usualmente modelada por uma equação diferencial.

4.4.2.4 Meios heterogêneos e com perdas

Da mesma maneira que em ondas eletromagnéticas, o meio de propagação de uma onda acústica pode ser heterogêneo, assim como impor perdas. Conforme mencionado no capítulo anterior, uma das técnicas utilizadas para incorporar essas características ao modelo do nó DHM é a utilização de elementos auxiliares, denominados *stubs*.

A Figura 4.18 ilustra um nó, aqui denominado D2O4S2³⁰, o que significa aplicável a duas dimensões, com quatro ramos ortogonais entre si e dois *stubs*. O primeiro *stub* possui impedância $Z_5 = Z_g/\eta$, com dimensão finita $\Delta z/2$ e terminação rígida, responsável por ajustar a velocidade de propagação conforme o meio de propagação através do parâmetro η . Vale lembrar que os *stubs* não possuem direção específica de aplicação, ainda que nesta figura tenham sido representados por conveniência geométrica na direção "z".

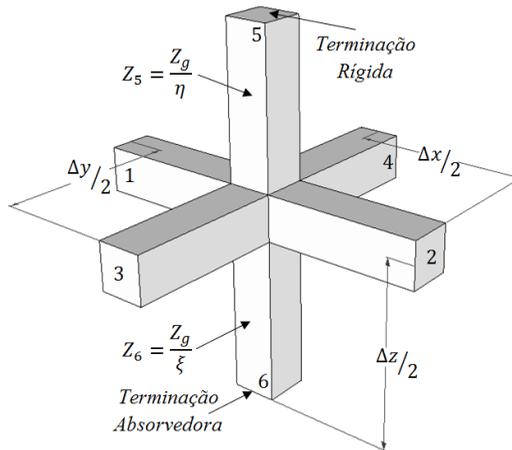


Figura 4.18 - Nó D2O4S2 com "*stubs*".

O segundo *stub* possui impedância $Z_6 = Z_g/\xi$ e terminação absorvedora, responsável pelas perdas resistivas associadas ao meio de propagação, sendo ξ o parâmetro que controla o nível de amortecimento ou atenuação atmosférica. A imposição de *stubs* ao nó sem perdas modifica a impedância percebida pelo sinal incidente e, conseqüentemente, a matriz de espalhamento e a pressão sonora nodal. Se aplicados neste caso, os mesmos balanços já demonstrados na dedução do nó sem perdas, obtém-se uma equação equivalente à Equação 4.57:

³⁰ Esta abreviatura foi inspirada na nomenclatura utilizada no trabalho de (KOWALCZYK, 2008) para o método de diferenças finitas.

$$P_1^s = \frac{(-2Y_g - \eta Y_g - \xi Y_g)P_1^i + 2Y_g P_2^i + 2Y_g P_3^i + 2Y_g P_4^i + 2\eta Y_g P_5^i}{(4Y_g + \eta Y_g + \xi Y_g)}, \quad 4.73$$

simplificando, obtém-se:

$$P_1^s = \frac{(-2 - \eta - \xi)P_1^i + 2P_2^i + 2P_3^i + 2P_4^i + 2\eta P_5^i}{(4 + \eta + \xi)}. \quad 4.74$$

Procedendo de maneira análoga para as demais pressões espalhadas em cada uma das portas e *stub*, ou seja, P_2^s , P_3^s , P_4^s , P_5^s , chega-se a um sistema de cinco equações lineares e cinco incógnitas que pode ser extrapolado para o conjunto total de nós da malha:

$${}^n_k \begin{Bmatrix} P_1^s \\ P_2^s \\ P_3^s \\ P_4^s \\ P_5^s \end{Bmatrix} = c \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & {}^n\eta \\ 1 & a & 1 & 1 & {}^n\eta \\ 1 & 1 & a & 1 & {}^n\eta \\ 1 & 1 & 1 & a & {}^n\eta \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b \end{bmatrix} {}^n_k \begin{Bmatrix} P_1^i \\ P_2^i \\ P_3^i \\ P_4^i \\ P_5^i \end{Bmatrix}, \quad 4.75$$

sendo:

$$a = -\left(1 + \frac{{}^n\eta + {}^n\xi}{2}\right); b = \frac{{}^n\eta - {}^n\xi - 4}{2}; c = \frac{2}{(4 + {}^n\eta + {}^n\xi)}.$$

Os termos ${}^n\eta$ e ${}^n\xi$ controlam, respectivamente, as heterogeneidades do meio e o nível de amortecimento ou atenuação atmosférica. Para calculá-los, pode-se utilizar as Equações 4.76 e 4.77, apresentadas em (GUILLAUME, PICAUTA, *et al.*, 2008):

$${}^n_k\eta = 4 \left[\left(\frac{c_a}{\frac{n}{k}c_{ef}} \right)^2 - 1 \right], \quad 4.76$$

$${}^n\xi = \alpha \sqrt{2({}^n\eta + 4)} \Delta l \frac{\ln 10}{20}, \quad 4.77$$

sendo α o coeficiente de atenuação atmosférica e ${}^n c_{ef}$ a velocidade do som eficaz do meio modelado definida como:

$${}^n c_{ef} = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot {}^n T} + {}^n W \cdot {}^n u, \quad 4.78$$

na qual γ é a razão do calor específico a pressão e volume constante; R a constante do gás que compõe o meio; ${}^n T$, ${}^n W$, ${}^n u$ são respectivamente a temperatura do gás, o vetor velocidade do vento e o vetor unitário que define a direção de propagação da onda em um dado nó n .

É importante notar que ${}^n_k P_6^S$ não aparece na Equação 4.75 porque o *stub* de perdas não reflete o sinal de volta para a malha, uma vez que é uma terminação anecóica, responsável pela parcela da energia que é absorvida pelo nó. Desta forma, a pressão ${}^n_k P$ em um nó qualquer da malha é dada pela equação:

$${}^n_k P = e \left(\sum_{r=1}^4 {}^n_k P_r^i + {}^n \eta {}^n_k P_5^i \right). \quad 4.79$$

Para finalizar, utiliza-se o seguinte conjunto de igualdades, denominadas de leis de conexão, para estabelecer a conexão e propagação do sinal de pressão sonora entre um nó arbitrário na posição cartesiana discretizada (x_d, y_d) e seus adjacentes:

$$\begin{aligned} {}^n_k P_1^i(x_d, y_d) &= {}^n_{k-1} P_2^S(x_d - 1, y_d); \\ {}^n_k P_2^i(x_d, y_d) &= {}^n_{k-1} P_1^S(x_d + 1, y_d); \\ {}^n_k P_3^i(x_d, y_d) &= {}^n_{k-1} P_4^S(x_d, y_d - 1); \\ {}^n_k P_4^i(x_d, y_d) &= {}^n_{k-1} P_3^S(x_d, y_d + 1); \\ {}^n_k P_5^i(x_d, y_d) &= {}^n_{k-1} P_5^S(x_d, y_d). \end{aligned} \quad 4.80$$

É possível observar que a conexão através do ramo 5 deste nó é feita com o próprio nó, uma vez que possui uma terminação rígida e não se conecta aos nós vizinhos.

4.4.3 Formulação genérica

As Equações 4.75 a 4.79 podem ser generalizadas para uma quantidade arbitrária B de ramificações. Este fato possibilita a formação de nós tridimensionais, assim como a aplicação de *stubs*. Desta forma, baseando em (GUILLAUME, PICAUTA, *et al.*, 2008), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} P_1^s \\ \vdots \\ P_{B-1}^s \end{Bmatrix}_k = e \begin{bmatrix} c & 1 & \cdot & 1 & {}^n\eta \\ 1 & c & \cdot & 1 & {}^n\eta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & c & {}^n\eta \\ 1 & 1 & \cdot & 1 & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^i \\ \vdots \\ P_{B-1}^i \end{Bmatrix}_k, \quad 4.81$$

sendo:

$$c = -\left(\frac{B-3}{2} + \frac{{}^n\eta + {}^n\xi}{2}\right), d = \frac{{}^n\eta - {}^n\xi - (B-1)}{2},$$

$$e = \frac{2}{(B-1) + {}^n\eta + {}^n\xi}$$

A pressão sonora em um nó arbitrário n da malha:

$${}^n P_k = \frac{2}{(B-1) + {}^n\eta + {}^n\xi} \left(\sum_{r=1}^{B-1} {}^n P_r^i + {}^n\eta \cdot {}^n P_B^i \right). \quad 4.82$$

Os termos ${}^n\eta$ e ${}^n\xi$ são calculados pelas Equações 4.83 e 4.84:

$${}^n\eta = (B-1) \left[\left(\frac{c_a}{{}^n c_{ef}} \right)^2 - 1 \right], \quad 4.83$$

$${}^n\xi = \alpha \sqrt{2({}^n\eta + (B-1))} \Delta l \frac{\ln 10}{20}. \quad 4.84$$

E a velocidade radial de propagação é calculada por:

$${}^n_k v_r = \sqrt{\frac{2}{n\eta + (B - 1)}} {}^n_k v_g. \quad 4.85$$

É importante ressaltar que existem outras topologias de nós, além daquelas apresentadas neste trabalho, tais como os nós 2D triangulares (SEWEL, WYKES, *et al.*, 2004) ou 3D tetraédricos (SEWEL, BENSON, *et al.*, 2005), entre outros. Todos os tipos de nó apresentarão o próprio conjunto de equações de espalhamento e propagação, assim como aplicações específicas. Ainda que as topologias mencionadas não tenham sido aplicadas neste trabalho em virtude das dificuldades de implementação computacional, descortina-se a possibilidade para que trabalhos futuros em Acústica possam ser realizados.

4.4.4 Condições de Contorno

Uma fronteira pode ser modelada de diferentes maneiras, dependendo do método numérico utilizado e da aplicação em questão. No caso do método DHM, as fronteiras são incorporadas no modelo a partir de valores de impedância de superfície ou terminação Z_t no domínio do tempo, impostas as extremidades dos ramos dos nós adjacentes ao limite da fronteira, conforme a Figura 4.19.

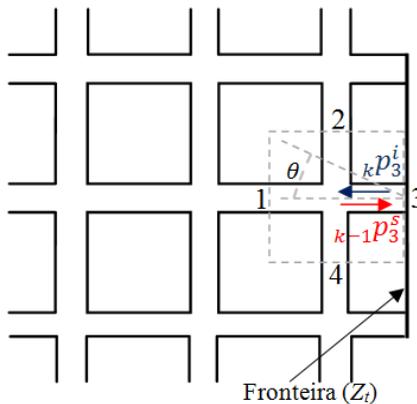


Figura 4.19 - Impedância de terminação na fronteira da malha.

O sinal de pressão ${}_{k-1}p_3^s$, no instante $(k - 1)$, segue na direção da fronteira após o espalhamento gerado pelo nó adjacente. Ao atingi-la, o mesmo é refletido na proporção definida pelo coeficiente de reflexão Γ , resultando na pressão ${}_k p_3^i$. Portanto, o coeficiente de reflexão expressa uma razão entre as amplitudes das pressões refletida e incidente.

Se considerarmos uma situação para incidência aleatória, considerando que a impedância expressa a razão entre pressão e velocidade de partícula, assim como aplicando as condições de contorno, obtém-se o coeficiente de reflexão para qualquer ângulo de incidência (KUTTRUFF, 2001):

$$\Gamma(\theta) = \frac{p_t^r}{p_t^i} = \frac{Z_t \cos \theta - Z_g}{Z_t \cos \theta + Z_g} = \frac{{}_k p_3^i}{{}_{k-1} p_3^s}. \quad 4.86$$

Entretanto, no modelo de impedância normalmente aplicado no método DHM, admite-se que o material da fronteira possui comportamento localmente reativo, ou seja, a componente normal da velocidade de partícula na fronteira depende apenas da pressão sonora em frente ao nó da superfície, e não da pressão nos nós adjacentes. Portanto, o comportamento reflexivo ou impedância independe do ângulo de incidência da onda e, assim, para uma incidência normal ($\theta = 0$) à superfície obtém-se:

$$\Gamma = \frac{Z_t - Z_g}{Z_t + Z_g}. \quad 4.87$$

Desta forma, o processo de conexão com o momento seguinte é realizado utilizando a seguinte expressão:

$${}_k p_r^i = \Gamma {}_{k-1} p_r^s. \quad 4.88$$

Para garantir o sincronismo dos pulsos da malha durante os processos de espalhamento e conexão, é importante que a impedância de terminação seja definida na malha em uma distância dos nós que garanta um intervalo de tempo fixo Δt , entre o instante em que se origina o pulso incidente e o instante que o pulso refletido nesta fronteira alcança novamente o nó que o originou.

No caso de se considerar as fronteiras como sistemas ideais, assim como estabelecendo uma analogia com a versão do método para eletromagnetismo, as impedâncias e coeficientes de reflexão assumiriam os seguintes valores extremos (KUTTRUFF, 2001), (COGAN, O'CONNOR e PULKO, 2005), (VORLÄNDER, 2007):

1. $Z_t \ll Z_g$; $\Gamma \rightarrow -1$; $\alpha \rightarrow 0$, modelando uma parede "macia" (*soft wall*) ou um condutor perfeito (curto-circuito) no caso do eletromagnetismo, resultando em ondas refletidas com fase oposta a onda incidente. ex.: interface água-ar;
2. $Z_t \gg Z_g$; $\Gamma \rightarrow 1$; $\alpha \rightarrow 0$, modelando uma parede rígida (*hard wall*) ou uma parede magnética (circuito aberto) no caso do eletromagnetismo, resultando em ondas refletidas em fase com a onda incidente. ex.: parede de concreto;
3. $Z_t = Z_g$; $\Gamma = 0$; $\alpha \rightarrow 1$, modelando a propagação de campos no espaço aberto (*free field*) ou o casamento de impedâncias, o que repercute em absorção total da onda incidente. ex.: câmara anecóica.

As impedâncias de terminação tanto podem assumir um valor fixo, permitindo a análise de uma única frequência ou múltiplas frequências se o material comportar-se como não dispersivo. Entretanto, podem também assumir um conjunto de valores relacionados com a resposta impulsiva do material. Este último modelo possibilita a análise no domínio do tempo quando o material pertencente à malha apresenta um comportamento dispersivo ou variável com a frequência.

A alternativa direta é transformar valores já conhecidos da impedância de superfície no domínio da frequência para valores de coeficiente de reflexão e posteriormente para o domínio do tempo utilizando a transformada inversa de Fourier. Entretanto, em virtude do grande número de coeficientes, esta abordagem se mostra inviável ao convoluir estes dados de absorção com o sinal da onda incidente.

Diante desta limitação computacional, para representar o material em um método numérico como o DHM, utiliza-se uma espécie de resposta impulsiva truncada, ou seja, com um número de coeficientes muito menor que a resposta impulsiva completa. Esta resposta truncada pode ser incluída no algoritmo através da utilização de um filtro FIR.

O filtro digital FIR é caracterizado por uma *equação a diferenças*³¹ ou resposta filtrada $y(k)$ resultante de uma combinação linear dos valores prévios e atuais do sinal de entrada $x(k)$. Em outras palavras, a saída resultante da passagem do sinal pelo filtro FIR digital genérico é dada por, uma convolução entre o sinal de entrada e os coeficientes do filtro³², conforme:

$$y(k) = \sum_{i=0}^N h_i x(k - i), \quad 4.89$$

na qual N é a ordem do filtro, $x(k)$ o sinal de entrada, $y(k)$ o sinal de saída e h_i os coeficientes do filtro.

Fazendo uma analogia desta equação com os dados apresentados pela Figura 4.19 e Equação 4.88, tem-se que o sinal de saída $y(k)$ representa o sinal refletido pela fronteira que se tornará a pressão sonora incidente $k p_r^i$ em um nó adjacente e $x(k)$ representa a pressão sonora espalhada pelo nó $_{k-1} p_r^s$ no instante anterior. O coeficiente de reflexão Γ neste caso é representado no domínio do tempo pelos $(N + 1)$ coeficientes h_i do filtro FIR projetado.

O algoritmo implementado DHM3D_FIR é capaz de realizar esta operação para um conjunto qualquer de nós pertencentes à fronteira, representando a região onde existe um material com impedância variável na frequência, porém em uma simulação no domínio do tempo. Resultados obtidos pela implementação deste conceito podem ser verificados no Item 6.8.

Finalizando, neste item foram apresentados aspectos pouco abordados da versão discretizada do modelo físico de Huygens, como a dedução passo a passo de um nó bidimensional acústico utilizando os princípios de conservação. Demonstrou-se também a utilização de um conjunto de coeficientes de reflexão para representar materiais dispersivos, obtidos a partir de técnicas de projeto de filtros FIR. No próximo capítulo, busca-se estabelecer algumas similaridades do DHM com outros métodos numéricos tradicionais e, assim, contribuir na consolidação do método.

³¹ Equação utilizada em sinais digitais.

³² Estes coeficientes podem ser obtidos de forma indireta através de diferentes técnicas matemáticas ou mesmo diretamente através de modelos concebidos diretamente no domínio do tempo. Mais informações podem ser obtidas no Item 6.8.

5 ANALOGIAS ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, busca-se estabelecer alguns paralelos entre o método DHM-TD e métodos tradicionais como o FVM-TD, FDM-TD e FEM-FD. Para tal, será exposto o desenvolvimento matemático para a modelagem da equação diferencial da onda acústica, destacando os pontos em comum, assim como explicando a razão pela qual o método DHM-TD pode ser considerado um método naturalmente discretizado.

5.1 Equação da onda e sua relação com o DHM-TD

Os modelos matemáticos aplicados em situações de Engenharia são geralmente fundamentados em princípios de conservação e, assim, representam uma lei física que estabelece a preservação de uma dada grandeza à medida que o fenômeno ocorre. Quando um destes princípios de conservação é expresso matematicamente para uma região infinitesimal de um meio arbitrário, obtém-se uma equação diferencial, também denominada de equação de conservação da grandeza envolvida.

Para deduzir a equação da onda utilizada em Acústica Linear, considera-se a hipótese do contínuo, na qual um fluido é tratado como uma distribuição contínua de matéria considerando a escala macroscópica³³, o que permite a representação das propriedades do fluido em termos de um problema de campo. Sabe-se que em problemas contínuos, o comportamento é representado por um número infinito de pontos no domínio analisado e, assim, normalmente são descritos matematicamente por equações diferenciais.

Conforme já mencionado no Item 4.3.4, em fenômenos ondulatórios aos quais a equação da onda se aplica, há sempre duas variáveis ou grandezas físicas macroscópicas que podem ser associadas diretamente com a própria existência da onda. Essas grandezas estão correlacionadas e aparecem na mesma equação diferencial, tendo na velocidade de propagação da onda no meio um valor constante que determina a relação de proporcionalidade entre as variáveis.

Uma destas variáveis pode ser considerada como um tipo de "esforço", "força", "pressão", "tensão" e a outra um "fluxo",

³³ Em Física e Química, a escala macroscópica diz respeito a sistemas físicos considerados contínuos, ou seja, quando há um número suficientemente grande de partículas o microestado do sistema torna-se irrelevante. Essa é a escala utilizada na maioria dos ramos da física clássica, assim como na acústica e mecânica dos fluidos. Por esta razão, o método de diferenças finitas e elementos finitos que discretizam equações físicas enquadram-se na escala macroscópica (VIGGEN, 2009).

"escoamento", "velocidade", "corrente". Utilizando o modelo matemático tradicional, a formação das ondas ocorre quando a derivada temporal de uma destas variáveis citadas é proporcional à derivada espacial negativa da outra e vice-versa.

Utilizam-se as leis fundamentais da Física para realizar balanços de massa, força e energia em um dado volume diferencial, assim como são consideradas hipóteses simplificativas do fenômeno físico real para desta forma, determinar as equações diferenciais da situação em análise. No caso de um fluido, a equação da onda da Acústica Linear pode ser derivada das leis de conservação da massa e quantidade de movimento, juntamente com a equação de estado dos gases ideais.

A forma diferencial da lei de conservação da massa relaciona os campos das grandezas massa específica e velocidade, analogamente ao que se fez no Item 4.4.2, na obtenção das equações algébricas para o método DHM. Inicialmente, adota-se um elemento volumétrico diferencial em forma de cubo, com lados iguais de comprimento dx , dy , dz , conforme ilustrado pela Figura 5.1.

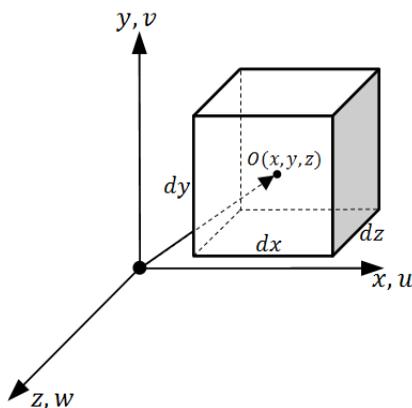


Figura 5.1 - Elemento de volume infinitesimal.

