

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Diego Emilio Zanellato

**EFEITOS DE FLUTUAÇÃO DO VÁCUO NA
ELETRODINÂMICA QUÂNTICA**

Florianópolis

2013

Diego Emilio Zanellato

**EFEITOS DE FLUTUAÇÃO DO VÁCUO NA
ELETRODINÂMICA QUÂNTICA**

Dissertação submetida ao Programa
de Pós-Graduação em Física para a
obtenção do Grau de Mestre em Física.
Orientador: Prof. Dr. Jeferson de
Lima Tomazelli

Florianópolis

2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Zanellato, Diego Emilio

Efeitos de flutuação do vácuo na eletrodinâmica quântica /
Diego Emilio Zanellato ; orientador, Jeferson de Lima
Tomazelli - Florianópolis, SC, 2013.
170 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.
Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Ação efetiva. 3. Lagrangiana efetiva de
Euler-Kockel-Heisenberg. 4. Energia de ponto zero . 5.
Efeito Casimir . I. Tomazelli, Jeferson de Lima. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Física. III. Título.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer especialmente:

ao Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli pela orientação e pela grande contribuição à minha formação durante a elaboração deste trabalho.

Aos meus pais pelo apoio incondicional.

À minha namorada Vanessa pelo apoio, paciência e pela elaboração das figuras.

Aos meus colegas de grupo Gabriel, Renan e Gerson pela amizade e pelas discussões enriquecedoras durante as nossas reuniões semanais.

Aos meus colegas da sala da mecânica estatística e do departamento de física pela amizade e momentos de descontração.

À CAPES e ao CNPq pelo fuporte financeiro.

*To be conscious that you are ignorant is
a great step to knowledge.*

Benjamin Disraeli

RESUMO

Nesta dissertação, elaboramos um estudo comparativo entre duas abordagens conceitualmente distintas da teoria efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg. Na representação de interação para a eletrodinâmica quântica (QED), identificamos a contribuição para o espalhamento Halpern que, a baixas energias, leva à densidade lagrangiana efetiva correspondente. Posteriormente, no contexto da física de subtrações de Weiskopf, recuperamos este resultado, na representação de Heisenberg, através da variação da energia de ponto zero fermiônica causada pela presença de um campo eletromagnético externo. Para controlarmos as divergências no ultravioleta na densidade de energia do vácuo, utilizamos o método de regularização de Pauli-Villars-Rayski. Concluímos então que as duas abordagens são equivalentes no limite de baixas energias.

Palavras-chave: ação efetiva, energia de ponto zero, efeito Casimir, lagrangiana efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg, regularização de Pauli-Villars.

ABSTRACT

In this dissertation, we elaborate a comparative study between two conceptually distinct approaches to Euler-Heisenberg-Kockel effective theory. In the interaction Picture for quantum electrodynamics (QED), we identify the contribution to Halpern scattering, which, at low energies, leads to the corresponding effective lagrangian density. In the sequence, we retrieve this result, in the Heisenberg Picture, through the variation in the fermion zero-point energy due to the presence of an external electromagnetic field. In order to circumvent the ultraviolet divergencies in the vacuum energy density, we employ the Pauli-Villars-Rayski regularization method. We then conclude that the two approaches are equivalent in the low-energy limit.

Keywords: effective action, zero-point energy, Casimir effect, Euler-Kockel-Heisenberg effective Lagrangian, Pauli-Villars regularization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Placa móvel em duas situações distintas.....	74
Figura 2	Cavidade retangular.....	149

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	19
2 EFEITOS MACROSCÓPICOS DO VÁCUO	23
2.1 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA	23
2.2 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO DE RADIAÇÃO	29
2.2.1 Quantização no Gauge de Coulomb	33
2.2.2 Quantização Covariante	45
2.2.3 O Propagador do Fóton	53
2.3 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO DE DIRAC	56
2.3.1 Representação de Número para Férmions	56
2.3.2 Equação de Dirac	58
2.3.3 O Propagador Fermiônico	67
2.3.4 Interação Eletromagnética e Invariância de Gauge .	71
2.4 EFEITO CASIMIR	73
3 CAMPOS INTERAGENTES	83
3.1 A REPRESENTAÇÃO DE INTERAÇÃO	83
3.2 A MATRIZ S.....	91
3.2.1 O Teorema de Wick	94
3.3 ESPALHAMENTO FÓTON-FÓTON	98
4 LAGRANGIANA EFETIVA PARA A QED EM (3+1) DIMENSÕES	129
4.1 AÇÃO EFETIVA	129
4.1.1 Lagrangiana E-K-H: Caso $E=0$	137
4.1.2 Lagrangiana E-K-H: Caso Geral.....	142
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	147
Apêndice A CAVIDADE RESSONANTE RETANGULAR	149
Apêndice B ELÉTRON EM UM CAMPO MAGNÉTICO	155
REFERÊNCIAS	167

1 INTRODUÇÃO

No início dos anos de 1930, um dos resultados mais surpreendentes da teoria do pósitron de Dirac, além da possibilidade de conversão de energia eletromagnética em matéria, através da produção de pares elétron-pósitron em campos eletromagnéticos suficientemente intensos, foi o espalhamento da radiação eletromagnética, quantizada, por outros fótons ou por um campo eletromagnético externo. Estes últimos conhecidos como espalhamento Halpern (HALPERN, 1934) e Delbrück (DELBRÜCK, 1933), respectivamente.

Tais efeitos não-lineares, que não eram previstos pela eletrodinâmica clássica, foram estudados por Euler e Kockel (EULER; KOCKEL, 1935) e Heisenberg e Euler (HEISENBERG; EULER, 1936), que derivaram uma densidade lagrangiana efetiva, estendendo a teoria de Maxwell a tais efeitos. Estes trabalhos foram posteriormente refinados por Weisskopf (WEISSKOPF, 1936), o primeiro a introduzir a idéia de renormalização da carga elétrica, no escopo da então chamada “física das subtrações”. De fato, Weisskopf interpretando o vácuo como um “mar” de elétrons, lidou com as densidades de carga e energia do vácuo fermiônico, ambas divergentes.

Quantidades divergentes associadas ao vácuo não eram novidade na época. Em 1926, quando Born, Heisenberg e Jordan (BORN; HEISENBERG; JORDAN, 1926), em um dos artigos fundadores da teoria quântica, quantizaram o campo eletromagnético, a nova eletrodinâmica que surgira já previa uma energia infinita para o vácuo, a chamada energia de ponto zero.

A ocorrência de energias de ponto zero divergentes é uma característica inerente à teoria quântica de campos. Sua origem deve-se ao fato de que a quantização canônica não estabelece univocamente o ordenamento entre operadores que não comutam entre si.

De um modo geral, esta ambiguidade é resolvida pela imposição do ordenamento normal de operadores. No caso particular do operador hamiltoniano, o ordenamento normal implica na subtração da energia de ponto zero, isto é, o valor esperado no vácuo do hamiltoniano ordenado normalmente é nulo, por definição. Os valores esperados de outros observáveis físicos, tais como carga elétrica e momento linear também se anulam no vácuo. Argumenta-se que o valor absoluto da energia é desprovido de significado físico, ao contrário de sua variação; neste sentido, o ordenamento normal equivaleria a uma mudança na origem da escala de energia.

Entretanto, Casimir (CASIMIR, 1948) previu em 1948 que duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras no vácuo, atrairiam-se. Casimir obteve esta força atrativa calculando a variação da energia de ponto zero do campo eletromagnético causada pela imposição de condições de contorno sobre as placas dispostas no vácuo. Em outras palavras, a energia do vácuo sofreria flutuações e estas variações, além de finitas, poderiam se manifestar macroscopicamente.

A primeira evidência experimental do efeito Casimir surgiu em 1958 num trabalho de Sparnaay (SPARNAAY, 1958) e, desde então, outros experimentos confirmaram o efeito com grande precisão (LAMORE-AUX, 1997; MOHIDEEN; ROY, 1998; BRESSI et al., 2002). Por esse motivo, o efeito Casimir é frequentemente apontado como uma evidência experimental da realidade da energia de ponto zero.

Contudo, nenhum destes experimentos fornece uma evidência direta da existência de tal energia e, portanto, o efeito Casimir não pode ser usado como prova da realidade da mesma. De fato, o efeito Casimir pode ser calculado sem menção às flutuações do vácuo, através da teoria de fontes de Schwinger (SCHWINGER, 1975). Nesta teoria, a eletrodinâmica quântica não é obtida via um procedimento de quantização a partir da teoria clássica correspondente; por construção, os valores esperados no vácuo de quaisquer observáveis físicos, são nulos.

Conforme aponta Jaffe (JAFJE, 2005), o efeito Casimir pode, em princípio, ser obtido da formulação perturbativa usual da eletrodinâmica quântica, sem referência à energia do vácuo. Nesta abordagem, os campos interagentes são descritos na representação de interação e, como consequência, o operador de evolução temporal entre estados assintóticos, isto é, operador de espalhamento, é dado em termos da série perturbativa de Dyson, a qual envolve operadores ordenados normalmente. Porém, embora a energia de ponto zero tenha sido removida pelo ordenamento normal, contribuições comparáveis a esta última emergem em decorrência de transições do tipo vácuo-vácuo. Deste modo, na representação de interação, a energia do vácuo está relacionada com a soma de todos os processos desta natureza, embora, pelo fato da eletrodinâmica quântica ser renormalizável, estas contribuições possam ser eliminadas, ordem a ordem na série perturbativa, pela introdução de contra-termos na densidade lagrangiana original.

Uma teoria é renormalizável quando, para um determinado processo, as contribuições de ordens superiores na série perturbativa, as chamadas *correções radiativas*, levam a quantidades mensuráveis (seções de choque, taxas de decaimento, etc.), extraídas de amplitudes eventualmente divergentes, cujos “infinitos” podem ser reabsorvidos nos

parâmetros livres da teoria original, como carga e massa, fixados pelo experimento. Esta técnica é constituída por três etapas. Primeiramente, regulariza-se as expressões divergentes, alterando-as de modo a torná-las finitas e bem definidas matematicamente, preservando as simetrias da teoria original. O segundo passo se origina do reconhecimento de que a interação eletromagnética altera as propriedades das partículas carregadas, por exemplo, a carga e a massa do elétron. Este segundo passo, chamado de renormalização, consiste em relacionar as propriedades das partículas físicas com aquelas associadas aos quantos dos campos livres e expressar as previsões da teoria em termos dos parâmetros físicos mensuráveis. O terceiro passo consiste em remover a regularização, recuperando a teoria original, livre das divergências.

Em 1936, Weisskopf lidou com somas e integrais divergentes sem qualquer procedimento de regularização. Somente nos anos de 1940 a “física das subtrações” seria praticada de maneira consistente, a partir dos trabalhos de Rayski (RAYSKI, 1948) e Pauli e Villars (PAULI; VILLARS, 1949), os primeiros a introduzir um esquema de regularização invariante de *gauge* e de Lorentz para lidar com as divergências na eletrodinâmica quântica. Vale mencionar, que até mesmo em textos consagrados (BERESTETSKII; LIFSHITZ; PITAEVSKII, 1982), ao apresentarem a dedução a lagrangiana efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg, não se preocupam com a regularização de expressões divergentes, antes de manipulá-las, o que invalida sua demonstração.

Esta dissertação tem como principal objetivo elaborar um estudo comparativo entre duas abordagens conceitualmente distintas da teoria efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg. Inicialmente, a partir do respectivo termo de quarta ordem na série perturbativa do operador de espalhamento na representação de interação, identificamos a contribuição a baixas energias no espalhamento Halpern que leva à densidade lagrangiana efetiva. Posteriormente, consideramos o hamiltoniano do campo de Dirac sem ordenamento normal, isto é, levamos em conta sua energia de ponto zero na presença e na ausência de um campo eletromagnético suficientemente fraco, recuperando o resultado anterior.

No próximo capítulo, faremos uma breve descrição do procedimento de quantização canônica e o utilizaremos na quantização dos campos eletromagnético e de Dirac. Veremos o surgimento de energias de ponto zero e como estas são eliminadas pela introdução do ordenamento normal de operadores. Encerramos o capítulo com o cálculo do efeito Casimir, para a configuração de placas paralelas, através da variação da energia de ponto zero devido à imposição de condições de contorno ao campo eletromagnético. Com tal propósito, utilizaremos

dois métodos de regularização que levarão ao mesmo resultado. Em particular, anteciparemos a regularização via a representação integral da função gama, a qual será novamente empregada no capítulo 4, quando deduziremos a lagrangiana efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg.

No capítulo 3, introduziremos a representação de interação da mecânica quântica, útil para a descrição de campos interagentes. Obteremos uma série perturbativa para o operador espalhamento S e veremos como este pode ser expandido numa série envolvendo produtos normais de operadores. Por fim, o espalhamento fóton-fóton será calculado; ao final tomando o limite de baixas energias, estabeleceremos a correspondência entre a contribuição de quarta ordem e a densidade lagrangiana de Euler-Kockel-Heisenberg.

No capítulo 4, introduziremos o conceito de ação efetiva para o campo eletromagnético clássico e a aproximação de campo fraco. Nesta aproximação, a ação efetiva será expressa em função da variação da energia de ponto zero do campo fermiônico devido a presença do campo eletromagnético. Este constitui o ponto de partida para a derivação da densidade lagrangiana efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg, que será obtida empregando a regularização de Pauli-Villars-Rayski.

Por último, no capítulo 4, apresentaremos as considerações finais e perspectivas futuras.

2 EFEITOS MACROSCÓPICOS DO VÁCUO

Neste capítulo descreveremos brevemente a quantização canônica e quantizaremos os campos eletromagnético e de Dirac segundo este procedimento. Veremos como energias de ponto zero divergentes surgem naturalmente e como estas são eliminadas por intermédio do ordenamento normal de operadores. Por fim, o cálculo do efeito Casimir utilizando-se a variação da energia de ponto zero do campo eletromagnético, em decorrência da imposição de condições de contorno, é apresentado.

2.1 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA

Chamamos de quantização o método de construção da teoria quântica de um sistema físico a partir da sua correspondente teoria clássica. O procedimento que utilizaremos é chamado de quantização canônica e consiste, grosso modo, das seguintes etapas:

1. Através da formulação hamiltoniana da mecânica, obtém-se a descrição clássica do sistema.

Classicamente, o estado de um sistema com n graus de liberdade é especificado pelas coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n e pelos momentos conjugados p_1, \dots, p_n .

A evolução temporal do seu estado é descrita pelas equações de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

onde $H(q, p)$ é o hamiltoniano do sistema¹ e os parênteses de Poisson para duas funções (variáveis dinâmicas) $f = f(q, p)$ e $g = g(q, p)$ são definidos por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (2.2)$$

¹Por simplicidade assumiremos que o hamiltoniano não depende explicitamente do tempo.

Em particular,

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Para uma variável dinâmica $\mathcal{A} = \mathcal{A}(q, p, t)$, a evolução temporal é dada por

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \{\mathcal{A}, H\} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

2. O estado do sistema quântico é especificado por um vetor Ψ em um espaço de Hilbert \mathcal{H} .
3. Para cada variável dinâmica \mathcal{A} , dada na teoria clássica pela função $\mathcal{A}(p, q, t)$, associa-se, na teoria quântica, um operador $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}(\hat{p}, \hat{q}, t)$ que atua em \mathcal{H} .
4. Postula-se que os operadores posição \hat{q} e momento \hat{p} satisfazem as relações canônicas de comutação²

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}, \quad [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (2.5)$$

5. A evolução temporal do estado Ψ é descrita pela equação de Schrödinger

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad (2.6)$$

onde \hat{H} é o operador hamiltoniano correspondente ao hamiltoniano H clássico do sistema.

Podemos também utilizar a representação de Heisenberg, onde a evolução temporal reflete-se sobre os operadores, e não no estado do sistema. Nessa representação, um operador $\hat{\mathcal{A}}$ obedece a equação de Heisenberg

$$\frac{d\hat{\mathcal{A}}}{dt} = -i[\hat{\mathcal{A}}, H] + \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

e as relações canônica de comutação (2.5) são tomadas a tempos iguais:

$$[\hat{q}_i(t), \hat{p}_j(t)] = i\delta_{ij}, \quad [\hat{q}_i(t), \hat{q}_j(t)] = 0, \quad [\hat{p}_i(t), \hat{p}_j(t)] = 0. \quad (2.8)$$

²Adotaremos ao longo do texto o sistema de unidades naturais, em que $\hbar = c = 1$.

Comparando (2.1), (2.3) e (2.4) com (2.7) e (2.8), vemos que a quantização canônica equivale, formalmente, à substituição:

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} \rightarrow -i[\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}]. \quad (2.9)$$

No que seguirá, aplicaremos a quantização canônica a sistemas físicos contínuos, isto é, que possuem infinitos graus de liberdade. Estes sistemas serão descritos por funções ϕ das coordenadas e do tempo, que são chamadas de campos.

De acordo com a metodologia descrita acima, partimos da formulação hamiltoniana para campos. Poderíamos pensar em obter diretamente do hamiltoniano clássico as equações de movimento; entretanto, esta formulação possui a desvantagem das equações de Hamilton não serem manifestamente covariantes, o que torna difícil a elaboração de uma teoria relativística (DIRAC, 2001).

Uma teoria relativística pode ser obtida diretamente a partir da formulação lagrangiana da mecânica clássica. Nesta formulação, toda a informação sobre a dinâmica do sistema está contida no lagrangiano $L = \int d^3x \mathcal{L}$ e as equações de movimento seguem de um princípio variacional que envolve a ação

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (2.10)$$

onde \mathcal{L} é a densidade lagrangiana do sistema. Assim, como o determinante jacobiano de uma transformação de Lorentz própria é igual à unidade³, se a densidade lagrangiana \mathcal{L} for invariante de Lorentz, então a ação também será. Por conseguinte, as equações de movimento serão covariantes.

Após a formulação lagrangiana do sistema ter sido construída, podemos passar à formulação hamiltoniana de forma análoga ao que é feito para um sistema de partículas. No que segue, adotaremos a formulação lagrangiana para campos.

Seja um sistema físico especificado por um determinado número de campos $\phi_r(x)$, onde $r = 1, \dots, N$. Assumiremos que a dinâmica deste sistema possa ser obtida a partir de um princípio variacional que envolve uma densidade lagrangiana

³Por definição, as transformações de Lorentz são transformações lineares que deixam invariante a forma quadrática $x_\mu x^\mu$. Sendo linear, a transformação é da forma $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, cujo determinante jacobiano é $\frac{\partial(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4)}{\partial(x^1, x^2, x^3, x^4)} = \det \Lambda$. As transformações de Lorentz próprias são, por definição, as que possuem determinante unitário.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r). \quad (2.11)$$

Tal dependência assegura a localidade da teoria, pois a densidade lagrangiana depende apenas do campo em uma vizinhança do ponto x . Além disso, tal dependência será suficiente para os campos que estamos interessados.

Definindo a ação S para uma região Ω do espaço-tempo, tal que os campos se anulam fora desta, por

$$S[\phi_1, \dots, \phi_N] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi_1, \dots, \phi_N, \partial_\mu \phi_1, \dots, \partial_\mu \phi_N), \quad (2.12)$$

as equações de movimento são obtidas pela extremização da ação S . Matematicamente, este princípio variacional expressa-se

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_r(x)} = 0, \quad r = 1, \dots, N, \quad (2.13)$$

onde a derivada funcional $\delta F / \delta \phi_k$ para um funcional $F[\phi_1, \dots, \phi_N]$ é definida implicitamente por

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} F[\phi_1 + \epsilon \sigma_1, \dots, \phi_N + \epsilon \sigma_N] \right|_{\epsilon=0} = \int d^4x \sigma_k(x) \frac{\delta F}{\delta \phi_k(x)}. \quad (2.14)$$

Calculando o lado direito de (2.14) para o funcional (2.12), temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} S[\phi_1 + \epsilon \sigma_1, \dots, \phi_N + \epsilon \sigma_N] \right|_{\epsilon=0} &= \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \sigma_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \partial_\mu \sigma_r \right] \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right] \right\} \sigma_r + \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \sigma_r \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Pelo teorema da divergência, a segunda integral acima é

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \sigma_r \right] = \int_{\partial \Omega} d^4a^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \sigma_r = 0, \quad (2.16)$$

onde assumimos que os campos $\sigma_r(x)$ se anulam na fronteira $\partial \Omega$ da região Ω .

Assim, de (2.14),

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_r(x)} = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} = 0, \quad r = 1, \dots, N, \quad (2.17)$$

que constituem as equações de Euler-Lagrange para campos.

Para passarmos à formulação hamiltoniana, além das coordenadas generalizadas, precisamos dos momentos canonicamente conjugados e do hamiltoniano.

O campo conjugado a ϕ_r é definido por

$$\pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi_r)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r}, \quad r = 1, \dots, N. \quad (2.18)$$

Supondo que possamos escrever $\dot{\phi}_r$ em termos de π_r , ou seja, que a teoria é não-singular, definimos a densidade hamiltoniana por

$$\mathcal{H}(x) = \pi_r(x) \dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r), \quad (2.19)$$

cuja integração em todo o espaço nos fornece o hamiltoniano do sistema

$$H = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{H}(x) = \int d^3 \mathbf{x} \left[\pi_r(x) \dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r) \right]. \quad (2.20)$$

A suposição de não-singularidade é essencial, pois a passagem à formulação hamiltoniana de teorias singulares é feita de maneira diferente daquela que apresentaremos aqui, tendo dado origem ao estudo de sistemas hamiltonianos na presença de vínculos (GITMAN; TYUTIN, 1990; DIRAC, 1950).

Para duas variáveis dinâmicas $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\phi, \pi)$ e $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\phi, \pi)$, os parênteses de Poisson são definidos por

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int d^3 \mathbf{x} \left[\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi_r(x)} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \pi_r(x)} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \pi_r(x)} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \phi_r(x)} \right]. \quad (2.21)$$

Em particular, no caso em que $\mathcal{F} = \phi_r(t, \mathbf{x})$ e $\mathcal{G} = \pi_s(t, \mathbf{y})$, temos

$$\{\phi_r(t, \mathbf{x}), \pi_s(t, \mathbf{y})\} = \int d^3 \mathbf{x}' \left[\frac{\delta \phi_r(t, \mathbf{x})}{\delta \phi_q(t, \mathbf{x}')} \frac{\delta \pi_s(t, \mathbf{y})}{\delta \pi_q(t, \mathbf{x}')} - \frac{\delta \phi_r(t, \mathbf{x})}{\delta \pi_q(t, \mathbf{x}')} \frac{\delta \pi_s(t, \mathbf{y})}{\delta \phi_q(t, \mathbf{x}')} \right]. \quad (2.22)$$

Escrevendo o campo ϕ_r como um funcional $G[\phi_1, \dots, \phi_N]$ dos N campos,

$$\phi_r(t, \mathbf{x}) \equiv G[\phi_1, \dots, \phi_N] = \int d^3 \mathbf{x}' \delta_{rq} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \phi_q(t, \mathbf{x}'), \quad (2.23)$$

segue que

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} G[\phi_1 + \epsilon\sigma_1, \dots, \phi_N + \epsilon\sigma_N] \right|_{\epsilon=0} = \int d^3 \mathbf{x}' \delta_{rq} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sigma_q(t, \mathbf{x}'). \quad (2.24)$$

Assim, de (2.14),

$$\frac{\delta\phi_r(t, \mathbf{x})}{\delta\phi_q(t, \mathbf{x}')} = \delta_{rq} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.25)$$

De maneira análoga, obtemos

$$\frac{\delta\pi_s(t, \mathbf{y})}{\delta\pi_q(t, \mathbf{x}')} = \delta_{sq} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}') \quad (2.26)$$

e, como os campos e os respectivos campos conjugados são independentes, segue também

$$\frac{\delta\phi_r(t, \mathbf{x})}{\delta\pi_q(t, \mathbf{x}')} = 0 = \frac{\delta\pi_s(t, \mathbf{y})}{\delta\phi_q(t, \mathbf{x}')} \quad (2.27)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \{\phi_r(t, \mathbf{x}), \pi_s(t, \mathbf{y})\} &= \int d^3 \mathbf{x}' \delta_{rq} \delta_{sq} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}') \\ &= \delta_{rs} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Fazendo $\mathcal{F} = \phi_r(t, \mathbf{x})$, $\mathcal{G} = \phi_s(t, \mathbf{y})$ e depois $\mathcal{F} = \pi_r(t, \mathbf{x})$ e $\mathcal{G} = \pi_s(t, \mathbf{y})$ obtemos as generalizações de (2.3) para campos:

$$\{\phi_r(t, \mathbf{x}), \pi_s(t, \mathbf{y})\} = \delta_{rs} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.29a)$$

$$\{\phi_r(t, \mathbf{x}), \phi_s(t, \mathbf{y})\} = 0, \quad (2.29b)$$

$$\{\pi_r(t, \mathbf{x}), \pi_s(t, \mathbf{y})\} = 0. \quad (2.29c)$$

Estes parenteses de Poisson são o ponto de partida para a quantização canônica de campos não-singulares, sendo substituídos por comutadores no caso de campos bosônicos e anticomutadores no caso de campos fermiônicos.

Para campos singulares, os parenteses de Poisson devem ser substituídos pelos chamados parênteses de Dirac e a quantização é feita conforme o parágrafo acima.

2.2 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO DE RADIAÇÃO

Na presença de uma densidade de carga $\rho(t, \mathbf{x})$ e de uma densidade de corrente $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$, os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} são descritos pelas equações de Maxwell⁴:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (2.30a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.30b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.30c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.30d)$$

Das equações (2.30b) e (2.30c), assumiremos a existência dos potenciais escalar $\phi = \phi(t, \mathbf{x})$ e vetor $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ tais que

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.31)$$

Estas equações não determinam unicamente os potenciais ϕ e \mathbf{A} , pois as transformações

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla f, \quad (2.32)$$

onde $f = f(t, \mathbf{x})$ é uma função de classe C^2 , deixam os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} inalterados:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} - \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \\ \mathbf{E}' &= -\nabla\phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(\phi + \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} - \nabla f) \\ &= \mathbf{E} - \frac{\partial(\nabla f)}{\partial t} + \frac{\partial(\nabla f)}{\partial t} = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Estas transformações são chamadas de transformações de *gauge* de segunda espécie (MANDL; SHAW, 1984).

Podemos obter uma formulação covariante da eletrodinâmica clássica introduzindo o tensor de campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ e o seu dual $\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$:

⁴Adotaremos o sistema de unidades Heaviside-Lorentz.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em termos destes, as equações de Maxwell (2.30) escrevem-se

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{e} \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.34a)$$

onde $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ é a quadridensidade de corrente.