A massa específica do centro O na posição cartesiana (x, y, z) do elemento é definida como ρ e o vetor velocidade por $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$. Com o objetivo de avaliar estas propriedades em cada uma das seis faces do cubo elementar considerado, utiliza-se uma expansão em série de Taylor (FOX e MCDONALD, 1998) em relação ao centro O . Iniciando com a face direita, tem-se:

$$\rho_{x+dx/2} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \frac{1}{2!} \left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \dots, \quad 5.1$$

e utilizando somente os dois primeiros termos da série e consequentemente desprezando os termos de ordem superior, obtém-se:

$$\rho_{x+dx/2} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2}. \quad 5.2$$

Se aplicados os mesmos critérios para a velocidade, obtém-se:

$$u_{x+dx/2} = u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2}. \quad 5.3$$

Desta maneira, os termos associados às demais faces do elemento podem ser obtidos aplicando o mesmo procedimento, o que leva à seguinte tabela:

Tabela 5.1 - Propriedades do fluido nas faces do volume de controle.

Face	Massa Específica	Velocidade
Esquerda	$\rho_{x-dx/2} = \rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2}$	$u_{x-dx/2} = u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2}$
Direita	$\rho_{x+dx/2} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2}$	$u_{x+dx/2} = u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2}$
Fundo	$\rho_{y-dy/2} = \rho - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2}$	$u_{y-dy/2} = u - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{2}$
Topo	$\rho_{y+dy/2} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2}$	$u_{y+dy/2} = u + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{2}$
Anterior	$\rho_{z-dz/2} = \rho - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2}$	$u_{z-dz/2} = u - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{2}$
Posterior	$\rho_{z+dz/2} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2}$	$u_{z+dz/2} = u + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{2}$

Posteriormente, aplicam-se estes resultados à lei fundamental de conservação da massa, que estabelece que a soma da taxa de variação de massa no volume de controle com o fluxo de massa líquido que atravessa a superfície de controle deve ser igual a zero. Que matematicamente pode ser escrito por:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{SC} \rho \vec{V} d\vec{A} = 0. \quad 5.4$$

Após aplicar o teorema integral de Gauss ou divergência e realizar algumas manipulações algébricas, chega-se na equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] = 0, \quad 5.5$$

que, ao ser representada em sua forma compacta, resulta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0. \quad 5.6$$

A Equação 5.6 representa a forma diferencial da lei de conservação da massa que relaciona as grandezas densidade volumétrica e velocidade do fluido em um meio contínuo. Note que esta equação resulta de um balanço de massa isotrópico em um volume diferencial, analogamente ao que se realizou na dedução do método DHM, o qual chegava à Equação algébrica 4.53, aplicável a um volume de controle discretizado macroscópico. Neste último, as propriedades do fluido são consideradas constantes dentro de seus limites geométricos.

O segundo passo necessário para obtenção da equação da onda em Acústica Linear é a utilização da forma diferencial da lei de conservação da quantidade de movimento. Para tal, aplica-se a segunda lei de Newton em uma partícula fluida infinitesimal de massa dm , conforme ilustrado pela Figura 5.1, na qual a força atuante é o resultado da taxa de variação com o tempo da quantidade de movimento desta massa diferencial, tal que:

$$d\vec{F} = dm \frac{d\vec{V}}{dt}, \quad 5.7$$

ou

$$d\vec{F} = dm \frac{D\vec{V}}{Dt} = dm \left[u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right]. \quad 5.8$$

Posteriormente, deduzem-se as componentes da força $d\vec{F}$ atuante sobre o elemento de fluido nas direções x , y , z , denominadas dF_x , dF_y , dF_z . Nestas forças estão incluídas as forças de campo e de superfície, sendo que esta última pode ser subdividida em forças normais e tangenciais.

Considerando como exemplo a componente x da força atuante sobre um elemento diferencial de massa dm e volume $dV = dxdydz$, cujas tensões no centro deste elemento são tomadas como σ_x , τ_{yx} , τ_{zx} , as tensões atuantes na direção x em cada face do elemento podem ser obtidas a partir de um desenvolvimento em série de Taylor, analogamente ao que foi realizado para a equação da continuidade. Após desprezar os termos de ordem superior da série e somar todas as forças atuantes, obtém-se:

$$\begin{aligned} dF_{S_x} = & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy. \end{aligned} \quad 5.9$$

Finalmente, realizando algumas simplificações e incluindo as forças de corpo, obtém-se as forças atuantes nas direções x , y , z :

$$dF_x = dF_{B_x} + dF_{S_x} = \left[\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right] dxdydz, \quad 5.10$$

$$dF_y = dF_{B_y} + dF_{S_y} = \left[\rho g_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right] dxdydz, \quad 5.11$$

$$dF_z = dF_{B_z} + dF_{S_z} = \left[\rho g_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right] dxdydz. \quad 5.12$$

Substituindo as Equações 5.10 a 5.12 nas componentes x , y , z da Equação 5.8, obtém-se as equações diferenciais do movimento de qualquer massa de partículas que satisfaça à hipótese do contínuo:

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = \rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right], \quad 5.13$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = \rho \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right], \quad 5.14$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left[u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right]. \quad 5.15$$

Considerando o fluido newtoniano, ou seja, as tensões viscosas são proporcionais à taxa de deformação por cisalhamento, podem-se expressar as equações em termos dos gradientes de velocidade e das propriedades do fluido (FOX e MCDONALD, 1998), obtendo a equação geral de Navier-Stokes para rápidas expansões, que em sua forma simplificada, quando o escoamento é considerado sem atrito ($\mu = 0$), reduz-se à equação de Euler:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p. \quad 5.16$$

As Equações 5.6 e 5.16 são equações diferenciais de primeira ordem que aparecem com este mesmo formato, porém com outras variáveis, na descrição de diferentes aplicações da ciência. Finalmente, assumindo ρ e p como sendo os valores totais das propriedades no meio, o que implica na soma dos seus valores no equilíbrio ρ_0 e p_0 , com pequenas variações ρ' e p' em torno deste valor médio. Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho', \\ p &= p_0 + p'. \end{aligned} \quad 5.17$$

Posteriormente, faz-se algumas considerações físicas (gases ideais) e manipulações algébricas entre as Equações 5.6 e 5.16, o que finalmente resulta na conhecida equação diferencial da onda em coordenadas retangulares, que rege a propagação de pequenas perturbações acústicas através de um fluido homogêneo, não viscoso, compressível e comportamento isotrópico (FAHY, 2007):

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}. \quad 5.18$$

Na resolução de equações desta natureza, pode-se afirmar que um dos principais desafios é o processo de discretização, ou seja, reduzir o sistema contínuo e com infinitos pontos a uma forma discretizada e finita, capaz de fornecer uma solução aproximada da solução real e que seja numericamente estável. Isto significa que os erros causados pelos valores de entrada ou dados iniciais, juntamente com os cálculos intermediários, não se acumulem e façam com que os dados de resposta ou saída não tenham sentido físico.

Para uma dada equação diferencial, as equações algébricas discretizadas podem ser obtidas de diferentes maneiras. Os métodos numéricos descritos a seguir nada mais são que algumas das técnicas existentes, e que em sua base, aplicam as mesmas leis e princípios fundamentais da Física utilizados no desenvolvimento do método DHM.

5.2 Método de diferenças finitas

Uma das maneiras de reduzir o sistema contínuo a uma forma discretizada da Equação 5.18, consiste em utilizar uma aproximação para as derivadas no tempo e espaço através de operadores de diferenças finitas, conhecido por método de diferenças finitas ou FDM.

A formulação discretizada da equação da onda é então obtida aplicando um operador centralizado de diferenças finitas em suas derivadas. Este operador é obtido ao expandir em uma série de Taylor as derivadas em relação ao espaço e tempo e, posteriormente, truncar os termos de ordem superior (KOWALCZYK, 2008), tal que:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \frac{(p')_{i+1}^n - 2(p')_i^n + (p')_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad 5.19$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{(p')_{i+1}^n - 2(p')_i^n + (p')_{i-1}^n}{(\Delta t)^2}, \quad 5.20$$

resultando, para o caso unidimensional, na equação:

$$\frac{(p')_{i+1}^n - 2(p')_i^n + (p')_{i-1}^n}{(\Delta t)^2} = c_0^2 \frac{(p')_{i+1}^n - 2(p')_i^n + (p')_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad 5.21$$

Obtém-se, portanto, uma equação algébrica que necessita ser satisfeita em cada ponto ou nó da discretização do domínio, caracterizado por uma grade espacialmente regular, cuja resolução espacial Δx está relacionada com a resolução temporal Δt ou frequência de amostragem f_a . Ao aplicá-la em cada ponto da malha, forma-se um sistema de equações algébricas, cuja precisão da solução final dependerá do quão próximo esses pontos estão uns dos outros, ou seja, do grau de refinamento ou resolução da malha.

Como é possível notar, a expansão truncada em série de Taylor, utilizada na discretização da equação no método FDM, é o mesmo tipo de aproximação utilizada ao se derivar a equação da onda a partir das equações diferenciais de conservação da massa e quantidade de movimento. Portanto, pode-se afirmar que o método FDM, assim como outros métodos numéricos que utilizam técnicas matemáticas de discretização, em princípio, apresentam duas etapas principais de modelagem, conforme descrito abaixo:

1. Dedução do modelo matemático a partir de observações e aproximações do fenômeno físico real;
2. Posteriormente, utilizam-se técnicas numéricas para obter uma forma discretizada macroscópica deste problema.

Diante do que foi exposto acima, é possível estabelecer a diferença fundamental entre o método das diferenças finitas e o método discreto de Huygens. O primeiro se baseia na aplicação da equação diferencial em pontos discretos de uma malha, através da utilização de aproximações das derivadas utilizando séries de Taylor. O segundo aplica a equação da continuidade a subdomínios ou nós de uma determinada malha, através do balanço discretizado dos fluxos em cada volume de controle da malha que existe no espaço discretizado.

Diante desta constatação, pode-se questionar sobre a real necessidade de iniciar o processo de modelagem no âmbito diferencial, uma vez que aquilo que se deseja em última instância é encontrar um modelo discretizado, ou seja, para um número finito de pontos, mas que possua as resoluções espacial e temporal suficientes para obter resultados fisicamente coerentes.

5.3 Método de volumes finitos

O método de volumes finitos pode ser confundido com o método das diferenças finitas, pois as equações algébricas obtidas são semelhantes. Entretanto, os dois métodos têm fundamentos de formulação diferentes. Enquanto o método de diferenças finitas apresenta uma dedução puramente matemática, a partir de aproximações para as derivadas da equação da onda utilizando a expansão truncada em série de Taylor, a formulação do método de volumes finitos tem base física, da mesma forma que o método discreto de Huygens.

Muitas associações podem e devem ser feitas deste método com outras técnicas numéricas. Diz-se, por exemplo, que a formulação para volume de controle pode ser vista como um caso especial do método dos resíduos ponderados (PATANKAR, 1980). Entretanto, a ideia básica do método é mais simples de entender e leva diretamente à interpretação do fenômeno físico.

A forma discretizada de uma equação de conservação pelo método dos volumes finitos pode ser deduzida por dois caminhos distintos, porém equivalentes. No primeiro deles, análogo ao desenvolvimento realizado no método DHM, tem-se a aplicação das leis de conservação nas propriedades do fluido em cada um dos volumes de controle discretos ou subdomínios definidos a partir da composição de uma malha ou *grid* de nós.

É possível também a aplicação da forma integral conservativa da equação de conservação, restringindo o domínio de integração a cada um dos volumes de controle discretos em um dado intervalo de tempo, sendo $\phi = 1$ e $s_\phi = 0$, para o caso da equação de conservação da massa. Obtém-se a equação discretizada contendo os valores da variável de campo para todos os pontos da malha:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{VC} \frac{d(\rho\phi)}{dt} dV + \int_{SC} \rho\phi\vec{v} \cdot d\vec{A} \right) dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} s_\phi \cdot dV dt. \quad 5.22$$

Segundo (PATANKAR, 1980), esta equação expressa o princípio de conservação para a variável de campo analisada em um volume de controle finito, da mesma maneira que a equação diferencial expressa para um volume de controle infinitesimal. Em função deste fato, a obtenção da equação discretizada pela integração da equação diferencial em um volume de controle finito, nada mais é que um processo em ciclo

que, em sua essência, leva ao mesmo resultado que a solução analítica da equação diferencial utilizada em outros métodos numéricos.

Ainda segundo (PATANKAR, 1980), a característica mais interessante da formulação para volume de controle é que a solução obtida implica na conservação de quantidades como massa, quantidade de movimento e energia para qualquer grupo de volumes de controle e consequentemente em todo o domínio de cálculo. Ou seja, esta característica se mantém válida para qualquer número de pontos ou elementos e, ainda que a resolução da malha seja baixa, os balanços das variáveis serão exatos.

5.4 Método de elementos finitos

O método de elementos finitos é provavelmente a técnica mais utilizada na solução numérica de campos acústicos, entretanto, em vez de partir de uma equação diferencial, são utilizadas expressões integrais como funções elementares de energia ou funcionais obtidos de modelos da situação física real e que, segundo (COOK, MALKUS, *et al.*, 2002), implicitamente contêm a equação diferencial para um problema em particular. A minimização deste funcional corresponde à resolução da equação original.

Da mesma maneira que no método FDM e DHM, divide-se o domínio contínuo em estruturas elementares compostas de nós, formando assim a malha. Posteriormente, faz-se a relação entre estes valores nodais dentro de uma determinada região ou elemento por meio de funções de forma, sendo normalmente utilizados polinômios que podem ser lineares ou de ordem mais elevada, obtendo desta maneira uma equação algébrica correspondente a cada elemento. Os valores nodais devem ser ajustados de maneira que se obtenha uma boa aproximação da distribuição real do campo analisado. Este ajuste é feito através da minimização da grandeza associada ao problema físico.

Observa-se que o processo de discretização descrito anteriormente provê flexibilidade e generalidade ao método em relação ao tipo de fenômeno que pode ser modelado, ao número de graus de liberdade possíveis de serem calculados em cada elemento, assim como no tipo de malha adotado (estruturada ou não estruturada), entretanto, repercutem sobremaneira na complexidade da formulação matemática.

Para finalizar, completa-se a montagem ou condensação das equações de todos os elementos em um sistema global ou de matrizes globais que precisará ser resolvido através de técnicas consolidadas para solução de sistemas lineares. Entretanto, quando se trata de modelagem

numérica, a obtenção de uma equação diferencial não é obrigatória, uma vez que esta equação, nada mais é que a forma matemática de expressar o modelo contínuo do campo e sempre necessitará de uma equação algébrica discretizada para ser resolvida numericamente.

Portanto, o método FEM é interpretado como sendo uma técnica numérica aplicada a um modelo matemático contínuo aproximado definido previamente, resultando em um conjunto finito de equações algébricas. Isto significa que até mesmo em simulações com elevado nível de refinamento da malha, pode-se chegar a resultados em desacordo com a realidade física, caso o modelo matemático utilizado como base em sua formulação seja inapropriado.

Uma técnica numérica perfeita pode produzir resultados inúteis caso um modelo matemático inadequado seja utilizado (PATANKAR, 1980).

Segundo (COOK, MALKUS, *et al.*, 2002), o processo de discretização do método FEM claramente introduz uma segunda fonte de erro além daquela inerente ao modelo matemático. Isto implica que em relação à realidade física, duas fontes de erro devem ser sempre consideradas, denominadas pelo autor de erro de modelagem (*modeling error*) e erro de discretização (*discretization error*). Ainda que o erro de discretização pudesse ser reduzido a zero, a realidade física não seria perfeitamente representada, uma vez que o erro de modelagem matemática permaneceria presente.

Portanto, se a natureza física do fenômeno a ser modelado é conhecida, assim como se os princípios e leis fundamentais da física são obedecidos, o modelo numérico pode ser estabelecido de forma clara e objetiva, ou seja, obtém-se diretamente uma equação algébrica discretizada para a propagação do fenômeno ondulatório. Levando em conta estes aspectos, infere-se que a obtenção de uma equação diferencial de onda seria obrigatória, apenas quando se pretende, e quando é possível, obter uma solução analítica para o problema, considerando as condições iniciais e de fronteira do problema.

Diante destas colocações, o método numérico DHM se apresenta como uma alternativa eficiente na modelagem discretizada de propagação de ondas de uma maneira geral. É um método inerentemente definido no domínio do espaço e tempo discretizado, mostrando virtudes como a possibilidade de aplicação em regimes transientes, frequências de corte elevadas, assim como a facilidade de obtenção de boa resolução espectral.

Por fim, pode-se dizer que a possibilidade de visualizar a onda ao longo do tempo se propagando no espaço, assim como os fenômenos de reflexão, absorção e difração, torna o método didático. O algoritmo de cálculo se mostra costumeiramente mais eficiente que os métodos numéricos que discretizam a equação da onda, uma vez que apenas realiza operações matriciais simples de multiplicação e soma, não exigindo a inversão de matrizes.

No próximo capítulo apresentam-se as principais aplicações e resultados encontrados ao longo deste trabalho, sendo realizada inicialmente uma breve revisão de alguns conceitos básicos necessários ao entendimento das simulações.

6 APLICAÇÕES E RESULTADOS

Inicialmente, alguns conceitos de processamento de sinal são reafirmados de maneira a auxiliar na adequada interpretação dos parâmetros utilizados nas simulações. Em seguida, apresentam-se os resultados para uma série de casos resolvidos utilizando um conjunto de rotinas desenvolvidas ao longo deste trabalho e descritas de forma geral no apêndice A. Para tal, utilizou-se o software comercial MATLAB[®], hardware Intel Core i7 CPU 2,93 GHz, 6 GB RAM, com sistema operacional Windows 7, 64 bits.

6.1 Definições fundamentais

6.1.1 Frequência máxima de análise

O primeiro aspecto importante da simulação é a frequência mais elevada do espectro a qual se pretende analisar. Em uma simulação utilizando o método DHM, uma vez que se define esta informação, a resolução temporal Δt pode ser calculada. Entretanto, duas restrições precisam ser atendidas.

A primeira destas restrições diz respeito à resolução espacial da malha Δl , na qual usualmente se estabelece uma relação de pelo menos dez unidades elementares, ou nós DHM, para possibilitar a avaliação do menor comprimento de onda do fenômeno em análise (JOHNS e BEURLE, 1971), desta forma:

$$\Delta l \leq 0,1\lambda_{min}. \quad 6.1$$

Baseando-se nas Equações 4.67 e 4.85, por uma razão geométrica, a velocidade axial na rede nodal ou velocidade na guia de onda, considerando um nó escalar tridimensional, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$v_g = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \sqrt{3}v_r = \sqrt{3}c_a, \quad 6.2$$

sendo utilizada para calcular o tempo requerido Δt para que onda percorra a distância Δl definida por um nó e, conseqüentemente, a frequência de amostragem $f_a = 1/\Delta t$.

Considerando que a frequência máxima de análise para um problema de ondas é dada por:

$$f_{max} = \frac{c_a}{\lambda_{min}}. \quad 6.3$$

Manipulando as Equações 6.1 a 6.3, obtém-se a primeira restrição para a frequência máxima da excitação associada com a geometria:

$$f_G \leq \frac{1}{10\sqrt{3}\Delta t}. \quad 6.4$$

Uma segunda restrição está relacionada com questões de processamento digital de sinais, na qual é necessário representar adequadamente um sinal digital. O critério de Nyquist estabelece que a frequência de amostragem f_a necessita ser no mínimo o dobro da frequência máxima da excitação ou frequência de Nyquist f_N :

$$f_a \geq 2f_N. \quad 6.5$$

Considerando que a frequência de amostragem é igual a $f_a = 1/\Delta t$, pode-se definir a frequência máxima da excitação segundo o critério de Nyquist:

$$f_N \leq \frac{1}{2\Delta t}. \quad 6.6$$

É possível realizar a intersecção dos intervalos definidos pelas desigualdades estabelecidas nas Equações 6.4 e 6.6, demonstrando que o critério geométrico (f_G) é mais restritivo que o critério de Nyquist (f_N) e, portanto, $f_{max} = f_G$.

Vale observar que para o método DHM, a resolução ou passo temporal Δt é uma variável dependente da resolução espacial Δl utilizada na construção da malha. Esta última, por sua vez, depende da frequência máxima em análise f_{max} , que é um requisito do problema. Resumindo, primeiramente define-se f_{max} conforme a aplicação. Em seguida obtém-se a resolução espacial Δl requerida, para finalmente

obter o intervalo de tempo Δt adotado na simulação, utilizando a velocidade radial v_r .

6.1.2 Tempo total de simulação

Antes de iniciar uma simulação, é necessário estabelecer um critério que defina quanto tempo do fenômeno de propagação da onda deve ser simulado. Para estabelecer este critério, duas condições devem ser levadas em consideração:

1. Resolução ou passo espectral Δf desejado;
2. Tamanho real da resposta impulsiva do sistema modelado.

Como o tempo total de simulação T_s é um valor dependente da resolução espectral Δf requerida, por consequência, uma das maneiras de estabelecer o tempo total de simulação consiste em arbitrar a resolução espectral Δf desejada para a aplicação em questão e, assim, determinar o tempo T_s . A partir da teoria de processamento digital de sinais, a resolução espectral é calculada através da seguinte operação (SHIN e HAMMOND, 2008):

$$\Delta f = \frac{1}{k\Delta t} = \frac{1}{T_s}, \quad 6.7$$

sendo Δt o intervalo de tempo de uma iteração e k o número total de iterações da simulação.

Outra forma de abordar esta questão é através da estimativa do tamanho da resposta impulsiva do sistema, utilizando como referência o maior tempo de reverberação (frequência de análise mais baixa) obtido a partir de diferentes modelos analíticos desenvolvidos para ambientes fechados, tais como: Sabine; Eyring; Fitzroy, entre outros.

6.2 Radiação de fontes elementares

6.2.1 Introdução

A incorporação no algoritmo DHM de um determinado tipo de fonte de excitação dependerá da aplicação. Por exemplo, em acústica de salas, normalmente o objetivo básico é a obtenção da resposta impulsiva. Nesta situação, utilizam-se fontes pontuais cuja abrangência

de atuação na malha resume-se a um nó específico, impondo à malha oscilações de entrada, tais como a função *sinc* ou delta de *kronecker*, capazes de gerar dados de saída em um largo espectro de frequências.

Entretanto, com o intuito de demonstrar a confiabilidade do método DHM e das rotinas implementadas, realiza-se a simulação do padrão de radiação de algumas fontes elementares, tais como monopolo, dipolo e pistão rígido. Para tal, foram comparados os resultados numéricos fornecidos pelo algoritmo DHM2D desenvolvido neste trabalho com um modelo analítico consolidado, ambos em frequências e instantes (fotografia da onda) específicos de excitação.

Os tempos de propagação foram escolhidos de maneira a evitar a reflexão nas paredes e, neste caso, as condições de contorno são irrelevantes para as fontes monopolo e dipolo. Para o pistão, apenas a fronteira do *baffle* é definida como refletora, seguindo o padrão normalmente adotado. Se tempos maiores fossem considerados nas fotografias da onda seria necessário implementar condições de contorno do tipo PML (*Perfectly Matched Layer*) com o objetivo de garantir condições de fronteira perfeitamente absorvedoras (*free field*).

Em todos os tipos de fonte mostrados a seguir, considera-se uma malha bidimensional com dimensões de 2 x 2 m representando uma cavidade retangular cujo meio é o ar, cuja velocidade de propagação é de 343,42 m/s e os nós do meio de propagação do tipo sem perdas (*lossless*). Utilizou-se uma resolução espacial igual a $\Delta x = \Delta y = 0,01$ m com nós do tipo D2O4, resultando em uma malha regular de 40.000 nós e conseqüentemente em uma frequência teórica máxima de análise de 3,43 kHz, segundo o critério definido na Equação 6.1.

6.2.2 Monopolo

A Figura 6.1 ilustra um instante arbitrário da propagação de uma onda acústica gerada por uma fonte pontual tipo monopolo, radiando um sinal harmônico de pressão sonora com frequência de 2 kHz e amplitude máxima de 0,25 Pa, a partir do centro ($x = 1$; $y = 1$) da malha bidimensional descrita na introdução.

É possível observar que a forma de representação incluída no algoritmo DHM2D para uma fonte pontual resulta em um comportamento da simulação fisicamente coerente e conforme o esperado, uma vez que a fonte radia com um padrão omnidirecional.

A Figura 6.1 (b) ilustra uma comparação entre o decaimento da pressão sonora a partir da fonte, obtidos via modelo numérico (em azul)

e analítico (em vermelho). Ambos os modelos são funções da distância ou raio em relação à fonte, assim como do tempo.

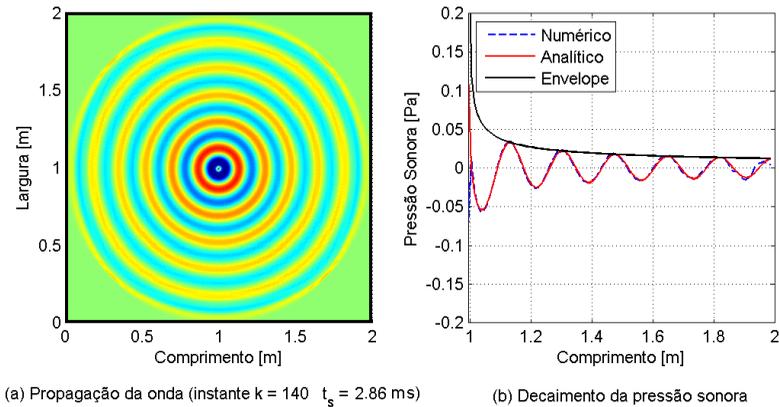


Figura 6.1 - Radiação de um monopolo (2 kHz).

A curva em azul reflete as pressões sonoras em cada nó ao longo do raio da onda esférica em propagação exposta na Figura 6.1 (a), enquanto a curva em vermelho, expressa o modelo analítico bidimensional de radiação para um cilindro infinito, baseado na Equação (13.655) de (REYNOLDS, 1981), quando o raio a do cilindro torna-se muito pequeno, tal que $\kappa a \ll 1$:

$$p(r, t) = c_a Z_a \sqrt{\frac{\pi \kappa a}{2}} \sqrt{\frac{a}{r}} e^{j(\omega t - \kappa r + \pi/4)}, \quad 6.8$$

na qual r é a distância em relação ao centro da fonte, ω a frequência angular da onda e t o tempo.

É possível observar entre as curvas um elevado grau de concordância, demonstrando claramente que o modelo numérico é capaz de representar o decaimento da intensidade sonora à medida que se afasta da fonte, em virtude da dispersão homogênea do sinal causada pela propagação da onda esférica.

Vale observar que a pequena diferença observada entre as curvas analítica e numérica próxima à fronteira se deve à instabilidade inicial ($t = 0$) da fonte, que ainda se faz presente em virtude da onda não ter alcançado a fronteira.

Outro aspecto interessante da Figura 6.1 (a) diz respeito ao instante $t_s = 2,86 \text{ ms}$. Considerando, de forma aproximada e apenas para efeito comparativo com a simulação, uma velocidade radial de propagação constante igual a 343 m/s , pode-se obter analiticamente o tempo que onda levaria para alcançar os limites da malha, dividindo a distância percorrida aproximada de 1 m , pela velocidade de propagação, obtendo-se o tempo aproximado de $2,9 \text{ ms}$.

No caso ilustrado pela Figura 6.2, tem-se o mesmo tipo de fonte do caso anterior, porém aplicando a frequência de $3,4 \text{ kHz}$. Este valor, ainda que muito próximo ao limite de análise da malha, possibilita que o modelo utilizado permaneça adequado e representando o padrão de radiação de um monopolo, uma vez que as frentes de onda possuem igual intensidade em qualquer raio selecionado a partir do ponto de origem da fonte sonora.

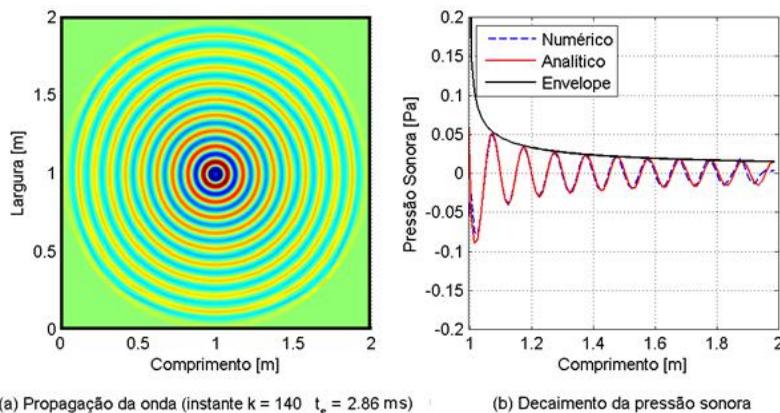


Figura 6.2 - Radiação de um monopolo ($3,4 \text{ kHz}$).

O resultado apresentado na Figura 6.2 (b) demonstra que o critério de definição da resolução geométrica da malha é suficiente e pode ser utilizado em sua condição limite sem prejuízo à formação da onda esférica. Vale lembrar que o modelo de um monopolo é regularmente aplicado quando se pretende obter a resposta impulsiva do sistema simulado.

6.2.3 Dipolo

A Figura 6.3 ilustra um dipolo formado por duas fontes pontuais (inferior e superior) radiando sinais harmônicos com intensidades iguais, defasados em 180° , distanciados 0,2 m entre si, localizadas respectivamente nas posições ($x = 1$ m; $y = 0,9$ m) e ($x = 1$ m; $y = 1,1$ m). Da mesma maneira que o monopolo, o mapa em cores representa uma fotografia da onda (pressão sonora) em um dado instante da simulação e a linha tracejada representa graficamente o índice de direcionalidade $D(\theta)$, obtido através de um modelo analítico expresso pela Equação (13.208), extraída de (REYNOLDS, 1981):

$$D(\theta) = 10 \log_{10}\{\cos(0,1k \cos \theta)^2\}, \quad 6.9$$

na qual k é o número de onda e θ o ângulo de radiação que varia de 0 a 2π .

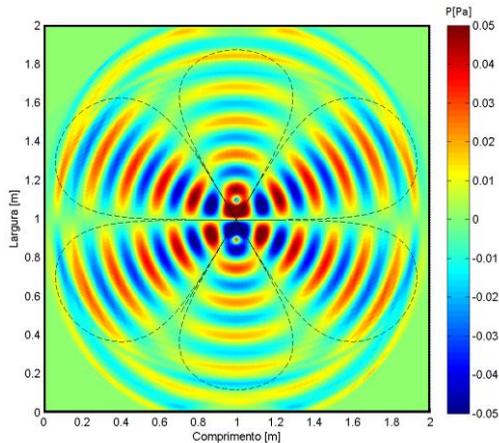


Figura 6.3 - Resultados analítico (tracejado) e numérico (em cores) para o padrão de radiação de um dipolo (2 kHz, instante $k = 140$; $t_s = 2,86$ ms) com fontes defasadas entre si em 180° .

É possível observar que a forma adotada para representação numérica da fonte resulta em um padrão de direcionalidade fisicamente coerente, uma vez que a fonte radia com padrão semelhante ao modelo analítico de referência. Os lóbulos indicados pela linha tracejada

representam o índice de direcionalidade analítico e demonstram coerência com a intensidade da onda obtida numericamente.

Diversos valores de frequência foram examinados e comparados com êxito. Em todos os casos testados, a simulação numérica apresentou excelente grau de ajuste com o modelo analítico. Entretanto, apenas para efeito de confirmação e para não se tornar repetitivo, adicionalmente incluiu-se a Figura 6.4, com o mapa de cores encontrado para a frequência de 3,4 kHz, cujo valor é levemente abaixo da frequência teórica de análise limite da malha.

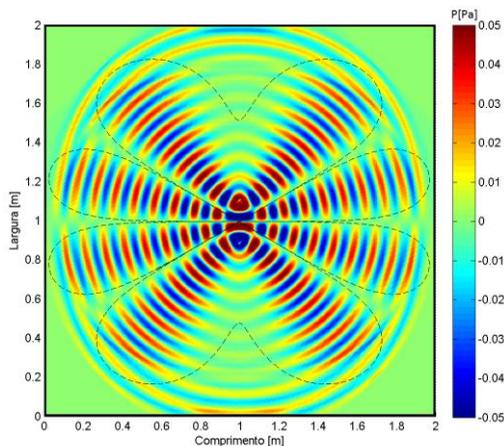


Figura 6.4 - Resultados analítico (tracejado) e numérico (em cores) para o padrão de radiação de um dipolo (3,4 kHz, instante $k = 140$; $t_s = 2,86$ ms) com fontes defasadas entre si em 180° .

6.2.4 Pistão rígido

Outra aplicação de interesse está relacionada com a radiação sonora causada pela vibração de superfícies estendidas. Uma destas superfícies de particular interesse é um pistão rígido montado em um *baffle* rígido, muito maior que a dimensão principal do pistão. Para demonstrar este caso, um pistão com raio $a = 0,1$ m foi modelado por uma linha no plano bidimensional, centrado ($x = 0$; $y = 0,9$ a $y = 1,1$) na face esquerda, definida como rígida ($\Gamma = 1$).

No método numérico DHM, o pistão pode ser modelado através da incidência ou imposição de um conjunto de funções de onda (velocidade de partícula) em fase, em uma ou duas portas dos nós que pertencem ao espaço ocupado pelo pistão. Note que a escolha da (s)

porta (s) de incidência dependerá da direção e sentido de radiação do pistão. É possível definir o sentido de radiação para frente, para trás ou em ambos os sentidos. Neste caso utilizou-se um pistão radiando com uma função seno somente no sentido do centro da malha.

Os nós que compõem as demais faces (fronteiras) da malha foram definidos completamente absorventes, ou seja, com $\Gamma = 0$, de maneira a simular um padrão de radiação em campo livre. Da mesma maneira que na fonte dipolo, o modelo analítico utilizado como referência para o padrão de direcionalidade foi extraído de (REYNOLDS, 1981):

$$D(\theta) = 10 \log_{10} \left\{ \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right\}^2, \quad 6.10$$

na qual J_1 é a função de Bessel, a o raio da fonte e θ o ângulo de radiação que varia de 0 a π .

A Figura 6.5 ilustra o pistão radiando com frequência de 2 kHz. Levando em conta a dimensão característica da fonte radiadora, observa-se que para esta frequência o resultado apresenta um padrão de direcionalidade com um único lóbulo de radiação. À medida que o produto ka , entre o número de onda e a dimensão característica da fonte, torna-se mais baixo, tende-se a um padrão de radiação cada vez mais próximo da omnidirecionalidade.

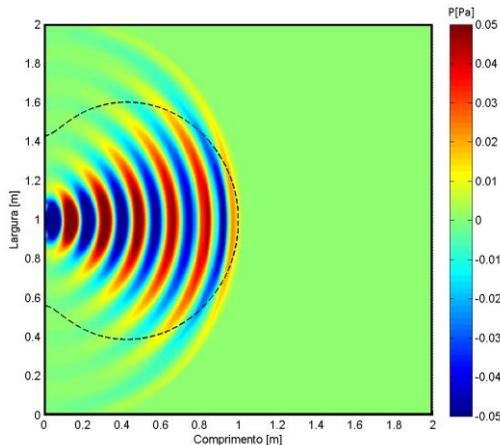


Figura 6.5 - Resultados analítico (tracejado) e numérico (em cores) para o padrão de radiação de um pistão rígido (2 kHz, instante $k = 140$; $t_s = 2,86$ ms).

No resultado apresentado na Figura 6.6, o pistão vibra com frequência de 3,4 kHz, o que implica no aparecimento de lóbulos menores no padrão de direcionalidade do pistão, indicando o aumento do produto ka . Este resultado demonstra que, ao se aumentar a dimensão relativa da fonte em relação ao comprimento de onda radiado, mais lóbulos secundários irão aparecer.

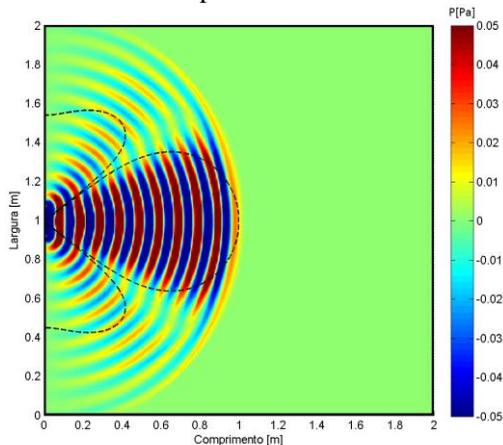


Figura 6.6 - Resultados analítico (tracejado) e numérico (em cores) para o padrão de radiação de um pistão rígido (3,4 kHz, instante $k = 140$; $t_s = 2,86$ ms).

Estes resultados demonstram o potencial do método na modelagem de superfícies radiadoras em geral, como exemplo um alto-falante. Para tal, é necessário que uma sequência ou vetor de dados quaisquer sejam vinculados aos nós com uma função de onda no domínio do tempo, assim, determinando a forma com a qual a superfície vibra. Estes dados podem ser obtidos através de diversas maneiras, sejam a partir de dados de saída de outros modelos numéricos, de modelos analíticos ou mesmo a partir de medições.

6.3 Dispersão da onda em propagação livre

Normalmente se considera que a velocidade de propagação da onda é a mesma em todas as direções para um meio não dispersivo. Entretanto, a discretização do espaço em uma malha finita de pontos implica na dependência da velocidade radial com a frequência. Em função disso, a velocidade axial na guia de onda v_g é diferente da velocidade radial da onda v_r . Esta diferença torna-se cada vez maior à

medida que a dimensão do nó cresce em relação à dimensão do menor comprimento de onda analisado. Neste item serão mostradas ondas cilíndricas harmônicas com diferentes frequências em propagação livre, com o objetivo de ilustrar o efeito causado pela discretização espacial ao se variar a frequência da onda.

A Figura 6.7 ilustra o processo sequencial de propagação da onda à medida que os passos discretos de tempo decorrem para uma onda com característica harmônica e frequência de 2 kHz, gerada por uma fonte pontual com padrão de radiação omnidirecional. É importante lembrar que $\Delta x = \Delta y = 0,01$, o que implica em uma frequência máxima de análise para esta malha de aproximadamente 3,43 kHz, considerando dez elementos para cada comprimento de onda.

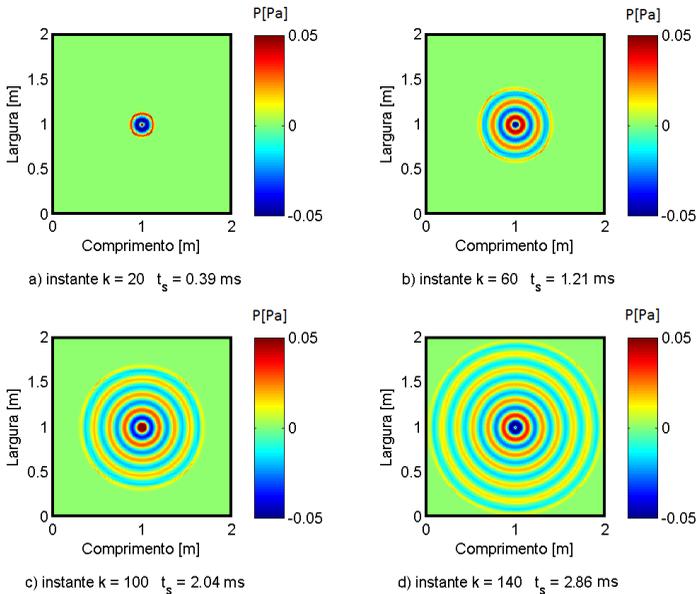


Figura 6.7 - Sequência de propagação da onda (2 kHz).

É possível ser observado, através da amplitude da pressão sonora representada em cores, que a onda mantém a mesma velocidade radial em todas as direções de propagação. No caso da Figura 6.8, mostra-se o mesmo processo sequencial de propagação da onda no domínio do tempo, porém, para uma onda com característica harmônica e frequência de 6 kHz, ou seja, valor superior ao limite recomendável, considerando a discretização espacial da malha.

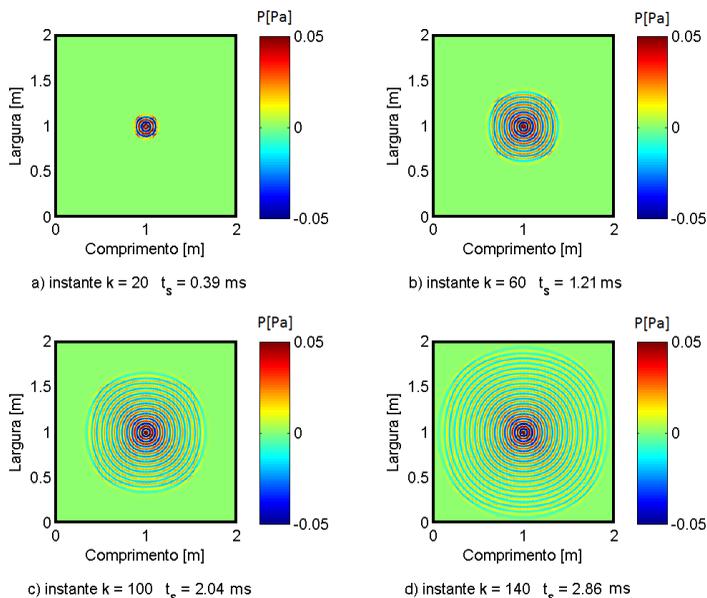


Figura 6.8 - Sequência de propagação da onda (6 kHz).