A introdução do quadripotencial vetor $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, permite, utilizando (2.31), escrevermos

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.35)$$

que, substituindo em (2.34a), nos fornece

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\mu A_\sigma \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2} \epsilon^{\rho\nu\mu\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0, \end{aligned} \quad (2.36a)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu, \quad (2.36b)$$

ou seja, em termos do quadripotencial A^μ , a segunda equação em (2.34a) é identicamente satisfeita, enquanto que a primeira torna-se

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu. \quad (2.37)$$

Nesta formulação covariante, as transformações de *gauge* (2.32) adquirem a forma

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x), \quad (2.38)$$

e, então, da invariância de (2.37) sob estas transformações,

$$\begin{aligned} 0 &= \square A'^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A'^\nu - j'^\mu = \square (A^\mu + \partial^\mu f) - \partial^\mu \partial_\nu (A^\nu + \partial^\nu f) - j^\mu \\ &= \square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - j^\mu + \square \partial^\mu f - \partial^\mu \square f = \square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - j^\mu. \end{aligned}$$

Para procedermos à quantização do campo eletromagnético, partimos da sua formulação lagrangiana. Isto pode ser feito tratando cada componente A^μ como um campo independente e introduzindo a densidade lagrangiana⁵

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu, \quad (2.39)$$

o que, pelas equações de Euler-Lagrange (2.17), leva às equações de movimento (2.37).

De (2.18), os campos conjugados são

$$\begin{aligned} \pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial \dot{A}_\mu} F^{\lambda\nu} + \frac{\partial F^{\lambda\nu}}{\partial \dot{A}_\mu} F_{\lambda\nu} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial \dot{A}_\mu} F^{\lambda\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{A}_\mu} (\partial_\lambda A_\nu - \partial_\nu A_\lambda) \right] F^{\lambda\nu} = -\frac{1}{2} (\delta_\lambda^0 \delta_\nu^\mu - \delta_\nu^0 \delta_\lambda^\mu) F^{\lambda\nu} \\ &= F^{\mu 0}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

e então, de (2.35),

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = F^{00} = 0, \quad \pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = F^{i0} = \partial^i A^0 - \dot{A}^i. \quad (2.41)$$

Como podemos ver, o campo conjugado π^0 é nulo, tornando impossível expressarmos \dot{A}^0 em termos dos outros campos, ou seja, estamos diante de uma teoria singular.

Para contornarmos esse problema, sem adentrarmos no formalismo hamiltoniano com vínculos, podemos prosseguir de duas maneiras:

1. *Fixando o gauge.* As equações (2.37) podem ser escritas

$$-\nabla^2 A^0 + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \rho, \quad (2.42a)$$

$$\square \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{\partial A^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \mathbf{j}. \quad (2.42b)$$

⁵Como a densidade lagrangiana deve ser invariante de Lorentz para que as equações de movimento sejam covariantes, a densidade lagrangiana mais geral para o campo eletromagnético é da forma

$$\mathcal{L} = a(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + b(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) + c(\partial_\mu A_\mu)(\partial^\nu A^\nu) + d(A_\mu A^\mu) + e(j_\mu A^\mu).$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange e comparando com (2.37), obtemos (2.39).

Escolhendo o *gauge* de Coulomb, onde⁶ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, a solução de (2.42a) é

$$A^0(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (2.43)$$

e (2.42b) torna-se

$$\square \mathbf{A} = \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi} \nabla \int d^3 \mathbf{x}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \rho(t, \mathbf{x}')}{\partial t}. \quad (2.44)$$

Para o campo de radiação, ou seja, o campo eletromagnético na ausência de fontes de carga e corrente, temos

$$A^0(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \square \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (2.45)$$

Assim, no *gauge* de Coulomb o campo A^0 também é nulo, permitindo a passagem para a formulação hamiltoniana e a quantização canônica. Entretanto, estamos quebrando a covariância da teoria, que é um requisito para se investigar a renormalizabilidade da mesma em nível quântico (MANDL; SHAW, 1984).

2. *Quantização Covariante.* No lugar da densidade lagrangiana (2.39) utilizamos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu), \quad (2.46)$$

a qual fornece campos conjugados não-nulos para $\lambda \neq 0$:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{\mu 0} - \lambda g^{\mu 0} (\partial_\sigma A^\sigma). \quad (2.47)$$

Entretanto, as equações de movimento obtidas a partir da densidade lagrangiana (2.46) não são as equações (2.37), como podemos constatar a partir das equações de Euler-Lagrange (2.17):

$$\begin{aligned} & \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \\ &= \partial_\nu \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} F^{\rho\sigma} - \lambda \frac{\partial (\partial_\rho A^\rho)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial_\sigma A^\sigma) \right] + j^\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial A_\mu} \end{aligned}$$

⁶Aqui estamos cometendo um abuso de notação. Na verdade, impomos que seja nulo o divergente do potencial vetor $\mathbf{A}'(t, \mathbf{x})$ obtido pela transformação (2.38). Assim, (2.43) e (2.44) se referem a A'^0 e \mathbf{A}' , respectivamente.

$$\begin{aligned}
&= \partial_\nu \left[-\frac{1}{2}(\delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\mu - \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu) F^{\rho\sigma} - \lambda g^{\rho\alpha} \frac{\partial(\partial_\rho A_\alpha)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} (\partial_\sigma A^\sigma) \right] + j^\rho \delta_\rho^\mu \\
&= \partial_\nu [-F^{\nu\mu} - \lambda g^{\rho\alpha} \delta_\rho^\nu \delta_\alpha^\mu (\partial_\sigma A^\sigma)] + j^\mu \\
&= -\square A^\mu + \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) - \lambda \partial^\mu (\partial_\sigma A^\sigma) + j^\mu = 0,
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \square A^\mu + (\lambda - 1) \partial^\mu (\partial_\sigma A^\sigma) = j^\mu. \quad (2.48)$$

Porém, aplicando a quadridivergência na equação acima e supondo que a quadridensidade de corrente seja conservada ($\partial_\mu j^\mu = 0$), ficamos com

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu \square A^\mu + (\lambda - 1) \square (\partial_\sigma A^\sigma) = \partial_\mu j^\mu \\
&\therefore \quad \lambda \square \partial_\mu A^\mu = 0,
\end{aligned} \quad (2.49)$$

equação que, junto com condições de contorno adequadas, possui solução $\partial_\mu A^\mu = 0$ (ITZYKSON; ZUBER, 2005; GREINER; REINHARDT, 1996). Logo, (2.48) fica

$$\square A^\mu = j^\mu, \quad (2.50)$$

que é a equação (2.37) no *gauge* de Lorentz, ou seja, $\partial_\nu A^\nu = 0$.

Em suma, embora as equações (2.37) e (2.48) sejam diferentes, a densidade lagrangiana (2.46), junto com condições de contorno, leva às equações de Maxwell no *gauge* de Lorentz.

Temos então uma formulação lagrangiana covariante para o campo de radiação a partir da qual podemos, em princípio, proceder à quantização canônica da teoria. Entretanto, a condição $\partial_\mu A^\mu = 0$, em termos de operadores, é incompatível com as relações canônicas de comutação, análogas às equações (2.8), que imporemos a A_μ e π^μ . Este problema pode ser resolvido utilizando o formalismo de Gupta-Bleuler (GUPTA, 1977).

2.2.1 Quantização no Gauge de Coulomb

Dado um quadripotencial $A^\mu(x)$, é possível encontrarmos uma transformação de *gauge* (2.32) na qual $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$. Para isso, é suficiente que f satisfaça à equação

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (2.51)$$

pois, neste caso,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot (\mathbf{A} - \nabla f) = \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 f = 0. \quad (2.52)$$

A solução da equação (2.51) é dada por

$$\begin{aligned} f(t, \mathbf{x}) &= \int d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla' \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}') \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ é a bem conhecida função de Green do operador laplaciano, definida pela equação

$$\nabla^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.54)$$

Assim, o potencial vetor \mathbf{A}' procurado é

$$\mathbf{A}'(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + \nabla \int d^3 \mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'). \quad (2.55)$$

Pelo teorema de Helmholtz (ROHRLICH, 2007), podemos escrever

$$\mathbf{A} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{W} \equiv \mathbf{A}_{||} + \mathbf{A}_{\perp}, \quad (2.56)$$

onde $\nabla \cdot \mathbf{A}_{\perp} = 0$, $\nabla \times \mathbf{A}_{||} = 0$ e

$$U = \int d^3 \mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'), \quad (2.57)$$

$$\mathbf{W} = \int d^3 \mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'). \quad (2.58)$$

Pela decomposição (2.56), segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_{\perp} + \mathbf{A}_{||} = (\mathbf{A} - \mathbf{A}_{||}) + \mathbf{A}_{||} \\ &= \left[\mathbf{A} + \nabla \int d^3 \mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}') \right] \\ &\quad - \nabla \int d^3 \mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}') \\ &\equiv (P_{\perp} + P_{||})\mathbf{A}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde os operadores de projeção P_{\perp} e P_{\parallel} são definidos por

$$(P_{\perp})_{ij} = \delta_{ij} - \partial_i \frac{1}{\nabla^2} \partial_j, \quad (2.60)$$

$$(P_{\parallel})_{ij} = \partial_i \frac{1}{\nabla^2} \partial_j, \quad (2.61)$$

e $\frac{1}{\nabla^2}$ é o operador laplaciano inverso, cuja atuação em um campo vetorial $V(\mathbf{x})$ é

$$\frac{1}{\nabla^2} V(\mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') V(\mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}'). \quad (2.62)$$

Assim, comparando (2.59) com (2.55) vemos que

$$\mathbf{A}'(t, \mathbf{x}) = P_{\perp} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}_{\perp}(t, \mathbf{x}), \quad (2.63)$$

ou seja, a escolha do *gauge* de Coulomb anula a parte longitudinal de $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$, mantendo a sua parte transversal⁷ $\mathbf{A}_{\perp}(t, \mathbf{x})$.

No que segue, ficará subentendido que estamos nos referindo ao campo transverso e eliminaremos o símbolo “ \perp ”.

Como já discutido, as equações de movimento para o campo de radiação são dadas por (2.45) e, de acordo com (2.41),

$$\pi^i(t, \mathbf{x}) = -\dot{A}^i(t, \mathbf{x}). \quad (2.64)$$

A densidade hamiltoniana é obtida de (2.19), (2.45) e (2.64):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^{\mu} \dot{A}_{\mu} - \mathcal{L} = -\pi^{\mu} \pi_{\mu} + \frac{1}{4} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) (\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) \\ &= \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2} (\partial_0 A_i \partial^0 A^i + \partial_i A_j \partial^i A^j - \partial_i A_j \partial^j A^i) \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2} (\partial_i A^j \partial_i A^j - \partial_j A^i \partial_i A^j) \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_l A^m \partial_i A^j \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \partial_l A^m \partial_i A^j = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\pi}^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

O hamiltoniano para o campo de radiação é obtido pela inte-

⁷ \mathbf{A}_{\perp} é chamado de campo transverso porque a equação que o descreve, $\square \mathbf{A}_{\perp} = 0$, admite como solução a onda plana $\mathbf{A}_{\perp}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ se $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\perp} = 0$, para que a condição $\nabla \cdot \mathbf{A}_{\perp} = 0$ seja satisfeita. Portanto, \mathbf{A}_{\perp} é transverso à direção de propagação da onda.

gração da densidade hamiltoniana (2.65) em todo o espaço,

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} [\boldsymbol{\pi}^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2]. \quad (2.66)$$

Além disso, de (2.29) e (2.64) os parenteses de Poisson são

$$\begin{aligned} \{A^i(t, \mathbf{x}), \pi_j(t, \mathbf{x}')\} &= \{A^i(t, \mathbf{x}), \dot{A}^j(t, \mathbf{x}')\} = \delta^{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{A^i(t, \mathbf{x}), A^j(t, \mathbf{x}')\} &= 0, \\ \{\dot{A}^i(t, \mathbf{x}), \dot{A}^j(t, \mathbf{x}')\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

A solução geral da segunda equação em (2.45) é dada em termos da sua transformada de Fourier⁸ (GREINER; REINHARDT, 1996),

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2(2\pi)^3\omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{r=1}^2 \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k})e^{-ikx} + a_r^*(\mathbf{k})e^{ikx}], \quad (2.68)$$

onde $\omega_{\mathbf{k}} = k^0 = |\mathbf{k}|$ e o fator de normalização $[2(2\pi)^3\omega_{\mathbf{k}}]^{-1/2}$ foi introduzido por conveniência. Além disso, a forma de (2.68) garante que \mathbf{A} seja um campo vetorial real.

Os vetores de polarização $\boldsymbol{\epsilon}_1$ e $\boldsymbol{\epsilon}_2$ são escolhidos de modo a serem reais, ortogonais entre si e a \mathbf{k} , ou seja,

$$\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}) = \delta_{rs}, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) = 0, \quad r, s = 1, 2, \quad (2.69)$$

assegurando que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Podemos discretizar os vetores de onda \mathbf{k} considerando o potencial vetor $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ dentro de um volume $V = L^3$ e impondo condições de periodicidade:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t, x, y, z) &= \mathbf{A}(t, x + L, y, z) = \mathbf{A}(t, x, y + L, z) \\ &= \mathbf{A}(t, x, y, z + L). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Assim, (2.68) torna-se (MANDL; SHAW, 1984)

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k})e^{-ikx} + a_r^*(\mathbf{k})e^{ikx}], \quad (2.71)$$

⁸Em (2.68) kx denota um invariante no espaço de Minkowski.

onde \mathbf{k} é da forma

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3), \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (2.72)$$

Os coeficientes $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^*(\mathbf{k})$ são dados em termos de $\mathbf{A}(x)$ e $\dot{\mathbf{A}}(x)$ por

$$\begin{aligned} a_r(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3\mathbf{x} \, \epsilon_r(\mathbf{k}) \cdot [\omega_{\mathbf{k}}\mathbf{A}(x) + i\dot{\mathbf{A}}(x)] e^{i\mathbf{k}x}, \\ a_r^*(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3\mathbf{x} \, \epsilon_r(\mathbf{k}) \cdot [\omega_{\mathbf{k}}\mathbf{A}(x) - i\dot{\mathbf{A}}(x)] e^{-i\mathbf{k}x}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Podemos agora quantizar o campo de radiação. Efetuando a quantização canônica dos campos e seus conjugados, $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ torna-se um operador sujeito às seguintes relações de comutação

$$[A^j(t, \mathbf{x}), \pi_l(t, \mathbf{x}')] = [A^j(t, \mathbf{x}), \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')] = i\delta^{jl}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.74a)$$

$$[A^j(t, \mathbf{x}), A^l(t, \mathbf{x}')] = 0, \quad (2.74b)$$

$$[\dot{A}^j(t, \mathbf{x}), \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')] = 0, \quad (2.74c)$$

obtidas realizando-se a substituição (2.9) em (2.67). Entretanto, a relação de comutação (2.74a) é incompatível com a condição de transversalidade $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= [0, \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')] = [\partial_j A^j(t, \mathbf{x}), \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')] \\ &= \partial_j [A^j(t, \mathbf{x}), \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')] + [\partial_j \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')] A^j(t, \mathbf{x}) - [\partial_j A^j(t, \mathbf{x})] \dot{A}^l(t, \mathbf{x}') \\ &= i\partial_j [\delta^{jl}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \neq 0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Esta inconsistência é sanada substituindo a relação de comutação (2.74a) por (GREINER; REINHARDT, 1996)

$$[A^j(t, \mathbf{x}), \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')] = i\delta_{\perp}^{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.76)$$

onde a delta de Dirac transversa é definida por (COHEN-TANNOUJJI; DUPONT-ROC; GRYNBERG, 2004)

$$\delta_{\perp jil}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = (P_{\perp})_{jl}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.77)$$

a qual, por construção, possui divergência nula:

$$\partial_j \delta_{\perp}^{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0. \quad (2.78)$$

Além disso, para um campo vetorial $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\perp + \mathbf{V}_\parallel$, temos

$$\int d^3\mathbf{x}' V^j(\mathbf{x}') \delta_\perp^{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = V_\perp^l(\mathbf{x}). \quad (2.79)$$

Assumiremos então que as relações de comutação para o campo de radiação no *gauge* de Coulomb são:

$$[A^j(t, \mathbf{x}), \pi_l(t, \mathbf{x}')] = [A^j(t, \mathbf{x}), \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')] = i\delta_\perp^{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.80a)$$

$$[A^j(t, \mathbf{x}), A^l(t, \mathbf{x}')] = 0, \quad (2.80b)$$

$$[\dot{A}^j(t, \mathbf{x}), \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')] = 0. \quad (2.80c)$$

As equações de movimento para $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ e $\boldsymbol{\pi}(t, \mathbf{x})$ são obtidas a partir da equação de Heisenberg (2.7). Para encontrá-las, faremos uso dos seguintes comutadores:

$$\begin{aligned} [A^i(t, \mathbf{x}), (\nabla' \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'))^j] &= \epsilon^{jlm} [A^i(t, \mathbf{x}), \partial'_l A^m(t, \mathbf{x}')] \\ &= \epsilon^{jlm} \partial'_l [A^i(t, \mathbf{x}), A^m(t, \mathbf{x}')] = 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} [\pi^i(t, \mathbf{x}), (\nabla' \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'))^j] &= \epsilon^{jlm} [\pi^i(t, \mathbf{x}), \partial'_l A^m(t, \mathbf{x}')] \\ &= \epsilon^{jlm} \partial'_l [\pi^i(t, \mathbf{x}), A^m(t, \mathbf{x}')] \\ &= i\epsilon^{jlm} \partial'_l \delta_\perp^{mi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Assim, de (2.7), (2.66), (2.80) e dos comutadores acima, temos

$$\begin{aligned} \dot{A}^i(t, \mathbf{x}) &= -i[A^i(t, \mathbf{x}), H] \\ &= -\frac{i}{2} \int d^3\mathbf{x}' \left([A^i(t, \mathbf{x}), (\boldsymbol{\pi}(t, \mathbf{x}'))^2] + [A^i(t, \mathbf{x}), (\nabla' \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'))^2] \right) \\ &= -\frac{i}{2} \int d^3\mathbf{x}' \left\{ \pi^j(t, \mathbf{x}') [A^i(t, \mathbf{x}), \pi^j(t, \mathbf{x}')] + [A^i(t, \mathbf{x}), \pi^j(t, \mathbf{x}')] \pi^j(t, \mathbf{x}') \right\} \\ &= -\int d^3\mathbf{x}' \delta_\perp^{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \pi^j(t, \mathbf{x}') = -\pi^i(t, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.83a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^i(t, \mathbf{x}) &= -i[\pi^i(t, \mathbf{x}), H] \\ &= -\frac{i}{2} \int d^3\mathbf{x}' \left([\pi^i(t, \mathbf{x}), (\boldsymbol{\pi}(t, \mathbf{x}'))^2] + [\pi^i(t, \mathbf{x}), (\nabla' \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'))^2] \right) \\ &= -\frac{i}{2} \int d^3\mathbf{x}' \left\{ (\nabla' \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'))^j [\pi^i(t, \mathbf{x}), (\nabla' \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'))^j] \right. \\ &\quad \left. + [\pi^i(t, \mathbf{x}), (\nabla' \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'))^j] (\nabla' \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'))^j \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3 \mathbf{x}' \epsilon^{jlm} (\nabla' \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'))^j \partial'_l \delta_{\perp}^{mi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= - \int d^3 \mathbf{x}' \epsilon^{jlm} \partial'_l (\nabla' \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'))^j \delta_{\perp}^{mi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= \int d^3 \mathbf{x}' [\nabla' \times (\nabla' \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}'))]^m \delta_{\perp}^{mi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}))]^i = [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x})) - \nabla^2 \mathbf{A}(t, \mathbf{x})]^i \\
&= -[\nabla^2 \mathbf{A}(t, \mathbf{x})]^i, \tag{2.83b}
\end{aligned}$$

onde usamos a identidade $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ e que $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\perp}$ e $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_{\perp}$.

Derivando (2.83a) em relação ao tempo e substituindo (2.83b), resulta

$$\square \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = 0, \tag{2.84}$$

expressão formalmente idêntica à equação para o campo clássico (2.45).

Analogamente ao caso clássico, a solução geral de (2.84) é

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_r^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{ikx}], \tag{2.85}$$

onde $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^{\dagger}(\mathbf{k})$ são agora operadores, dados por

$$\begin{aligned}
a_r(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3 \mathbf{x} \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot [\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{A}(x) + i\dot{\mathbf{A}}(x)] e^{ikx}, \\
a_r^{\dagger}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3 \mathbf{x} \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot [\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{A}(x) - i\dot{\mathbf{A}}(x)] e^{-ikx}.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

De (2.80) e (2.86) obtemos as relações de comutação entre $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^{\dagger}(\mathbf{k})$:

$$\begin{aligned}
[a_r(\mathbf{k}), a_s^{\dagger}(\mathbf{k}')] &= \frac{1}{2V\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \int d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{x}' e^{i(kx - k'x')} \\
&\times \left[\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot (\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + i\dot{\mathbf{A}}(t, \mathbf{x})), \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}') \cdot (\omega_{\mathbf{k}'} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}') - i\dot{\mathbf{A}}(t, \mathbf{x}')) \right] \\
&= \frac{-1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \int d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{x}' \frac{e^{i(kx - k'x')}}{2V} \left\{ i\omega_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}_r^j(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}_s^l(\mathbf{k}') \overbrace{[A^j(t, \mathbf{x}), \dot{A}^l(t, \mathbf{x}')] }^{= i\delta_{\perp}^{jl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\omega_{\mathbf{k}'}\epsilon_r^j(\mathbf{k})\epsilon_s^l(\mathbf{k}') \underbrace{\left[\dot{A}^j(t, \mathbf{x}), A^l(t, \mathbf{x}') \right]} \\
& = \frac{1}{2V\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t} \epsilon_r(\mathbf{k}) \cdot \epsilon_s(\mathbf{k}') (\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}) \underbrace{\int d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}}_{=V\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}} \\
& = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \epsilon_r(\mathbf{k}) \cdot \epsilon_s(\mathbf{k}) \\
& = \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \tag{2.87a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] & = \frac{1}{2V\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' e^{i(kx+k'x')} \\
& \times \left[\epsilon_r(\mathbf{k}) \cdot \left(\omega_{\mathbf{k}}\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + i\dot{\mathbf{A}}(t, \mathbf{x}) \right), \epsilon_s(\mathbf{k}') \cdot \left(\omega_{\mathbf{k}'}\mathbf{A}(t, \mathbf{x}') + i\dot{\mathbf{A}}(t, \mathbf{x}') \right) \right] \\
& = \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \frac{e^{i(kx+k'x')}}{2V} \left\{ i\omega_{\mathbf{k}}\epsilon_r^j(\mathbf{k})\epsilon_s^l(\mathbf{k}') \underbrace{\left[A^j(t, \mathbf{x}), A^l(t, \mathbf{x}') \right]}_{=i\delta^{jl}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right. \\
& \left. + i\omega_{\mathbf{k}'}\epsilon_r^j(\mathbf{k})\epsilon_s^l(\mathbf{k}') \underbrace{\left[\dot{A}^j(t, \mathbf{x}), A^l(t, \mathbf{x}') \right]} \right\} \\
& = \frac{-1}{2V\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \underbrace{\int d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}}_{=V\delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t} \epsilon_r(\mathbf{k}) \cdot \epsilon_s(\mathbf{k}') (\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) \\
& = 0, \tag{2.87b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] & = a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}') - a_s^\dagger(\mathbf{k}')a_r^\dagger(\mathbf{k}) \\
& = -[a_r(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}') - a_s(\mathbf{k}')a_r(\mathbf{k})]^\dagger = -[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')]^\dagger = 0. \tag{2.87c}
\end{aligned}$$

Como vemos, $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ possuem as mesmas relações de comutação que os operadores de levantamento e abaixamento do oscilador harmônico.

Podemos também escrever o operador hamiltoniano em função de $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{k})$. Note que, de (2.85),

$$\begin{aligned}
\pi & = \dot{\mathbf{A}}(t, \mathbf{x}) = -i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2V}} \epsilon_r(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k})e^{-ikx} - a_r^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}], \\
\nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) & = i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \mathbf{k} \times \epsilon_r(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k})e^{-ikx} - a_r^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \pi^2 = & - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{r, s=1}^2 \frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}}{2V} \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}') \\ & \times \left[a_r(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{-i(k+k')x} - a_r(\mathbf{k}) a_s^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(k-k')x} \right. \\ & \left. - a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{i(k-k')x} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s^\dagger(\mathbf{k}') e^{i(k+k')x} \right], \end{aligned} \quad (2.88)$$

enquanto que

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})^2 = & - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{r, s=1}^2 \frac{(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{-\frac{1}{2}}}{2V} \left[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) \right] \cdot \left[\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{k}') \right] \\ & \times \left\{ a_r(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{-i(k+k')x} - a_r(\mathbf{k}) a_s^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(k-k')x} \right. \\ & \left. - a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{i(k-k')x} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s^\dagger(\mathbf{k}') e^{i(k+k')x} \right\}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Portanto, de (2.66), (2.69) e utilizando

$$\int_V d^3 \mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} = V \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (2.90)$$

segue que

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} \left[a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) \right] \\ = & \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} \left[a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.91)$$

que corresponde ao hamiltoniano de um sistema de osciladores harmônicos independentes.