Percebe-se, portanto, à medida que a discretização da malha torna-se insuficiente para atender ao critério mínimo definido pela Equação 6.4, ocorre a dispersão da onda. É possível verificar visualmente esta dispersão uma vez que o padrão de radiação deixa de ser omnidirecional e a intensidade na frente de onda varia conforme a direção de propagação.

6.4 Dissipação no meio de propagação

A atenuação atmosférica não pode ser negligenciada, ao se considerar grandes distâncias de propagação. Sabe-se que o coeficiente de absorção atmosférico é variável com a frequência e pode ser aplicado no método DHM através de filtros digitais FIR, da mesma maneira que nas fronteiras da malha. Entretanto, esta técnica pode se tornar um pouco dispendiosa no sentido computacional, uma vez que se deve operar uma convolução do sinal incidente ao longo da simulação, em cada nó do meio, com os coeficientes do filtro obtido.

Em uma abordagem simplificada, no qual uma única frequência é considerada, a atenuação atmosférica também pode ser incluída

utilizando um parâmetro fixo dissipativo $\xi = 0,0576$, baseado no coeficiente de absorção atmosférica $\alpha = 0,6$, mencionado nas Equações 4.77 e 4.84. Este valor foi convenientemente escolhido apenas com o objetivo de ilustrar a capacidade do modelo de impor as perdas atmosféricas, uma vez que se fossem utilizados valores iguais a $\xi = 6 * 10^{-6}$ e $\alpha \cong 10^{-4}$, tal como adotado por (TSUCHIYA, 2007), tornar-se-ia inviável a visualização gráfica da atenuação em uma cavidade com dimensões pequenas.

Na Figura 6.9 (a) observa-se uma fonte pontual radiando com característica harmônica e frequência de 2 kHz em uma malha bidimensional, no qual se utilizou um nó com perdas. Neste caso, verifica-se na Figura 6.9 (b) que o resultado numérico reduz a pressão sonora ao longo do raio de propagação da onda esférica em uma taxa associada com o coeficiente de absorção atmosférica α . Note que o modelo analítico sem perdas foi incluído na figura com o único objetivo de evidenciar a atenuação imposta pelo modelo numérico.

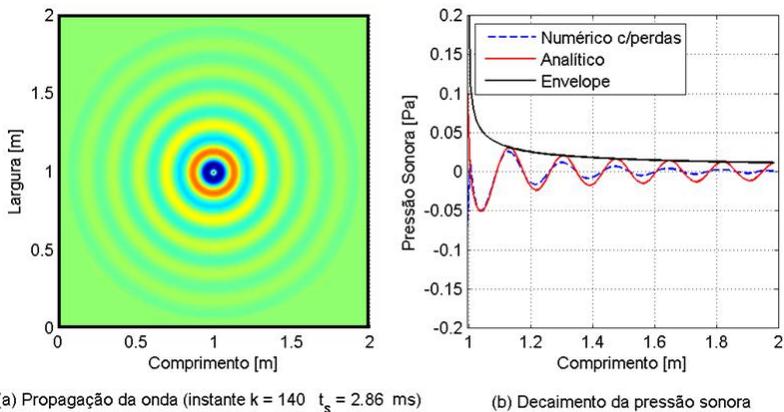


Figura 6.9 - Propagação da onda com perdas (DHM2D).

Este modelo pode ser utilizado de forma aproximada em situações nas quais a absorção sonora promovida pelo meio de propagação se torna importante, tais como cavidades de grande dimensão ou mesmo em problemas externos, onde os fatores ambientais como o vento e gradientes de temperatura podem influenciar consideravelmente no resultado (TSUCHIYA, 2007).

6.5 Difração em meios não homogêneos

A difração é um fenômeno que ocorre em ondas quando passam por orifícios ou contornam objetos que possuem dimensões da mesma ordem de grandeza que o seu comprimento de onda. Em função disso, é cabível afirmar que este fenômeno ocorre em praticamente todos os casos de propagação de ondas acústicas em ambientes internos e externos. Para ilustrar o comportamento do método DHM ao se modelar este tipo de fenômeno, três exemplos básicos foram utilizados.

Na Figura 6.10 se observa um pistão radiando com característica harmônica e frequência de 2 kHz, em uma malha bidimensional dividida por um anteparo rígido onde há apenas um orifício com 20 cm de largura. Neste caso é possível perceber que a onda ultrapassa o anteparo, originando uma nova fonte que apresenta um padrão de radiação que se estabelece condicionado à relação entre o tamanho do orifício e o comprimento de onda.

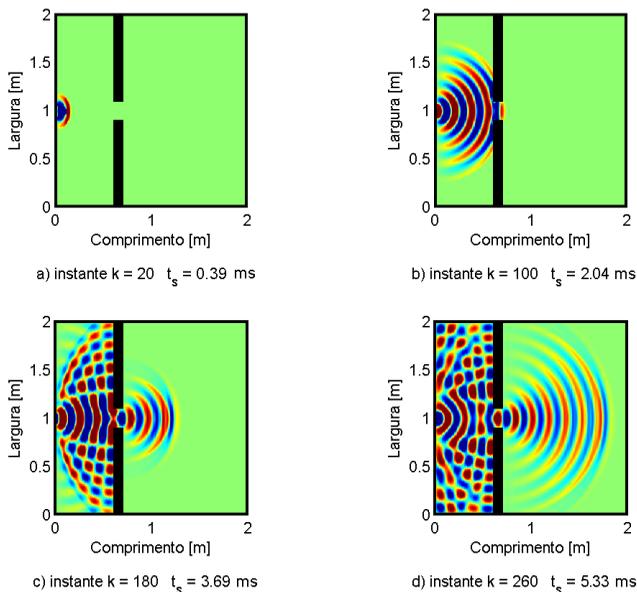


Figura 6.10 - Difração da onda em malha 2D (DHM2D).

A Figura 6.11 ilustra o mesmo pistão, porém neste caso radiando em um meio onde há um objeto retangular rígido com dimensões de 7 cm x 20 cm. Percebe-se que a onda ultrapassa o objeto, causando uma

sombra na região traseira em virtude da difração. Vale lembrar que a capacidade da onda em contornar o objeto aumenta à medida que a frequência da onda decresce.

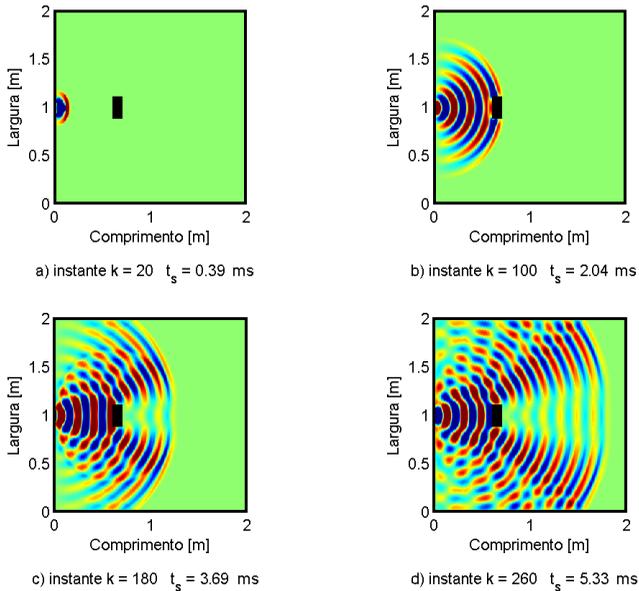


Figura 6.11 - Difração da onda em malha 2D (DHM2D).

Na Figura 6.12 se observa uma sequência de *frames* obtidos ao simular uma malha tridimensional, no qual um pistão com dimensões de 5 cm x 5 cm, posicionado no centro da face esquerda da malha, radia em um meio sem perdas, onde há um objeto cúbico rígido no interior da malha com dimensões de 10 cm x 10 cm x 10 cm.

É importante observar que, em malhas tridimensionais, a velocidade na guia de onda v_g é diferente da velocidade apresentada em simulações utilizando malhas bidimensionais. Este fato repercute no tempo real de simulação t_s , ainda que a dimensão Δl do nó e a iteração k sejam as mesmas em ambos os casos. Na Figura 6.13, a mesma simulação é representada através de uma seção transversal no plano localizado na cota igual a $z = 0,2550$ m.

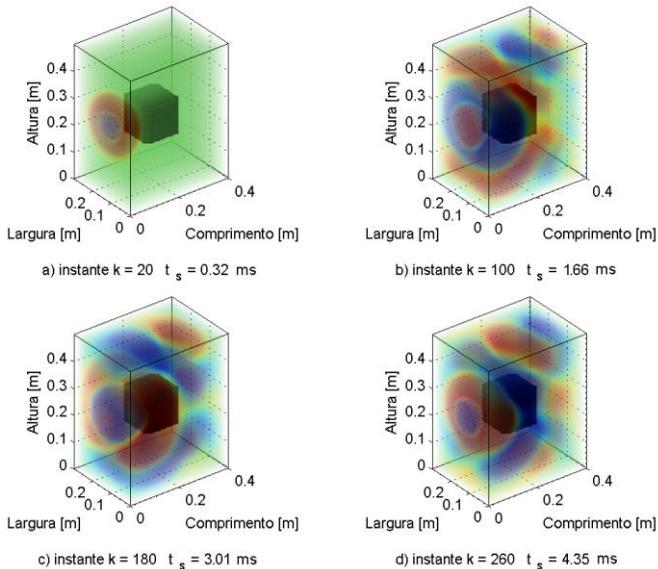


Figura 6.12 - Difração da onda em malha 3D (DHM3D_FRA).

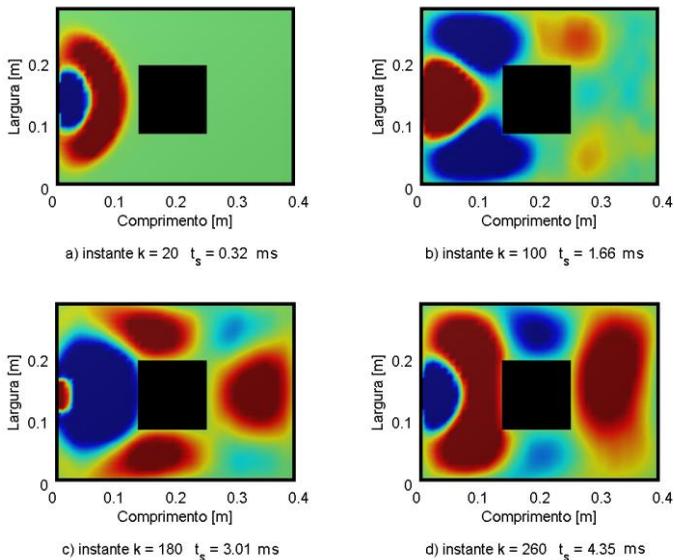


Figura 6.13 - Seção transversal de uma onda 3D em difração.

Este procedimento contribui à visualização do fenômeno da difração ocorrendo em torno do objeto inserido na malha. Entretanto, vale lembrar que por ser uma onda tridimensional, variações de pressão ocorrem também ao longo do eixo z , o que produz deformações na imagem da onda em propagação.

6.6 Cavidades com geometria regular

Neste item foram consideradas três diferentes cavidades acústicas com geometrias regulares, denominadas "P", "M" e "G". O objetivo é obter numericamente as respectivas respostas impulsivas $h(k)$, através da simulação numérica utilizando o algoritmo DHM3D³⁴ desenvolvido neste trabalho. Em seguida, calculam-se através da transformada discreta de Fourier³⁵, as respectivas funções de resposta em frequência $H(K)$, representadas em termos de nível de pressão sonora.

O sinal da fonte F utilizado nestas simulações é do tipo monopolo pulsante, e se estabelece através da imposição de pressões incidentes em cada uma das portas ou ramos de um nó correspondente a posição cartesiana de interesse. Neste caso, optou-se estrategicamente por uma posição próxima a um dos vértices de cada uma das cavidades, com o objetivo de excitar o máximo possível de modos acústicos existentes. A resposta em dois pontos receptores R (*right*) e L (*left*) são admitidas com o objetivo de simular a distância entre a entrada dos canais auditivos dos ouvidos direito e esquerdo.

A Figura 6.14, em conjunto com a Tabela 6.1, sintetizam, entre outras informações, as geometrias das cavidades "P", "M" e "G", os dados de posição cartesiana da fonte, receptor, assim como o resultado obtido para o tempo de processamento nas simulações utilizando o método DHM-TD e os métodos FEM-M (abordagem modal) e FEM-D (abordagem direta), no domínio da frequência.

O método FEM foi aplicado utilizando sua formulação no domínio da frequência (abordagem modal e direta) e as fronteiras foram tratadas como superfícies rígidas. Considerou-se que os modelos de fonte sonora, receptor e a maneira como foram impostas as condições de fronteira, levaram a condições físicas muito semelhantes em todas as abordagens consideradas.

³⁴ Para mais informações, consultar Apêndice.

³⁵ Para mais informações, consultar Item 3.2.2.

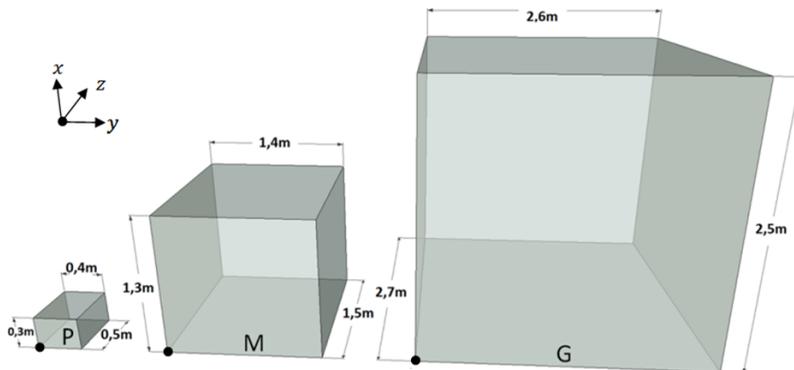


Figura 6.14 - Cavidades "P", "M" e "G".

Tabela 6.1 - Dados geométricos e da simulação das cavidades.

Características	P	M	G
<i>Dimensão da Cavidade [m]</i>	0,3 x 0,4 x 0,5	1,3 x 1,4 x 1,5	2,5 x 2,6 x 2,7
<i>Dimensão do Nó [m]</i>	0,01 x 0,01 x 0,01	0,01 x 0,01 x 0,01	0,01 x 0,01 x 0,01
<i>Número de Nós</i>	60.000 (30 x 40 x 50)	2.730.000 (130 x 140 x 150)	17.550.000 (250 x 260 x 270)
<i>Velocidade da onda (Equação 6.2)</i>	≈ 343,4 m/s	≈ 343,4 m/s	≈ 343,4 m/s
<i>Freq. Máx. Análise f_{max} (Equação 6.4)</i>	≈ 3434 Hz	≈ 3434 Hz	≈ 3434 Hz
<i>Tempo Total de Simulação T_s [s]</i>	0,5 s	0,5 s	0,5 s
<i>Passo de Tempo Δt (Equação 6.2)</i>	≈ 16,8 μ s	≈ 16,8 μ s	≈ 16,8 μ s
<i>Número de iterações</i>	17.846	17.846	17.846
<i>Passo de Frequência Δf (Equação 6.7)</i>	DHM - 2 Hz FEM-D - 2 Hz FEM-M - 2 Hz	DHM - 2 Hz FEM-D - N/A FEM-M - N/A	DHM - 2 Hz FEM-D - N/A FEM-M - N/A
<i>Posição Cartesiana da Fonte [m]</i>	S(0,03; 0,03; 0,03)	S(0,03; 0,03; 0,03)	S(0,03; 0,03; 0,03)
<i>Posição Cartesiana dos Receptores [m]</i>	L(0,25; 0,35; 0,45) R(0,15; 0,35; 0,45)	L(1,25; 1,35; 1,45) R(1,15; 1,35; 1,45)	L(2,45; 2,55; 2,65) R(2,35; 2,55; 2,65)
<i>Coefficiente de Reflexão das Fronteiras (Item 4.4.4)</i>	DHM ($\Gamma = 0,996$) FEM (rígido)	DHM ($\Gamma = 0,996$) FEM (rígido)	DHM ($\Gamma = 0,996$) FEM (rígido)
<i>Tempo de Processamento³⁶</i>	DHM ≈ 240 s FEM-M ≈ 1.260 s FEM-D ≈ 16.200 s	DHM ≈ 8.100 s FEM-M - inviável FEM-D - inviável	DHM ≈ 49.800 s FEM-M - inviável FEM-D - inviável

Nota: Processador Intel (R) Core (TM) i7 CPU @ 2,93 GHz 6 GB RAM, Windows 64 bits

³⁶ Inclui o tempo necessário para aplicação da Transformada de Fourier no caso do DHM.

Utilizou-se no método DHM um valor constante ($\Gamma = 0,996$) para o coeficiente de reflexão em todos os nós pertencentes às fronteiras. Este procedimento foi adotado com o objetivo de evitar que artefatos (reverberação excessiva) surgissem ao gerar o arquivo de áudio, em função da ausência de amortecimento no ambiente modelado.

As malhas em elementos finitos foram processadas utilizando os programas comerciais *VA-One*[®] para a abordagem modal e *Comsol*[®] para a abordagem direta. Entretanto, é importante ressaltar que em função do grande número de nós necessários na composição da malha das cavidades "M" e "G", a simulação pelo método de elementos finitos se apresentou inviável, considerando o recurso computacional destacado na Nota da Tabela 6.1, e nenhum resultado foi calculado.

Estas simulações têm como objetivo evidenciar, de forma comparativa, o desempenho do método DHM no que diz respeito à precisão da resposta e também quanto à velocidade de processamento do algoritmo incorporado neste trabalho. Adicionalmente, utilizou-se como referência a solução analítica baseada em (REYNOLDS, 1981) e (KUTTRUFF, 2001) para a equação da onda esférica em três dimensões aplicável em cavidades regulares, expresso por:

$$\begin{aligned}
 & p(x, y, z, t) \\
 &= \rho_0 c_a^2 \hat{Q} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K \frac{\omega \Psi_{ijk}(x, y, z) \Psi_{ijk}(x_0, y_0, z_0)}{V_{ijk}(\omega^2 - \omega_{ijk}^2)} \cos(\omega t \\
 &+ \phi - \pi/2),
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

na qual ρ_0 e c_a são respectivamente a densidade média e a velocidade do som no meio, \hat{Q} é a velocidade de volume cujo valor adotado foi de $10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$, Ψ_{ijk} e $f_{ijk} = \omega_{ijk}/2\pi$ são respectivamente as formas modais e frequências naturais, V_{ijk} é o volume modal e i, j, k são os índices modais em cada direção cartesiana.

A Figura 6.15 mostra a comparação entre os resultados obtidos via DHM, FEM-D e também a implementação da Equação 6.11 para a cavidade "P". Neste gráfico, é verificado o nível de pressão sonora obtido na posição cartesiana R (*right*) do receptor (Vide Tabela 6.1). É possível observar um excelente grau de concordância entre as curvas, a despeito da grande diferença no tempo de processamento observado em favor do método DHM.

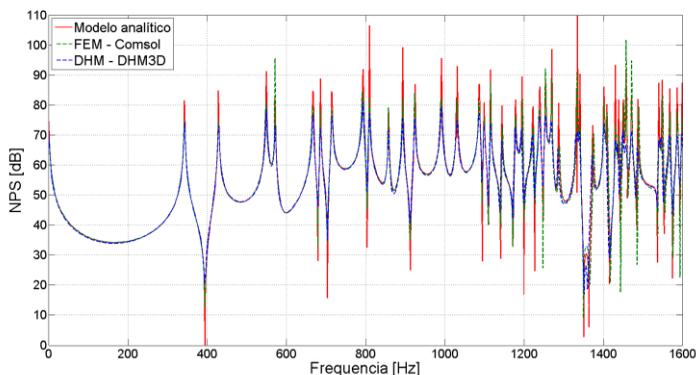


Figura 6.15 - Respostas em frequência obtidas através do modelo analítico para uma cavidade regular e os métodos FEM e DHM (Cavidade "P").

O DHM precisou de aproximadamente 4 minutos para completar a simulação, incluindo a aplicação da transformada discreta de Fourier para obtenção da curva no domínio da frequência. Observe que mesmo ao se aplicar a abordagem modal em elementos finitos, muito mais rápida que a abordagem direta, foram necessários aproximadamente 21 minutos para se obter resultados equivalentes.

Como consequência do tempo total de simulação do fenômeno, $T_s = 0,5$ s, obteve-se um passo de frequência $\Delta f = 2$ Hz para as três cavidades simuladas. A discretização espectral implica em diferenças na amplitude das curvas obtidas em cada método, especialmente na região onde estão localizadas as frequências de ressonância. Sabe-se que os métodos numéricos apresentam pequenos deslocamentos nas frequências de ressonância calculadas em relação ao valor fornecido pelo modelo analítico. Como a ressonância é uma região do espectro com amplitude pronunciada, até mesmo pequenos deslocamentos na frequência podem resultar em diferenças significativas de amplitude. Portanto, o aumento da resolução espectral tende a reduzir este erro.

É necessário reafirmar que a utilização no DHM de uma pequena absorção nos elementos pertencentes às fronteiras, conforme citado e justificado anteriormente, também contribuiu com as diferenças de amplitude verificadas entre as curvas de resposta em frequência.

Na Figura 6.16, tem-se o resultado obtido para a resposta em frequência da cavidade denominada "M". Nesta cavidade, em virtude do grande número de nós da malha, tornou-se inviável a obtenção de resultados a partir do método de elementos finitos considerando o

hardware utilizado neste trabalho. Entretanto, a comparação com o resultado analítico demonstrou boa concordância entre as formas modais e as frequências de ressonância, ainda que a região dos picos tenha apresentado diferenças de amplitude, justificadas pela presença dos erros de resolução espectral, assim como pelo amortecimento imposto ao modelo DHM.

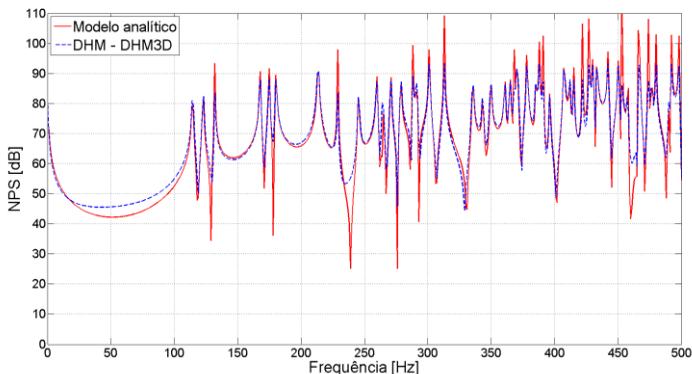


Figura 6.16 - Respostas em frequência obtidas através do modelo analítico para uma cavidade regular e o método DHM (Cavidade "M").

Na Figura 6.17, observa-se o resultado da resposta em frequência para a cavidade denominada "G". Neste caso, um número ainda maior de nós tornou inviável a simulação em elementos finitos. Em virtude do tamanho das cavidades "M" e "G", a densidade modal é elevada em baixa frequência, assim como o primeiro modo ocorre em uma frequência inferior que na cavidade "P". Em função disso, o limite superior de frequência foi definido em 500 Hz de maneira que os modos possam ser visualizados com clareza.

Neste caso, ainda que a simulação via DHM tenha consumido cerca de 14 horas de processamento, considera-se um resultado bastante expressivo, pois, seria inviável simular uma cavidade com 17.550.000 nós, o que equivale a graus de liberdade no método FEM, levando em consideração o *hardware* utilizado neste trabalho, em conjunto com as formulações existentes para elementos finitos implementadas em programas comerciais.

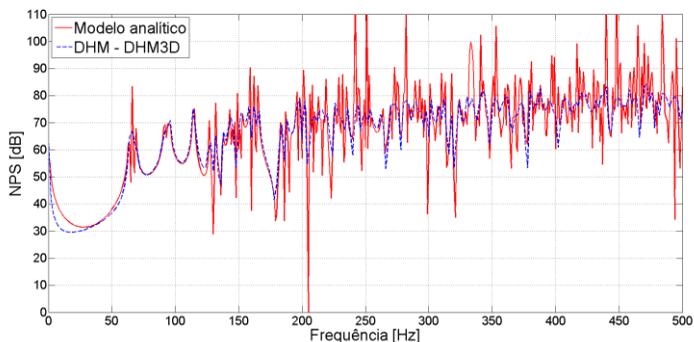


Figura 6.17 - Respostas em frequência obtidas através do modelo analítico para uma cavidade regular e o método DHM (Cavidade "G").

Neste tipo de simulação, especialmente no que se refere à malha G, destaca-se o grande potencial do método DHM na simulação de domínios de dimensões reais em acústica de ambientes fechados, tais como salas de aula, estúdios, *Home Theater*, cinemas e teatros. Muitos outros elementos geométricos poderiam ser adicionados à malha com o objetivo de representar objetos. Entretanto, atualmente nos métodos tradicionais, problemas desta natureza não podem ser abordados em um computador convencional, pois a utilização de memória e a capacidade de processamento necessária torna a aplicação inviável.

Finalizando, pode-se afirmar que o software comercial MATLAB[®] exerceu um papel importante neste trabalho por viabilizar a implementação do método numérico de maneira relativamente rápida e objetiva, sem exigir profundo conhecimento em linguagens de programação e, assim, possibilitando a validação do método. Entretanto, vale observar que diversos aspectos relativos à eficiência computacional ainda podem ser considerados, tais como processamento paralelo, compilação do programa, alocação das variáveis, mas principalmente a utilização de linguagens de programação científica de alto desempenho, como Fortran, C e C⁺⁺.

6.7 Síntese Sonora (Auralização)

Finalmente, utilizou-se o algoritmo DHM3D na obtenção de arquivos de áudio auralizado, a partir das respostas impulsivas obtidas durante as simulações das cavidades exploradas em detalhe no Item 6.6. Para tal, aplicou-se um sinal digital de entrada $x(k)$ gravado em ambiente anecóico³⁷ e publicado em (MENZER, BUCHLI, *et al.*, 2006), cujo narrador interpreta o seguinte texto em inglês:

"In language, infinitely many words can be written with a small set of letters. In arithmetic, infinitely many numbers can be composed from just a few digits, with the help of the symbol zero, the principle of position and the concept of base."

Este sinal de entrada $x(k)$ foi utilizado na operação de convolução com as respostas impulsivas $h_L(k)$ e $h_R(k)$ obtidas por sensores ou canais L (*left*) e R (*right*), considerados na simulação das cavidades do Item 6.6, novamente indicadas na Tabela 6.2. Esta operação de convolução resulta em sinais de áudio digital $y_L(k)$ e $y_R(k)$, calculados a partir do algoritmo "Auralization".

Tabela 6.2 - Dados das cavidades utilizadas na Auralização.

Características	P	M	G	
<i>Dimensão da Cavidade [m]</i>	0,3 x 0,4 x 0,5	1,3 x 1,4 x 1,5	2,5 x 2,6 x 2,7	
<i>Posição Cartesiana da Fonte [m]</i>	S(0,03; 0,03; 0,03)	S(0,03; 0,03; 0,03)	S(0,03; 0,03; 0,03)	
<i>Posição Cartesiana dos Receptores [m]</i>	L(0,25; 0,35; 0,45) R(0,15; 0,35; 0,45)	L(1,25; 1,35; 1,45) R(1,15; 1,35; 1,45)	L(2,45; 2,55; 2,65) R(2,35; 2,55; 2,65)	
<i>Arquivos de Áudio</i>	$\Gamma = 0,00$	'CavP_R0,00.wav'	'CavM_R0,00.wav'	'CavG_R0,00.wav'
	$\Gamma = 0,50$	'CavP_R0,50.wav'	'CavM_R0,50.wav'	'CavG_R0,50.wav'
	$\Gamma = 0,96$	'CavP_R0,96.wav'	'CavM_R0,96.wav'	'CavG_R0,96.wav'

O procedimento indicado acima foi aplicado para diferentes valores do coeficiente de reflexão. Deve-se levar em consideração, especialmente no caso em que se utilizou um coeficiente de reflexão $\Gamma = 0,96$, que o nível de absorção é bastante baixo, ressaltado pelas cavidades completamente vazias e sem perdas impostas pela propagação da onda. Em função disso, a sensação de reverberação captada pelas

³⁷ Sinal de voz gravado em um ambiente especial (câmara anecóica), na qual todas as paredes, piso e teto são cobertas por um material de absorção capaz de absorver aproximadamente 100% das ondas incidentes, evitando as reflexões causadoras de reverberação.

respostas impulsivas torna-se um pouco exacerbada, diferente daquilo que normalmente é encontrado em ambientes reais.

Entretanto, podemos dizer que os resultados obtidos demonstram grande capacidade do modelo numérico de representar a modificação física no campo acústico inerente ao tamanho da cavidade e também pelas características de absorção das superfícies. O fator mais evidente está nos diferentes níveis de reverberação. Quanto maior a cavidade, maior a reverberação e a sensação de distância da fonte. Uma sutil diferença também pode ser percebida entre os canais *L* (*left*) e *R* (*right*), que reproduzem sinais distintos, registrados em pontos da malha distanciados em 10 cm. Em função disso, recomenda-se que os arquivos de áudio sejam executados utilizando fones de ouvido. Para tal, é necessário acessar o seguinte endereço eletrônico:

<https://www.dropbox.com/sh/ffuj0ct2l8krbww/VKvBdrCb1k>

Sabe-se que existem outros fatores além da reverberação, tais como intensidade; transparência, impressão espacial e direcionalidade, que representam grande importância na descrição do efeito subjetivo global do som em ambientes fechados. Entretanto, baseado em (VORLÄNDER, 2007), pode-se afirmar que o parâmetro dominante é a sensação de reverberação e, conseqüentemente, os resultados obtidos podem ser considerados como uma forma simplificada de auralização.

A abordagem ideal seria realizar uma avaliação subjetiva dos diferentes arquivos de áudio obtidos, comparando os resultados simulados com o resultado de uma fonte radiando em uma sala real equivalente ao ambiente simulado. Entretanto, este é um trabalho relativamente complexo que exige um esforço específico e, a participação de um grupo de pessoas suficiente para garantir que os requisitos estatísticos sejam atendidos. Recomenda-se como um trabalho futuro.

Ainda que alguns trabalhos (O'CONNOR e CAVANAGH, 1997), (KAGAWA, TSUCHIYA, *et al.*, 1999), (YIYU, INOBUCHI, *et al.*, 2011) tenham mencionado a possibilidade de utilizar o método DHM, com o objetivo de gerar arquivos de áudio, acredita-se que este trabalho tenha sido um dos únicos, senão o único, a realizar o processo de Auralização a partir de respostas impulsivas obtidas pelo método DHM e disponibilizar os resultados publicamente pelo endereço na internet mencionado acima.

6.8 Absorção variável com a frequência

Em geral, os materiais apresentam impedância de superfície variável com a frequência da onda em análise. Entretanto, para representar esta característica no algoritmo DHM, faz-se necessário incluir instruções que definam a forma com a qual o material responde no domínio do tempo, de maneira a estabelecer uma equivalência com o comportamento observado no domínio da frequência.

Conforme já mencionado no Item 4.4.4, uma das formas de implementação desta condição de contorno é através da operação de convolução utilizando os coeficientes de um filtro FIR. Estes coeficientes são obtidos através de técnicas matemáticas para o projeto de filtro, utilizando como fonte de dados curvas de impedância no domínio da frequência geradas a partir de um modelo analítico desenvolvido por Johnson e Lafarge (MAREZE, 2013).

O domínio simulado, ilustrado pela Figura 6.18 e complementado pela Tabela 6.3 com os dados da simulação, consiste em uma cavidade com as mesmas características geométricas, assim como posicionamento de fonte e receptor da cavidade "P" utilizada no Item 6.7. Cinco de suas faces são definidas como rígidas e em sua face superior, destacada em cor preta, aplicou-se um material de absorção com valores conhecidos de impedância de superfície (Comsol v4.3) ou coeficiente de reflexão (DHM3D_FIR), dependendo do método utilizado.

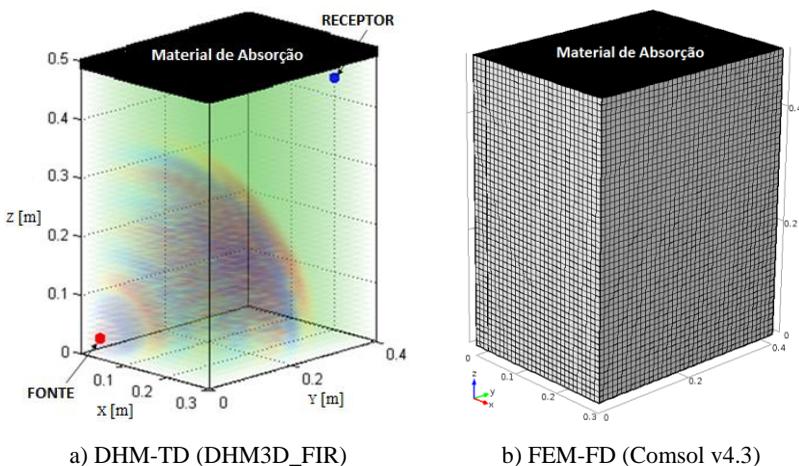


Figura 6.18 - Domínio e malha da cavidade acústica 3D.

Neste problema, a excitação (em vermelho) é descrita por uma função do tipo *sinc* cuja frequência é escolhida em acordo com a resolução espacial da malha, de maneira a exercer a função de um filtro passa-baixa e assim limitar a excitação de frequências acima do valor desejado, reduzindo a influência do erro de *aliasing* no cálculo da resposta em frequência $H(K)$.

Tabela 6.3 - Dados da simulação

Características	Valores
<i>Tempo de Simulação</i>	0,5 s
<i>Passo de tempo (Δt)</i>	$\cong 1,68 \times 10^{-5}$ s
<i>Número de Iterações</i>	17.846
<i>Passo de frequência (Δf)</i>	2 Hz
<i>Tempo de Processamento</i>	DHM (N = 20) \cong 290 s
	DHM (N = 50) \cong 320 s
	DHM (N = 100) \cong 360 s
	FEM \cong 16.200 s

Nos itens que seguem, comparam-se as funções de transferência associadas à cavidade descrita ao se aplicar dois tipos de material à sua face superior. Para a análise em questão, assumiu-se estes materiais como localmente reativos. Utilizaram-se duas abordagens de simulação numérica, aplicando os métodos FEM-FD (Comsol v4.3) e o DHM-TD (DHM3D_FIR), este último descrito no apêndice A.

6.8.1 Filtro FIR - material Fictício

Neste primeiro caso, os coeficientes de um material fictício foram calculados utilizando o modelo analítico desenvolvido por Johnson e Lafarge para materiais caracterizados como localmente reativos. Para tal, os seguintes parâmetros arbitrários foram utilizados:

- Tortuosidade: 1,5;
- Porosidade: 98 %;
- Resistividade ao fluxo: 100000 N.s/m⁴;
- Espessura da amostra: 0,02 m.

Considerando estes valores no modelo de Johnson e Lafarge é possível calcular as partes real e imaginária da impedância de superfície, utilizada diretamente na simulação FEM-FD, do qual se calcula, por consequência, o coeficiente de reflexão.

Em seguida, os coeficientes de reflexão (valores complexos) são utilizados como dados de entrada na obtenção dos coeficientes do filtro FIR no domínio do tempo, necessários à simulação em DHM-TD. Para realizar esta tarefa, utilizou-se neste trabalho uma ferramenta (GUI - *Guided User Interface*) para o projeto de filtros denominado "*filterbuilder*" do *software* comercial MATLAB[®], aplicando o método "*arbitrary response/least-squares*".

Na Figura 6.19 a) e b) é possível observar as partes real e imaginária da curva de impedância de superfície (Z_s) obtidas a partir do modelo de Johnson e Lafarge, assim como em c) e d) as partes real e imaginária das curvas calculadas do coeficiente de reflexão no domínio da frequência (Γ_s) para a referência (modelo analítico) e para três diferentes ordens de filtro ($N = 20$; $N = 50$; $N = 100$).

Basicamente o que se faz é obter coeficientes que reproduzam a resposta no domínio do tempo para cada ordem de filtro e, em seguida, calcular a resposta equivalente no domínio da frequência. Este procedimento tem como objetivo investigar a convergência dos coeficientes calculados no domínio do tempo, no sentido de recuperar adequadamente os dados originais de impedância no domínio da frequência que serviram de base para o projeto dos filtros.

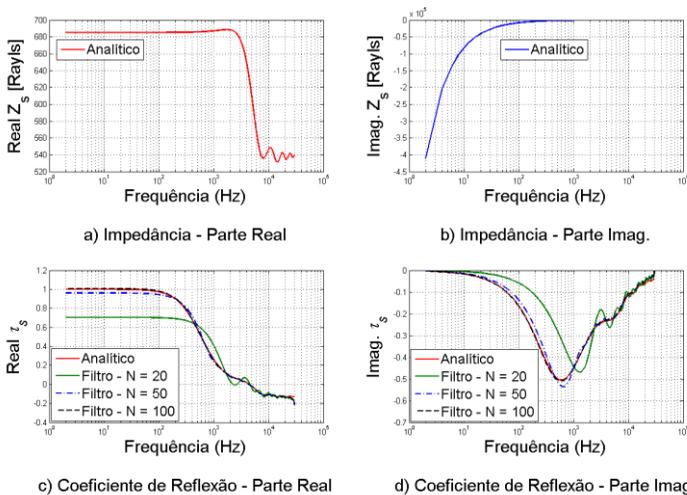


Figura 6.19 - Impedância de superfície e coeficiente de reflexão no domínio da frequência - material Fictício.

Posteriormente, investiga-se também a influência da ordem do filtro na qualidade das respostas impulsivas obtidas pela simulação em DHM-TD. Na Figura 6.20 podem ser observados os resultados correspondentes para a resposta em frequência $H(K)$ obtidos via software *Comsol*[®] e algoritmo DHM3D_FIR após aplicação dos três filtros considerados.

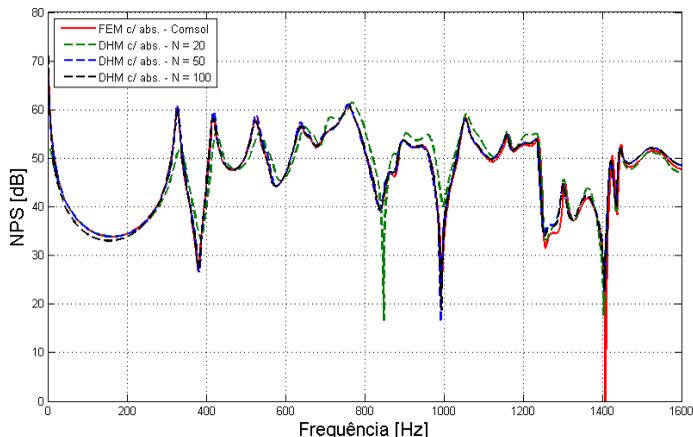


Figura 6.20 - Comparação entre FEM-FD e DHM-TD.

Observa-se uma diferença relativamente sutil entre as curvas, exceto para o filtro de ordem $N = 20$. Neste caso é possível concluir que, para o caso do material fictício proposto, no qual a curva da impedância de superfície apresenta variação suave no domínio da frequência, filtros de ordem relativamente baixa são suficientes na representação do comportamento do material no domínio do tempo.

Com objetivo de deixar mais clara esta questão, na Figura 6.21, três gráficos relacionados entre si sintetizam o efeito da aplicação do material na resposta em frequência da cavidade. O primeiro gráfico diz respeito à resposta da cavidade com todas as faces rígidas, antes da aplicação do material. O segundo gráfico mostra a variação do coeficiente de absorção α_s do material para os três filtros de ordem diferente e compara com a curva original proveniente do modelo analítico de Johnson e Lafarge. O terceiro gráfico, retirado da Figura 6.20, diz respeito ao resultado da resposta em frequência da sala após a aplicação do material.