Em analogia ao método de operadores para o oscilador harmônico, vamos definir o operador número por

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 N_r(\mathbf{k}) \equiv \sum_i N_{r_i}(\mathbf{k}_i) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}). \quad (2.92)$$

Este operador comuta com o hamiltoniano, isto é,

$$[H, N] = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \sum_{r, s=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} [N_r(\mathbf{k}), N_s(\mathbf{q})] = 0 \quad (2.93)$$

pois, de (2.87),

$$\begin{aligned} [N_r(\mathbf{k}), N_s(\mathbf{q})] &= [a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{q})a_s(\mathbf{q})] \\ &= a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{q})[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{q})] + a_r^\dagger(\mathbf{k})[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{q})]a_s(\mathbf{q}) \\ &\quad + a_s^\dagger(\mathbf{q})[a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{q})]a_r(\mathbf{k}) + [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{q})]a_r(\mathbf{k})a_s(\mathbf{q}) \\ &= a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{q})\delta_{rs}\delta_{\mathbf{kq}} - a_s^\dagger(\mathbf{q})a_r(\mathbf{k})\delta_{rs}\delta_{\mathbf{kq}} = 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Assim, o hamiltoniano e o operador número possuem o mesmo conjunto de autovetores. Estes autovetores podem ser caracterizados pelos autovalores n dos auto-estados de cada operador $N_r(\mathbf{k})$, que correspondem ao número de partículas (bósons) no estado $|n, r, \mathbf{k}\rangle$:

$$N_{r_i}(\mathbf{k}_i)|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle = n_i|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle.$$

O número total de partículas n no estado $|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle$ é dado por

$$\begin{aligned} N|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle &= \sum_i N_{r_i}(\mathbf{k}_i)|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle \\ &= \left(\sum_i n_i\right)|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle = n|n_{r_1}(\mathbf{k}_1), \dots\rangle. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Vamos agora mostrar que a atuação dos operadores $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ e $a_r(\mathbf{k})$ em um auto-estado de N leva a um outro auto-estado de N . Temos que

$$\begin{aligned} N a_r^\dagger(\mathbf{k})|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle &= \sum_{s_i, \mathbf{k}_i} a_{s_i}^\dagger(\mathbf{k}_i)a_{s_i}(\mathbf{k}_i)a_r^\dagger(\mathbf{k})|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle \\ &= \sum_{s_i, \mathbf{k}_i} a_{s_i}^\dagger(\mathbf{k}_i)[\delta_{rs_i}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_i} + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_{s_i}(\mathbf{k}_i)]|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle \\ &= a_r^\dagger(\mathbf{k})|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle + a_r^\dagger(\mathbf{k})N|n_{r_1}(\mathbf{k}_1), \dots\rangle \\ &= (1 + n)a_r^\dagger(\mathbf{k})|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle, \end{aligned} \quad (2.96)$$

e

$$\begin{aligned}
Na_r(\mathbf{k})|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle &= \sum_{s_i, \mathbf{k}_i} a_{s_i}^\dagger(\mathbf{k}_i) a_{s_i}(\mathbf{k}_i) a_r(\mathbf{k}) |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle \\
&= \sum_{s_i, \mathbf{k}_i} [a_r(\mathbf{k}) a_{s_i}^\dagger(\mathbf{k}_i) - \delta_{rs_i} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_i}] a_{s_i}(\mathbf{k}_i) |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle \\
&= a_r(\mathbf{k}) N |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle - a_r(\mathbf{k}) |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle \\
&= (n-1) a_r(\mathbf{k}) |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots\rangle. \tag{2.97}
\end{aligned}$$

Pelos resultados acima, vemos que a atuação do operador $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ corresponde a acrescentar uma partícula ao total de partículas do sistema enquanto que a do $a_r(\mathbf{k})$ a diminuir em um esse número. Dessa forma, interpretaremos $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ e $a_r(\mathbf{k})$, respectivamente, como operadores de criação e aniquilação de fótons de momento \mathbf{k} e polarização $\epsilon_r(\mathbf{k})$:

$$\begin{aligned}
a_{r_i}^\dagger(\mathbf{k}_i) |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle &\propto \\
&|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i + 1, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle, \tag{2.98a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{r_i}(\mathbf{k}_i) |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle &\propto \\
&|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i - 1, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle. \tag{2.98b}
\end{aligned}$$

Supondo que os estados

$$\begin{aligned}
|n_1, \dots, n_i, \dots\rangle &\equiv |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle, \\
|n_1, \dots, n_i + 1, \dots\rangle &\equiv |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i + 1, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle, \\
|n_1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle &\equiv |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i - 1, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle,
\end{aligned}$$

estejam normalizados, temos que

$$\begin{aligned}
n_i + 1 &= \langle n_1, \dots, n_i, \dots | N_{r_i} + 1 | n_1, \dots, n_i, \dots \rangle \\
&= \langle n_1, \dots, n_i, \dots | a_{r_i}(\mathbf{k}_i) a_{r_i}^\dagger(\mathbf{k}_i) | n_1, \dots, n_i, \dots \rangle \\
&= |C|^2 \langle n_1, \dots, n_i + 1, \dots | n_1, \dots, n_i + 1, \dots \rangle = |C|^2. \tag{2.99}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
n_i &= \langle n_1, \dots, n_i, \dots | N_{r_i} | n_1, \dots, n_i, \dots \rangle \\
&= \langle n_1, \dots, n_i, \dots | a_{r_i}^\dagger(\mathbf{k}_i) a_{r_i}(\mathbf{k}_i) | n_1, \dots, n_i, \dots \rangle \\
&= |D|^2 \langle n_1, \dots, n_i - 1, \dots | n_1, \dots, n_i - 1, \dots \rangle = |D|^2. \tag{2.100}
\end{aligned}$$

Assim, as equações (2.98) tornam-se

$$a_{r_i}^\dagger(\mathbf{k}_i) |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i + 1, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle, \quad (2.101a)$$

$$a_{r_i}(\mathbf{k}_i) |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, r_1, \mathbf{k}_1; \dots; n_i - 1, r_i, \mathbf{k}_i; \dots\rangle. \quad (2.101b)$$

Podemos agora definir o vácuo $|0\rangle$, isto é, o estado que não possui partículas, por

$$a_r(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k} \text{ e } r = 1, 2. \quad (2.102)$$

A partir do estado de vácuo, podemos construir estados contendo fótons de número, polarizações e momentos arbitrários aplicando em $|0\rangle$ operadores de criação apropriados. Por exemplo, o estado normalizado contendo um fóton de momento \mathbf{k}_1 e polarização $\epsilon_2(\mathbf{k}_1)$ e dois fótons de momento \mathbf{k}_2 e de polarização $\epsilon_1(\mathbf{k}_2)$ é dado por

$$|1, 2, \mathbf{k}_1; 2, 1, \mathbf{k}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a_2^\dagger(\mathbf{k}_1) [a_1^\dagger(\mathbf{k}_2)]^2 |0\rangle. \quad (2.103)$$

De maneira geral

$$|n_1, r_1, \mathbf{k}_1; n_2, r_2, \mathbf{k}_2; \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} [a_{r_1}^\dagger(\mathbf{k}_1)]^{n_1} [a_{r_2}^\dagger(\mathbf{k}_1)]^{n_2} \dots |0\rangle,$$

onde o fator de normalização $\frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}}$ pode ser demonstrado por indução (GREINER; REINHARDT, 1996).

Assumindo que o estado de vácuo esteja normalizado, $\langle 0|0\rangle = 1$, de (2.91) obtemos o valor esperado da energia do vácuo do campo eletromagnético quantizado, também chamada de energia de ponto zero:

$$\langle 0|H|0\rangle = \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}} \langle 0|a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})|0\rangle + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}} \langle 0|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}}, \quad (2.104)$$

que claramente é infinita.

A ocorrência de energias de ponto zero divergentes é uma característica inerente à teoria quântica de campos. Sua origem se deve ao fato de que a quantização canônica não estabelece um ordenamento entre operadores que não comutam entre si. Esta “constante” infinita é desprezada argumentando-se que apenas diferenças de energia possuem

significado físico, ao contrário de valores absolutos da mesma. Assim, o valor esperado da energia de um estado é determinado relativamente ao valor esperado da energia do vácuo. Isto corresponde a deslocarmos o zero da escala de energia de maneira que este coincida com a energia do estado de vácuo.

Uma maneira de contornar esse problema é introduzir o ordenamento normal de operadores para bósons. Neste ordenamento normal, é assumido que todos os operadores de criação e aniquilação de bósons (no nosso caso fótons) comutam entre si e que todos os operadores de aniquilação aparecem à direita dos operadores de criação. Por exemplo, o ordenamento normal dos operadores $a_2(\mathbf{k}_1)a_1^\dagger(\mathbf{k}_2)a_1^\dagger(\mathbf{k}_3)a_1(\mathbf{k}_4)$ é

$$N[a_2(\mathbf{k}_1)a_1^\dagger(\mathbf{k}_2)a_1^\dagger(\mathbf{k}_3)a_1(\mathbf{k}_4)] = a_1^\dagger(\mathbf{k}_2)a_1^\dagger(\mathbf{k}_3)a_2(\mathbf{k}_1)a_1(\mathbf{k}_4).$$

No caso do operador hamiltoniano, temos de (2.91) e (2.102)

$$\begin{aligned} \langle 0|N(H)|0\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} \langle 0|N[a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + a_r(\mathbf{k})a_r^\dagger(\mathbf{k})]|0\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} \langle 0|a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})|0\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} \langle 0|a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.105)$$

ou seja, o ordenamento normal impõe que a energia de ponto zero seja nula.

Até agora, discutimos a quantização do campo eletromagnético livre. Veremos na seção 2.4 que a imposição de condições de contorno altera a energia de ponto zero e que a diferença entre essas energias (com e sem condições de contorno) é finita. Tal quantidade finita levou H. B. G. Casimir a prever que duas placas paralelas neutras e perfeitamente condutoras, no vácuo, atrairiam-se (CASIMIR, 1948).

2.2.2 Quantização Covariante

Para $j^\mu = 0$ e considerando $\lambda = 1$, a densidade lagrangiana (2.46) torna-se

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu [A_\nu(\partial^\nu A^\mu) - A^\mu(\partial_\nu A^\nu)] \\
&\equiv -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu, \tag{2.106}
\end{aligned}$$

pois densidades lagrangianas que diferem por uma quadridivergência levam às mesmas equações de movimento, desde que os campos e suas derivadas se anulem na fronteira da região em que estão definidos.

Como vimos, os campos conjugados são

$$\begin{aligned}
\pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)}{\partial \dot{A}_\mu} \partial^\lambda A^\sigma + \frac{\partial(\partial^\lambda A^\sigma)}{\partial \dot{A}_\mu} \partial_\lambda A_\sigma \right] = -\partial^0 A^\mu \\
&= -\dot{A}^\mu, \tag{2.107}
\end{aligned}$$

e as equações de movimento (2.48) reduzem-se a

$$\square A^\mu = 0. \tag{2.108}$$

A solução geral desta equação é (GREINER; REINHARDT, 1996)

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\sqrt{2(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{r=0}^3 \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_r^*(\mathbf{k}) e^{ikx}], \tag{2.109}$$

onde $\omega_{\mathbf{k}} = k^0 = |\mathbf{k}|$ e, novamente, o fator $[2(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}]^{-1/2}$ foi introduzido por conveniência.

Os quatro vetores de polarização ε_r^μ correspondem ao fato de que, para A^μ , existem quatro estados de polarização independentes, para cada \mathbf{k} . Desta maneira, a quantização covariante introduz dois estados de polarização não-físicos, além dos transversos que também surgiram na quantização no *gauge* de Coulomb. A remoção desses estados espúrios será feita mais adiante.

Os vetores de polarização podem ser escolhidos como

$$\varepsilon_0^\mu(\mathbf{k}) = n^\mu \equiv (1, 0, 0, 0), \quad \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) = (0, \varepsilon_r(\mathbf{k})), \quad r = 1, 2, 3, \tag{2.110}$$

onde $\varepsilon_1(\mathbf{k})$ e $\varepsilon_2(\mathbf{k})$ são vetores normalizados, ortogonais a \mathbf{k} , entre si e a ε_3 , definido por

$$\varepsilon_3(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \tag{2.111}$$

ou seja,

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) = 0, \quad r = 1, 2, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}) = \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, 3. \quad (2.112)$$

Dessa definição, podemos mostrar que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}) = \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = -\zeta_r \delta_{rs}, \quad r, s = 0, 1, 2, 3, \quad (2.113a)$$

$$\sum_{r=0}^3 \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu}, \quad (2.113b)$$

onde $\zeta_0 = -1$ e $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1$.

Impondo condições de periodicidade análogas às (2.70), podemos discretizar os vetores de onda \mathbf{k} que aparecem na expressão (2.109). Neste caso, a solução geral de (2.121) torna-se (MANDL; SHAW, 1984)

$$A^\mu(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k})e^{-ikx} + a_r^*(\mathbf{k})e^{ikx}], \quad (2.114)$$

onde \mathbf{k} é da forma

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3), \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}. \quad (2.115)$$

Utilizando (2.113) e (2.114) temos que

$$a_r(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3\mathbf{x} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \zeta_r [\omega_{\mathbf{k}} A_\mu(x) + i\dot{A}_\mu(x)] e^{ikx}, \quad (2.116a)$$

$$a_r^*(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3\mathbf{x} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \zeta_r [\omega_{\mathbf{k}} A_\mu(x) - i\dot{A}_\mu(x)] e^{-ikx}. \quad (2.116b)$$

A densidade hamiltoniana para o campo de radiação é obtida de (2.19) e (2.106):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = -\pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \\ &= -\pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} \partial_0 A_\nu \partial^0 A^\nu + \frac{1}{2} \partial_i A_\nu \partial^i A^\nu = -\frac{1}{2} \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} \partial_i A_\nu \partial^i A^\nu \\ &= -\frac{1}{2} \pi^\mu \pi_\mu - \frac{1}{2} (\nabla A^0) \cdot (\nabla A^0) + \frac{1}{2} (\nabla A^j) \cdot (\nabla A^j), \end{aligned} \quad (2.117)$$

cuja integração em todo o espaço fornece o hamiltoniano:

$$H = -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} [\pi^\mu \pi_\mu + (\nabla A^0) \cdot (\nabla A^0) - (\nabla A^i) \cdot (\nabla A^j)]. \quad (2.118)$$

Os parenteses de Poisson são obtidos de (2.29) e (2.107)

$$\{A^\mu(t, \mathbf{x}), \pi^\nu(t, \mathbf{x}')\} = -\{A^\mu(t, \mathbf{x}), \dot{A}^\nu(t, \mathbf{x}')\} = g^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.119a)$$

$$\{A^\mu(t, \mathbf{x}), A^\nu(t, \mathbf{x}')\} = 0, \quad (2.119b)$$

$$\{\pi^\mu(t, \mathbf{x}), \pi^\nu(t, \mathbf{x}')\} = \{\dot{A}^\mu(t, \mathbf{x}), \dot{A}^\nu(t, \mathbf{x}')\} = 0. \quad (2.119c)$$

Podemos agora quantizar o campo eletromagnético. Utilizando (2.9) e (2.119), postulamos que os campos A^μ e π^μ obedecem às seguintes relações de comutação

$$[A^\mu(t, \mathbf{x}), \pi^\nu(t, \mathbf{x}')] = -[A^\mu(t, \mathbf{x}), \dot{A}^\nu(t, \mathbf{x}')] = ig^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.120a)$$

$$[A^\mu(t, \mathbf{x}), A^\nu(t, \mathbf{x}')] = 0, \quad (2.120b)$$

$$[\dot{A}^\mu(t, \mathbf{x}), \dot{A}^\nu(t, \mathbf{x}')] = 0. \quad (2.120c)$$

Além disso, da equação de Heisenberg (2.7), obtemos as equações de movimento para os campos

$$\square A^\mu(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.121)$$

cuja solução geral é (MANDL; SHAW, 1984)

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= A^{\mu+} + A^{\mu-} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \frac{\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} a_r(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \frac{\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}, \end{aligned} \quad (2.122)$$

análoga à solução (2.114).

Da solução acima e de (2.113), os operadores $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ são dados por

$$a_r(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3\mathbf{x} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \zeta_r \left[\omega_{\mathbf{k}} A_\mu(x) + i\dot{A}_\mu(x) \right] e^{ikx}, \quad (2.123a)$$

$$a_r^\dagger(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3\mathbf{x} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \zeta_r \left[\omega_{\mathbf{k}} A_\mu(x) - i\dot{A}_\mu(x) \right] e^{-ikx}, \quad (2.123b)$$

e satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned}
[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] &= \frac{\zeta_r \zeta_s}{2V(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' e^{i(kx - k'x')} \\
&\times \left[\epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \left(\omega_{\mathbf{k}} A_\mu(t, \mathbf{x}) + i \dot{A}_\mu(t, \mathbf{x}) \right), \epsilon_s^\nu(\mathbf{k}') \left(\omega_{\mathbf{k}'} A_\nu(t, \mathbf{x}') - i \dot{A}_\nu(t, \mathbf{x}') \right) \right] \\
&= -\frac{\zeta_r \zeta_s}{2V(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' e^{i(kx - k'x')} \left\{ i \omega_{\mathbf{k}} \overbrace{\left[A_\mu(t, \mathbf{x}), \dot{A}_\nu(t, \mathbf{x}') \right]}^{=-ig_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right. \\
&\quad \left. - i \omega_{\mathbf{k}'} \overbrace{\left[\dot{A}_\nu(t, \mathbf{x}), A_\mu(t, \mathbf{x}') \right]}^{=ig_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right\} \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_s^\nu(\mathbf{k}') \\
&= -\zeta_r \zeta_s \frac{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}}{2V(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_{s\mu}(\mathbf{k}') \underbrace{\int d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}}_{=V\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}} \\
&= -\zeta_r \zeta_s \underbrace{\epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_{s\mu}(\mathbf{k}')}_{=-\zeta_r \delta_{rs}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\
&= \zeta_r \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] &= \frac{\zeta_r \zeta_s}{2V(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' e^{i(kx + k'x')} \\
&\times \left[\epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \left(\omega_{\mathbf{k}} A_\mu(t, \mathbf{x}) + i \dot{A}_\mu(t, \mathbf{x}) \right), \epsilon_s^\nu(\mathbf{k}') \left(\omega_{\mathbf{k}'} A_\nu(t, \mathbf{x}') + i \dot{A}_\nu(t, \mathbf{x}') \right) \right] \\
&= \frac{\zeta_r \zeta_s}{2V(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' e^{i(kx + k'x')} \left\{ i \omega_{\mathbf{k}} \overbrace{\left[A_\mu(t, \mathbf{x}), \dot{A}_\nu(t, \mathbf{x}') \right]}^{=-ig_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right. \\
&\quad \left. + i \omega_{\mathbf{k}'} \overbrace{\left[\dot{A}_\nu(t, \mathbf{x}), A_\mu(t, \mathbf{x}') \right]}^{=ig_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right\} \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_s^\nu(\mathbf{k}') \\
&= \zeta_r \zeta_s \frac{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}}{2V(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})t} \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_{s\mu}(\mathbf{k}') \underbrace{\int d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}}_{=V\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] &= a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s^\dagger(\mathbf{k}') - a_s^\dagger(\mathbf{k}') a_r^\dagger(\mathbf{k}) \\
&= -[a_r(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') - a_s(\mathbf{k}') a_r(\mathbf{k})]^\dagger = -[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')]^\dagger = 0.
\end{aligned}$$

Em síntese, temos

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = \zeta_r \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (2.124a)$$

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] = 0, \quad (2.124b)$$

$$[a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = 0. \quad (2.124c)$$

De (2.69), temos que $\zeta_r = 1$ para $r = 1, 2, 3$ e, portanto, as relações de comutação (2.124) são idênticas às (2.87), ou seja, interpretaremos $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ como operadores de aniquilação e criação de fótons, respectivamente. Entretanto, $\zeta_r = -1$ para $r = 0$ e assim, aparentemente, $a_0(\mathbf{k})$ e $a_0^\dagger(\mathbf{k})$ possuem papéis trocados, ou seja, $a_0(\mathbf{k})$ seria o operador de criação e $a_0^\dagger(\mathbf{k})$ o de aniquilação. Para evitar novas dificuldades (MANDL; SHAW, 1984), não faremos esta troca, adotando o procedimento de Gupta-Bleuler.

Na teoria de Gupta-Bleuler, os operadores $a_r(\mathbf{k})$ e $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ para $r = 0, 1, 2, 3$ são interpretados como operadores de aniquilação e criação de fótons, respectivamente.

O estado de vácuo é definido por

$$a_r(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k}, r = 0, 1, 2, 3, \quad (2.125)$$

ou, equivalentemente,

$$A^{\mu+}(x)|0\rangle = 0, \quad \forall x, \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.126)$$

Os estados contendo um fóton são criados a partir do estado de vácuo

$$|1, \mathbf{k}, r\rangle = a_r^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle, \quad (2.127)$$

em que um fóton transversal ($r = 1, 2$), longitudinal ($r = 3$) ou escalar ($r = 0$) com momento \mathbf{k} está presente.

Para justificar esta interpretação, determinaremos o operador hamiltoniano. De (2.118) e (2.122), obtemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r [a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \omega_{\mathbf{k}} (\zeta_r)^2 \end{aligned}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \omega_{\mathbf{k}}. \quad (2.128)$$

O hamiltoniano acima também leva a uma energia de ponto zero divergente,

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \omega_{\mathbf{k}}, \quad (2.129)$$

onde assumimos que o estado de vácuo esteja normalizado.

Esta energia de ponto zero é diferente daquela obtida na quantização do *gauge* de Coulomb, pois a quantização covariante introduz graus de liberdade além dos necessários para a descrição do campo eletromagnético. Desta forma, além dos fótons transversais, também contribuem para a energia de ponto zero fótons longitudinais e escalares, os quais não possuem realidade física. A contribuição destes últimos pode ser removida pela introdução de campos “fantasmas”⁹ de Fadeev-Popov que, por possuírem energia de ponto zero negativa, levam à expressão (2.104) (HUGHES; ANBJORN, 1983). Neste sentido, ambos os procedimentos de quantização são equivalentes.

Para evitarmos o aparecimento da energia de ponto zero, introduziremos o ordenamento normal de operadores da mesma forma que fizemos na quantização no *gauge* de Coulomb. Desta forma, o hamiltoniano (2.128) torna-se

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}). \quad (2.130)$$

Embora o fator $\zeta_0 = -1$ tenha aparecido em (2.130), os autovalores de H são positivos. Por exemplo, para o estado contendo um fóton temos

$$\begin{aligned} H|1, \mathbf{k}, r\rangle &= \sum_{\mathbf{q}, s} \omega_{\mathbf{q}} \zeta_s a_s^\dagger(\mathbf{q}) a_s(\mathbf{q}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{q}, s} \omega_{\mathbf{q}} \zeta_s a_s^\dagger(\mathbf{q}) \underbrace{([a_s(\mathbf{q}), a_r^\dagger(\mathbf{k})] + a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{q}))}_{\zeta_r \delta_{rs} \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{k}}} |0\rangle \\ &= \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r^2 a_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle = \omega_{\mathbf{k}} |1, \mathbf{k}, r\rangle, \end{aligned} \quad (2.131)$$

⁹Tais campos fictícios são introduzidos na densidade lagrangiana, porém comparamos somente em estados intermediários, não estando associados a partículas reais.

ou seja, a energia é positiva para os três tipos de fótons.

Um problema surge no cálculo da normalização de estados contendo fótons. Por exemplo, considerando o vácuo normalizado, temos

$$\begin{aligned}\langle 1, \mathbf{k}, r | 1, \mathbf{k}, r \rangle &= \langle 0 | a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) | 0 \rangle = \langle 0 | [a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})] + a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | 0 \rangle \\ &= \zeta_r \langle 0 | 0 \rangle = \zeta_r,\end{aligned}$$

ou seja, a norma é negativa para fótons escalares, o que é inconsistente com a mecânica quântica. Entretanto, fótons escalares e longitudinais nunca foram observados.

Até agora, nada nos garante que a condição de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ seja válida. De fato, esta condição é incompatível com as relações canônicas de comutação (2.120), pois, supondo que a primeira seja válida, temos

$$\begin{aligned}0 &= [\partial_\mu A^\mu(t, \mathbf{x}), A^\nu(t, \mathbf{x}')] = [\partial_0 A^0(t, \mathbf{x}) + \partial_i A^i(t, \mathbf{x}), A^\nu(t, \mathbf{x}')] \\ &= -[\pi^0, A^\nu(t, \mathbf{x}')] + \partial_i [A^i(t, \mathbf{x}), A^\nu(t, \mathbf{x}')] = i g^{\nu 0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \neq 0,\end{aligned}$$

o que representa uma contradição.

Na teoria de Gupta-Bleuler, a condição de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ é substituída pela condição mais fraca

$$\partial_\mu A^{\mu+}(x) |\psi\rangle = 0, \quad (2.132)$$

que envolve somente operadores de aniquilação.

Da condição acima segue que

$$\langle \psi | \partial_\mu A^\mu(x) | \psi \rangle = \langle \psi | \partial_\mu A^{\mu+}(x) | \psi \rangle + \langle \psi | \partial_\mu A^{\mu-}(x) | \psi \rangle = 0, \quad (2.133)$$

ou seja, a condição de Lorentz e, como consequência, as equações de Maxwell são válidas no limite clássico.

Para entendermos melhor a condição (2.132), vamos expressá-la no espaço de Fourier. Utilizando (2.122) e (2.69), temos

$$\begin{aligned}\partial_\mu A^{\mu+}(x) |\psi\rangle &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \frac{-i}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \varepsilon_r^\mu k_\mu(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ikx} |\psi\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \frac{-i}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} [k^0 \varepsilon_r^0(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \varepsilon_r(\mathbf{k})] a_r(\mathbf{k}) e^{-ikx} |\psi\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{-i}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} [k^0 a_0(\mathbf{k}) - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}{k} a_3(\mathbf{k})] e^{-ikx} |\psi\rangle\end{aligned}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \frac{ik}{\sqrt{2V}\omega_{\mathbf{k}}} [a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})] e^{-ikx} |\psi\rangle = 0, \quad (2.134)$$

e, portanto,

$$[a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})] |\psi\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k}. \quad (2.135)$$

Obtemos então um vínculo nas combinações lineares dos fótons escalares e longitudinais, para cada valor de \mathbf{k} , que podem estar presentes em um determinado estado. Deste modo, os estados $|\psi\rangle$ fisicamente aceitáveis são aqueles que satisfazem (2.135).

O efeito da condição (2.132) torna-se aparente quando calculamos os valores esperados da energia para um estado arbitrário $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \psi | H | \psi \rangle &= \langle \psi | \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \psi \rangle + \langle \psi | \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} [a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k})] | \psi \rangle. \end{aligned}$$

Agora, de (2.135) temos que $\langle \psi | a_3^\dagger(\mathbf{k}) = \langle \psi | a_0^\dagger(\mathbf{k})$, de modo que

$$\begin{aligned} \langle \psi | a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) | \psi \rangle &= \langle \psi | a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) | \psi \rangle - \langle \psi | a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) | \psi \rangle - \langle \psi | a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) | \psi \rangle = \langle \psi | a_3^\dagger(\mathbf{k}) [a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})] | \psi \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Logo,

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \psi \rangle, \quad (2.137)$$

ou seja, somente os fótons transversos contribuem para o valor esperado da energia, como consequência da condição (2.132).

2.2.3 O Propagador do Fóton

Nesta seção, obteremos o propagador do fóton. Este resultado será importante no capítulo seguinte, em que trataremos os campos em interação.