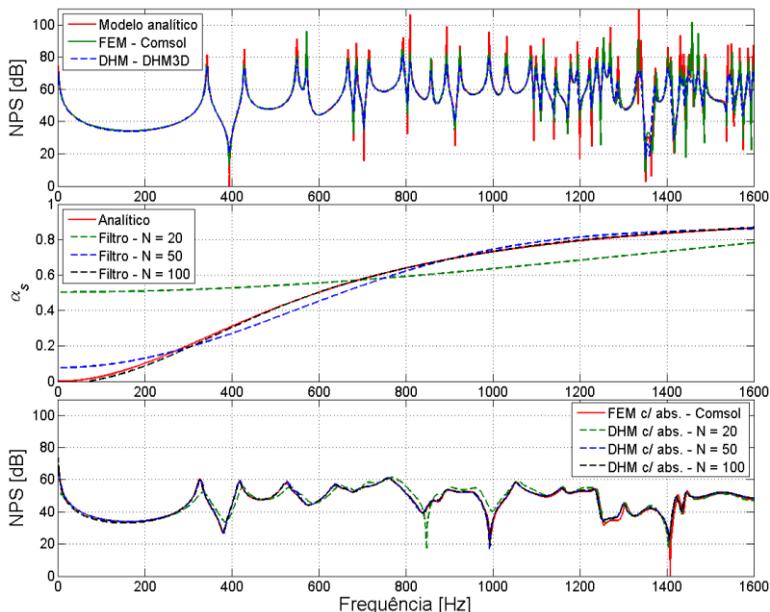


Figura 6.21 - Resposta em frequência antes e depois da aplicação do material de absorção.

É necessário destacar que os resultados apresentados foram obtidos utilizando duas abordagens distintas de simulação para a mesma situação física. Em FEM-FD, aplicou-se o software comercial Comsol, que utiliza a forma direta de solução de um sistema de equações linear no domínio da frequência, o que implica na utilização direta dos valores de impedância de superfície do material fornecidos pelo modelo analítico de Johnson e Lafarge.

No caso do método DHM-TD, aplica-se uma metodologia pouco usual em Acústica, uma vez que é necessário obter coeficientes de reflexão no domínio do tempo (resposta impulsiva reduzida do material) a partir de dados de impedância (coeficiente de reflexão) no domínio da frequência, obtidos experimentalmente ou mesmo através de modelos analíticos. A qualidade do resultado dependerá de uma série de fatores, dentre os quais é possível destacar a técnica matemática aplicada, assim como a ordem utilizada no cálculo do filtro.

6.8.2 Filtro FIR - material Melamina

No caso do material Melamina, tipicamente utilizado em tratamentos acústicos, os valores de impedância de superfície (Z_s) também foram obtidos analiticamente utilizando o modelo desenvolvido por Johnson e Lafarge. Entretanto, neste caso os dados provêm de ajustes dos parâmetros de entrada do modelo analítico, aplicando métodos de otimização que utilizam como restrição a curva experimental do material já conhecida. Após os ajustes, os parâmetros convergiram para os seguintes valores:

- Tortuosidade: 1,0;
- Porosidade: 99 %;
- Resistividade ao fluxo: 9500 N.s/m^4 ;
- Espessura da amostra: 0,043 m.

Desta forma, os resultados calculados a partir dos parâmetros mencionados acima podem ser visualizados na Figura 6.22.

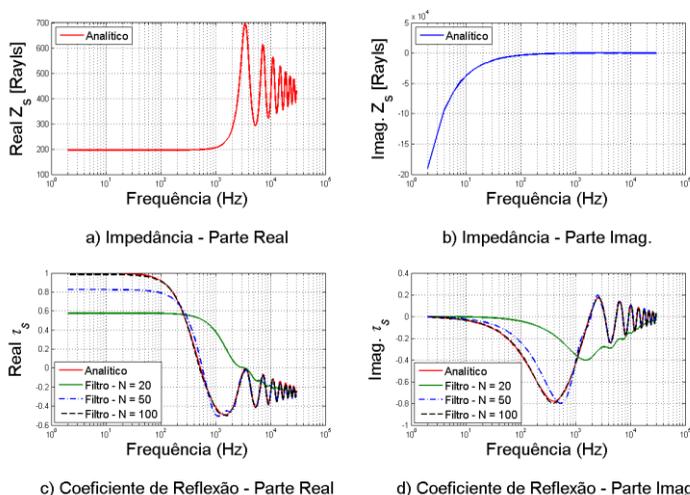


Figura 6.22 - Impedância de superfície e coeficiente de reflexão no domínio da frequência - Melamina.

A Figura 6.23 ilustra os resultados obtidos utilizando o software Comsol e o algoritmo DHM3D_FIR. É possível observar diferenças

significativas entre as curvas, especialmente no resultado para o filtro de ordem $N = 20$, o que demonstra que para o caso do material Melamina, a curva de impedância de superfície apresenta variações mais significativas que aquelas apresentadas pelo material Fictício.

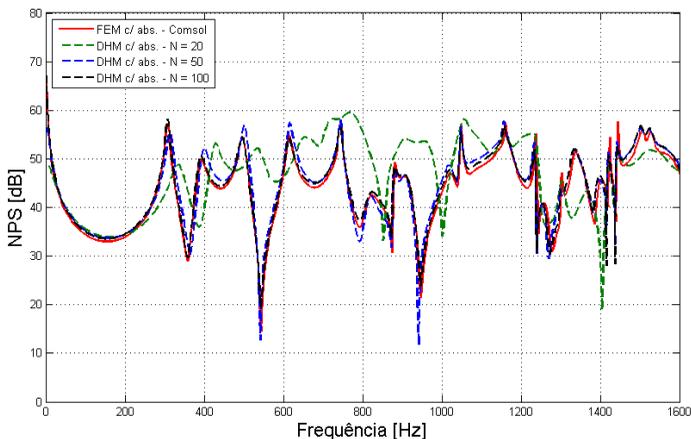


Figura 6.23 - Comparação entre FEM-FD e DHM-TD.

Neste caso, filtros de ordem mais elevada se tornam necessários para que o comportamento do material no domínio do tempo e, por consequência, no domínio da frequência, sejam adequadamente representados e assim reflitam melhores resultados na simulação.

A Figura 6.24 ilustra este fato com maior clareza, uma vez que é possível observar diferenças significativas para o coeficiente de absorção (α_s), especialmente quando se compara o filtro de ordem $N = 20$ com os demais filtros, o que repercute sobremaneira na resposta em frequência $H(K)$ da cavidade, obtida após a aplicação do material.

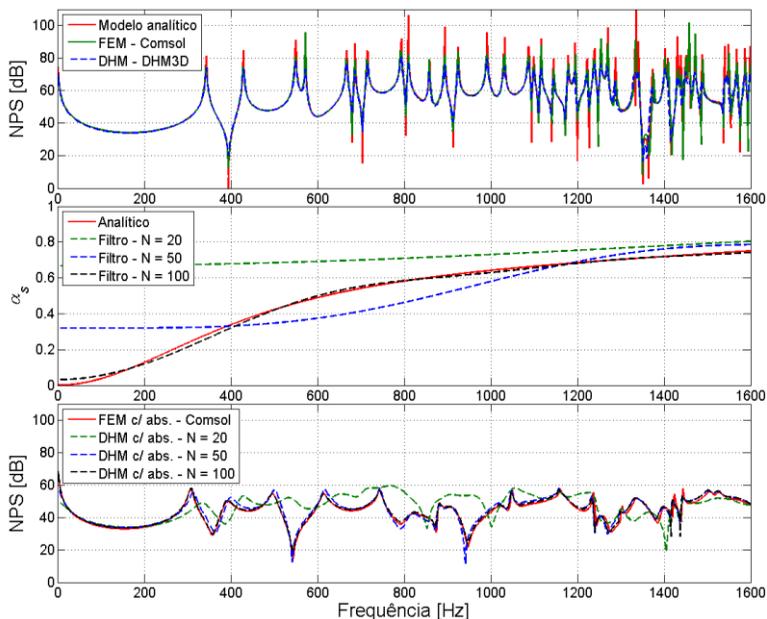


Figura 6.24 - Resposta em frequência antes e depois da aplicação da Melamina.

Em síntese, o conceito chave do procedimento aplicado consiste na obtenção, através de técnicas matemáticas eficientes, coeficientes capazes de descrever o comportamento de materiais no domínio do tempo, tanto em nós pertencentes à fronteira como internos à malha. O método de obtenção destes coeficientes, assim como a quantidade ou ordem utilizada interfere na qualidade da resposta obtida e também no custo computacional. Entretanto, diante dos resultados apresentados neste trabalho, é possível concluir que a abordagem adotada para modelagem do coeficiente de reflexão no domínio do tempo pode ser aplicada com precisão de resultados, assim como sem comprometer demasiadamente o custo computacional.

6.9 Processamento paralelo utilizando GPU

Através do aplicativo MATLAB[®] é possível implementar a solução para processamento paralelo em GPU, entretanto, sem a necessidade de adquirir proficiência na filosofia de programação paralela e nas bibliotecas de programação CUDA[®] de baixo nível. Particularmente, as matrizes principais relacionadas ao cálculo nodal são declaradas como um tipo diferenciado de vetor denominado "GPU array", tornando-se capazes de serem desmembradas e enviadas separadamente para os processadores da GPU. Nesta etapa do trabalho, utilizou-se o modelo Tesla M2075 NVIDIA[®] para a unidade de processamento gráfico, disponível no Instituto Técnico em Acústica de Aachen.

Realizou-se uma sequência de doze simulações parciais, utilizando malhas de dimensões que variam de 60.000 até 17.550.000 nós. Estas simulações parciais são estimativas muito precisas, comprovadas pela prática, que calculam o tempo médio de uma iteração, baseando-se na simulação de cinco iterações e, assim, projetam o tempo total. Destes dados foram extraídas duas curvas, mostradas na Figura 6.25, que ilustram o tempo estimado de processamento utilizando a CPU e a GPU, à medida que o número de nós da malha aumenta.

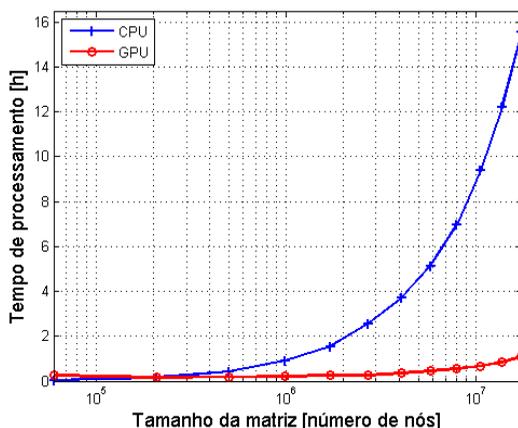


Figura 6.25 - Comparação do tempo de processamento (CPU x GPU).

É possível observar que para os dois primeiros pontos das curvas, o código serial apresenta uma ligeira vantagem em relação ao código para GPU. Este fato pode ser explicado pela transferência necessária de parâmetros da malha que, ocorre entre a memória da CPU e as

memórias da GPU, o que acaba por estabelecer uma maior contribuição relativa ao tempo total de processamento, quanto menor for o tamanho da malha. Do terceiro ponto em diante, o que se observa nas simulações seriais é um crescimento quadrático do tempo de processamento a medida que o tamanho da malha cresce. No caso da GPU este crescimento se mantém praticamente linear com uma inclinação suave, o que demonstra como esta modalidade de processamento se torna mais eficiente em relação ao processamento serial à medida que aumenta o tamanho da malha.

A Figura 6.26 ilustra o fator de aumento no tempo de simulação entre os algoritmos serial e paralelo. Como pode ser constatado, a partir do terceiro ponto, a ordenada apresenta valor maior que um, chegando a um fator de aproximadamente 14 vezes mais rápido. Para se ter uma ideia de quanto este fator representa, a simulação da cavidade "G", indicada na Tabela 6.1, teve seu tempo modificado de 13 h e 50 min na versão serial, para 1 h e 05 min na versão paralelizada em GPU.

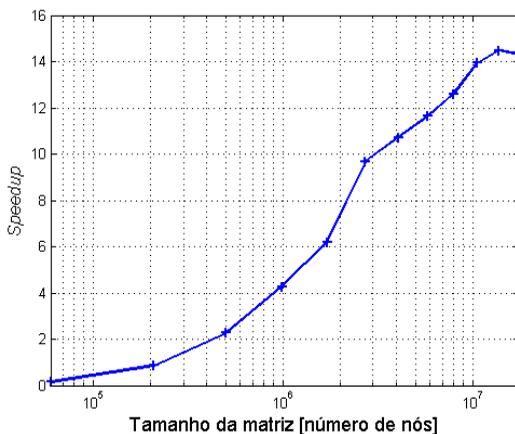


Figura 6.26 - Fator de aumento (*speedup*) na velocidade de processamento ao utilizar a placa GPU.

A execução deste estudo é justificada pelo enorme potencial de paralelização que o método possui (ROSSI, SO, *et al.*, 2008), utilizando a abordagem que fraciona as matrizes para serem processadas em partes menores. Neste contexto, placas gráficas podem contribuir de forma relevante, uma vez que, à medida que o tempo passa, a relação custo-benefício vem se mostrando cada vez melhor.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Diferentemente dos métodos numéricos tradicionais, constatou-se que os conceitos fundamentais utilizados no desenvolvimento do método DHM foram aplicados diretamente no espaço discretizado e, sua formulação, envolve apenas equações algébricas de conservação, sem a necessidade de uma equação diferencial da onda. Entretanto, sabe-se que há uma clara relação do DHM com métodos numéricos tradicionais, mas que ainda carece de um trabalho comparativo específico.

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, identificou-se que as diferenças reais entre os métodos numéricos residem nas variadas técnicas e soluções desenvolvidas para resolver aplicações específicas. Entretanto, conceitualmente, todos os métodos analisados fundamentam-se nas mesmas leis de conservação da Física e neste sentido, em tese, seria possível criar um método genérico que abarcasse o que há de melhor nos "diferentes" métodos em termos de soluções já implementadas e validadas.

A escrita de um algoritmo prático e robusto para soluções de campos acústicos que incluísse, ainda que de forma simplificada, todas as etapas da cadeia de modelagem em Auralização exigiram estudo e dedicação em diversos aspectos. Uma das principais dificuldades enfrentadas foi a representação de diferentes meios, especialmente das fronteiras, uma vez que se buscava uma solução capaz de representar corretamente geometrias arbitrárias, assim como o comportamento de materiais com parâmetros variáveis na frequência.

A descrição de geometrias arbitrárias a partir do padrão de nó utilizado neste trabalho, com formas e dimensões regulares, ainda que possível, implica no aumento considerável da quantidade de nós utilizados na malha e, conseqüentemente, na quantidade de memória requerida e tempo de processamento. Em função disso, buscou-se por tipos de elemento mais versáteis. Diante da complexidade do assunto e da necessidade de abordar outros aspectos da simulação, considerou-se inviável, ao longo do período de trabalho, a implementação de um algoritmo para calcular campos acústicos em geometrias arbitrárias utilizando topologias de nó mais avançadas.

Com relação aos domínios que apresentam mais de um meio de propagação, o que tradicionalmente se faz é a introdução de elementos adicionais na topologia do nó, denominados *stubs*, tal qual explicado no Item 4.4.2.4. Estes elementos simulam a mudança de propriedades do meio, como a densidade, fator de compressibilidade e o fator de perda,

modificando respectivamente a velocidade de propagação da onda e a intensidade das perdas impostas pelo meio.

Os resultados obtidos pelos algoritmos DHM3D_FRA e DHM3D_ESP indicam que os modelos são capazes de representar a mudança de meio de propagação. Entretanto, soluções mais avançadas necessitam ser exploradas com maior profundidade, tais como a utilização de filtros digitais que modelam a impedância variável do meio, de maneira que esta alternativa seja válida também para a análise de meios dispersivos.

Sabe-se que os materiais, devido às suas diferentes propriedades físicas, formas de montagem e utilização, apresentam comportamentos de absorção sonora variáveis no domínio da frequência. As teorias aplicáveis a materiais porosos no domínio da frequência são bastante consolidadas, apresentando diferentes técnicas de medição, assim como modelos analíticos e numéricos que buscam caracterizar o desempenho acústico do material em questão. Entretanto, foi necessário buscar por uma forma eficiente computacionalmente de impor estas características na malha DHM. A alternativa direta é transformar valores já conhecidos da impedância de superfície no domínio da frequência para valores de coeficiente de reflexão e posteriormente para o domínio do tempo utilizando a transformada inversa de Fourier. Entretanto, esta abordagem se mostrou inviável em virtude do grande número de coeficientes. Conforme demonstrado no Item 6.8, para superar esta barreira, coeficientes de filtros FIR foram aplicados com grande sucesso.

Outras técnicas para o projeto de filtros FIR, assim como filtros IIR (*Infinite Impulse Response*), podem e devem ser exploradas com o objetivo de atestar as alternativas que produzem melhores resultados em termos da qualidade da resposta impulsiva do ambiente simulado e também do custo computacional. O assunto de projeto de filtros é complexo e exige atenção especial por parte do pesquisador, possibilitando que diversos trabalhos futuros possam surgir relacionados a este assunto.

Outro aspecto importante na cadeia de simulação é a aplicação de um modelo fisicamente coerente e adaptado ao método DHM para inclusão da direcionalidade de fontes sonoras. Após realizar algumas tentativas, chegou-se à conclusão que para implementá-lo de forma mais adequada e versátil seria necessário incorporar ao algoritmo novos tipos de topologias de nó, capazes de representar a geometria de superfícies vibrantes com maior precisão e, conseqüentemente, a direção e sentido da vibração em um dado ponto.

Tão importante quanto os resultados numéricos, são as soluções capazes de produzir resultados audíveis para uma fonte sonora radiando dentro de uma cavidade arbitrária. Em função disso, buscou-se a validação do método DHM para casos canônicos de fontes interagindo com três cavidades distintas. Neste processo, o algoritmo denominado "Auralization" é responsável pela geração do arquivo de áudio estéreo contendo o resultado da convolução entre a resposta impulsiva simulada da cavidade em dois pontos e o sinal anecóico de uma fonte arbitrária. Diante dos resultados alcançados, conclui-se que os principais parâmetros da cavidade podem ser extraídos pelo método DHM e comparados com os valores obtidos a partir de medições e/ou outros métodos numéricos.

Ao longo deste trabalho, demonstrou-se claramente a viabilidade de implementação computacional e aplicação do método DHM em diversos problemas voltados a Acústica. Os resultados obtidos se tornaram cada vez mais estimulantes à medida que diferentes algoritmos eram incorporados e postos à prova em diferentes casos. Vale lembrar que o processo de validação sempre ocorreu utilizando como referência modelos analíticos e/ou resultados fornecidos pelo método de Elementos Finitos através de programas comerciais como *VA-One*[®] e *Comsol*[®].

A análise criteriosa realizada demonstrou que o estágio atual de desenvolvimento da versão discretizada para o modelo físico de Huygens aplicado em Acústica (DHM-TD) ainda pode ser considerado "acanhado", quando comparado com a versão pioneira para Eletromagnetismo (TLM-TD). Diferenças ainda maiores são verificadas quando se compara o volume de publicações existentes ligadas aos métodos tradicionais, tais como Diferenças Finitas e Elementos Finitos. Entretanto, esta característica se mostrou positiva, uma vez que revelou enorme campo de trabalho.

Muitas foram as dificuldades enfrentadas ao longo da elaboração deste trabalho, desde a compreensão da teoria tradicional do método, uma vez que utiliza conceitos de circuitos elétricos, não usuais para um engenheiro mecânico, assim como pela falta de experiência prévia em métodos com formulação no domínio do tempo. Buscava-se inicialmente uma abordagem apropriada a problemas de Auralização, mas que incluísse também a característica de um bom desempenho computacional. Neste processo, descortinou-se um método eficiente e passível de ser aplicado em uma grande variedade de situações, mas que ainda necessita desenvolver-se em muitos aspectos. Diante do cenário apresentado, algumas virtudes do método DHM-TD, citadas ao longo do trabalho, podem ser reafirmadas:

1. Segundo (HERRING, 1993), o algoritmo é explícito, computacionalmente simples e incondicionalmente estável uma vez que é uma rede passiva de nós;
2. Relativa facilidade de implementação computacional em seu algoritmo básico. O fato de o usuário escrever o próprio código gera grande liberdade de desenvolvimento conforme as necessidades do trabalho se apresentam, sem depender de pacotes fechados de programas comerciais;
3. Por ser um método no domínio do tempo, implica naturalmente em resultados que refletem de forma integral as características vibroacústicas do ambiente modelado. A resposta impulsiva é utilizada para calcular, via transformada de Fourier, a resposta em uma ampla faixa de frequências, tanto em problemas de regime permanente como transiente;
4. O método desenvolve uma abordagem de modelagem numérica diretamente ligada à física do problema, ou seja, sem a necessidade de dedução prévia de uma equação diferencial, como ocorre nos métodos tradicionais. Vale lembrar que o método fundamenta-se nos mesmos princípios físicos que os métodos da equação diferencial da onda;
5. O método é inerentemente capaz de representar os fenômenos associados à propagação de uma onda esférica, tais como reflexão, difração e difusão, diferentemente dos métodos geométricos, tradicionalmente utilizados em acústica de ambientes;
6. As operações matemáticas não exigem inversão de matrizes. Em função disso, o tempo de processamento é geralmente inferior aos métodos tradicionais;
7. É possível visualizar o fenômeno de propagação através de ferramentas gráficas computacionais, pelo fato de ser um método que se processa no domínio do tempo, demonstrando sua grande utilidade didática.

Dentre os diversos temas vislumbrados para estudos futuros, destacam-se:

- Estudo e modelagem de fontes sonoras incluindo sua geometria e direcionalidade;
- Estudo dos tipos de nós atuais e implementação de nós adequados a malhas não ortogonais e não estruturadas;
- Criação de interfaces gráficas para elaboração de malhas, considerando os critérios de espalhamento e propagação inerentes ao diferentes tipos de nó desenvolvidos até o presente momento para o método;
- Estudo comparativo do método DHM com outros métodos numéricos aplicados a Acústica, estabelecendo com clareza e elevado grau de especificidade as diferenças e os pontos em comum;
- Estudo de modelos de fronteiras capazes de reproduzir as características físicas dos materiais (reflexão difusa) e dependentes da frequência (filtros digitais);
- Inclusão do modelo biaural através das respostas impulsivas da cabeça, também denominadas de HRIR (*Head Related Impulse Response*) do receptor;
- Realização de avaliações subjetivas em diferentes situações, comparando os resultados simulados com o resultado de uma fonte radiando em um ambiente real equivalente ao ambiente simulado;
- Aplicação do método em mapeamento e propagação de ondas em ambientes abertos urbanos;
- Utilização de técnicas mais eficientes no processamento digital de sinais e síntese sonora;

- Estudo e desenvolvimento dos modelos existentes para aplicação do método em vibrações e estruturas acopladas com campos acústicos;
- Desenvolvimento de software utilizando linguagens computacionalmente eficientes, considerando as diferentes técnicas de processamento paralelo.

Diante dos aspectos desenvolvidos ao longo da tese, tornaram-se muito evidentes as virtudes computacionais (tempo de processamento e espectro obtido) do método, principalmente no que tange à análise e projeto acústico de ambientes e cavidades de maior dimensão, tais como salas de estudo; música; e até mesmo a possibilidade de simulação de ambientes de grande proporção, como teatros e cinemas. Ficou claro que o campo de trabalho é vasto e inúmeros aspectos ainda necessitam ser explorados em maior profundidade.

Conclui-se, portanto, que o método numérico DHM-TD pode ser explorado como uma ferramenta robusta de pesquisa, projeto e desenvolvimento em diversas aplicações relacionadas à Acústica e Vibrações, incluindo a Síntese Sonora.

8 REFERÊNCIAS

- AHMADIAN, M. **Transmission Line Matrix (TLM) modelling of medical ultrasound**. The University of Edinburgh. Edinburgh, p. 194. 2001.
- AKHTARZAD, S.; JOHNS, P. B. Generalized elements for t.l.m method of numerical analysis. **Proc IEE**, v. 122, p. 1349-1352, dezembro 1975.
- ALMAGUER, H. A. D. **Contribuição ao método da modelagem por linhas de transmissão (TLM) e sua aplicação aos estudos em bioeletromagnetismo**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 160. 2003.
- ARROYO, V. C. **Estudo da Equação de Klein-Gordon Linear**. São José do Rio Preto: Departamento de Matemática/IBILCE/UNESP, 2008.
- BEZDEK, M. et al. Transmission Line Matrix Modeling of Sound Wave Propagation in Stationary and Moving Media. In: BOCK, H.-G., et al. **Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2004**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, v. 8, 2006. p. 315-319. 10.1007/3-540-28073-1_50.
- BILBAO, S. **Wave and Scattering Methods for Numerical Simulation**. [S.l.]: Wiley, 2004.
- BRANDÃO, A. D. S. **Modelagem Acústica da Produção da Voz Utilizando Técnicas de Visualização de Imagens Médicas Associadas a Métodos Numéricos**. Niterói, p. 172. 2011.
- CHAI, L.; KAGAWA, Y. Discrete Huygens' modeling for the characterization of a sound absorbing medium. **Journal of Sound and Vibration**, v. 304, n. 3-5, p. 587-605, 2007.
- CHRISTOPOULOS, C. **The Transmission-Line Modeling Method: TLM**. [S.l.]: Wiley-Blackwell, 1995.
- CHRISTOPOULOS, C. The Transmission-Line Modeling (TLM) Method in Electromagnetics. **Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics**, v. 1, n. 1, p. 1-132, 2006.
- COGAN, D. D.; O'CONNOR, W. J.; PULKO, S. **Transmission Line Matrix (TLM) in Computational Mechanics**. [S.l.]: CRC Press, Inc., 2005.
- COOK, R. D. et al. **Concepts and applications of Finite Element Analysis**. 4th. ed. Wisconsin: John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- DALLA'ROSA, A. **Modelagem e Otimização da Localização de Transmissores em Ambientes Internos de Comunicação Sem Fio**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 157. 2008.
- DUTILLEUX, G.; KRISTIANSEN, U. R. **Implementation of a boundary with diffuse reflection in TLM**. [S.l.]: [s.n.], 2003.

- EL-MASRI, S. Analysis of discontinuities in rectangular ducts and higher order mode excitations using TLM and FEM methods: Research Articles. **International Journal of Numerical Modelling**, v. 17, p. 353-364, 2004.
- ENDERS, P. Huygens' principle and the modelling of propagation. **European Journal of Physics**, v. 17, n. 4, p. 226, 1996.
- ENDERS, P. Huygens' Principle as Universal Model of Propagation. **Latin-American Journal of Physics Education**, v. 3(1), p. 19-32, 2009.
- ENDERS, P.; VANNESTE, C. Huygens' principle in the transmission line matrix method (TLM). Global theory. **International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields**, v. 14, p. 1099-1204, 2001.
- ENDERS, P.; VANNESTE, C. Huygens' principle in the transmission line matrix method (TLM). Local theory. **International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields**, v. 16, p. 1099-1204, 2003.
- FACCIONI, M. **Estudos de modelagem eletromagnética com o método das linhas de transmissão (TLM)**. Universidade Federal de Santa Catarina. [S.l.], p. 192. 2001.
- FAHY, F. E. G. P. **Sound and Structural Vibration**. 2nd. ed. Oxford: [s.n.], 2007.
- FERREIRA, G. D. S. **Modelagem numérica de problemas de compatibilidade eletromagnética utilizando TLM (Transmission-line Modeling Method)**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 171. 1999.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. Quarta edição. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1998.
- GUILLAUME, G. et al. **Use of the transmission line matrix method for the sound propagation modelling in open-space**. [S.l.]: [s.n.]. 2008.
- GUILLAUME, G. et al. Use of the transmission line matrix method for the sound propagation modelling in urban area. **Acoustics 08**, 2008.
- GUILLAUME, G. et al. **TLM OpenCL multi-GPUs implementation**. Proceedings of the Acoustics 2012 Nantes Conference. Nantes, France: [s.n.]. 2012. p. 3249-3255.
- HERRING, J. L. **Developments in the Transmission-Line Modelling Method for Electromagnetic Compatibility Studies**. University of Nottingham. [S.l.]. 1993.

- HOEFER, W. J. R. The Transmission-Line Matrix Method--Theory and Applications. **Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on**, v. 33, n. 10, p. 882-893, 1985.
- HUYGENS, C. **Traité de la lumière**. Paris: [s.n.], 1920.
- IEEE Standard Definitions of Fundamental Waveguide Terms. **ANSI/IEEE Std 146-1980**, p. 1-10, 1980.
- JACOBSEN, F. et al. **Fundamentals of acoustics and noise control**. Ørsted: Technical University of Denmark, 2006.
- JOHNS, P. B. A new mathematical model to the physics of propagation. **Radio and Electronic Engineer**, v. 44, n. 12, p. 657-666, 1974.
- JOHNS, P. B. A Symmetrical Condensed Node for the TLM Method. **Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on**, v. 35, n. 4, p. 370-377, 1987.
- JOHNS, P. B.; BEURLE, R. L. Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix. **Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of**, v. 118, p. 1203-1208, 1971.
- KAGAWA, Y. Discrete Huygens' Modelling and Simulation for Wave Propagation. **Lecture Notes in Computer Science**, v. 3398/2005, p. 1-11, 2005.
- KAGAWA, Y. et al. Discrete Huygens' Model approach to sound wave propagations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 3, p. 419-444, 1998.
- KAGAWA, Y. et al. Discrete Huygens' Model approach to sound wave propagations--Reverberation in a room, sound source identification and tomography in time reversal. **Journal of Sound and Vibration**, v. 225, n. 1, p. 61-78, 1999.
- KAGAWA, Y. et al. Discrete Huygens' Modelling approach to wave propagations in a homogeneous elastic field. **Journal of Sound and Vibration**, v. 255, n. 2, p. 323-335, 2002.
- KAGAWA, Y.; TSUCHIYA, T. Discrete Huygens' Modelling approach to wave propagations in velocity varying environments. **Journal of Sound and Vibration**, v. 246(3), n. 2, p. 419-439, 2001.
- KOWALCZYK, K. A. W. M. V. Formulation of Locally Reacting Surfaces in FDTD/K-DWM Modelling of Acoustic Spaces. **Acta Acustica united with Acustica**, Belfast, v. 94, p. 891-906, 2008.
- KRON, G. Equivalent circuits to represent the electromagnetic field equations. **Phys. Rev.**, v. 69, p. 126-128, August 1943.
- KUTTRUFF, H. **Room Acoustics**. 4. ed. [S.l.]: Taylor & Francis, 2001.

- MAREZE, P. H. **Análise da influência da microgeometria na absorção sonora de materiais porosos de estrutura rígida**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 285. 2013.
- MELO, A. C. S. D. **Transposição Didática do Modelo de Huygens: uma proposta para a física escolar**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 108-109. 2010.
- MENZER, F. et al. Nonlinear modelling of double and triple period pitch breaks in vocal fold vibration. **Logopedics Phoniatrics Vocology**, v. 31, p. 36-42, 2006.
- MORENTE, J. A. et al. Group and phase velocities in the TLM-symmetrical-condensed node mesh. **Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on**, v. 42, n. 3, p. 514-517, 1994.
- MORENTE, J. A. et al. Dispersion analysis for a TLM mesh of symmetrical condensed nodes with stubs. **Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on**, v. 43, n. 2, p. 452-456, 1995.
- MORENTE, J. A.; PORTI, J. A.; KHALLADI, M. Absorbing boundary conditions for the TLM method. **Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on**, v. 40, n. 11, p. 2095-2099, 1992.
- O'CONNOR, W. J. TLM model of waves in moving media. **International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields**, v. 15(2), p. 205-214, 2002.
- O'CONNOR, W. J. Wave speeds for a TLM model of moving media. **International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields**, v. 15(2), p. 195-203, 2002.
- O'CONNOR, W. J. TLM models of waves in moving media: refinements and dispersion analysis. **International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields**, v. 16, p. 443-451, 2003.
- O'CONNOR, W. J.; CLUNE, F. J. TLM-based solutions of the Klein-Gordon equation (Part I). **Int. J. Numer. Model.**, v. 14, n. 5, p. 439-449, 2001.
- O'CONNOR, W. J.; CLUNE, F. J. TLM-based solutions of the Klein-Gordon equation (Part II). **Int. J. Numer. Model.**, v. 15, n. 2, p. 215-220, 2002.
- O'CONNOR, W.; CAVANAGH, F. Transmission line matrix acoustic modelling on a PC. **Applied Acoustics**, v. 50, n. 3, p. 247-255, 1997.
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Discrete-time signal processing**. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., 1989.
- PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. [S.l.]: Taylor&Francis, 1980.

- PORTÍ, J. A.; MORENTE, J. A. A three-dimensional symmetrical condensed TLM node for acoustics. **Journal of Sound and Vibration**, v. 241, n. 2, p. 207-222, 2001.
- PORTI, J. A.; MORENTE, J. A. TLM method and acoustics. **International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields**, v. 14, n. 2, p. 171-183, 2001.
- PORTI, J. A.; MORENTE, J. A.; CARRION, M. C. Simple derivation of scattering matrix for TLM nodes. **Electronics Letters**, v. 34, n. 18, p. 1763-1764, 1998.
- REYNOLDS, D. D. **Engineering Principles of Acoustics**. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1981.
- ROSSI, F. V. et al. **Massively Parallel Two-Dimensional TLM Algorithm on Graphics Processing Units**. IEEE. [S.l.]: [s.n.]. 2008. p. 153-156.
- ROSSI, F. V.; FICHTNER, N.; RUSSEK, P. Massively Parallel Two-Dimensional TLM Algorithm on Graphics Processing Units. **Microwave Symposium Digest**, p. 153-156, 2009.
- ROSSI, F.; SO, P. **Parallelized Computational Electromagnetics TLM Algorithms on NVIDIA Graphics Processing Units**. PACRIM 09. [S.l.]: [s.n.]. 2009. p. 814-819.
- SADIKU, M. N. **Numerical Techniques in Electromagnetics, Second Edition**. 2. ed. [S.l.]: CRC, 2000.
- SADIKU, M. N. O.; AGBA, L. C. A simple introduction to the transmission-line modeling. **Circuits and Systems, IEEE Transactions on**, v. 37, n. 8, p. 991-999, 1990.
- SCOTT, G. I. J.; COGAN, D. D. **Improved Mesh Conforming Boundaries for the TLM Numerical Method**. [S.l.]: [s.n.]. 2006.
- SEWEL, P. et al. Transmission-Line Modeling Using Unstructured Triangular Meshes. **IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES**, v. 52, p. 1490-1497, maio 2004.
- SEWEL, P. et al. Transmission-Line Modeling Using Unstructured Tetrahedral Meshes. **IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES**, v. 53, p. 1919-1928, maio 2005.
- SHIN, K.; HAMMOND, J. **Fundamentals of Signal Processing for Sound and Vibration Engineers**. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, 2008.
- SILVEIRA, J. L. **Modelagem numérica 3D de problemas de compatibilidade eletromagnética utilizando o método TLM-TD**. Universidade Federal de Santa Catarina. [S.l.]. 2002.

SO, P. **Transmission line matrix algorithms for high performance computing hardware with graphics processing units.** IEEE. [S.l.]: [s.n.]. 2011. p. 929-930.

TIZIANEL, J. et al. Transport parameters and sound propagation in an air-saturated sand. **JOURNAL OF APPLIED PHYSICS**, v. 86, novembro 1999. ISSN 10.

TREMKIC, V. **The Development and Characterization of Advanced Nodes for the TLM Method.** University of Nottingham. [S.l.]. 1995.

TREMKIC, V.; CHRISTOPOULOS, C.; BENSON, T. M. Simple and Elegant Formulation of Scattering in TLM Nodes. **Electronics Letters**, v. 29, p. 1651-1652, 1993.

TSUCHIYA, T. Numerical Simulation of Sound Wave Propagation with Sound Absorption Using Digital Huygens' Model. **Japanese Journal of Applied Physics**, v. 46, n. 7B, p. 4809-4812, 2007.

VIGGEN, E. M. **The Lattice Boltzmann Method with Applications in Acoustics.** Department of Physics - NTNU. Trondheim, p. 1-3. 2009.

VORLÄNDER, M. **Auralization: Fundamentals of Acoustics, Modelling, Simulation, Algorithms and Acoustic Virtual Reality.** 1. ed. Aachen: Springer, v. 1, 2007.

WILDE, A.; ECCARD, P.-C.; O'CONNOR, W. Modeling acoustic transducer surface waves by transmission line matrix method, 2001.

YIYU, T. et al. A real-time sound field renderer based on digital Huygens' model. **Journal of Sound and Vibration**, 330, 2011. 4302-4312.

9 APÊNDICE

9.1 Fluxograma do algoritmo DHM-TD

Este apêndice tem como objetivo descrever de forma geral o funcionamento do conjunto de rotinas desenvolvidas utilizando o software comercial MATLAB[®]. Este algoritmo consiste em uma rotina principal denominada "DHM_main" e dois conjuntos de sub-rotinas denominados "Solver" e "Auxiliary", conforme ilustrado na Figura 9.1:

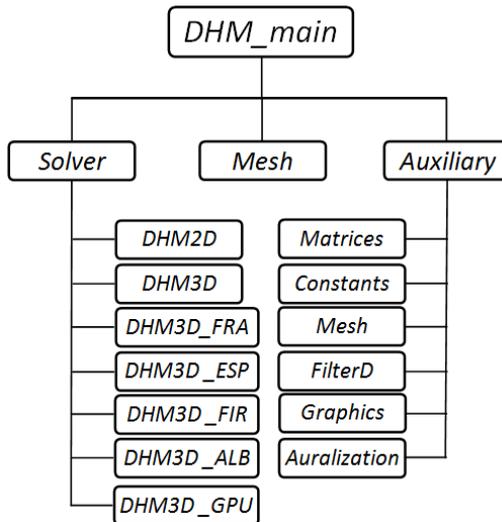
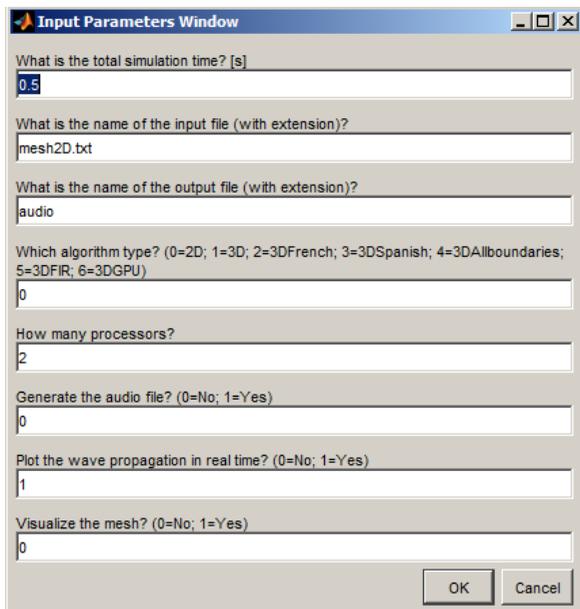


Figura 9.1 - Estrutura geral do algoritmo DHM-TD.

A rotina principal tem como função iniciar o processo de simulação e reter as janelas de entrada de dados. A primeira janela, ilustrada na Figura 9.2, requisita o preenchimento dos dados de entrada, tais como o tempo de simulação do fenômeno, a malha que será utilizada, nome do arquivo de áudio de saída (para Auralização), determinação e direcionamento de qual será o algoritmo de solução (*solver*), número de processadores (quando aplicável), se deseja visualizar a simulação em tempo real e se deseja visualizar as regiões da malha antes de iniciar a simulação.



Input Parameters Window

What is the total simulation time? [s]
0.5

What is the name of the input file (with extension)?
mesh2D.txt

What is the name of the output file (with extension)?
audio

Which algorithm type? (0=2D; 1=3D; 2=3DFrench; 3=3DSpanish; 4=3DAllboundaries; 5=3DFIR; 6=3DGPU)
0

How many processors?
2

Generate the audio file? (0=No; 1=Yes)
0

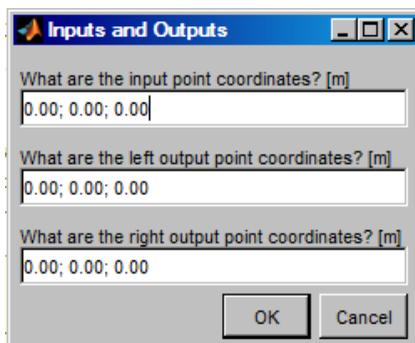
Plot the wave propagation in real time? (0=No; 1=Yes)
1

Visualize the mesh? (0=No; 1=Yes)
0

OK Cancel

Figura 9.2 - Janela de entrada de dados.

A segunda janela de entrada de dados tem como objetivo solicitar ao usuário da rotina os pontos de entrada e saída (sensores), conforme ilustrado na Figura 9.3, onde serão coletados os valores de pressão sonora necessários para a obtenção da resposta impulsiva $h(k)$ e posterior cálculo da função de transferência $H(K)$.



Inputs and Outputs

What are the input point coordinates? [m]
0.00; 0.00; 0.00

What are the left output point coordinates? [m]
0.00; 0.00; 0.00

What are the right output point coordinates? [m]
0.00; 0.00; 0.00

OK Cancel

Figura 9.3 - Janela com os pontos de entrada e saída.