O propagador do fóton é definido por

$$\langle 0|T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}|0\rangle, \quad (2.138)$$

onde $T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}$ denota o produto ordenado temporalmente para operadores bosônicos, dado por

$$T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\} = \begin{cases} A^\mu(x)A^\nu(y), & \text{se } x^0 > y^0 \\ A^\nu(y)A^\mu(x), & \text{se } y^0 > x^0 \end{cases}. \quad (2.139)$$

Definindo

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad (2.140)$$

podemos escrever (2.204) como

$$T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\} = \theta(x^0 - y^0)A^\mu(x)A^\nu(y) + \theta(y^0 - x^0)A^\nu(y)A^\mu(x). \quad (2.141)$$

Pelo fato de $A^{\mu+}(x)|0\rangle = 0$ e $\langle 0|A^{\mu-}(x) = 0$, segue da expressão acima que

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}|0\rangle &= \theta(x^0 - y^0)\langle 0|A^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|A^\nu(y)A^\mu(x)|0\rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0)\langle 0|A^{\mu+}(x)A^{\nu-}(y)|0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|A^{\nu+}(y)A^{\mu-}(x)|0\rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0)\langle 0|[A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(y)]|0\rangle \\ &\quad + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|[A^{\nu+}(y), A^{\mu-}(x)]|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Da expansão (2.122) e das relações de comutação (2.124), os comutadores são calculados:

$$\begin{aligned} [A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(y)] &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \sum_{r, s=0}^3 \frac{\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_s^\nu(\mathbf{q})}{2V\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{q}}}} \underbrace{[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{q})]}_{=\zeta_r\delta_{rs}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}} e^{-i(kx - qy)} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=0}^3 \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k})\zeta_r e^{-ik(x-y)}. \end{aligned} \quad (2.143)$$

No limite em que $V \rightarrow \infty$, podemos fazer $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}$ e, usando

(2.113b), segue que

$$\begin{aligned} [A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(y)] &= \frac{-g^{\mu\nu}}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik(x-y)} \\ &= -g^{\mu\nu} i\Delta^+(x-y), \end{aligned} \quad (2.144)$$

onde

$$\Delta^+(x) = \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ikx}. \quad (2.145)$$

Utilizando o resultado acima, temos

$$\begin{aligned} [A^{\nu+}(y), A^{\mu-}(x)] &= \frac{-g^{\nu\mu}}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik(y-x)} \\ &= \frac{-g^{\mu\nu}}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{e^{ik(x-y)}}{\omega_{\mathbf{k}}} = g^{\mu\nu} i\Delta^-(x-y), \end{aligned} \quad (2.146)$$

onde

$$\Delta^-(x) = -\Delta^+(-x) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{ikx}. \quad (2.147)$$

Assim,

$$\langle 0|[A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(y)]|0\rangle = -g^{\mu\nu} i\Delta^+(x-y), \quad (2.148a)$$

$$\langle 0|[A^{\nu+}(y), A^{\mu-}(x)]|0\rangle = g^{\mu\nu} i\Delta^-(x-y). \quad (2.148b)$$

Substituindo os resultados acima em (2.142), encontramos que o propagador do fóton é dado por

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}|0\rangle &= -g^{\mu\nu} i\theta(x^0 - y^0)\Delta^+(x-y) + g^{\mu\nu} i\theta(y^0 - x^0)\Delta^-(x-y) \\ &= -ig^{\mu\nu}[\theta(x^0 - y^0)\Delta^+(x-y) - \theta(y^0 - x^0)\Delta^-(x-y)] \\ &= -ig^{\mu\nu} \Delta_F(x-y) \equiv iD_F^{\mu\nu}(x-y), \end{aligned} \quad (2.149)$$

onde $\Delta_F(x) = \theta(x^0)\Delta^+(x) - \theta(-x^0)\Delta^-(x)$.

Utilizando a representação integral da função θ ,

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{e^{i\lambda t}}{\lambda - i\varepsilon}, \quad (2.150)$$

podemos escrever Δ_F de uma maneira manifestamente covariante:

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x) &= \theta(x^0)\Delta^+(x) - \theta(-x^0)\Delta^-(x) \\
&= \frac{-1}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{e^{i\lambda x^0} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\lambda - i\varepsilon} + \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{e^{-i\lambda x^0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\lambda - i\varepsilon} \right] \\
&= \frac{-1}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\lambda)x^0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\lambda - i\varepsilon} + \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\lambda)x^0} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\lambda - i\varepsilon} \right] \\
&= \frac{-1}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-i\tau x^0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega_{\mathbf{k}} - \tau - i\varepsilon} + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-i\tau x^0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega_{\mathbf{k}} + \tau - i\varepsilon} \right] \\
&= \frac{-1}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 e^{-ik^0 x^0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} - k^0 - i\varepsilon} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} + k^0 - i\varepsilon} \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon}, \tag{2.151}
\end{aligned}$$

onde usamos $k^2 = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2$, ficando subentendido que devemos tomar o limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto,

$$D_F^{\mu\nu}(x) = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon}. \tag{2.152}$$

2.3 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO DE DIRAC

2.3.1 Representação de Número para Férmiões

Até agora lidamos com operadores a_r e a_r^\dagger ($r = 1, 2, \dots$) satisfazendo as relações de comutação

$$[a_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs}, \quad [a_r, a_s] = 0, \quad [a_r^\dagger, a_s^\dagger] = 0, \tag{2.153}$$

e definimos os operadores

$$N_r = a_r^\dagger a_r, \quad r = 1, 2, \dots \tag{2.154}$$

Da identidade $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, segue que

$$\begin{aligned} [N_r, a_s] &= [a_r^\dagger a_r, a_s] = a_r^\dagger [a_r, a_s] + [a_r^\dagger, a_s] a_r = -\delta_{rs} a_s, \\ [N_r, a_s^\dagger] &= [a_r^\dagger a_r, a_s^\dagger] = a_r^\dagger [a_r, a_s^\dagger] + [a_r^\dagger, a_s^\dagger] a_r = \delta_{rs} a_s^\dagger. \end{aligned} \quad (2.155)$$

De (2.154) e (2.155), interpretamos a_r , a_r^\dagger e N_r como operadores de aniquilação, criação e número, respectivamente. Além disso, N_r possui autovalores $n_r = 0, 1, 2, \dots$ e definimos o estado de vácuo $|0\rangle$ por

$$a_r |0\rangle = 0, \quad \forall r. \quad (2.156)$$

A partir do vácuo $|0\rangle$, podemos construir estados contendo um número arbitrário de fótons como superposições de estados da forma $(a_{r_1}^\dagger)^{n_1} (a_{r_2}^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle$.

É importante lembrar que as relações de comutação (2.153) são decorrência direta da quantização canônica. Desta forma, a quantização canônica nos leva diretamente a bósons.

Uma maneira alternativa de derivarmos relações análogas às (2.153), consiste em empregarmos o anticomutador de dois operadores A e B , definido por

$$[A, B]_+ = AB + BA. \quad (2.157)$$

Vamos supor que os operadores a_r , a_r^\dagger ($r = 1, 2, \dots$), ao invés de satisfazerem as relações de comutação (2.153), satisfaçam as relações de anticomutação

$$[a_r, a_s^\dagger]_+ = \delta_{rs}, \quad [a_r, a_s]_+ = 0, \quad [a_r^\dagger, a_s^\dagger]_+ = 0. \quad (2.158)$$

Em particular, temos

$$a_r^2 = \frac{1}{2} [a_r, a_r]_+ = 0, \quad (2.159)$$

$$(a_r^\dagger)^2 = \frac{1}{2} [a_r^\dagger, a_r^\dagger]_+ = 0. \quad (2.160)$$

Assim,

$$\begin{aligned} [N_r, a_s]_+ &= [a_r^\dagger a_r, a_s]_+ = a_r^\dagger [a_r, a_s]_+ - [a_r^\dagger, a_s]_+ a_r = -\delta_{rs} a_s, \\ [N_r, a_s^\dagger]_+ &= [a_r^\dagger a_r, a_s^\dagger]_+ = a_r^\dagger [a_r, a_s^\dagger]_+ - [a_r^\dagger, a_s^\dagger]_+ a_r = \delta_{rs} a_s^\dagger, \end{aligned} \quad (2.161)$$

que são análogas às relações (2.155). Desta maneira, a_r , a_r^\dagger e N_r também serão interpretados como operadores de aniquilação, criação e número.

De (2.158) e (2.159) segue que

$$N_r^2 = a_r^\dagger a_r a_r^\dagger a_r = a_r^\dagger (1 - a_r^\dagger a_r) a_r = a_r^\dagger a_r - (a_r^\dagger)^2 (a_r)^2 = N_r, \quad (2.162)$$

ou seja, $N_r(N_r - 1) = 0$. Denotando por $|n\rangle$ um autoestado de N_r , temos que

$$N_r(N_r - 1)|n\rangle = n_r(n_r - 1)|n\rangle = 0, \quad (2.163)$$

logo, os autovalores de N_r são 0 ou 1, isto é, estamos lidando com a estatística de Fermi-Dirac.

O estado de vácuo $|0\rangle$ foi definido em (2.156), então o estado de uma partícula no estado r é

$$|1, r\rangle = a_r^\dagger |0\rangle. \quad (2.164)$$

O estado de duas partículas, com $r \neq s$, é dado por

$$|1, r; 1, s\rangle = a_r^\dagger a_s^\dagger |0\rangle = -a_s^\dagger a_r^\dagger |0\rangle = -|1, s; 1, r\rangle, \quad (2.165)$$

ou seja, este é anti-simétrico por troca de rótulos, como requerido para férmions. No caso em que $r = s$,

$$|2, r\rangle = (a_r^\dagger)^2 |0\rangle = 0, \quad (2.166)$$

logo, duas partículas não podem estar no mesmo estado quântico, como imposto pelo princípio de exclusão de Pauli.

2.3.2 Equação de Dirac

A equação de Dirac é a equação relativística que descreve férmions de spin 1/2. Essa equação pode ser escrita como

$$i \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi(\mathbf{x}, t), \quad (2.167)$$

onde $\psi(\mathbf{x}, t)$ é um spinor de dimensão N , $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e β são matrizes hermitianas de dimensão N que satisfazem ($i, j = 1, 2, 3$)

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = O, \quad \alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{I}, \quad (2.168)$$

onde \mathbb{I} e O são, respectivamente, a matriz identidade $N \times N$ e a matriz nula $N \times N$.

Multiplicando (2.167) por β pela esquerda e definindo $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, obtemos

$$i\gamma^\mu \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0, \quad (2.169)$$

onde γ^μ são matrizes $N \times N$ que satisfazem as relações de anticomutação

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{Álgebra de Clifford}) \quad (2.170)$$

e as condições de hermiticidade $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ e $(\gamma^j)^\dagger = -\gamma^j$. Estas últimas podem ser combinadas na forma

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.171)$$

Pode-se mostrar (ITZYKSON; ZUBER, 2005) que a menor dimensão na qual existem matrizes que satisfazem (2.170), no \mathbb{R}^3 , é $N = 4$. Assumiremos então que em (2.169) $\psi(x)$ é uma função de onda spinorial com quatro componentes $\psi_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, que explicitamente escreve-se

$$\sum_{\beta=1}^4 i\gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial\psi_\beta(x)}{\partial x^\mu} - \psi_\alpha(x) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4. \quad (2.172)$$

Tomando o conjugado hermitiano da equação (2.169), multiplicando por γ^0 pela direita e usando (2.170), obtemos a equação de Dirac adjunta

$$i \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0, \quad (2.173)$$

onde o campo adjunto é definido por

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0. \quad (2.174)$$

As equações de Dirac (2.169) e (2.173) podem ser derivadas a partir da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right] \psi(x), \quad (2.175)$$

e das equações de Euler-Lagrange para campos (2.17), tratando $\bar{\psi}_\alpha(x)$ e $\psi_\alpha(x)$ como campos independentes.

Os campos conjugados a ψ_α e $\bar{\psi}_\alpha$ são

$$\begin{aligned}\pi_\alpha(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i \sum_{\beta, \gamma=1}^4 \bar{\psi}_\beta \gamma_{\beta\gamma}^\mu \frac{\partial(\partial_\mu \psi_\gamma)}{\partial \partial_0 \psi_\alpha} = i \sum_{\beta=1}^4 \bar{\psi}_\beta \gamma_{\beta\alpha}^0 \\ &= i \sum_{\beta, \lambda=1}^4 \psi_\lambda^\dagger \gamma_{\lambda\beta}^0 \gamma_{\beta\alpha}^0 = i \sum_{\lambda=1}^4 \psi_\lambda^\dagger \delta_{\lambda\alpha} = i\psi_\alpha^\dagger,\end{aligned}\quad (2.176a)$$

$$\bar{\pi}_\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_\alpha} = 0,\quad (2.176b)$$

O hamiltoniano é obtido de (2.20), (2.175) e (2.176)

$$\begin{aligned}H &= \int d^3\mathbf{x} [\pi\dot{\psi} + \bar{\pi}\dot{\bar{\psi}} - \mathcal{L}] = \int d^3\mathbf{x} [i\psi^\dagger\dot{\psi} - i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\bar{\psi}\psi] \\ &= \int d^3\mathbf{x} [i\psi^\dagger\dot{\psi} - i\psi^\dagger \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=I}\dot{\psi} - i\bar{\psi}\gamma^j\partial_j\psi + m\bar{\psi}\psi] \\ &= \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} [-i\gamma^j\partial_j + m]\psi = \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger [-i\gamma^0\gamma^j\partial_j + m\gamma^0]\psi \\ &= \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m\beta]\psi.\end{aligned}\quad (2.177)$$

Considerando uma região cúbica de volume V , com condições de fronteira periódicas, temos que, para cada momento \mathbf{p} permitido pelas condições de fronteira e energia positiva

$$p_0 = E = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2},\quad (2.178)$$

a equação de Dirac (2.169) possui quatro soluções de ondas planas independentes

$$\sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx}, \quad \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} v_r(\mathbf{p}) e^{ipx}, \quad r = 1, 2,\quad (2.179)$$

onde os spinores u_r e v_r satisfazem as equações

$$(\not{p} - m)u_r(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v_r(\mathbf{p}) = 0, \quad r = 1, 2,\quad (2.180)$$

obtidas substituindo (2.179) em (2.169) e fazendo $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$.

Devido às suas dependências temporais, as soluções envolvendo

u_r e v_r são referidas como soluções de energia positiva e negativa, respectivamente.

As degenerescências das duas soluções de energia positiva e negativa, para um dado momento \mathbf{p} , resultam das possíveis orientações de spin. Para a equação de Dirac, somente as componentes de spin paralelas ou antiparalelas a \mathbf{p} são constantes de movimento e serão estes autoestados de spin que serão escolhidos para as soluções (2.179).

O operador de spin “na direção do movimento”, operador helicidade, é dado por (MANDL; SHAW, 1984)

$$\sigma_p = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad (2.181)$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$ e $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Assim, escolhemos os spinores em (2.179) tais que

$$\sigma_p u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}), \quad \sigma_p v_r(\mathbf{p}) = (-1)^r v_r(\mathbf{p}). \quad r = 1, 2. \quad (2.182)$$

A assimetria na indexação dos spinores será conveniente para identificarmos as propriedades de partículas e antipartículas.

Normalizando os spinores,

$$u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}, \quad (2.183a)$$

$$v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}, \quad (2.183b)$$

pode-se mostrar que as seguintes relações de ortonormalidade são satisfeitas (MANDL; SHAW, 1984)

$$u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs} \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}, \quad (2.184)$$

$$u_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(-\mathbf{p}) = 0. \quad (2.185)$$

As soluções (2.179) formam um conjunto completo, de modo que a solução geral da equação de Dirac (2.169) pode ser escrita como

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} [c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + d_r^*(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{ipx}], \quad (2.186)$$

enquanto que o campo conjugado ψ^\dagger possui expansão

$$\psi^\dagger(x) = \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} [c_r^*(\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx} + d_r(\mathbf{p})v_r^\dagger(\mathbf{p})e^{-ipx}]. \quad (2.187)$$

Para obtermos o coeficiente $c_r(\mathbf{p})$, multiplicamos (2.186) por $\sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}}}e^{ip'x}$, integramos em todo o espaço e usamos (2.184):

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}}} \int d^3\mathbf{x} u_s^\dagger(\mathbf{p}')\psi(x)e^{ip'x} \\ &= \sum_{r,\mathbf{p}} \frac{m}{V\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}} \int d^3\mathbf{x} [c_r(\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r(\mathbf{p})e^{-i(p-p')x} \\ &+ d_r^*(\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r(\mathbf{p})e^{i(p+p')x}] \\ &= \sum_{r,\mathbf{p}} \frac{m}{V\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}} [c_r(\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r(\mathbf{p})\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \\ &+ d_r^*(\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r(\mathbf{p})e^{i(p_0+p'_0)x_0}\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p}'}] \\ &= \sum_{r=1}^2 \frac{m}{E_{\mathbf{p}'}} [c_r(\mathbf{p}') \underbrace{u_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r(\mathbf{p}')}_{=\delta_{rs}E_{\mathbf{p}'}/m} + d_r^*(\mathbf{p}') \underbrace{u_s^\dagger(-\mathbf{p}')v_r(\mathbf{p}')}_{=0} e^{2ip_0x_0}] \\ &= c_s(\mathbf{p}'). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}}} \int d^3\mathbf{x} v_s^\dagger(\mathbf{p}')\psi(x)e^{-ip'x} \\ &= \sum_{r,\mathbf{p}} \frac{m}{V\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}} \int d^3\mathbf{x} [c_r(\mathbf{p})v_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r(\mathbf{p})e^{-i(p+p')x} \\ &+ d_r^*(\mathbf{p})v_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r(\mathbf{p})e^{i(p-p')x}] \\ &= \sum_{r,\mathbf{p}} \frac{m}{V\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}} [c_r(\mathbf{p})v_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r(\mathbf{p})e^{-i(p_0+p'_0)x_0}V\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p}'} \\ &+ d_r^*(\mathbf{p})v_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r(\mathbf{p})V\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}] \\ &= \sum_{r=1}^2 \frac{m}{E_{\mathbf{p}'}} [c_r(\mathbf{p}') \underbrace{v_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r(\mathbf{p}')}_{=0} e^{-2ip_0x_0} + d_r^*(\mathbf{p}') \underbrace{v_s^\dagger(-\mathbf{p}')v_r(\mathbf{p}')}_{=\delta_{rs}E_{\mathbf{p}'}/m}] \\ &= d_s^*(\mathbf{p}'). \end{aligned}$$

Assim,

$$c_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \int d^3\mathbf{x} u_r^\dagger(\mathbf{p}) \psi(x) e^{ipx}, \quad (2.188a)$$

$$d_r^*(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \int d^3\mathbf{x} v_r^\dagger(\mathbf{p}) \psi(x) e^{-ipx}. \quad (2.188b)$$

Para quantizarmos o campo de Dirac, postularemos que os campos $\psi(x)$ e $\psi^\dagger(x)$ satisfazem as relações de anticomutação a tempos iguais

$$[\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{x}')]_+ = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.189a)$$

$$[\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta(t, \mathbf{x}')]_+ = 0, \quad (2.189b)$$

$$[\psi_\alpha^\dagger(t, \mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{x}')]_+ = 0, \quad (2.189c)$$

que, como veremos, nos levará a uma representação de número para férmions.

Usando a identidade $[A, BC] = [A, B]_+ C - B[A, C]_+$, as equações de movimento para os campos $\psi_\alpha(x)$ são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_\alpha(t, \mathbf{x}) &= -i[\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), H] \\ &= -i \int d^3\mathbf{x}' [\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), -i\psi^\dagger(t, \mathbf{x}') \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla' \psi(t, \mathbf{x}') + m\psi^\dagger(t, \mathbf{x}') \beta \psi(t, \mathbf{x}')] \\ &= - \sum_{\beta, \gamma=1}^4 \int d^3\mathbf{x}' \left\{ [\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{x}') \boldsymbol{\alpha}_{\beta\gamma} \cdot \nabla' \psi_\gamma(t, \mathbf{x}')] \right. \\ &\quad \left. + im [\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{x}') \beta_{\beta\gamma} \psi_\gamma(t, \mathbf{x}')] \right\} \\ &= - \sum_{\beta, \gamma=1}^4 \int d^3\mathbf{x}' \left\{ \underbrace{[\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{x}')]_+}_{=\delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \boldsymbol{\alpha}_{\beta\gamma} \cdot \nabla' \psi_\gamma(t, \mathbf{x}') \right. \\ &\quad \left. - \psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{x}') \boldsymbol{\alpha}_{\beta\gamma} \cdot \nabla' \underbrace{[\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\gamma(t, \mathbf{x}')]_+}_{=0} \right. \\ &\quad \left. + im \underbrace{[\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{x}')]_+}_{=\delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \beta_{\beta\gamma} \psi_\gamma(t, \mathbf{x}') \right. \\ &\quad \left. - im \psi_\beta^\dagger(t, \mathbf{x}') \beta_{\beta\gamma} \underbrace{[\psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\gamma(t, \mathbf{x}')]_+}_{=0} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{\gamma=1}^4 [\boldsymbol{\alpha}_{\alpha\gamma} \cdot \nabla \psi_{\gamma}(t, \mathbf{x}) + im\beta_{\alpha\gamma} \psi_{\gamma}(t, \mathbf{x}')] \\
&= -i \sum_{\gamma=1}^4 (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta)_{\alpha\gamma} \psi_{\gamma}(t, \mathbf{x}), \tag{2.190}
\end{aligned}$$

que são análogas às equações (2.167).

A solução geral de (2.190) é (MANDL; SHAW, 1984)

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} d_r^{\dagger}(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{ipx} \\
&= \psi^+(x) + \psi^-(x), \tag{2.191}
\end{aligned}$$

e o campo conjugado ψ^{\dagger} é dado por

$$\begin{aligned}
\psi^{\dagger}(x) &= \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} d_r(\mathbf{p}) v_r^{\dagger}(\mathbf{p}) e^{-ipx} + \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} c_r^{\dagger}(\mathbf{p}) u_r^{\dagger}(\mathbf{p}) e^{ipx} \\
&= \psi^{\dagger+}(x) + \psi^{\dagger-}(x). \tag{2.192}
\end{aligned}$$

Analogamente a (2.188), os operadores c_r , c_r^{\dagger} , d_r e d_r^{\dagger} são dados por

$$c_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \int d^3\mathbf{x} u_r^{\dagger}(\mathbf{p}) \psi(x) e^{ipx}, \tag{2.193a}$$

$$c_r^{\dagger}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \int d^3\mathbf{x} \psi^{\dagger}(x) u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx}, \tag{2.193b}$$

$$d_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \int d^3\mathbf{x} \psi^{\dagger}(x) v_r(\mathbf{p}) e^{ipx}, \tag{2.193c}$$

$$d_r^{\dagger}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} \int d^3\mathbf{x} v_r^{\dagger}(\mathbf{p}) \psi(x) e^{-ipx}. \tag{2.193d}$$

Utilizando (2.193) e as relações de anticomutação (2.189), podemos mostrar que os operadores c_r , c_r^{\dagger} , d_r e d_r^{\dagger} satisfazem às seguintes relações de anticomutação

$$[c_r(\mathbf{p}), c_s^{\dagger}(\mathbf{p}')]_{+} = \delta_{rs} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad [d_r(\mathbf{p}), d_s^{\dagger}(\mathbf{p}')]_{+} = \delta_{rs} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \tag{2.194}$$

além de

$$\begin{aligned}
[c_r(\mathbf{p}), c_s(\mathbf{p}')]_+ &= 0, & [c_r^\dagger(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')]_+ &= 0, & [d_r(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{p}')]_+ &= 0, \\
[d_r^\dagger(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')]_+ &= 0, & [c_r(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{p}')]_+ &= 0, & [c_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')]_+ &= 0, \\
[c_r^\dagger(\mathbf{p}), d_s(\mathbf{p}')]_+ &= 0, & [c_r^\dagger(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')]_+ &= 0, & &
\end{aligned} \tag{2.195}$$

que são justamente as relações de anticomutação para férmions (2.158) discutidas na seção 2.3.1. Definindo os operadores

$$N_r(\mathbf{p}) = c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}), \quad \bar{N}_r(\mathbf{p}) = d_r^\dagger(\mathbf{p})d_r(\mathbf{p}), \tag{2.196}$$

interpretaremos c_r , c_r^\dagger , N_r , d_r , d_r^\dagger , \bar{N}_r como operadores de aniquilação, criação e número de dois tipos de férmions.

O estado de vácuo $|0\rangle$ é definido por

$$c_r(\mathbf{p})|0\rangle = 0, \quad d_r(\mathbf{p})|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{p}, r = 1, 2, \tag{2.197}$$

ou, equivalentemente,

$$\psi^+(x)|0\rangle = 0, \quad \psi^{\dagger+}(x)|0\rangle = 0, \tag{2.198}$$

Utilizando o hamiltoniano (2.177), a equação de movimento para os campos (2.190), as soluções de ondas planas (2.191) e (2.192) e as relações de ortonormalidade (2.184), o operador hamiltoniano para o campo de Dirac é dado por

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m\beta] \psi = i \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger \partial_o \psi \\
&= \sum_{r,s=1}^2 \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \int d^3\mathbf{x} \frac{m}{V} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}'}}{E_{\mathbf{p}}}} [c_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx} + d_r(\mathbf{p})v_r^\dagger(\mathbf{p})e^{-ipx}] \\
&\quad \times [c_s(\mathbf{p}')u_s(\mathbf{p}')e^{-ip'x} - d_s^\dagger(\mathbf{p}')v_s(\mathbf{p}')e^{ip'x}] \\
&= \sum_{r,s,\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \int d^3\mathbf{x} \frac{m}{V} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}'}}{E_{\mathbf{p}}}} [c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p}')u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}')e^{i(p-p')x} \\
&\quad - c_r^\dagger(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}')e^{i(p+p')x} - d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}')e^{i(p'-p)x} \\
&\quad + d_r(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p}')v_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}')e^{-i(p+p')x}] \\
&= \sum_{r,s,\mathbf{p}} m \left[\underbrace{c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})}_{=\delta_{rs}E_{\mathbf{p}}/m} - d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p})\underbrace{v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})}_{=\delta_{rs}E_{\mathbf{p}}/m} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} \left[c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) - d_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p}) \right] \\
&= \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} \left[c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) \right] - \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}}. \quad (2.199)
\end{aligned}$$

Como podemos perceber, o campo de Dirac quantizado também possui energia de ponto zero divergente, pois assumindo que o vácuo $|0\rangle$ esteja normalizado, temos que

$$\begin{aligned}
\langle 0|H|0\rangle &= \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} \left[\langle 0|c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p})|0\rangle + \langle 0|d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p})|0\rangle - 1 \right] \\
&= - \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}}. \quad (2.200)
\end{aligned}$$

Para eliminarmos esta divergência, assim como fizemos na quantização do campo eletromagnético, vamos introduzir o ordenamento normal de operadores. No caso de operadores fermiônicos, escrevemos os operadores de criação sempre à esquerda dos operadores de aniquilação e assumimos que estes anticomutam. Por exemplo, para $[c_1^\dagger(\mathbf{p}_1) + c_1(\mathbf{p}_1)][c_2^\dagger(\mathbf{p}_1) + c_2(\mathbf{p}_1)]$ temos

$$\begin{aligned}
&N([c_1^\dagger(\mathbf{p}_1) + c_1(\mathbf{p}_1)][c_2^\dagger(\mathbf{p}_1) + c_2(\mathbf{p}_1)]) \\
&= N(c_1^\dagger(\mathbf{p}_1)c_2^\dagger(\mathbf{p}_1) + c_1(\mathbf{p}_1)c_2^\dagger(\mathbf{p}_1) + c_1^\dagger(\mathbf{p}_1)c_2(\mathbf{p}_1) + c_1(\mathbf{p}_1)c_2(\mathbf{p}_1)) \\
&= c_1^\dagger(\mathbf{p}_1)c_2^\dagger(\mathbf{p}_1) - c_2^\dagger(\mathbf{p}_1)c_1(\mathbf{p}_1) + c_1^\dagger(\mathbf{p}_1)c_2(\mathbf{p}_1) + c_1(\mathbf{p}_1)c_2(\mathbf{p}_1).
\end{aligned}$$

Assim, incorporando o ordenamento normal ao operador hamiltoniano (2.199), temos que

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3\mathbf{x} N(\psi^\dagger [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m\beta] \psi) \\
&= \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} N\left(c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) - d_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p})\right) \\
&= \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} \left[c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) \right], \quad (2.201)
\end{aligned}$$

o qual claramente possui energia de ponto zero nula.

O operador de carga elétrica é dado por (MANDL; SHAW, 1984)

$$\begin{aligned}
Q &= q \int d^3\mathbf{x} N(\psi^\dagger(x)\psi(x)) \\
&= q \sum_{r,s=1}^2 \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \int d^3\mathbf{x} \frac{m}{V} \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}} N\left([c_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx} + d_r(\mathbf{p})v_r^\dagger(\mathbf{p})e^{-ipx}]\right. \\
&\quad \times \left.[c_s(\mathbf{p}')u_s(\mathbf{p}')e^{-ip'x} + d_s^\dagger(\mathbf{p}')v_s(\mathbf{p}')e^{ip'x}]\right) \\
&= q \sum_{r,s,\mathbf{p},\mathbf{p}'} \int d^3\mathbf{x} \frac{m}{V} \frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}} N\left(c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p}')u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}')e^{i(p-p')x}\right. \\
&\quad + c_r^\dagger(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}')u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}')e^{i(p+p')x} + d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}')v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}')e^{i(p'-p)x} \\
&\quad \left.+ d_r(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p}')v_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}')e^{-i(p+p')x}\right) \\
&= q \sum_{r,s,\mathbf{p}} \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} N\left(c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p}) \underbrace{u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})}_{=\delta_{rs}E_{\mathbf{p}}/m} + d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}) \underbrace{v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})}_{=\delta_{rs}E_{\mathbf{p}}/m}\right) \\
&= q \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} N\left(c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}) + d_r(\mathbf{p})d_r^\dagger(\mathbf{p})\right) \\
&= q \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \left(N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})\right). \tag{2.202}
\end{aligned}$$

Tomando q como a carga do elétron $q = -e < 0$, temos

$$Q = -e \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \left(N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})\right). \tag{2.203}$$

Desta forma, interpretamos m como a massa dos férmions na equação de Dirac e associamos os operadores c e d ao elétron e ao pósitron, respectivamente.

2.3.3 O Propagador Fermiônico

O propagador fermiônico é definido por

$$\langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\}|0\rangle, \tag{2.204}$$

onde o produto ordenado temporalmente para operadores fermiônicos é dado por

$$T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\} = \begin{cases} \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y), & \text{se } x^0 > y^0 \\ -\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x), & \text{se } y^0 > x^0 \end{cases}. \quad (2.205)$$

Definindo

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad (2.206)$$

podemos escrever (2.204) como

$$T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\} = \theta(x^0 - y^0)\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) - \theta(y^0 - x^0)\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x). \quad (2.207)$$

Da expressão (2.192) e lembrando que $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$, temos

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) &= \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} d_r(\mathbf{p}) \bar{v}_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{-ipx} + \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}} c_r^\dagger(\mathbf{p}) \bar{u}_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx}, \\ &= \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) \end{aligned} \quad (2.208)$$

onde $\bar{v}_r^\dagger(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0$ e $\bar{u}_r^\dagger(\mathbf{p}) = u_r^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0$, com as seguintes propriedades (MANDL; SHAW, 1984):

$$\bar{u}_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}, \quad (2.209a)$$

$$\bar{u}_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \bar{v}_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = 0, \quad (2.209b)$$

$$\sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}\bar{u}_{r\beta} = \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{2m}, \quad (2.209c)$$

$$\sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}\bar{v}_{r\beta} = \frac{(\not{p} - m)_{\alpha\beta}}{2m}. \quad (2.209d)$$

Vamos agora calcular (2.204). Como $\psi^+(x)|0\rangle = 0$, $\bar{\psi}^+(x)|0\rangle = 0$, $\langle 0|\psi^-(x) = 0$ e $\langle 0|\bar{\psi}^-(x) = 0$, de (2.207) temos

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\}|0\rangle &= \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle - \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)|0\rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\psi_\alpha^+(x)\bar{\psi}_\beta^-(y)|0\rangle - \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\bar{\psi}_\beta^+(y)\psi_\alpha^-(x)|0\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(y)]_+ | 0 \rangle \\
&\quad - \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | [\bar{\psi}_\beta^+(y), \psi_\alpha^-(x)]_+ | 0 \rangle. \quad (2.210)
\end{aligned}$$

Das expansões (2.192), (2.208) e das relações de comutação (2.194), temos

$$\begin{aligned}
[\psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(y)]_+ &= \sum_{r,s=1}^2 \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} \frac{m e^{-i(px-ky)}}{V \sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{k}}}} \underbrace{[c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{k})]_+}_{=\delta_{rs}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{k}}} u_{r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{u}_{s\beta}(\mathbf{k}) \\
&= \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{m}{V E_{\mathbf{p}}} u_{r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) e^{-ip(x-y)}. \quad (2.211)
\end{aligned}$$

No limite em que $V \rightarrow \infty$, podemos fazer $\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}$ e, usando (2.209c), segue que

$$\begin{aligned}
[\psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(y)]_+ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} (\not{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip(x-y)} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^3} \left\{ \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} \underbrace{\not{p}_{\alpha\beta} e^{-ip(x-y)}}_{=i\gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu e^{-ip(x-y)}} + \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} m_{\alpha\beta} e^{-ip(x-y)} \right\} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^3} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \\
&= i(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \Delta^+(x-y), \quad (2.212)
\end{aligned}$$

onde

$$\Delta^+(x) = \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} e^{-ipx}. \quad (2.213)$$

Analogamente,

$$[\bar{\psi}_\beta^+(y), \psi_\alpha^-(x)]_+ = \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{m}{V E_{\mathbf{p}}} v_{r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p}) e^{ip(x-y)}. \quad (2.214)$$

No limite em que $V \rightarrow \infty$, podemos fazer $\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}$ e, usando (2.209d), segue

$$[\bar{\psi}_\beta^+(y), \psi_\alpha^-(x)]_+ = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} (\not{p} - m)_{\alpha\beta} e^{ip(x-y)}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2(2\pi)^3} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} \\
&= i(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \Delta^-(x-y), \tag{2.215}
\end{aligned}$$

onde

$$\Delta^-(x) = -\Delta^+(-x) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} e^{ipx}. \tag{2.216}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle 0 | [\psi_\alpha^+(x), \bar{\psi}_\beta^-(y)]_+ | 0 \rangle &= i(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \Delta^+(x-y) \equiv iS_{\alpha\beta}^+(x-y), \\
\langle 0 | [\bar{\psi}_\beta^+(y), \psi_\alpha^-(x)]_+ | 0 \rangle &= i(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \Delta^-(x-y) \equiv iS_{\alpha\beta}^-(x-y),
\end{aligned}$$

as quais, substituídas em (2.210), fornecem

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \} | 0 \rangle &= i\theta(x^0 - y^0) S_{\alpha\beta}^+(x-y) - i\theta(y^0 - x^0) S_{\alpha\beta}^-(x-y) \\
&= iS_{F\alpha\beta}(x-y), \tag{2.217}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
S_{F\alpha\beta}(x) &= \theta(x^0) S_{\alpha\beta}^+(x) - \theta(-x^0) S_{\alpha\beta}^-(x) \\
&= \theta(x^0) (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \Delta^+(x) - \theta(-x^0) (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \Delta^-(x) \\
&= (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} [\theta(x^0) \Delta^+(x) - \theta(-x^0) \Delta^-(x)]. \tag{2.218}
\end{aligned}$$

Podemos escrever $S_{F\alpha\beta}$ em uma forma manifestamente covariante. Analogamente a (2.151), temos

$$\begin{aligned}
S_{F\alpha\beta}(x) &= (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} [\theta(x^0) \Delta^+(x) - \theta(-x^0) \Delta^-(x)] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \tag{2.219}
\end{aligned}$$

onde fica subentendido que se deve tomar o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ ao final dos cálculos.

2.3.4 Interação Eletromagnética e Invariância de Gauge

Na mecânica clássica, a função hamiltoniana que descreve uma partícula de massa m e carga q na presença de um campo eletromagnético, caracterizado pelos potenciais $\phi(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$, é

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi. \quad (2.220)$$

Pelo princípio da correspondência, esta mesma hamiltoniana leva à equação de Schrödinger para uma partícula carregada interagindo com um campo eletromagnético

$$i\frac{\partial\psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = H\psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2m}[(-i\nabla - q\mathbf{A})^2 + q\phi]\psi(t, \mathbf{x}). \quad (2.221)$$

Como podemos perceber, a equação acima pode ser obtida a partir da equação de Schrödinger para uma partícula livre através das substituições

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi(t, \mathbf{x}), \quad \nabla \longrightarrow \nabla - iq\mathbf{A}(t, \mathbf{x}), \quad (2.222)$$

que é usualmente referida como substituição mínima.

Em termos do quadripotencial $A^\mu(x) = (\phi, \mathbf{A})$, a substituição mínima adquire a forma explicitamente covariante

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x). \quad (2.223)$$

No que segue, assumiremos que a substituição (2.223) introduz corretamente a interação eletromagnética na equação de Dirac. Desta forma, considerando $q = -e < 0$, a equação de Dirac (2.169) torna-se

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) &= i(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) + e\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) = 0 \\ \therefore i(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) &= -e\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) \end{aligned} \quad (2.224)$$

e a densidade lagrangiana (2.175) fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) + e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \end{aligned} \quad (2.225)$$

onde \mathcal{L}_0 é a já conhecida densidade lagrangiana do campo de Dirac

livre,

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x), \quad (2.226)$$

e \mathcal{L}_I é a densidade lagrangiana de interação

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x). \quad (2.227)$$

Para descrevermos completamente a dinâmica dos campos clássicos, devemos adicionar à (2.225) a densidade lagrangiana do campo de radiação \mathcal{L}_{rad} , que já conhecemos da seção 2.2. De (2.39), temos

$$\mathcal{L}_{\text{rad}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (2.228)$$

Assim, de (2.225) e (2.228) obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (2.229)$$

Uma diferença entre as densidades lagrangianas (2.225) e (2.228), é que, frente a uma transformação de *gauge* (2.38)

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x),$$

a primeira é invariante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{rad}} &= -\frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}[\partial^\mu A'^\nu(x) - \partial^\nu A'^\mu(x)][\partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x)] \\ &= -\frac{1}{4}[\partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu f) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu f)][\partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu f)] \\ &= -\frac{1}{4}[\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)][\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)] \\ &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\text{rad}}, \end{aligned} \quad (2.230)$$

enquanto que a segunda não:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}'_I = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A'_\mu(x) \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(A_\mu + \partial_\mu f) = \mathcal{L} + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu f. \end{aligned} \quad (2.231)$$

A invariância de *gauge* pode ser restabelecida impondo que, junto com a transformação dos potenciais eletromagnéticos, os campos de

Dirac se transformem de acordo com as transformações de fase locais

$$\begin{aligned}\psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = \psi(x)e^{ief(x)}, \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-ief(x)}.\end{aligned}\tag{2.232}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}'_I = \bar{\psi}'(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi'(x) + e\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\psi'(x)A'_\mu(x) \\ &= \bar{\psi}e^{-ief}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi e^{ief} + e\bar{\psi}e^{-ief}\gamma^\mu\psi e^{ief}(A_\mu + \partial_\mu f) \\ &= \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu f + \mathcal{L}_I + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I = \mathcal{L}.\end{aligned}\tag{2.233}$$

No que segue, assumiremos que a densidade lagrangiana (2.227) descreve a a interação correta da eletrodinâmica quântica. Outros termos que são invariantes de *gauge* e de Lorentz poderiam ser adicionados; entretanto, tais termos são geralmente excluídos pela condição de renormalizibilidade da teoria (MANDL; SHAW, 1984). A interação (2.227) produz previsões teóricas com excelente concordância experimental.

2.4 EFEITO CASIMIR

Considere uma cavidade cúbica de volume L^3 delimitada por paredes perfeitamente condutoras. Dentro desta, considere uma placa quadrada de lado L , perfeitamente condutora, que seja paralela e esteja a uma distância ajustável em relação a uma das faces da cavidade.

Seguindo de perto as referências (PLUNIEN; MÜLLER; GREINER, 1986; CASIMIR, 1948; ITZYKSON; ZUBER, 2005) calcularemos a diferença entre as energias de ponto zero do campo eletromagnético correspondentes às situações em que a placa móvel está a uma distância $a \ll L$ de uma das paredes da cavidade e a uma distância $d \gg a$, por exemplo, $d/2$, conforme a figura 1.

Denotando por $E(x)$ a energia de ponto zero na cavidade cuja distância entre a parede da caixa e a placa móvel é x , a densidade de energia de Casimir é definida, formalmente, por

$$\mathcal{E}_C = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \{ [E_I(a) + E_{II}(L-a)] - [E_{III}(d) + E_{IV}(L-d)] \}, \tag{2.234}$$

onde, conforme (2.104), cada termo $E(x)$ na expressão acima é dado pela soma das frequências de todos os modos possíveis dentro da respectiva cavidade retangular.

Fazendo uso do resultado (A.28) obtido no apêndice A, o termo

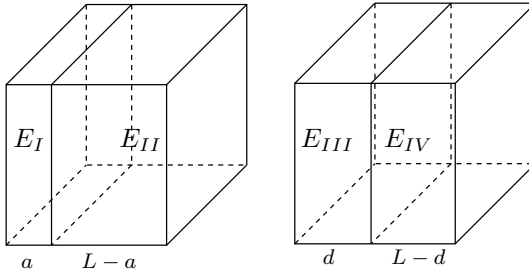


Figura 1 – Placa móvel em duas situações distintas.

$E_I(a)$ é dado por

$$E_I(a) = \frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2, k_3} D(k_1, k_2, k_3) \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}, \quad (2.235)$$

onde $k_1 = \frac{l\pi}{L}$, $k_2 = \frac{m\pi}{L}$ e $k_3 = \frac{n\pi}{a}$ com $l, m, n \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Além disso, o termo $D(k_1, k_2, k_3)$ está relacionado com a degenerescência das frequências, sendo definido por

$$D(k_1, k_2, k_3) = \begin{cases} 1, & \text{se apenas um dos } k_1, k_2, k_3 \text{ for nulo} \\ 2, & \text{se } k_1, k_2, k_3 \text{ forem não nulos} \\ 0, & \text{do contrário.} \end{cases} \quad (2.236)$$

Como estamos interessados no limite em que L é muito grande, podemos considerar k_1 e k_2 como variáveis contínuas. Dessa forma, os somatórios em k_1 e k_2 de (2.235) são substituídos por integrais:

$$\sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \rightarrow \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} dk_1 \int_0^{\infty} dk_2. \quad (2.237)$$

Denotando $k_{||} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ e $d^2 k_{||} = dk_1 dk_2$, temos

$$\begin{aligned} E_I(a) &= \frac{L^2}{2\pi^2} \int_{0^+}^{\infty} dk_1 \int_{0^+}^{\infty} dk_2 \sum_{n=0}^{\infty} D(k_1, k_2, k_3) \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + n^2\pi^2/a^2} \\ &= \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \sum_{n=0}^{\infty} D(k_1, k_2, k_3) \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + n^2\pi^2/a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \int d^2 k_{\parallel} \left[\sqrt{k_1^2 + k_2^2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + n^2\pi^2/a^2} \right] \\
&= \frac{L^2}{(2\pi)^2} \int d^2 k_{\parallel} \left[\frac{1}{2}k_{\parallel} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_{\parallel}^2 + n^2\pi^2/a^2} \right], \quad (2.238)
\end{aligned}$$

onde, pelo fato de k_1 e k_2 serem variáveis contínuas, a remoção do ponto $(0, 0)$ do domínio do integrando não altera o valor da integral acima.

De maneira análoga, denotando $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$, encontramos

$$E_{II}(L - a) = \frac{L^2(L - a)}{(2\pi)^3} \int d^2 k_{\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 k, \quad (2.239)$$

$$E_{III}(d) = \frac{L^2 d}{(2\pi)^3} \int d^2 k_{\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 k, \quad (2.240)$$

$$E_{IV}(d) = \frac{L^2(L - d)}{(2\pi)^3} \int d^2 k_{\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 k. \quad (2.241)$$

Assim, a diferença entre as energias de ponto zero são dadas por

$$\begin{aligned}
E_C(a) &= \{ [E_I(a) + E_{II}(L - a)] - [E_{III}(d) + E_{IV}(L - d)] \} \\
&= \frac{L^2}{(2\pi)^2} \int d^2 k_{\parallel} \left\{ \frac{1}{2}k_{\parallel} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_{\parallel}^2 + n^2\pi^2/a^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi} [(L - a) - d - (L - d)] \int dk_3 k \right\} \\
&= \frac{L^2}{(2\pi)^2} \int d^2 k_{\parallel} \left\{ \frac{1}{2}k_{\parallel} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_{\parallel}^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}} - \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \sqrt{k_{\parallel}^2 + k_3^2} \right\} \\
&= \frac{L^2}{(2\pi)^2} \int d^2 k_{\parallel} \left\{ \frac{1}{2}k_{\parallel} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_{\parallel}^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}} - \int_0^{\infty} dn \sqrt{k_{\parallel}^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}} \right\},
\end{aligned}$$

onde fizemos a mudança de variável $k_3 = n\pi/a$.

Passando para coordenadas polares, obtemos

$$E_C(a) = \frac{L^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} d\kappa \kappa \left\{ \frac{1}{2}\kappa + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\kappa^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\infty dn \sqrt{\kappa^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}} \Big\} \\
& = \frac{L^2}{2\pi} \int_0^\infty d\kappa \kappa \left\{ \frac{1}{2}\kappa + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{\kappa^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}} - \int_0^\infty dn \sqrt{\kappa^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.242}$$

A expressão acima é divergente e, portanto, desprovida de significado físico. Para obtermos um resultado finito, faz-se necessário regularizá-la. Adotaremos a regularização por corte, que consiste em introduzir no integrando de (2.242) uma função de corte $f(k/k_c)$ que force a convergência da integração. Tal função f deve ser suficientemente diferenciável, deve se anular de maneira suficientemente rápida quando $k \rightarrow \infty$ e, além disso, deve ser igual a 1 quando $k_c \rightarrow \infty$, onde k_c é um vetor de onda de corte. Uma função deste tipo é, por exemplo, e^{-k/k_c} .

Este procedimento se justifica fisicamente, pois para ondas com grandes k (consequentemente, pequenos comprimentos de onda) estamos saindo do domínio de validade do eletromagnetismo clássico, o que torna irreal o confinamento de ondas eletromagnéticas no interior de uma cavidade macroscópica. Assim, consideraremos k_c da ordem do inverso do tamanho atômico.

Regularizando (2.242) e fazendo $u = a^2\kappa^2/\pi^2$ temos

$$\begin{aligned}
E_C(a, k_c) &= \frac{L^2}{2\pi} \int_0^\infty d\kappa \kappa \left\{ \frac{1}{2}\kappa f\left(\frac{\kappa}{k_c}\right) + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{\kappa^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}} f\left(\frac{\sqrt{\kappa^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}}{k_c}\right) \right. \\
& \quad \left. - \int_0^\infty dn \sqrt{\kappa^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}} f\left(\frac{\sqrt{\kappa^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}}{k_c}\right) \right\} \\
&= \frac{L^2\pi^2}{4a^3} \int_0^\infty du \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{u} f\left(\frac{\pi\sqrt{u}}{ak_c}\right) + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{u + n^2} f\left(\frac{\pi\sqrt{u+n^2}}{ak_c}\right) \right. \\
& \quad \left. - \int_0^\infty dn \sqrt{u + n^2} f\left(\frac{\pi\sqrt{u+n^2}}{ak_c}\right) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.243}$$

Note que no limite $k_c \rightarrow \infty$ recuperamos (2.242).

Na expressão regularizada (2.243), a série é convergente e então

podemos trocar a ordem da integração e do somatório. Assim,

$$\begin{aligned}
 E_C(a, k_c) &= \frac{L^2 \pi^2}{4a^3} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty du \sqrt{u} f\left(\frac{\pi\sqrt{u}}{ak_c}\right) + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty du \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi\sqrt{u+n^2}}{ak_c}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^\infty dn \int_0^\infty du \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi\sqrt{u+n^2}}{ak_c}\right) \right\} \\
 &= \frac{L^2 \pi^2}{4a^3} \left\{ \frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^\infty F(n) - \int_0^\infty dn F(n) \right\}, \quad (2.244)
 \end{aligned}$$

onde definimos

$$F(n) = \int_0^\infty du \sqrt{u+n^2} f\left(\frac{\pi\sqrt{u+n^2}}{ak_c}\right) = \int_{n^2}^\infty dw \sqrt{w} f\left(\frac{\pi\sqrt{w}}{ak_c}\right). \quad (2.245)$$

Usando a fórmula de Euler-MacLaurin (ARFKEN; WEBER, 2001), a diferença entre a série e a integral da expressão acima é

$$\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^\infty F(n) - \int_0^\infty dn F(n) = - \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)!} B_{2k} F^{2k-1}(0), \quad (2.246)$$

onde B_ν são os números de Bernoulli definidos pela série

$$\frac{y}{e^y - 1} = \sum_{\nu=0}^\infty B_\nu \frac{y^\nu}{\nu!}. \quad (2.247)$$

Vamos agora calcular as derivadas de F . Temos que

$$F^{(1)} \equiv F'(n) = -\sqrt{n^2} f\left(\frac{\pi\sqrt{n^2}}{ak_c}\right) \frac{dn^2}{dn} = -2n^2 f\left(\frac{\pi n}{ak_c}\right), \quad (2.248)$$

então

$$F^{(1)} = -2n^2 f; \quad (2.249a)$$

$$F^{(2)} = -4nf - 2n^2 f^{(1)}; \quad (2.249b)$$

$$F^{(3)} = -4f - 8nf^{(1)} - 2n^2 f^{(2)}; \quad (2.249c)$$

De um modo geral, para $m \geq 3$,

$$F^{(m)} = -2\left\{(m-1)(m-2)f^{(m-3)} + 2(m-1)nf^{(m-2)} + n^2f^{(m-1)}\right\}, \quad (2.249d)$$

resultado que pode ser demonstrado por indução:
para $m = 3$, de (2.249d), temos

$$\begin{aligned} F^{(3)} &= -2\left\{(3-1)(3-2)f^{(3-3)} + 2(3-1)nf^{(3-2)} + n^2f^{(3-1)}\right\} \\ &= -4f - 8nf^{(1)} - 2n^2f^{(2)}, \end{aligned}$$

que é igual a (2.249c). Supondo que (2.249d) seja verdadeiro, temos

$$\begin{aligned} F^{(m+1)} &= -2\left\{(m-1)(m-2)f^{(m-2)} + 2(m-1)f^{(m-2)}\right. \\ &\quad \left.+ 2(m-1)nf^{(m-1)} + 2nf^{(m-1)} + n^2f^{(m)}\right\} \\ &= -2\left\{[(m-1)(m-2) + 2(m-1)]f^{(m-2)} + 2mnf^{(m-1)} + n^2f^{(m)}\right\} \\ &= -2\left\{[(m+1)-1][(m+1)-2]f^{[(m+1)-3]} \right. \\ &\quad \left. + 2[(m+1)-1]nf^{[(m+1)-2]} + n^2f^{[(m+1)-1]}\right\}, \quad (2.250) \end{aligned}$$

o que demonstra o resultado desejado.

Como podemos ver de (2.249), $F^{(1)}(0) = F^{(2)}(0) = 0$ e, para $m \geq 3$,

$$F^{(m)}(0) = -2(m-1)(m-2) \left(\frac{\pi}{ak_c}\right)^{m-3} f^{(m-3)}(0). \quad (2.251)$$

Dessa forma, (2.246) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} dn F(n) = \\ 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} B_{2k}(2k-2)(2k-3) \left(\frac{\pi}{ak_c}\right)^{2k-4} f^{(2k-4)}(0), \end{aligned}$$

e (2.244) fica

$$E_C(a, k_c) = \frac{L^2 \pi^2}{2a^3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} B_{2k}(2k-2)(2k-3) \left(\frac{\pi}{ak_c}\right)^{2k-4} f^{(2k-4)}(0).$$

Para removermos a regularização, vamos considerar o limite em que $k_c \rightarrow \infty$. Como podemos perceber, neste limite somente o termo com $k = 2$ na expressão acima será não nulo. Assim, a expressão resultante é independente de regularização sendo dada por

$$E_C(a) = \frac{L^2 \pi^2}{a^3} \frac{1}{4!} B_4 f(0) = -\frac{L^2 \pi^2}{720 a^3}, \quad (2.252)$$

onde $f(0) = 1$.

De (2.234), vemos que a densidade de energia de Casimir é

$$\mathcal{E}_C = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} E_C = -\frac{\pi^2}{720 a^3} \quad (2.253)$$

e fornece a densidade de força

$$\mathcal{F}_C = -\frac{d\mathcal{E}_C}{da} = -\frac{\pi^2}{240 a^4} = -\frac{0.013}{(a_\mu)^4} \text{ dyn/cm}^2, \quad (2.254)$$

onde o sinal negativo indica que a força é atrativa e a_μ é a distância entre as placas medida em micrometros.