O primeiro conjunto de sub-rotinas é formado pelos arquivos: DHM2D; DHM3D; DHM3D_FRA; DHM3D_ESP; DHM3D_FIR; DHM3D_ALB; DHM3D_GPU. Cada um destes arquivos contém modelos utilizados em diferentes aplicações. Descrevendo de maneira sucinta, tem-se:

- DHM2D: Modelo inspirado em artigo de autor francês que implementa um nó ortogonal bidimensional capaz de simular meios não homogêneos e com perdas. Pode ser utilizado em malhas com fronteiras internas e externas, aos quais se estabelecem treze tipos de região possíveis;
- DHM3D: Modelo de nó ortogonal tridimensional sem perdas para malhas com fronteiras externas;
- DHM3D_FRA: Modelo inspirado no artigo (GUILLAUME, PICAUTA, *et al.*, 2008) que implementa um nó ortogonal tridimensional para meios não homogêneos e com perdas. Pode ser utilizado em malhas com fronteiras internas e externas;
- DHM3D_ESP: Modelo inspirado no artigo (PORTI e MORENTE, 2001) que implementa um nó SCN acústico para meios não homogêneos e com perdas. Pode ser utilizado em malhas com fronteiras internas e externas;
- DHM3D_FIR: Implementa nó ortogonal tridimensional sem perdas para malhas com fronteiras externas modeladas por coeficientes de reflexão variáveis no tempo (filtro FIR);
- DHM3D_ALB: Modelo de nó ortogonal tridimensional sem perdas. Pode ser utilizado em malhas com fronteiras internas e externas, aos quais se estabelecem vinte e sete tipos de região possíveis;
- DHM3D_GPU: Modelo de nó ortogonal tridimensional sem perdas, porém com algoritmo destinado ao processamento paralelo em GPU.

Vale lembrar que todos os modelos descritos acima podem ser integrados em uma única rotina que incorpora todas as características dos diferentes modelos. Entretanto, ao longo deste trabalho estabeleceu-se uma separação para efeito didático e também para facilitar os testes e modificações no dia a dia de trabalho.

O segundo conjunto de sub-rotinas é denominado "Auxiliary", sendo formado pelos arquivos: Matrices; Constants; Mesh; FilterD; Graphics; Auralization. Estas rotinas podem ser solicitadas em paralelo conforme a necessidade da aplicação. Descrevendo de maneira sucinta cada uma das sub-rotinas, temos:

- Matrices: Carrega todas as matrizes principais, utilizando como fonte de dados o arquivo com os dados da malha;
- Constants: Carrega e calcula todas as constantes utilizadas na simulação, assim como aglutina em uma única variável as diferentes regiões que se enquadram na mesma categoria;
- Mesh: Define diferentes formatos de matriz para definir a malha, permitindo visualizá-la em tempo real;
- FilterD: Calcula os coeficientes do filtro FIR utilizando diferentes métodos implementados pelo software comercial MATLAB[®];
- Graphics: Gera os gráficos com os resultados de saída da simulação e comparações com resultados obtidos de outros programas;
- Auralization: Realiza o pós-processamento das respostas impulsivas calculadas pela simulação DHM com objetivo de realizar a convolução com um sinal anecóico e assim gerar um arquivo de áudio, como determinada fonte soará no ambiente simulado.

Além das rotinas auxiliares, utiliza-se também um arquivo em formato texto, crucial para o cálculo da resposta impulsiva, uma vez que contém os dados relativos à malha e as excitações. Abaixo é possível verificar um exemplo de malha bidimensional utilizada no

processamento do algoritmo DHM2D. O texto em **negrito itálico** não está presente no arquivo original da malha.

As primeiras três linhas do arquivo dizem respeito a definição do tamanho do nó (elemento) em cada uma das direções cartesianas. Em seguida é necessário definir o tipo, formato, frequência e fase da excitação, porta de incidência, assim como quais são os nós de aplicação. Os valores máximos e mínimos definidos dizem respeito a um conjunto ou intervalo de nós na matriz que define a malha, e não a coordenada cartesiana. A coordenada cartesiana é calculada ao requisitar a execução da sub-rotina "Mesh".

1E-2 **Tamanho do nó - direção "x"**

1E-2 **Tamanho do nó - direção "y"**

1E-2 **Tamanho do nó - direção "z"**

1 **Define o número de excitações e seus parâmetros**

Tipo	Form.	X_min	X_max	Y_min	Y_max	Z_min	Z_max	Int.	Freq.	Fase	Porta
002	002	001	001	095	105	002	002	1E2	3E3	0	1

9 **Define o número de regiões e seus parâmetros**

X_min	X_max	Y_min	Y_max	Z_min	Z_max	Densid.	Comp.	Abs.	Ref.	Reg.
002	199	002	199	001	002	1.204E0	1.42E5	0.00	1.00	1
001	001	002	199	001	002	1.204E0	1.42E5	0.00	0.00	2
200	200	002	199	001	002	1.204E0	1.42E5	0.00	0.00	3
002	199	001	001	001	002	1.204E0	1.42E5	0.00	0.00	4
002	199	200	200	001	002	1.204E0	1.42E5	0.00	0.00	5
001	001	200	200	001	002	1.204E0	1.42E5	0.00	0.00	6
001	001	001	001	001	002	1.204E0	1.42E5	0.00	0.00	7
200	200	001	001	001	002	1.204E0	1.42E5	0.00	0.00	8
200	200	200	200	001	002	1.204E0	1.42E5	0.00	0.00	9

Na terceira e última parte do arquivo são definidas as regiões da malha e seus parâmetros. Além dos valores máximos e mínimos das regiões, define-se também a densidade volumétrica, coeficiente de compressibilidade, fator de perda, coeficiente de reflexão e finalmente o tipo de região. Vale a pena lembrar que determinados parâmetros são aplicáveis somente a determinados tipos de região.

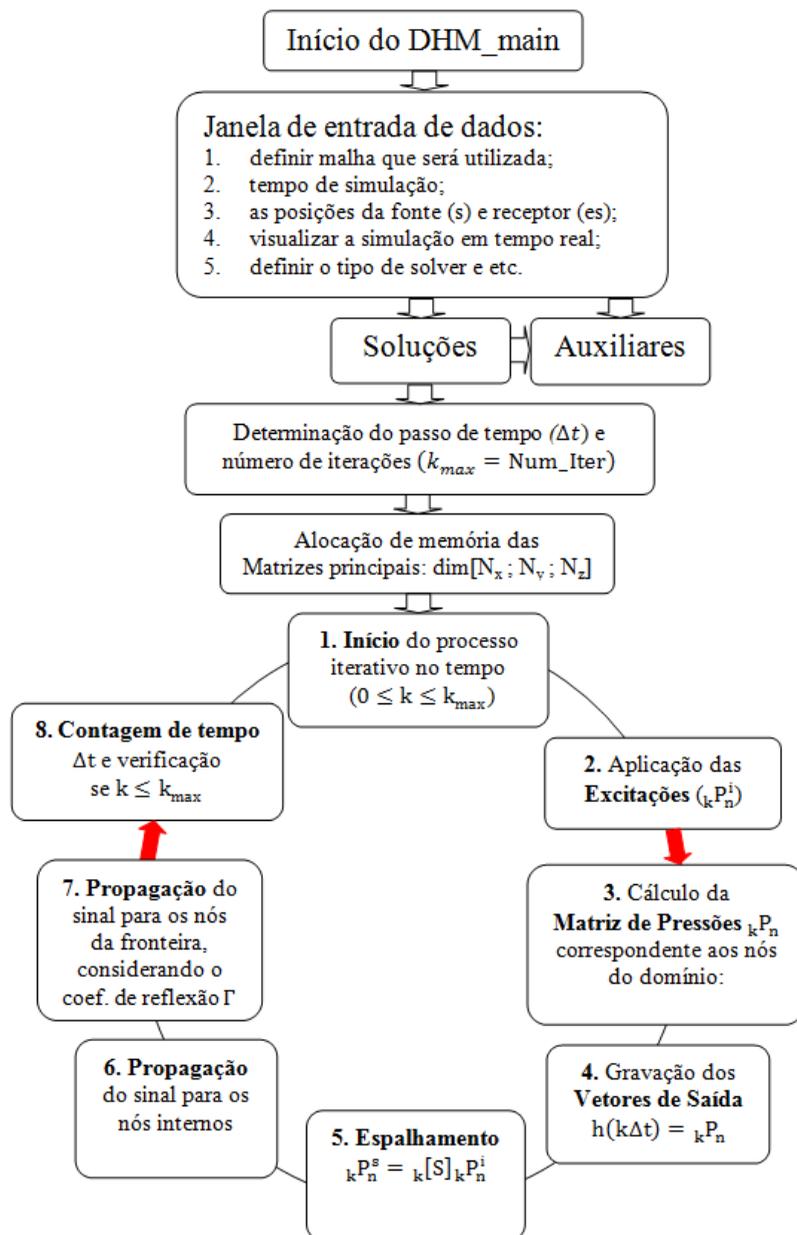


Figura 9.4 - Fluxograma ao algoritmo básico DHM-TD.

10 ANEXO: APLICAÇÕES EXTRAÍDAS DA LITERATURA

10.1 Conjunto canal e cavidade

Primeiramente é importante salientar que todos os dados sobre as simulações, resultados e figuras aqui apresentados foram extraídos do artigo (BEZDEK, ZHU, *et al.*, 2006). Este exemplo diz respeito a um pistão quadrado de dimensões 10 x 10 mm, posicionado no início de um canal que se estende até uma cavidade de dimensões 75 x 75 x 37,5 mm, conforme ilustrado pela Figura 10.1.

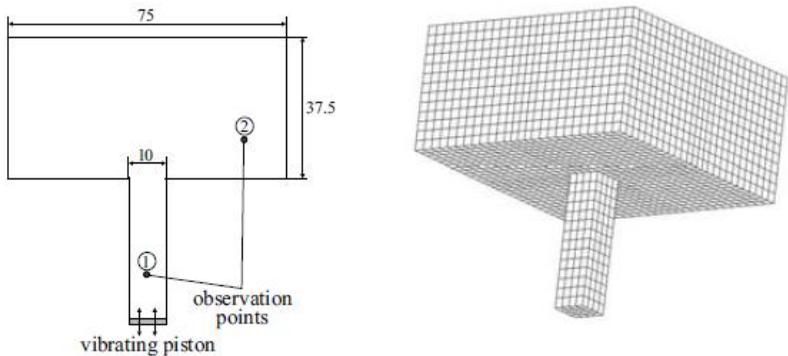


Figura 10.1 - Corte planar da cavidade e seu modelo FEM.

O fluido em questão é a água, ao qual se adota uma velocidade de fase de 1500 m/s. Este pistão vibra uniformemente na direção normal e radia pulsos ultrassônicos com frequência de 100 kHz na direção axial. Estes pulsos propagam-se através do canal e quando encontram a cavidade, ocorre o fenômeno de difração. Na Figura 10.2, é mostrada a resposta no tempo da pressão acústica em dois pontos de observação utilizando o método TLM e comparada com os resultados obtidos via FEM. Constata-se um elevado grau de concordância.

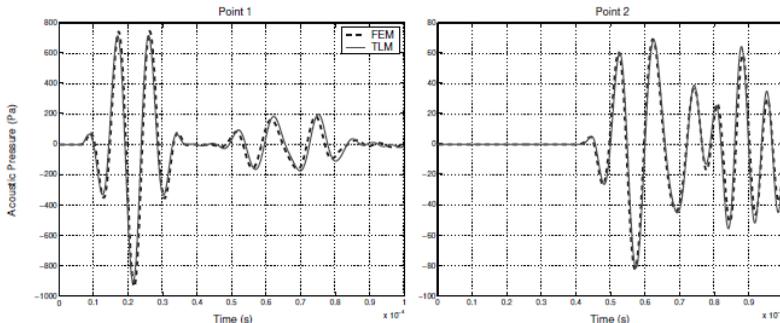


Figura 10.2 - Comparação entre os resultados via TLM e FEM.

Conforme (BEZDEK, ZHU, *et al.*, 2006), para ambos os pontos, o tamanho do elemento é igual a $\lambda/30$, sendo λ o comprimento de onda correspondente a frequência de 100 kHz propagando-se na água. A simulação que utiliza o método FEM, consumiu cerca de 960 Mbytes de memória, enquanto a simulação TLM utilizando um código elaborado em MATLAB[®], consumiu apenas 80 Mbytes.

10.2 Efeito de absorção sonora do solo

Os dados sobre as simulações, resultados e figuras aqui apresentados foram extraídos do artigo (GUILLAUME, PICAUTA, *et al.*, 2008). Este trabalho teve como objetivo prever o efeito da absorção em uma onda se propagando logo acima do solo, através do cálculo do nível de pressão sonora, em relação ao valor obtido se a onda estivesse em um campo livre, para uma sequência de 729 pontos distribuídos ao longo de 50 metros, considerando um meio homogêneo e não dissipativo.

Primeiramente, simulou-se a propagação do som sobre uma superfície perfeitamente reflexiva. Para tal, utilizou-se uma fonte pontual localizada numa altura acima do solo de 14 cm, que emitia uma onda harmônica com frequência de 500 Hz. O tamanho do elemento e passo de tempo utilizados foram, respectivamente, 7 cm e 0,14 ms. Calculou-se o NPS (Nível de Pressão Sonora) equivalente (L_{eq}) considerando um período de tempo $t = 0,2$ s após a passagem da frente de onda pelo último ponto da sequência.

A Figura 10.3 apresenta uma comparação inicial entre um modelo analítico e o modelo numérico utilizando o método TLM. O modelo analítico simula o solo como um material poroso com resistividade

específica do ar muito elevada ($\sigma = 10^7$ kPa.s.m⁻²), com o intuito de simular um terreno perfeitamente reflexivo.

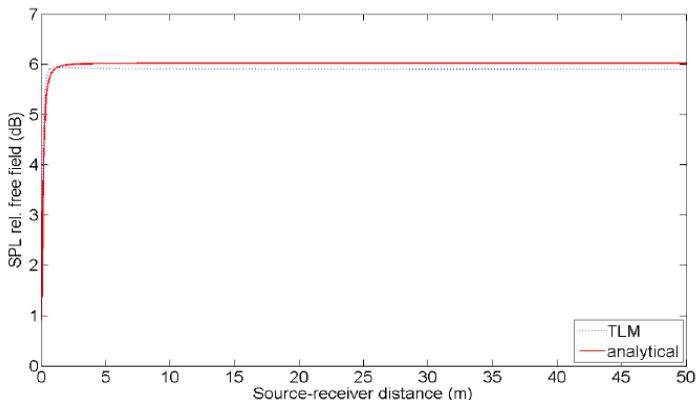


Figura 10.3 - Nível de Pressão Sonora relativa ao campo livre para um terreno com resistividade específica do ar igual a 10^7 kPa.s.m⁻².

Num segundo momento, implementou-se uma nova condição de fronteira proposta para o TLM e verificou-se a propagação da onda sonora sob um solo com impedância. A fonte sonora adotada foi uma onda harmônica de 250 Hz, sendo a mesma sequência de 729 receptores, porém agora localizados 5 m acima do solo. Os resultados foram obtidos considerando resistividades específicas do ar iguais a 300 kPa.s.m⁻² e 20.000 kPa.s.m⁻².

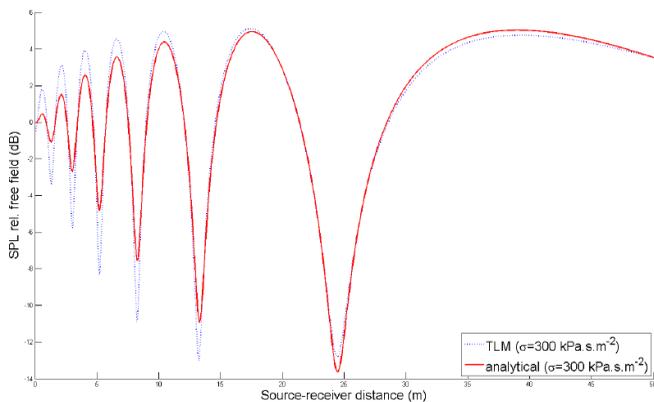


Figura 10.4 - Nível de Pressão Sonora relativa ao campo livre para um terreno com resistividade específica do ar igual a 300 kPa.s.m⁻².

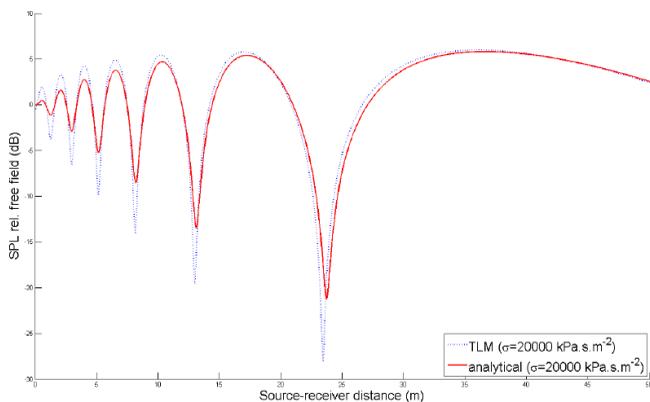


Figura 10.5 - Nível de Pressão Sonora relativa ao campo livre para um terreno com resistividade específica do ar igual a $20.000 \text{ kPa.s.m}^{-2}$.

10.3 Ressonador de Helmholtz

Os resultados e figuras aqui apresentados foram extraídos do artigo (PORTI e MORENTE, 2001). O problema em questão diz respeito a um ressonador de Helmholtz³⁸ cilíndrico conectado em um tubo longo com diâmetro $d_d = 4,859 \text{ cm}$, conforme ilustrado pela Figura 10.6.

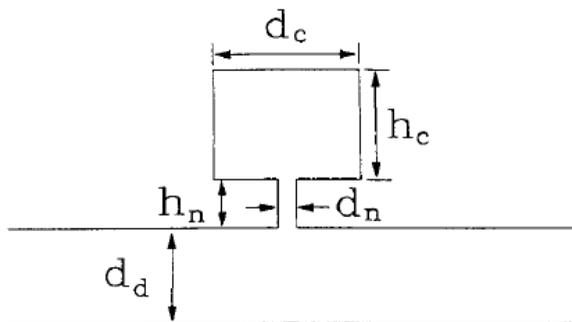


Figura 10.6 - Tubo com ressonador de Helmholtz.

³⁸ O ressonador de Helmholtz é um sistema composto por um volume de ar confinado em uma cavidade e um gargalo. O ar contido no gargalo oscila, como se fosse a massa de um sistema massa-mola, encontrando a resistência imposta pela massa de ar da cavidade que faz o papel da rigidez da mola.

Este ressonador é formado por uma cavidade cilíndrica com diâmetro $d_c = 15,33$ cm e altura $h_c = 24,38$ cm, sendo conectado ao tubo maior através de um pescoço de diâmetro $d_n = 4,044$ cm e altura $h_n = 8,5$ cm. Utilizaram-se nós de lados iguais, $\Delta l = 0,5055$ cm, e passo de tempo $\Delta t = 8,8172 \times 10^{-12}$ s. Uma onda plana de um pulso gaussiano é utilizado como forma de excitação do tubo e a condição de fronteira do tipo PML é imposta em ambas as terminações do tubo.

O valor analítico da perda de transmissão do sistema, definida como a razão em dB da pressão sonora incidente pela pressão sonora transmitida, é utilizado como referência para o resultado obtido via TLM, conforme ilustra a Figura 10.7.

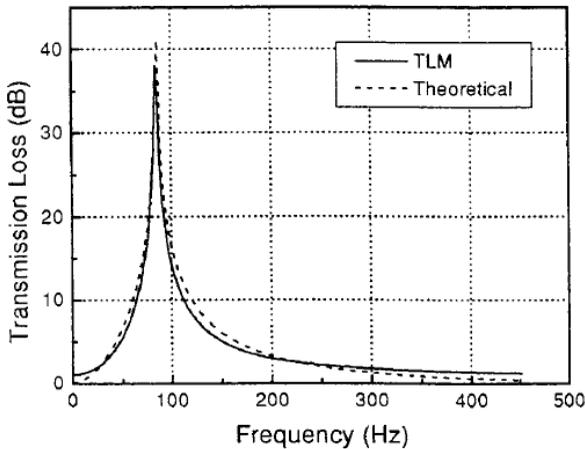


Figura 10.7 - Perda de transmissão imposta pelo ressonador de Helmholtz.

Este resultado mostra um excelente grau de concordância entre a perda de transmissão obtida utilizando o método TLM e o modelo analítico considerado. Como esperado, o ressonador de Helmholtz elimina a propagação da onda em frequências próximas a ressonância, com níveis de atenuação próximos a 40 dB.