Este resultado foi obtido em 1948 por Casimir (CASIMIR, 1948) e medido pela primeira vez em 1958 por Sparnaay (SPARNAAY, 1958). Experimentos de alta precisão foram realizados em 1997 por Lamoreaux (LAMOREAUX, 1997), em 1998 por Mohideen (MOHIDEEN; ROY, 1998) e em 2002 por Bressi (BRESSI et al., 2002), confirmando o efeito.

Generalizações e modificações do efeito original foram realizadas. Boyer (BOYER, 1968), calculando o efeito Casimir para uma esfera condutora, obteve como resultado uma força de expansão, ou seja, o caráter atrativo ou repulsivo da força depende das condições de contorno. Uma generalização do efeito consiste em considerar outros campos além do eletromagnético, como por exemplo, os campos de Dirac e escalar.

Por ter sido derivado a partir da variação da energia de ponto zero, o efeito Casimir é apontado como uma evidência para a existência destas energias. Entretanto, é importante frisar que o efeito Casimir pode ser calculado sem referência à energia de ponto zero através da teoria de fontes de Schwinger. Assim, a existência ou não da energia de ponto zero é uma questão em aberto.

Um outro método de regularização consiste no emprego da representação integral da função gama

$$\frac{1}{A^{1+\delta}} = \frac{1}{\Gamma(1+\delta)} \int_{0+}^{\infty} d\eta \eta^\delta e^{-A\eta}, \quad (2.255)$$

válida para $\delta > -1$, que permite reescrever (2.238) como

$$\begin{aligned}
 E_I(a) &= \frac{L^2}{2\pi^2} \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 \sum_{n=0}^\infty D(k_1, k_2, k_3) \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + n^2\pi^2/a^2} \\
 &= \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty dk_1 \int_{-\infty}^\infty dk_2 \sum_{n=-\infty}^\infty \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + n^2\pi^2/a^2} \\
 &= \frac{L^2}{2(2\pi)^2} \frac{\pi}{\Gamma(-\frac{1}{2} + \delta)} \int_{0+}^\infty d\eta \sum_{n=-\infty}^\infty \eta^{-5/2+\delta} e^{-(\alpha n)^2 \eta}, \quad (2.256)
 \end{aligned}$$

onde as integrais gaussianas em k_1 e k_2 já foram calculadas e definimos $\alpha = \pi/a$. Para recuperarmos a expressão original, devemos tomar o limite $\delta \rightarrow 0$. Isto será feito no final dos cálculos.

Definindo

$$f(n) = e^{-(\alpha n)^2 \eta}, \quad (2.257)$$

o somatório que aparece em (2.256) pode ser calculado utilizando novamente a fórmula de Euler-Mclaurin, que leva a

$$\begin{aligned}
 E_I(a) &= \frac{L^2}{(2\pi)^2} \frac{\pi}{\Gamma(-\frac{1}{2} + \delta)} \left\{ \int_{0+}^\infty d\eta \eta^{-5/2+\delta} \left[\int_0^\infty dn f(n) - \frac{1}{2} f(n) \Big|_{n \rightarrow \infty} \right. \right. \\
 &\quad + \frac{1}{12} \left[f'(n) \Big|_{n \rightarrow \infty} - f'(n) \Big|_{n \rightarrow 0} \right] - \frac{1}{720} \left[f'''(n) \Big|_{n \rightarrow \infty} + f'''(n) \Big|_{n \rightarrow 0} \right] \\
 &\quad \left. \left. + \dots \right] \right\}, \quad (2.258)
 \end{aligned}$$

onde $f'(n)$ é a primeira derivada de (2.257) em relação a n , e assim por diante. Calculando as derivadas e tomando os respectivos limites, pode-se mostrar que a contribuição dos termos não nulos é dada por

$$\begin{aligned}
 E_I(a) &= \frac{L^2}{(2\pi)^2} \frac{\pi}{\Gamma(-\frac{1}{2} + \delta)} \left\{ \int_{0+}^\infty d\eta \eta^{-3+\delta} \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{12} \left[\frac{\Gamma(-\frac{1}{2} + \delta)}{(\alpha^2 n^2)^{-1/2+\delta}} (-2\alpha^2 n) \right]_{n \rightarrow \infty} \\
 &\quad \left. - \frac{1}{720} \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{2} + \delta)}{(\alpha^2 n^2)^{3/2+\delta}} (-2\alpha^2 n)^3 \right]_{n \rightarrow \infty} \right\}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{3}{720} \left[\frac{\Gamma(1/2 + \delta)}{(\alpha^2 n^2)^{1/2 + \delta}} (-2\alpha^2)^2 n \right]_{n \rightarrow \infty}, \quad (2.259)$$

onde (2.255) foi utilizada.

De maneira a obtermos um resultado consistente com a teoria original, devemos considerar o limite $\delta \rightarrow 0$. Considerando $\delta > 1$, o segundo termo entre chaves na expressão acima se anula no limite $n \rightarrow \infty$, enquanto que os outros termos tornam-se independentes de n quando o limite $\delta \rightarrow 0$ é tomado, resultando em

$$E_I(a) = -\frac{aL^2}{4(2\pi)^2} \int_0^\infty d\eta \eta^{-3} + \frac{L^2 \pi^2}{720a^3}. \quad (2.260)$$

Assim,

$$\begin{aligned} E_C(a) &= \{ [E_I(a) + E_{II}(L-a)] - [E_{III}(d) + E_{IV}(L-d)] \} \\ &= -[a + (L-a) - d - (L-d)] \frac{L^2}{4(2\pi)^2} \int_0^\infty d\eta \eta^{-3} \\ &+ \frac{L^2 \pi^2}{720} \left[\frac{1}{a^3} + \frac{1}{(L-a)^3} - \frac{1}{d^3} - \frac{1}{(L-d)^3} \right]. \end{aligned} \quad (2.261)$$

Finalmente, de (2.234) re-obtemos a expressão (2.253)

$$\mathcal{E}_C = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} E_C = -\frac{\pi^2}{720a^3}.$$

3 CAMPOS INTERAGENTES

Neste capítulo, descreveremos campos interagentes na representação de interação. Obteremos uma série perturbativa para o operador espalhamento S e veremos como este pode ser expandido numa série envolvendo produtos normais de operadores. Por fim, o espalhamento fóton-fóton será calculado e a correspondência entre a contribuição de quarta ordem, no limite de baixas energias, com a densidade lagrangiana de Euler-Kockel-Heisenberg será restabelecida.

3.1 A REPRESENTAÇÃO DE INTERAÇÃO

Como é bem conhecido, a mecânica quântica pode ser formulada em várias representações que diferem na maneira em que a evolução temporal de estados e operadores é tratada. Estas representações se relacionam através de transformações unitárias que levam aos mesmos valores esperados de observáveis.

Na representação de Schrödinger, a evolução temporal de um estado $|\alpha, t\rangle_s$ é regida pela equação

$$i \frac{d}{dt} |\alpha, t\rangle_s = H_s |\alpha, t\rangle_s, \quad (3.1)$$

onde H_s é o hamiltoniano do sistema nesta representação. A equação acima pode ser resolvida formalmente em termos do estado do sistema em um instante t_0 por

$$|\alpha, t\rangle_s = U_s(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle_s, \quad (3.2)$$

onde U_s é o operador de evolução temporal.

Além da propriedade $U_s(t, t) = \mathbb{I}$, o operador U_s é unitário,

$$U_s^\dagger = U_s^{-1}, \quad (3.3)$$

é fechado na composição

$$U_s(t_2, t_1) U_s(t_1, t_0) = U_s(t_2, t_0) \quad (3.4)$$

e obedece a equação

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_s(t, t_0) = H_s U_s(t, t_0). \quad (3.5)$$

No caso em que H_s é independente do tempo, a equação (3.5) possui como solução

$$U_s(t, t_0) = e^{-iH_s(t-t_0)}. \quad (3.6)$$

Para um observável O_s , o seu valor esperado em um estado $|\alpha, t\rangle_s$ é dado por

$${}_s\langle \alpha, t | O_s | \alpha, t \rangle_s = {}_s\langle \alpha, t_0 | U_s^\dagger(t, t_0) O_s U_s(t, t_0) | \alpha, t_0 \rangle_s, \quad (3.7)$$

ou seja, o valor esperado de O_s no estado $|\alpha, t\rangle_s$ é igual ao valor esperado do operador $U_s^\dagger(t, t_0) O_s U_s(t, t_0)$ no estado $|\alpha, t_0\rangle_s$. Isto sugere a representação de Heisenberg, na qual a evolução temporal reflete-se nos operadores, e não no estado do sistema.

Para passarmos da representação de Schrödinger à de Heisenberg, vamos considerar que no instante τ os estados e os operadores sejam idênticos em ambas as representações; definindo

$$|\alpha\rangle_H \equiv |\alpha, t\rangle_H = |\alpha, \tau\rangle_H = U_s^\dagger(t, \tau) |\alpha, t\rangle_s = |\alpha, \tau\rangle_s, \quad (3.8a)$$

$$O_H(t) = U_s^\dagger(t, \tau) O_s U_s(t, \tau). \quad (3.8b)$$

Desta forma, (3.7) expressa-se

$${}_s\langle \alpha, t | O_s | \alpha, t \rangle_s = {}_H\langle \alpha | O_H(t) | \alpha \rangle_H. \quad (3.9)$$

No caso em que H_s é independente do tempo, de (3.6) e (3.8b) vemos que o operador hamiltoniano é o mesmo em ambas as representações,

$$H_H(t) = U_s^\dagger(t, \tau) H_s U_s(t, \tau) = e^{iH_s(t-\tau)} H_s e^{-iH_s(t-\tau)} = H_s \equiv H. \quad (3.10)$$

Para obtermos a equação que descreve a evolução temporal de um operador $O_H(t)$, derivemos (3.8b) em relação a t , utilizando (3.5):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} O_H(t) &= \frac{\partial}{\partial t} U_s^\dagger(t, \tau) O_s U_s(t, \tau) + U_s^\dagger(t, \tau) \frac{\partial}{\partial t} O_s U_s(t, \tau) \\ &\quad + U_s^\dagger(t, \tau) O_s \frac{\partial}{\partial t} U_s(t, \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= iU_s^\dagger(t, \tau)H_s O_s U_s(t, \tau) + U_s^\dagger(t, \tau) \frac{\partial}{\partial t} O_s U_s(t, \tau) \\
&\quad - iU_s^\dagger(t, \tau)O_s H_s U_s(t, \tau) \\
&= iU_s^\dagger(t, \tau)H_s U_s(t, \tau)U_s^\dagger(t, \tau)O_s U_s(t, \tau) + U_s^\dagger(t, \tau)\partial_t O_s U_s(t, \tau) \\
&\quad - iU_s^\dagger(t, \tau)O_s U_s(t, \tau)U_s^\dagger(t, \tau)H_s U_s(t, \tau) \\
&= iH_H(t)O_H(t) + \frac{\partial}{\partial t} O_H - iO_H(t)H_H(t) \\
&= -i[O_H(t), H_H(t)] + \frac{\partial}{\partial t} O_H. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

No caso em que O_s não depende explicitamente do tempo, a equação acima torna-se

$$\frac{d}{dt} O_H(t) = -i[O_H(t), H_H(t)]. \tag{3.12}$$

Uma característica importante entre as representações é a invariância das relações de comutação e anticomutação, ou seja, a transição entre as representações é feita por intermedio de uma transformação canônica. Por exemplo, supondo que $[A_s, B_s]_{\pm} = C_s$, temos que

$$\begin{aligned}
[A_H(t), B_H(t)]_{\pm} &= [U_s^\dagger(t, \tau)A_s U_s(t, \tau), U_s^\dagger(t, \tau)B_s U_s(t, \tau)]_{\pm} \\
&= U_s^\dagger(t, \tau)A_s B_s U_s(t, \tau) \pm U_s^\dagger(t, \tau)B_s A_s U_s(t, \tau) \\
&= U_s^\dagger(t, \tau)[A_s, B_s]_{\pm} U_s(t, \tau) = U_s^\dagger(t, \tau)C_s U_s(t, \tau) \\
&= C_H(t). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Reciprocamente, supondo que $[A_H(t), B_H(t)]_{\pm} = C_H(t)$:

$$\begin{aligned}
[A_s, B_s]_{\pm} &= [U_s(t, \tau)A_H(t)U_s^\dagger(t, \tau), U_s(t, \tau)B_H(t)U_s^\dagger(t, \tau)]_{\pm} \\
&= U_s(t, \tau)A_H(t)B_H(t)U_s^\dagger(t, \tau) \pm U_s(t, \tau)B_H(t)A_H(t)U_s^\dagger(t, \tau) \\
&= U_s(t, \tau)[A_H(t), B_H(t)]_{\pm} U_s^\dagger(t, \tau) = U_s(t, \tau)C_H(t)U_s^\dagger(t, \tau) \\
&= C_s. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Anteriormente, quantizamos os campos eletromagnético e de Dirac livres utilizando a representação de Heisenberg. Existe ainda uma terceira representação, chamada representação de interação, que será conveniente ao tratarmos campos interagentes.

Supondo que possamos separar o hamiltoniano do sistema em

duas partes

$$H_s = H_s^0 + H_s^I, \quad (3.15)$$

onde H_s^0 , assumido independente do tempo, é o hamiltoniano dos campos livres e H_s^I o hamiltoniano de interação, a representação de interação é obtida da representação de Schrödinger através das transformações unitárias

$$|\alpha, t\rangle_I = U_0^\dagger(t, \tau)|\alpha, t\rangle_S, \quad (3.16a)$$

$$O_I(t) = U_0^\dagger(t, \tau)O_S U_0(t, \tau), \quad (3.16b)$$

onde U_0 obedece a equação

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_0(t, \tau) = H_s^0 U_0(t, \tau). \quad (3.17)$$

Como H_s^0 é independente do tempo, a solução da equação acima é um operador unitário análogo a (3.6),

$$U_0(t, \tau) = e^{-iH_s^0(t-\tau)}, \quad (3.18)$$

e então, de (3.16b), temos $H_I^0 = H_S^0$. Além disso, em $t = \tau$ todas as três representações são idênticas:

$$\begin{aligned} |\alpha, t_0\rangle_I &= |\alpha, t_0\rangle_H = |\alpha, t_0\rangle_S, \\ O_I(\tau) &= O_H(\tau) = O_S. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Vemos então que a relação entre as representações de interação e de Schrödinger é semelhante à relação entre as representações de Schrödinger e de Heisenberg, diferindo pelo fato da transformação U_0 envolver somente a parte H_s^0 do hamiltoniano H_s .

Pela semelhança entre (3.16b) e (3.17) com (3.8b) e (3.5), podemos concluir que a equação de movimento para um operador O_I é

$$\frac{d}{dt} O_I(t) = -i[O_I(t), H_I^0(t)], \quad (3.20)$$

onde assumimos que O_S não depende explicitamente do tempo.

Derivando (3.16a) em relação a t , usando (3.1) e (3.16b), obtemos a equação de Schrödinger para o estado $|\alpha, t\rangle_I$ na representação de

interação:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}|\alpha, t\rangle_I &= \frac{\partial}{\partial t}U_0^\dagger(t, \tau)|\alpha, t\rangle_S + U_0^\dagger(t, \tau)\frac{\partial}{\partial t}|\alpha, t\rangle_S \\
 &= iU_0^\dagger(t, \tau)H^0|\alpha, t\rangle_S - iU_0^\dagger(t, \tau)H|\alpha, t\rangle_S \\
 &= iU_0^\dagger(t, \tau)H^0U(t, \tau)U_0^\dagger(t, \tau)|\alpha, t\rangle_S - iU_0^\dagger(t, \tau)HU(t, \tau)U_0^\dagger(t, \tau)|\alpha, t\rangle_S \\
 &= iH_I^0|\alpha, t\rangle_I - iH_I|\alpha, t\rangle_I = -iH_I^I|\alpha, t\rangle_I \\
 \therefore \quad i\frac{d}{dt}|\alpha, t\rangle_I &= H_I^I|\alpha, t\rangle_I. \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

Assim, de (3.8a) e (3.21) vemos que os estados evoluem de acordo com uma equação do tipo Schrödinger envolvendo somente o hamiltoniano de interação H_I^I , enquanto que os operadores evoluem de acordo com uma equação do tipo Heisenberg que envolve apenas o hamiltoniano livre H_I^0 .

A equação (3.21) também pode se resolvida em termos do estado do sistema num instante t_0

$$|\alpha, t\rangle_I = U_I(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle_I, \tag{3.22}$$

onde U_I obedece a equação

$$i\partial_t U_I(t, t_0) = H_I^I U_I(t, t_0). \tag{3.23}$$

Uma solução para (3.23) pode ser obtida notando-se que, de (3.2) e (3.16a),

$$\begin{aligned}
 |\alpha, t\rangle_I &= U_0^\dagger(t, \tau)|\alpha, t\rangle_S = U_0^\dagger(t, \tau)U_S(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle_S \\
 &= U_0^\dagger(t, \tau)U_S(t, t_0)U_0(t_0, \tau)|\alpha, t_0\rangle_I;
 \end{aligned}$$

comparando com (3.22), segue que

$$U_I(t, t_0) = U_0^\dagger(t, \tau)U_S(t, t_0)U_0(t_0, \tau). \tag{3.24}$$

A partir desta solução obtemos algumas propriedades de U_I . De (3.18) temos

$$U_I(t_0, t_0) = U_0^\dagger(t_0, \tau)U_S(t_0, t_0)U_0(t_0, \tau) = U_0^\dagger(t_0, \tau)U_0(t_0, \tau) = \mathbb{I}. \tag{3.25}$$

A composição de operadores U_I é fechada:

$$\begin{aligned}
U_I(t_2, t_1)U_I(t_1, t_0) &= U_0^\dagger(t_2, \tau)U_S(t_2, t_1)U_0(t_1, \tau)U_0^\dagger(t_1, \tau)U_S(t_1, t_0)U_0(t_0, \tau) \\
&= U_0^\dagger(t_2, \tau)U_S(t_2, t_1)e^{-iH_0(t_1-\tau)}e^{iH_0(t_1-\tau)}U_S(t_1, t_0)U_0(t_0, \tau) \\
&= U_0^\dagger(t_2, \tau)U_S(t_2, t_1)U_S(t_1, t_0)U_0(t_0, \tau) \\
&= U_0^\dagger(t_2, \tau)U_S(t_2, t_0)U_0(t_0, \tau) \\
&= U_I(t_2, t_0). \tag{3.26}
\end{aligned}$$

onde utilizamos (3.4). Tomando $t_2 = t_0$ na equação acima, segue que $U_I(t_0, t_1)U_I(t_1, t_0) = U_I(t_0, t_0) = \mathbb{I}$, ou seja:

$$U_I^{-1}(t, t_0) = U_I(t_0, t). \tag{3.27}$$

Além disso, U_I é unitário:

$$\begin{aligned}
U_I^\dagger(t, t_0) &= U_0^\dagger(t_0, \tau)U_S^\dagger(t, t_0)U_0(t, \tau) = U_0^\dagger(t_0, \tau)U_S^{-1}(t, t_0)U_0(t, \tau) \\
&= U_0^\dagger(t_0, \tau)U_S(t_0, t)U_0(t, \tau) = U_I(t_0, t) = U_I^{-1}(t, t_0). \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Outra característica da transformação que leva à representação de interação é que as relações de comutação e anticomutação também são preservadas. Supondo $[A_s, B_s]_\pm = C_s$, segue que

$$\begin{aligned}
[A_I(t), B_I(t)]_\pm &= [U_0^\dagger(t, \tau)A_sU_0(t, \tau), U_0^\dagger(t, \tau)B_sU_0(t, \tau)]_\pm \\
&= U_0^\dagger(t, \tau)A_sB_sU_0(t, \tau) \pm U_0^\dagger(t, \tau)B_sA_sU_0(t, \tau) \\
&= U_0^\dagger(t, \tau)[A_s, B_s]_\pm U_0(t, \tau) = U_0^\dagger(t, \tau)C_sU_0(t, \tau) \\
&= C_I(t). \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Reciprocamente, supondo que $[A_I(t), B_I(t)]_\pm = C_I(t)$:

$$\begin{aligned}
[A_s, B_s]_\pm &= [U_0(t, \tau)A_I(t)U_0^\dagger(t, \tau), U_0(t, \tau)B_I(t)U_0^\dagger(t, \tau)]_\pm \\
&= U_0(t, \tau)A_I(t)B_I(t)U_0^\dagger(t, \tau) \pm U_0(t, \tau)B_I(t)A_I(t)U_0^\dagger(t, \tau) \\
&= U_0(t, \tau)[A_I(t), B_I(t)]_\pm U_0^\dagger(t, \tau) = U_0(t, \tau)C_I(t)U_0^\dagger(t, \tau) \\
&= C_s. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

A relação entre as representações de interação e Heisenberg pode

ser estabelecida utilizando-se (3.8a), (3.8b), (3.16a) e (3.16b),

$$|\alpha, t\rangle_I = U_0^\dagger(t, \tau) U_S(t, \tau) |\alpha, t\rangle_H, \quad (3.31a)$$

$$O_I(t) = U_0^\dagger(t, \tau) U_S(t, \tau) O_H U_S^\dagger(t, \tau) U_0(t, \tau). \quad (3.31b)$$

Estas transformações também preservam relações de comutação e anticomutação. De (3.14) e (3.29), supondo que $[A_H(t), B_H(t)]_\pm = C_H(t)$, temos

$$[A_I(t), B_I(t)]_\pm = C_I(t). \quad (3.32)$$

Em particular, se $C_H(t)$ for um c -número $c(t)$, então

$$[A_I(t), B_I(t)]_\pm = c(t). \quad (3.33)$$

Reciprocamente, de (3.30) e (3.13), se $[A_I(t), B_I(t)]_\pm = C_I(t)$ então $[A_H(t), B_H(t)]_\pm = C_H(t)$.

Na representação de interação, os efeitos da interação se manifestam nos estados $|\alpha, t\rangle_I$. Como estaremos interessados em processos de espalhamento, será conveniente trabalharmos com uma equação integral, equivalente à equação de evolução temporal (3.23). Tal equação, que já leva em conta a condição de contorno (3.25), é

$$U_I(t, t_0) = \mathbb{I} - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I^I(t_1) U_I(t_1, t_0), \quad (3.34)$$

cuja derivada em relação a t nos leva a (3.23).

A solução desta equação integral é dada por um série iterativa que consiste em reinserções sucessivas do lado direito de (3.34):

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) &= \mathbb{I} - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I^I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I^I(t_1) H_I^I(t_2) \\ &+ \dots + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I^I(t_1) H_I^I(t_2) \dots H_I^I(t_n) \\ &+ \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} U_{1n}(t, t_0), \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde os termos da série são dados por:

$$U_{10}(t, t_0) = \mathbb{I},$$

$$U_{11}(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t dt_1 H_1^I(t_1),$$

para $n \geq 2$:

$$U_{1n}(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) H_1^I(t_2) \dots H_1^I(t_n).$$

Como vemos, a série (3.35) é constituída por integrais múltiplas cujos integrandos são produtos do hamiltoniano de interação, H_1^I , tomados a tempos diferentes e em ordem decrescente, em instantes intermediários dentro do intervalo $[t, t_0]$. Uma simplificação nessa série ocorre se conseguirmos definir os mesmos limites de integração para todas as integrais de (3.35). Isto pode ser obtido pela introdução do ordenamento temporal de operadores.

Considere o produto de n operadores $A_1(t_1), A_2(t_2), \dots, A_n(t_n)$ que podem ser bosônicos ou fermiônicos. Suponha que $t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \dots \geq t_{i_n}$ onde os índices i_1, i_2, \dots, i_n são elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. O ordenamento temporal do operador $A_1(t_1)A_2(t_2) \dots A_n(t_n)$ é definido por

$$T\{A_1(t_1)A_2(t_2) \dots A_n(t_n)\} = (-1)^\eta A_{i_1}(t_{i_1})A_{i_2}(t_{i_2}) \dots A_{i_n}(t_{i_n}), \quad (3.36)$$

onde η é o número de trocas entre operadores fermiônicos vizinhos para levar $A_1(t_1) \dots A_n(t_n)$ em $A_{i_1}(t_{i_1})A_{i_2}(t_{i_2}) \dots A_{i_n}(t_{i_n})$.

Uma definição equivalente a (3.36) é

$$T\{A_1(t_1)A_2(t_2) \dots A_n(t_n)\} = \sum_p (-1)^\eta \theta(t_{p_1}, \dots, t_{p_n}) A_{p_1}(t_{p_1}) A_{p_2}(t_{p_2}) \dots A_{p_n}(t_{p_n}), \quad (3.37)$$

onde a soma é feita sobre todas as permutações dos índices p_1, \dots, p_n que são elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$, η é o número de trocas entre operadores fermiônicos vizinhos para levar $A_1(t_1) \dots A_n(t_n)$ em $A_{p_1}(t_{p_1})A_{p_2}(t_{p_2}) \dots A_{p_n}(t_{p_n})$ e

$$\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, \\ 0, & \text{do contrário.} \end{cases} \quad (3.38)$$

Considere o n -ésimo termo ($n \geq 2$) da série (3.35). Pela definição de (3.38) temos

$$\begin{aligned}
 U_{1n}(t, t_0) &= (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \\
 &= (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \theta(t_1, \dots, t_n) \\
 &= (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n) \theta(t_1, \dots, t_n). \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

Na expressão acima, podemos fazer $n!$ trocas envolvendo os índices t_1, t_2, \dots, t_n . Assim, somando sobre todas as permutações possíveis, temos:

$$\begin{aligned}
 U_{1n}(t, t_0) &= \frac{(-i)^n}{n!} \sum_p (-1)^\eta \int_{t_0}^t dt_{p_1} \dots \int_{t_0}^t dt_{p_n} H_1^I(t_{p_1}) \dots H_1^I(t_{p_n}) \theta(t_{p_1}, \dots, t_{p_n}) \\
 &= \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n \sum_p (-1)^\eta H_1^I(t_{p_1}) \dots H_1^I(t_{p_n}) \theta(t_{p_1}, \dots, t_{p_n}) \\
 &= \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T\{H_1^I(t_1) H_1^I(t_2) \dots H_1^I(t_n)\}. \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima em (3.35), obtemos

$$U_1(t, t_0) = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T\{H_1^I(t_1) \dots H_1^I(t_n)\}, \quad (3.41)$$

expressão que pode ser escrita compactamente como

$$U_1(t, t_0) = T \exp\left(-i \int_{t_0}^t dt_1 H_1^I(t_1)\right). \quad (3.42)$$

3.2 A MATRIZ S

Na teoria clássica de campos, a interação elétron-pósitron com o campo eletromagnético é descrita pela densidade lagrangiana (2.229)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{\text{Rad}} + \mathcal{L}_I$$

$$= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x). \quad (3.43)$$

Entretanto, como vimos na seção 2.2, a densidade lagrangiana do campo de radiação, $\mathcal{L}_{\text{Rad}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, não é adequada para se efetuar a quantização canônica. Adotaremos então como \mathcal{L}_{Rad} a densidade lagrangiana da quantização covariante (2.106). Assim,

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{\text{Rad}} + \mathcal{L}_I = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (3.44)$$

onde, já adiantando o ordenamento normal,

$$\mathcal{L}_0 = N \left[\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \right], \quad (3.45a)$$

$$\mathcal{L}_I = N [e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)] = N [e\bar{\psi}(x)\mathcal{A}(x)\psi(x)]. \quad (3.45b)$$

O hamiltoniano é dado por

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} [\pi_r(x)\dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}_{QED}] = \int d^3\mathbf{x} [\pi_r(x)\dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}_0] - \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}_I \\ &= \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}_0 + \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}_I = H_0 + H_I. \end{aligned} \quad (3.46)$$

A partir de agora, utilizaremos a representação de interação, que leva às seguintes simplificações:

- Os operadores satisfazem equações do tipo Heisenberg que envolvem apenas H_0 ,

$$\frac{d}{dt}O(t) = -i[O(t), H_0]; \quad (3.47)$$

- se \mathcal{L}_I não envolve derivadas, como no caso da densidade lagrangiana (3.45b), os campos conjugados π_r aos campos interagentes ϕ_r são os mesmos campos conjugados aos campos livres, isto é

$$\pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\phi}_r}; \quad (3.48)$$

- as representações de interação e de Heisenberg se relacionam pela transformação (3.31a), a qual preserva relações de comutação. Desta forma os campos interagentes satisfazem as mesmas relações de comutação que os campos livres.

Assim, tudo o que obtivemos anteriormente para os campos li-

vres, como as soluções em ondas planas, representação número e propagadores, permanece válido para os campos interagentes.

Esta representação é também adequada para processos de espalhamento. Tais processos são descritos da seguinte maneira:

seja $|\psi(t)\rangle$ o vetor de estado que nos limites $t \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow \infty$ é auto-estado de H_0 , ou seja, vamos considerar que $H_I = 0$ quando $t \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow \infty$. Suponha que o estado

$$|i\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} |\psi(t)\rangle = |\psi(-\infty)\rangle, \quad (3.49)$$

seja conhecido, ou seja, que neste estado esteja especificado o número de elétrons, pósitrons, fótons e os seus respectivos momentos, spins e polarizações. A matriz S relaciona $|\psi(\infty)\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t)\rangle$ com $|i\rangle$ por

$$|\psi(\infty)\rangle = S|i\rangle = S|\psi(-\infty)\rangle, \quad (3.50)$$

ou seja, de (3.22),

$$S = U(-\infty, \infty). \quad (3.51)$$

A interação pode levar a diversos auto-estados finais $|f\rangle$ de H_0 , onde cada um especifica o número de partículas, os respectivos momentos, etc. Como os auto-estados de H_0 formam um conjunto completo, podemos escrever

$$|\psi(\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle \langle f|\psi(\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle \langle f|S|i\rangle = \sum_f |f\rangle S_{fi}, \quad (3.52)$$

onde $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle$ é a chamada de amplitude de probabilidade. Logo, a probabilidade de que o sistema evolua para o estado $|f\rangle$ em $t \rightarrow \infty$ é

$$|S_{fi}|^2 = |\langle f|S|i\rangle|^2 = |\langle f|\psi(\infty)\rangle|^2. \quad (3.53)$$

Assumindo que $|\psi(\infty)\rangle$ esteja normalizado, podemos verificar a conservação da probabilidade

$$\begin{aligned} \sum_f |S_{fi}|^2 &= \sum_f \langle f|\psi(\infty)\rangle^* \langle f|\psi(\infty)\rangle = \sum_f \langle \psi(\infty)|f\rangle \langle f|\psi(\infty)\rangle \\ &= \langle \psi(\infty)|\psi(\infty)\rangle = 1, \end{aligned} \quad (3.54)$$

que é um resultado mais geral que na mecânica quântica não-relativística, pois partículas podem ser criadas e destruídas.

Vamos agora obter uma expressão para a matriz S . De (3.51), (3.41) e (3.46), obtemos a expansão de Dyson da matriz S :

$$\begin{aligned} S &= U(-\infty, \infty) \\ &= \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\{\tilde{H}_I(t_1) \dots H_I(t_n)\} \\ &= \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n)\}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde

$$\mathcal{H}_I(x) = N[e\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x)]. \quad (3.56)$$

3.2.1 O Teorema de Wick

Como vimos, a matriz S é o operador evolução temporal $U(-\infty, \infty)$ que “conecta” os estados assintóticos $|i\rangle$, conhecido, e $|\psi(\infty)\rangle$.

A interação pode levar a vários estados finais $|f\rangle$ que são resultados de processos de aniquilação e criação de partículas. Pelo fato da matriz S envolver a densidade hamiltoniana de interação \mathcal{H}_I , que consiste do produto de operadores de criação e aniquilação de partículas, a matriz S descreverá um número substancial de processos distintos. Desta forma, nem todos os termos da matriz S contribuem para uma particular transição $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$.

Dada uma transição $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$, os termos da matriz S que contribuem são os que possuem operadores de aniquilação à direita, para que todas as partículas presentes em $|i\rangle$ sejam aniquiladas, e operadores de criação à esquerda, para que as partículas presentes em $|f\rangle$ sejam criadas. Pode ocorrer também que partículas não presentes em $|f\rangle$ sejam criadas em $|i\rangle$ e depois aniquiladas em $|f\rangle$. Tais partículas são chamadas de virtuais e só estarão presentes em estados intermediários.

Uma simplificação nos cálculos é obtida evitando-se a criação e aniquilação de partículas virtuais. Isto pode ser feito através da expansão da matriz S em um somatório de produtos normais, pois estes possuem todos os operadores de criação à esquerda dos operadores de aniquilação. Assim, cada produto normal corresponderá a uma particular transição $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ que poderá, por exemplo, ser representada por um *diagrama de Feynman*. Essa expansão em um somatório de produtos normais é conhecida como teorema de Wick.

Antes de enunciarmos o teorema, vamos apresentar algumas definições. Lidaremos com operadores, bosônicos ou fermiônicos, que são da forma $A = A^+ + A^-$, onde A^+ e A^- são as partes do operador responsáveis pela aniquilação e criação de partículas, respectivamente.

Dados dois operadores A e B , bosônicos ou fermiônicos, e definindo

$$\epsilon_{AB} = \begin{cases} -1, & \text{se } A \text{ e } B \text{ são fermiônicos,} \\ 1, & \text{do contrário,} \end{cases} \quad (3.57)$$

temos

$$\begin{aligned} N(AB) &= N[(A^+ + A^-)(B^+ + B^-)] \\ &= N(A^+B^+ + A^+B^- + A^-B^+ + A^-B^-) \\ &= A^+B^+ + \epsilon_{AB}B^-A^+ + A^-B^+ + A^-B^- \\ &= \epsilon_{AB}B^+A^+ + \epsilon_{AB}B^-A^+ + A^-B^+ + \epsilon_{AB}B^-A^- \\ &= \epsilon_{AB}(B^+A^+ + B^-A^+ + \epsilon_{AB}A^-B^+ + B^-A^-) \\ &= \epsilon_{AB}N[(B^+ + B^-)(A^+ + A^-)] = \epsilon_{AB}N(BA). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Da definição do ordenamento temporal (3.36), também segue que

$$T\{A(x), B(x')\} = \epsilon_{AB}T\{B(x'), A(x)\}. \quad (3.59)$$

Vamos agora calcular $T\{A(x_1), B(x_2)\}$, para $x_1^0 \neq x_2^0$. Temos dois casos.

Caso 1: suponha que $x_1^0 > x_2^0$. Então

$$T\{A(x_1), B(x_2)\} = A(x_1)B(x_2) = A^+B^+ + A^+B^- + A^-B^+ + A^-B^-.$$

Agora, note que

$$A^+B^- = \epsilon_{AB}B^-A^+ + A^+B^- - \epsilon_{AB}B^-A^+ = \epsilon_{AB}B^-A^+ + [A^+, B^-]_{\pm},$$

onde utiliza-se o anticomutador no caso em que A e B são fermiônicos e, em caso contrário, o comutador. Assim,

$$\begin{aligned} T\{A(x_1), B(x_2)\} &= A^+B^+ + \epsilon_{AB}B^-A^+ + A^-B^+ + A^-B^- + [A^+, B^-]_{\pm} \\ &= N(A(x_1)B(x_2)) + [A^+, B^-]_{\pm}. \end{aligned}$$

Pelo fato de $[A^+, B^-]_{\pm}$ ser um c-número, como vimos ao calcularmos os propagadores dos campos de Dirac e de radiação, podemos

escrevê-lo de uma maneira conveniente:

$$\begin{aligned} [A^+, B^-]_{\pm} &= \langle 0|[A^+, B^-]_{\pm}|0\rangle = \langle 0|A^+B^- \pm B^-A^+|0\rangle = \langle 0|A^+B^-|0\rangle \\ &= \langle 0|A^+B^+ + A^+B^- + A^-B^+ + A^+B^+|0\rangle = \langle 0|AB|0\rangle, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $A^+|0\rangle = B^+|0\rangle = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} T\{A(x_1), B(x_2)\} &= N(A(x_1)B(x_2)) + \langle 0|A(x_1)B(x_2)|0\rangle \\ &= N(A(x_1)B(x_2)) + \langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle. \end{aligned}$$

Caso 2: suponha que $x_1^0 < x_2^0$. Então

$$\begin{aligned} T\{A(x_1), B(x_2)\} &= \epsilon_{AB}B(x_2)A(x_1) \\ &= \epsilon_{AB}(B^+A^+ + B^+A^- + B^-A^+ + B^-A^-). \end{aligned}$$

Como $B^+A^- = \epsilon_{AB}A^-B^+ + [B^+, A^-]_{\pm}$, temos

$$\begin{aligned} T\{A(x_1), B(x_2)\} &= \epsilon_{AB}(B^+A^+ + \epsilon_{AB}A^-B^+ + B^-A^+ + B^-A^-) \\ &\quad + \epsilon_{AB}[B^+, A^-]_{\pm} \\ &= \epsilon_{AB}N(BA) + \langle 0|\epsilon_{AB}BA|0\rangle \\ &= N(AB) + \langle 0|\epsilon_{AB}T\{B(x_2)A(x_1)\}|0\rangle \\ &= N(AB) + \langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, para $x_1^0 \neq x_2^0$, temos

$$\begin{aligned} T\{A(x_1), B(x_2)\} &= N(AB) + \langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle \\ &= N(AB) + N(\langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle), \end{aligned} \quad (3.60)$$

pois $\langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle$ é um escalar.

O valor esperado no vácuo do produto ordenado temporalmente ocorrerá com muita frequência. Por esse motivo definiremos a contração de dois operadores A e B por

$$\overline{A(x_1)B(x_2)} = \overline{A(x_1)B(x_2)} = \langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle. \quad (3.61)$$

No capítulo anterior, estas contrações foram obtidas a partir de comutadores e anticomutadores dos campos livres. Como estamos utilizando a representação de interação, estes comutadores e anticomu-

tores permanecem inalterados. Assim, de (2.149) e (2.219)

$$\underbrace{A^\mu(x)A^\nu(y)} = iD_F^{\mu\nu}(x-y) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)}, \quad (3.62a)$$

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = iS_{F\alpha\beta}(x-y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)}. \quad (3.62b)$$

As contrações também podem aparecer dentro do argumento de um ordenamento normal. Por exemplo,

$$N(\underbrace{ABCDEF \dots JKLM \dots}) := (-1)^p \underbrace{AK} \underbrace{BCEL} N(DF \dots JM \dots),$$

onde p é o número de permutações entre operadores fermiônicos vizinhos para levar $ABC \dots$ em $AKBC \dots$. Este é um exemplo de um ordenamento normal generalizado.

Em termos da notação (3.61), podemos escrever (3.60) como

$$T\{A(x_1), B(x_2)\} = N(AB) + N(\underbrace{AB}). \quad (3.63)$$

Este é o caso base para o teorema de Wick.

Para operadores $A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, A_n(x_n)$, com $x_i^0 \neq x_j^0$ para $i \neq j$, o teorema de Wick afirma que

$$\begin{aligned} T\{A_1 A_2 \dots A_n\} &= N(A_1 A_2 \dots A_n) \\ &+ N(\underbrace{A_1 A_2} \dots A_n) + N(A_1 \underbrace{A_2 A_3} \dots A_n) + \dots + N(A_1 \dots \underbrace{A_{n-1} A_n}) \\ &+ N(\underbrace{A_1 A_2 A_3} \underbrace{A_4} \dots A_n) + N(\underbrace{A_1 A_2 A_3 A_4} \dots A_n) + \dots + \\ &+ N(A_1 A_2 A_3 \dots \underbrace{A_{n-3} A_{n-2} A_{n-1}} A_n) \\ &+ \text{soma sobre termos triplamente contraídos} \\ &+ \text{soma sobre termos com mais contrações.} \end{aligned} \quad (3.64)$$

A demonstração deste teorema é feita por indução matemática e pode ser encontrada em (GREINER; REINHARDT, 1996).

No caso da matriz S , pelo fato da densidade hamiltoniana de interação (3.56) ser dada em termos de um produto normal, o n -ésimo termo da matriz S contém um produto misto da forma

$$T\{\mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n)\} = T\{N(AB \dots)_{x_1} \dots N(AB \dots)_{x_n}\}, \quad (3.65)$$

e o teorema de Wick pode ser estendido para estes produtos mistos.

Em cada fator $N(AB\dots)_{x_i}$, onde $i = 1, \dots, n$, substituímos cada $x_i = (x_i^0, \mathbf{x}_i)$ por $\zeta_i = (x_i^0 + \epsilon, \mathbf{x}_i)$ nos operadores de criação e $\zeta_i = (x_i^0 - \epsilon, \mathbf{x}_i)$ nos operadores de aniquilação, onde $\epsilon > 0$. Desta maneira, em cada fator $N(AB\dots)_{\zeta_i}$ o ordenamento normal também ordena temporalmente os operadores e podemos escrever

$$T\{N(AB\dots)_{x_1} \dots N(AB\dots)_{x_n}\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T\{(AB\dots)_{\zeta_1} \dots (AB\dots)_{\zeta_n}\}, \quad (3.66)$$

onde o ordenamento temporal deve ser feito antes do limite ser tomado.

Expandindo o lado direito de (3.66) com o teorema de Wick, vemos que as contrações dentro de um mesmo grupo $(AB\dots)_{\zeta_1}$ se anularão no limite $\epsilon \rightarrow 0$. Assim, o teorema de Wick pode ser aplicado omitindo-se as contrações a tempos iguais (c.t.i.).

$$T\{N(AB\dots)_{x_1} \dots N(AB\dots)_{x_n}\} = T\{(AB\dots)_{x_1} \dots (AB\dots)_{x_n}\}_{\text{sem c.t.i.}}. \quad (3.67)$$

Este resultado permite expandirmos a matriz S em um somatório de produtos normais generalizados. Cada um destes produtos corresponde a um processo definido, caracterizado por operadores não contraídos que absorvem e criam as partículas presentes nos estados iniciais e finais. As contrações são os *propagadores de Feynman*, que correspondem às partículas virtuais que são “criadas” e “aniquiladas” nos estados intermediários.

3.3 ESPALHAMENTO FÓTON-FÓTON

O espalhamento fóton-fóton, ou Halpern, é um processo previsto pela eletrodinâmica quântica, que tem origem nas interações não-lineares entre os campos eletromagnéticos devido a “flutuações” do vácuo do campo de Dirac. Tal processo não pode ser descrito pelo eletromagnetismo clássico, pois as equações que governam este último são lineares e, desta forma, não existe interação entre os campos.

Os primeiros a calcularem este processo foram Karplus e Neumann (KARPLUS; NEUMAN, 1950). Outras referências importantes são (COSTANTINI; TOLLIS; PISTONI, 1971) e (JAUCH; ROHRlich, 1980).

Em ordem mais baixa da teoria da perturbação, o espalhamento fóton-fóton é descrito por uma parte do termo de quarta ordem da

matriz S . Tal termo é da ordem de α^2 , tornando difícil a observação deste processo em laboratório, pois requer feixes de fótons com altas energias e equipamentos de detecção muito sensíveis.

De (3.55) e (3.56), o termo de quarta ordem da matriz S é dado por

$$S^{(4)} = \frac{e^4}{4!} \int \prod_{i=1}^4 d^4x_i T [N(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} N(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} N(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_3} N(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_4}]. \quad (3.68)$$

Entretanto, estamos interessados em processos que envolvem somente campos eletromagnéticos, ou seja, precisamos selecionar de $S^{(4)}$ os termos que não levarão a estados finais contendo férmions. Tais termos possuem os operadores fermiônicos contraídos quando expandimos o ordenamento misto de (3.68) de acordo com o teorema de Wick, pois, desta forma, férmions aparecerão somente como estados intermediários. Assim, segue pelo teorema de Wick que os termos em (3.68) que contribuirão para o espalhamento fóton-fóton são:

$$\begin{aligned} S^{(4)} = & \frac{e^4}{4!} \int \prod_{i=1}^4 d^4x_i \left\{ N[\underbrace{(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}}_{\text{contraction}} \underbrace{(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_3} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_4}}_{\text{contraction}}] \right. \\ & + N[\underbrace{(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_3}}_{\text{contraction}} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_4}] \\ & + N[\underbrace{(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_4}}_{\text{contraction}} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_3}] \\ & + N[\underbrace{(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_3}}_{\text{contraction}} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_4}] \\ & + N[\underbrace{(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_3} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_4}}_{\text{contraction}} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}] \\ & + N[\underbrace{(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_3} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}}_{\text{contraction}} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_4}] \\ & + N[\underbrace{(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_4} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_3}}_{\text{contraction}} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}] \\ & + N[\underbrace{(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_4} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2}}_{\text{contraction}} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_3}] \\ & + N[\underbrace{(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_4}}_{\text{contraction}} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_3}] \\ & \left. + N[\underbrace{(\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_3}}_{\text{contraction}} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_4}] \right\}. \quad (3.69) \end{aligned}$$

A expressão acima pode ser simplificada através das seguintes mudanças de variáveis:

- $x_1 \leftrightarrow x_2$ no segundo termo, $x_1 \leftrightarrow x_2$ e $x_3 \leftrightarrow x_4$ no terceiro, $x_3 \leftrightarrow x_4$ no quarto, $x_1 \leftrightarrow x_4$ no sexto e $x_2 \leftrightarrow x_3$ no oitavo;
- $x_2 \leftrightarrow x_3$ no quinto termo e $x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_2$ no nono.

Ficamos então com

$$S^{(4)} = \frac{e^4}{4!} \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i \left\{ 3N[\underbrace{(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}}_{\text{}} \underbrace{(\bar{\psi} A \psi)_{x_3} (\bar{\psi} A \psi)_{x_4}}_{\text{}}] \right. \\ \left. + 6N[\underbrace{(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2} (\bar{\psi} A \psi)_{x_3} (\bar{\psi} A \psi)_{x_4}}_{\text{}}] \right\}. \quad (3.70)$$

Dos termos restantes, o primeiro deles contribui para processos que não envolvem interação entre fótons distintos, por exemplo, a auto-energia do fóton de segunda ordem. A eliminação deste resulta em

$$S^{(4)} = \frac{e^4}{4} \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i N[\underbrace{(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2} (\bar{\psi} A \psi)_{x_3} (\bar{\psi} A \psi)_{x_4}}_{\text{}}], \quad (3.71)$$

o qual, escrevendo explicitamente os índices spinoriais, tensoriais, abrindo o ordenamento normal e usando (3.62b), fica

$$S^{(4)} = \frac{e^4}{4} \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i N[\underbrace{(\bar{\psi}_\alpha A_{\alpha\beta} \psi_\beta)_{x_1} (\bar{\psi}_\gamma A_{\gamma\delta} \psi_\delta)_{x_2} (\bar{\psi}_\epsilon A_{\epsilon\zeta} \psi_\zeta)_{x_3} (\bar{\psi}_\eta A_{\eta\rho} \psi_\rho)_{x_4}}_{\text{}}] \\ = -\frac{e^4}{4} \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i S_{F_{\rho\alpha}}(x_4 - x_1) S_{F_{\beta\gamma}}(x_1 - x_2) S_{F_{\delta\epsilon}}(x_2 - x_3) S_{F_{\zeta\eta}}(x_3 - x_4) \\ \times \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\nu \gamma_{\epsilon\zeta}^\lambda \gamma_{\eta\rho}^\sigma N[A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\lambda(x_3) A_\sigma(x_4)] \\ = -\frac{e^4}{4} \int \prod_{i=1}^4 d^4 x_i N[A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\lambda(x_3) A_\sigma(x_4)] \\ \times \text{Tr}[\gamma^\mu S_F(x_1 - x_2) \gamma^\nu S_F(x_2 - x_3) \gamma^\lambda S_F(x_3 - x_4) \gamma^\sigma S_F(x_4 - x_1)]. \quad (3.72)$$

Por conveniência, vamos considerar S^4 no espaço dos momentos. Assumindo

$$S_{F_{\alpha\beta}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p S_{F_{\alpha\beta}}(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (3.73a)$$

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k A_\mu(k) e^{-ik \cdot x}, \quad (3.73b)$$

e substituindo em (3.72), temos

$$\begin{aligned} S^{(4)} &= -\frac{e^4}{4(4\pi)^{32}} \int \prod_{j=1}^4 d^4k_j N[A_\mu(k_1)A_\nu(k_2)A_\lambda(k_3)A_\sigma(k_4)] \\ &\quad \times \int \prod_{l=1}^4 d^4p_l \text{Tr}[\gamma^\mu S_F(p_1)\gamma^\nu S_F(p_2)\gamma^\lambda S_F(p_3)\gamma^\sigma S_F(p_4)] \\ &\quad \times \int \prod_{i=1}^4 d^4x_i e^{-i(p_1-p_4+k_1) \cdot x_1} e^{-i(p_2-p_1+k_2) \cdot x_2} e^{-i(p_3-p_2+k_3) \cdot x_3} \\ &\quad \times e^{-i(p_4-p_3+k_4) \cdot x_4}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde $S_{F_{\alpha\beta}}(p)$ é obtido comparando-se (3.73a) com (3.62b):

$$S_{F_{\alpha\beta}}(p) = \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (3.75)$$

As integrais em x_1, x_2, x_3 e x_4 são, a menos de fatores numéricos, representações da delta de Dirac, ou seja

$$\begin{aligned} &\int \prod_{i=1}^4 d^4x_i e^{-i(p_1-p_4+k_1) \cdot x_1} e^{-i(p_2-p_1+k_2) \cdot x_2} e^{-i(p_3-p_2+k_3) \cdot x_3} e^{-i(p_4-p_3+k_4) \cdot x_4} \\ &= (2\pi)^{16} \delta(p_1 - p_4 + k_1) \delta(p_2 - p_1 + k_2) \delta(p_3 - p_2 + k_3) \delta(p_4 - p_3 + k_4) \\ &= (2\pi)^{16} \delta(p_2 - p_1 + k_2) \delta(p_3 - p_1 + k_2 + k_3) \delta(p_4 - p_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ &\quad \times \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Substituindo o resultado acima em (3.74), realizando as integrações em p_2, p_3 e p_4 , e fazendo a mudança de variável $p_1 \rightarrow p$, ficamos com

$$\begin{aligned} S^{(4)} &= -\frac{e^4}{4(4\pi)^{16}} \int \prod_{j=1}^4 d^4k_j \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ &\quad \times N[A_\mu(k_1)A_\nu(k_2)A_\lambda(k_3)A_\sigma(k_4)] T^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4), \end{aligned} \quad (3.77)$$

onde¹

$$T^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \int d^4p \text{Tr}[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\nu S_F(p - k_2) \gamma^\lambda S_F(p - k_2 - k_3) \gamma^\sigma S_F(p + k_1)]. \quad (3.78)$$

Ao invés de trabalharmos com $T^{\mu\nu\lambda\sigma}$, é conveniente definirmos o tensor

$$G^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = T^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) + T^{\mu\nu\sigma\lambda}(k_1, k_2, k_4, k_3) + T^{\mu\lambda\nu\sigma}(k_1, k_3, k_2, k_4), \quad (3.79)$$

que é chamado de tensor de polarização do vácuo de quarta ordem. Em termos deste, podemos escrever (3.77) como

$$\begin{aligned} S^{(4)} &= -\frac{e^4}{12(4\pi)^{16}} \int \prod_{j=1}^4 d^4k_j \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ &\quad \times N[A_\mu(k_1)A_\nu(k_2)A_\lambda(k_3)A_\sigma(k_4)] \left[T^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \right. \\ &\quad \left. + T^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) + T^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \right] \\ &= -\frac{e^4}{12(4\pi)^{16}} \int \prod_{j=1}^4 d^4k_j \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ &\quad \times N[A_\mu(k_1)A_\nu(k_2)A_\lambda(k_3)A_\sigma(k_4)] G^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (3.80) \end{aligned}$$

onde realizamos as seguintes mudanças de variáveis e de índices tensoriais: $k_3 \leftrightarrow k_4$ e $\lambda \leftrightarrow \sigma$ no segundo termo e $k_2 \leftrightarrow k_3$ e $\nu \leftrightarrow \lambda$ no terceiro termo.

O motivo de termos optado pelo uso de $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$, é que este é completamente simétrico por troca simultânea de índices tensoriais juntamente com os respectivos momentos. Em outras palavras, $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ é simétrico por qualquer uma das 24 permutações dos pares (μ, k_1) , (ν, k_2) , (λ, k_3) e (σ, k_4) .

A demonstração deste fato não é difícil, embora seja um pouco trabalhosa. É suficiente mostrarmos a invariância de $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ por estas 6 permutações: $(\mu, k_1) \leftrightarrow (\nu, k_2)$, $(\mu, k_1) \leftrightarrow (\lambda, k_3)$, $(\mu, k_1) \leftrightarrow (\sigma, k_4)$, $(\nu, k_2) \leftrightarrow (\lambda, k_3)$, $(\nu, k_2) \leftrightarrow (\sigma, k_4)$ e $(\lambda, k_3) \leftrightarrow (\sigma, k_4)$, pois as demais

¹Devido à delta de Dirac, a expressão (3.77) será não-nula somente se $k_1 = -k_2 - k_3 - k_4$. Este fato foi usado em (3.78).

simetrias seguem pelo uso destas. Por exemplo, $G^{\sigma\lambda\mu\nu}(k_4, k_3, k_1, k_2) = G^{\mu\lambda\sigma\nu}(k_1, k_3, k_4, k_2) = G^{\mu\nu\sigma\lambda}(k_1, k_2, k_4, k_3) = G^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$.

Destas 6 permutações, demonstraremos explicitamente a invariância de $G^{\sigma\lambda\mu\nu}$ pela troca $(\mu, k_1) \leftrightarrow (\nu, k_2)$, pois as demais seguem de maneira análoga. De (3.78) e (3.79), temos:

$$\begin{aligned}
& G^{\nu\mu\lambda\sigma}(k_2, k_1, k_3, k_4) \\
&= T^{\nu\mu\lambda\sigma}(k_2, k_1, k_3, k_4) + T^{\nu\mu\sigma\lambda}(k_2, k_1, k_4, k_3) + T^{\nu\lambda\mu\sigma}(k_2, k_3, k_1, k_4) \\
&= \int d^4p \operatorname{Tr}[\gamma^\nu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p - k_1) \gamma^\lambda S_F(p - k_1 - k_3) \gamma^\sigma S_F(p + k_2)] \\
&+ \int d^4p \operatorname{Tr}[\gamma^\nu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p - k_1) \gamma^\sigma S_F(p - k_1 - k_4) \gamma^\lambda S_F(p + k_2)] \\
&+ \int d^4p \operatorname{Tr}[\gamma^\nu S_F(p) \gamma^\lambda S_F(p - k_3) \gamma^\mu S_F(p - k_1 - k_3) \gamma^\sigma S_F(p + k_2)] \\
&= \int d^4p \operatorname{Tr}[\gamma^\mu S_F(-p) \gamma^\nu S_F(-p - k_2) \gamma^\sigma S_F(\underbrace{k_1 + k_3}_{-k_2 - k_4} - p) \gamma^\lambda S_F(k_1 - p)] \\
&+ \int d^4p \operatorname{Tr}[\gamma^\mu S_F(-p) \gamma^\nu S_F(-p - k_2) \gamma^\lambda S_F(\underbrace{k_1 + k_4}_{-k_2 - k_3} - p) \gamma^\sigma S_F(k_1 - p)] \\
&+ \int d^4p \operatorname{Tr}[\gamma^\mu S_F(k_3 - p) \gamma^\lambda S_F(-p) \gamma^\nu S_F(\underbrace{-p - k_2}_{k_3 + k_2 - k_3}) \gamma^\sigma S_F(k_1 + k_3 - p)].
\end{aligned}$$

Fazendo $-p \rightarrow p$ nas duas primeiras integrais e $-p + k_3 \rightarrow p$ na terceira, segue que

$$\begin{aligned}
& G^{\nu\mu\lambda\sigma}(k_2, k_1, k_3, k_4) \\
&= \int d^4p \operatorname{Tr}[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\nu S_F(p - k_2) \gamma^\sigma S_F(p - k_2 - k_4) \gamma^\lambda S_F(p + k_1)] \\
&+ \int d^4p \operatorname{Tr}[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\nu S_F(p - k_2) \gamma^\lambda S_F(p - k_2 - k_3) \gamma^\sigma S_F(p + k_1)] \\
&+ \int d^4p \operatorname{Tr}[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\lambda S_F(p - k_3) \gamma^\nu S_F(p - k_2 - k_3) \gamma^\sigma S_F(p + k_1)] \\
&= G^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4). \tag{3.81}
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ é finito. De (3.78) temos

$$T^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4 p \text{Tr}[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\nu S_F(p - k_2) \gamma^\lambda S_F(p - k_2 - k_3) \gamma^\sigma S_F(p + k_1)] \\
&= \int d^4 p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}_2 + m) \gamma^\lambda (\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m) \gamma^\sigma (\not{p} + \not{k}_1 + m)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
&\times \frac{\gamma^\sigma (\not{p} + \not{k}_1 + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]}. \tag{3.82}
\end{aligned}$$

Utilizando a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{1}{[a_1 x_{n-1} + a_2 (x_{n-2} - x_{n-1}) + \dots + a_n (1 - x_1)]^n},$$

o denominador de (3.82) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
&3! \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \left\{ (p^2 - m^2 + i\varepsilon)z + [(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon](y - z) \right. \\
&\left. + [(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon](x - y) + [(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon](1 - x) \right\}^{-4} \\
&= 3! \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz [(p + K)^2 + a^2]^{-4}, \tag{3.83}
\end{aligned}$$

onde

$$K = k_1(1 - x) - k_2(x - z) - k_3(x - y), \tag{3.84a}$$

$$\begin{aligned}
a^2 &= -m^2 + i\varepsilon + x(1 - x)k_1^2 + (x - z)(1 - x + z)k_2^2 + (x - y) \\
&\times (1 - x + y)k_3^2 + 2[(1 - x)(x - y)k_1 k_3 + (1 - x)(x - z)k_1 k_2 \\
&+ (x - y)(1 - x + z)k_2 k_3]. \tag{3.84b}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.83) em (3.82) e fazendo a mudança de variável $p \rightarrow p - K$,

$$T^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = 3! \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \int \frac{X^{\mu\nu\lambda\sigma}}{(p^2 + a^2)^4} d^4 p, \tag{3.85}$$

onde

$$X^{\mu\nu\lambda\sigma} = \int d^4p \operatorname{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} - \not{K} + m)\gamma^\nu(\not{p} - \not{K} - \not{k}_2 + m)\gamma^\lambda \times (\not{p} - \not{K} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m)\gamma^\sigma(\not{p} - \not{K} + \not{k}_1 + m)]. \quad (3.86)$$

Analisando o integrando em (3.86), vemos que este será um somatório de termos do tipo

$$p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \dots p_{\alpha_n} \operatorname{Tr}[\gamma^{\beta_1} \gamma^{\beta_2} \dots \gamma^{\beta_m}] f(x, y, z, k_1, k_2, k_3, k_4),$$

onde $n = 0, 1, \dots, 4$, $m = 4, 5, \dots, 8$ e a função f varia de termo para termo. Entretanto, fazendo a mudança de variável $p \rightarrow -p$ temos, para n ímpar,

$$\int d^4p p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \dots p_{\alpha_n} \operatorname{Tr}[\gamma^{\beta_1} \gamma^{\beta_2} \dots \gamma^{\beta_m}] f(x, y, z, k_1, k_2, k_3, k_4) = - \int d^4p p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \dots p_{\alpha_n} \operatorname{Tr}[\gamma^{\beta_1} \gamma^{\beta_2} \dots \gamma^{\beta_m}] f(x, y, z, k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (3.87)$$

ou seja, os termos com n ímpar se anulam. Assim,

$$X^{\mu\nu\lambda\sigma} = X^{\mu\nu\lambda\sigma(4)} + X^{\mu\nu\lambda\sigma(2)} + X^{\mu\nu\lambda\sigma(0)}, \quad (3.88)$$

onde $X^{\mu\nu\lambda\sigma(n)}$ indica a soma dos termos contendo o produto de n componentes de p .

A integral em p na expressão (3.85) é assintoticamente ($p^2 \gg a^2$) da forma

$$\int \frac{X^{\mu\nu\lambda\sigma}}{(p^2 + a^2)^4} d^4p \sim \int \frac{X^{\mu\nu\lambda\sigma}}{p^8} d^4p = \int \frac{X^{\mu\nu\lambda\sigma(4)} + X^{\mu\nu\lambda\sigma(2)} + X^{\mu\nu\lambda\sigma(0)}}{p^8} d^4p. \quad (3.89)$$

Assim, por contagem de potências de p , podemos concluir que somente a integral envolvendo $X^{\mu\nu\lambda\sigma(4)}$ é divergente.

De (3.86) vemos que

$$X^{\mu\nu\lambda\sigma(4)} = \operatorname{Tr}[\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{p} \gamma^\lambda \not{p} \gamma^\sigma \not{p}] = p_\alpha p_\beta p_\gamma p_\delta \operatorname{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta],$$

e então

$$\begin{aligned}
 \int d^4p \frac{X^{\mu\nu\lambda\sigma(4)}}{(p^2 + a^2)^4} &= \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta] \int d^4p \frac{p_\alpha p_\beta p_\gamma p_\delta}{(p^2 + a^2)^4} \\
 &= \frac{1}{24} (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta] \\
 &\quad \times \int d^4p \frac{(p^2)^2}{(p^2 + a^2)^4}, \tag{3.90}
 \end{aligned}$$

onde usamos a identidade

$$\int d^4p p_\alpha p_\beta p_\gamma p_\delta f(p^2) = \frac{1}{24} (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \int d^4p (p^2)^2 f(p^2).$$

Vamos agora manipular um pouco a integral em (3.90). Podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \int d^4p \frac{(p^2)^2}{(p^2 + a^2)^4} &= \int d^4p \frac{(p^2)^2}{(p^2 + m^2)^4} \\
 &\quad + \int d^4p (p^2)^2 \left[\frac{1}{(p^2 + a^2)^4} - \frac{1}{(p^2 + m^2)^4} \right]; \tag{3.91}
 \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(p^2 + a^2)^4} - \frac{1}{(p^2 + m^2)^4} &= -4 \int_0^1 \frac{(p^2 + a^2 - p^2 - m^2) dz}{[(a^2 - m^2)z + p^2 + m^2]^5} \\
 &= -4 \int_0^1 \frac{(a^2 - m^2) dz}{[p^2 + a^2 z + m^2(1 - z)]^5}, \tag{3.92}
 \end{aligned}$$

ficamos com

$$\begin{aligned}
 \int d^4p \frac{(p^2)^2}{(p^2 + a^2)^4} &= \int d^4p \frac{(p^2)^2}{(p^2 + m^2)^4} \\
 &\quad - 4 \int_0^1 dz \int d^4p \frac{a^2 - m^2}{[p^2 + a^2 z + m^2(1 - z)]^5}. \tag{3.93}
 \end{aligned}$$

A segunda integral da expressão acima é convergente. De fato,

$$\begin{aligned}
 & -4 \int_0^1 dz \int d^4 p \frac{a^2 - m^2}{[p^2 + a^2 z + m^2(1-z)]^5} = \\
 & -4i\pi^2 \frac{\Gamma(4)\Gamma(1)}{\Gamma(5)} \int_0^1 \frac{a^2 - m^2}{a^2 z + m^2(1-z)} dz = -i\pi^2 \ln \frac{a^2}{m^2}. \quad (3.94)
 \end{aligned}$$

Assim, a parte divergente de $T^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ é dada por

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{24}(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \\
 & \times \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta] \int d^4 p \frac{(p^2)^2}{(p^2 + m^2)^4}. \quad (3.95)
 \end{aligned}$$

Por intermédio de (3.95) e das trocas de índices $\lambda \leftrightarrow \sigma$ e $\nu \leftrightarrow \lambda$, podemos encontrar expressões análogas para $T^{\mu\nu\sigma\lambda}(k_1, k_2, k_4, k_3)$ e $T^{\mu\lambda\nu\sigma}(k_1, k_3, k_2, k_4)$. Estas expressões diferem entre si somente pelos índices das matrizes gama. Com isso, de (3.79) segue que o coeficiente do termo divergente de $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ é

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{24}(g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta \\
 & + \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\gamma \gamma^\lambda \gamma^\delta + \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta]. \quad (3.96)
 \end{aligned}$$

Para calcularmos F , faremos uso das seguintes relações envolvendo as matrizes gama (MANDL; SHAW, 1984):

$$\begin{aligned}
 \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda &= -2\gamma^\alpha, & \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\lambda &= -2\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha, \\
 \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda &= 4g^{\alpha\beta}, & \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \gamma^\lambda &= 2(\gamma^\delta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma + \gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\delta), \\
 \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) &= 4g^{\alpha\beta}, & \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) &= 4(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}).
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 & \bullet g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta + \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\gamma \gamma^\lambda \gamma^\delta \\
 & + \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta] \\
 &= \text{Tr} [\underbrace{\gamma^\mu \gamma_\beta \gamma^\nu}_{-2\gamma^\nu} \underbrace{\gamma^\lambda \gamma_\delta \gamma^\sigma}_{-2\gamma^\sigma} + \underbrace{\gamma^\mu \gamma_\beta \gamma^\nu}_{-2\gamma^\nu} \underbrace{\gamma^\beta \gamma_\delta \gamma^\lambda \gamma^\sigma}_{-2\gamma^\lambda} + \underbrace{\gamma^\mu \gamma_\beta \gamma^\lambda}_{-2\gamma^\lambda} \underbrace{\gamma^\beta \gamma^\nu \gamma_\delta \gamma^\sigma \gamma^\delta}_{-2\gamma^\sigma}] \\
 &= 4 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma + \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\lambda + \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 16 (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\nu} g^{\sigma\lambda} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\lambda\nu}) \\
&= 16 (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}); \tag{3.97}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bullet g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta + \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\gamma \gamma^\lambda \gamma^\delta \\
&\quad + \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta] \\
&= [\gamma^\mu \gamma_\gamma \gamma^\nu \underbrace{\gamma_\delta \gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta}_{-2\gamma^\sigma \gamma^\gamma \gamma^\lambda} + \gamma^\mu \gamma_\gamma \gamma^\nu \underbrace{\gamma_\delta \gamma^\sigma \gamma^\gamma \gamma^\lambda \gamma^\delta}_{-2\gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma} + \gamma^\mu \gamma_\gamma \gamma^\nu \underbrace{\gamma_\delta \gamma^\gamma \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\delta}_{-2\gamma^\sigma \gamma^\gamma \gamma^\nu}] \\
&= -2 [\gamma^\mu \underbrace{\gamma_\gamma \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\gamma \gamma^\lambda}_{4g^{\nu\sigma}} + \gamma^\mu \underbrace{\gamma_\gamma \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma}_{4g^{\nu\lambda}} + \gamma^\mu \underbrace{\gamma_\gamma \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\gamma \gamma^\nu}_{4g^{\lambda\sigma}}] \\
&= -8 [\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\lambda) g^{\nu\sigma} + \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\sigma) g^{\nu\lambda} + \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) g^{\lambda\sigma}] \\
&= -32 (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}); \tag{3.98}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bullet g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta + \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\gamma \gamma^\lambda \gamma^\delta \\
&\quad + \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta] \\
&= \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma_\delta \gamma^\nu \underbrace{\gamma_\gamma \gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta}_{-2\gamma^\lambda} + \gamma^\mu \gamma_\delta \gamma^\nu \underbrace{\gamma_\gamma \gamma^\sigma \gamma^\gamma \gamma^\lambda \gamma^\delta}_{-2\gamma^\sigma} + \gamma^\mu \gamma_\delta \gamma^\lambda \underbrace{\gamma_\gamma \gamma^\nu \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta}_{-2\gamma^\nu}] \\
&= -2 \text{Tr} [\gamma^\mu \underbrace{\gamma_\delta \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\delta}_{-2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu} + \gamma^\mu \underbrace{\gamma_\delta \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\delta}_{-2\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\nu} + \gamma^\mu \underbrace{\gamma_\delta \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\delta}_{-2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\lambda}] \\
&= 4 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\lambda] \\
&= 16 (g^{\mu\sigma} g^{\lambda\nu} - g^{\mu\lambda} g^{\sigma\nu} + g^{\mu\nu} g^{\sigma\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\sigma\nu} - g^{\mu\sigma} g^{\lambda\nu} + g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \\
&\quad + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu} g^{\sigma\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\sigma\nu}) \\
&= 16 (g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}). \tag{3.99}
\end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima em (3.96), segue que $F = 0$, ou seja, as partes divergentes se anulam e $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ é finito.

Além de finito, $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ obedece às seguintes relações

$$k_1^\mu G_{\mu\nu\lambda\sigma} = k_2^\nu G_{\mu\nu\lambda\sigma} = k_3^\lambda G_{\mu\nu\lambda\sigma} = k_4^\sigma G_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0, \tag{3.100}$$

ou seja, o tensor $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ é um invariante de *gauge*.

A conexão entre (3.100) e invariância de *gauge* é estabelecida

pelo fato da matriz S ser invariante pelas transformações

$$A_\mu(k) \rightarrow A_\mu(k) + k_\mu \chi(k), \quad (3.101)$$

onde $\chi(k)$ é qualquer função escalar de k .

Quando aplicadas em (3.80), estas transformações levam a

$$\begin{aligned} S^{(4)} &= \frac{-e^4}{12(4\pi)^{16}} \int \prod_{j=1}^4 d^4 k_j \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) N \{ [A^\mu(k_1) + k_1^\mu \chi(k_1)] \\ &\quad \times [A^\nu(k_2) + k_2^\nu \chi(k_2)] [A^\lambda(k_3) + k_3^\lambda \chi(k_3)] [A^\sigma(k_4) + k_4^\sigma \chi(k_4)] \} \\ &\quad \times G_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4), \end{aligned} \quad (3.102)$$

de onde podemos ver, calculando o produto dos termos entre colchetes, que as relações (3.100) são condições suficientes para a invariância de $S^{(4)}$.

Vamos agora mostrar explicitamente que $k_1^\mu G_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) = 0$. De (3.78) e (3.79) temos

$$\begin{aligned} &k_1^\mu G_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ &= \int d^4 p \frac{\text{Tr} [k_1(\not{p} + m) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_2 + m) \gamma_\lambda (\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\ &\quad \times \frac{\gamma_\sigma (\not{p} + \not{k}_1 + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\ &+ \int d^4 p \frac{\text{Tr} [k_1(\not{p} + m) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_2 + m) \gamma_\sigma (\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_4 + m)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_4)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\ &\quad \times \frac{\gamma_\lambda (\not{p} + \not{k}_1 + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\ &+ \int d^4 p \frac{\text{Tr} [k_1(\not{p} + m) \gamma_\lambda (\not{p} - \not{k}_3 + m) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\ &\quad \times \frac{\gamma_\sigma (\not{p} + \not{k}_1 + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Fazendo $\not{k}_1 = (\not{p} + \not{k}_1 - m + i\varepsilon) - (\not{p} - m + i\varepsilon)$, a expressão acima pode ser escrita

$$\begin{aligned} &k_1^\mu G_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ &= \int d^4 p \frac{\text{Tr} [(\not{p} + \not{k}_1 - m + i\varepsilon)(\not{p} + m) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_2 + m) \gamma_\lambda]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m)\gamma_\sigma(\not{p} + \not{k}_1 + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& - \int d^4p \frac{\text{Tr}[(\not{p} - m + i\varepsilon)(\not{p} + m)\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m)\gamma_\lambda]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m)\gamma_\sigma(\not{p} + \not{k}_1 + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& + \int d^4p \frac{\text{Tr}[(\not{p} + \not{k}_1 - m + i\varepsilon)\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m)\gamma_\sigma]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_4)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_4 + m)\gamma_\lambda(\not{p} + \not{k}_1 + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& - \int d^4p \frac{\text{Tr}[(\not{p} - m + i\varepsilon)(\not{p} + m)\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m)\gamma_\sigma]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_4)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_4 + m)\gamma_\lambda(\not{p} + \not{k}_1 + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& + \int d^4p \frac{\text{Tr}[(\not{p} + \not{k}_1 - m + i\varepsilon)\gamma_\lambda(\not{p} - \not{k}_3 + m)\gamma_\nu]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m)\gamma_\sigma(\not{p} + \not{k}_1 + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& - \int d^4p \frac{\text{Tr}[(\not{p} - m + i\varepsilon)(\not{p} + m)\gamma_\lambda(\not{p} - \not{k}_3 + m)\gamma_\nu]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m)\gamma_\sigma(\not{p} + \not{k}_1 + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]}, \tag{3.104}
\end{aligned}$$

a qual, pela invariância cíclica do traço e da identidade² $(\not{p} + m)(\not{p} - m) = (p^2 - m^2)\mathbb{I}$, pode ser reescrita como :

$$\begin{aligned}
& k_1^\mu G_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\
& = \int d^4p \frac{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon] \text{Tr}[\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m)\gamma_\lambda]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m)\gamma_\sigma(\not{p} + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& - \int d^4p \frac{(p^2 - m^2 + i\varepsilon) \text{Tr}[\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m)\gamma_\lambda]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]}
\end{aligned}$$

² $(\not{p} + m)(\not{p} - m) = \not{p}\not{p} - m^2\mathbb{I} = \frac{1}{2}p_\alpha p_\beta (\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha) - m^2\mathbb{I} = (p_\alpha p_\beta g^{\alpha\beta} - m^2)\mathbb{I} = (p^2 - m^2)\mathbb{I}$.

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m)\gamma_\sigma(\not{p} + \not{k}_1 + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& + \int d^4p \frac{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon] \text{Tr}[\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m)\gamma_\sigma]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_4)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_4 + m)\gamma_\lambda(\not{p} + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& - \int d^4p \frac{(p^2 - m^2 + i\varepsilon) \text{Tr}[\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m)\gamma_\sigma]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_4)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_4 + m)\gamma_\lambda(\not{p} + \not{k}_1 + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& + \int d^4p \frac{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon] \text{Tr}[\gamma_\lambda(\not{p} - \not{k}_3 + m)\gamma_\nu]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m)\gamma_\sigma(\not{p} + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& - \int d^4p \frac{(p^2 - m^2 + i\varepsilon) \text{Tr}[\gamma_\lambda(\not{p} - \not{k}_3 + m)\gamma_\nu]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m)\gamma_\sigma(\not{p} + \not{k}_1 + m)}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]}. \tag{3.105}
\end{aligned}$$

Utilizando a propriedade (SCHWEBER, 2005)

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [\gamma^{\alpha_1} S_F(x_1) \dots \gamma^{\alpha_n} S_F(x_n)] &= \\
& (-1)^n \text{Tr} [S_F(-x_n) \gamma^{\alpha_n} \dots S_F(-x_1) \gamma^{\alpha_1}],
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
& k_1^\mu G_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\
& = \int d^4p \frac{\text{Tr}[\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m)\gamma_\lambda(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m)\gamma_\sigma(\not{p} + m)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& - \int d^4p \frac{\text{Tr}[\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m)\gamma_\lambda(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m)\gamma_\sigma(\not{p} + \not{k}_1 + m)]}{[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{1}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& - \int d^4p \frac{\text{Tr}[\gamma_\nu(-\not{p} + m)\gamma_\lambda(-\not{p} + \not{k}_2 + \not{k}_4 + m)\gamma_\sigma(-\not{p} + \not{k}_2 + m)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_4)^2 - m^2 + i\varepsilon]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int d^4p \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu(-\not{p} - \not{k}_1 + m) \gamma_\lambda(-\not{p} + \not{k}_2 + \not{k}_4 + m) \gamma_\sigma(-\not{p} + \not{k}_2 + m)]}{[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_4)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{1}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& - \int d^4p \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu(-\not{p} + \not{k}_3 + m) \gamma_\lambda(-\not{p} + m) \gamma_\sigma(-\not{p} + \not{k}_2 + \not{k}_3 + m)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& + \int d^4p \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu(-\not{p} + \not{k}_3 + m) \gamma_\lambda(-\not{p} - \not{k}_1 + m) \gamma_\sigma(-\not{p} + \not{k}_2 + \not{k}_3 + m)]}{[(p - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{1}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]}. \tag{3.106}
\end{aligned}$$

Fazendo as mudanças de variáveis: $-p \rightarrow -p + k_3$ na terceira integral, $-p - k_1 \rightarrow p - k_2$ na quarta integral, $-p + k_3 \rightarrow p - k_2$ na quinta integral e utilizando a relação entre os momentos $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$, vemos que os termos da expressão (3.106) se cancelam aos pares, ou seja,

$$\begin{aligned}
& k_1^\mu G_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\
& = \int d^4p \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m) \gamma_\lambda(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m) \gamma_\sigma(\not{p} + m)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& - \int d^4p \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m) \gamma_\lambda(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m) \gamma_\sigma(\not{p} + \not{k}_1 + m)]}{[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{1}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& - \int d^4p \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu(-\not{p} + \not{k}_3 + m) \gamma_\lambda(\overbrace{-\not{p} + \not{k}_2 + \not{k}_3 + \not{k}_4}^{=-\not{k}_1} + m) \gamma_\sigma(\not{p} + m)]}{[(p - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{(-\not{p} + \not{k}_2 + \not{k}_3 + m)}{[(p - \underbrace{k_2 - k_3 - k_4}_{=k_1})^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& + \int d^4p \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m) \gamma_\lambda(\underbrace{\not{p} + \not{k}_1 + \not{k}_4}_{=-\not{k}_2 - \not{k}_3} + m) \gamma_\sigma(\not{p} + \not{k}_1 + m)]}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p + \underbrace{k_1 + k_4}_{=-k_2 - k_3})^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{1}{[(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& - \int d^4p \frac{\text{Tr} [\gamma_\nu(\not{p} - \not{k}_2 + m) \gamma_\lambda(\not{p} - \not{k}_2 - \not{k}_3 + m) \gamma_\sigma(\not{p} + m)]}{[(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon](p^2 - m^2 + i\varepsilon)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int d^4 p \frac{\text{Tr}[\gamma_\nu(-\not{p} + \not{k}_3 + m)\gamma_\lambda(-\not{p} - \not{k}_1 + m)\gamma_\sigma(-\not{p} + \not{k}_2 + \not{k}_3 + m)]}{[(p - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k_2 - k_3)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& \times \frac{1}{[(p + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{3.107}$$

A invariância de *gauge* e a simetria por permutação dos pares (μ, k_1) , (ν, k_2) , (λ, k_3) e (σ, k_4) de $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ serão muito importantes no que seguirá.

A maneira mais geral de escrevermos o tensor $T^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \equiv T^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234)$, levando em conta que $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$, é

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) &= \sum_{i,j,l,m} a_1^{ijlm} (1234) k_i^\mu k_j^\nu k_l^\lambda k_m^\sigma + \sum_{i,j} b_{11}^{ij} (1234) g^{\mu\nu} k_i^\lambda k_j^\sigma \\
&+ \sum_{i,j} b_{21}^{ij} (1234) g^{\mu\lambda} k_i^\nu k_j^\sigma + \sum_{i,j} b_{31}^{ij} (1234) g^{\mu\sigma} k_i^\nu k_j^\lambda \\
&+ \sum_{i,j} b_{41}^{ij} (1234) g^{\nu\lambda} k_i^\mu k_j^\sigma + \sum_{i,j} b_{51}^{ij} (1234) g^{\nu\sigma} k_i^\mu k_j^\lambda \\
&+ \sum_{i,j} b_{61}^{ij} (1234) g^{\lambda\sigma} k_i^\mu k_j^\nu + c_{11} (1234) g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \\
&+ c_{21} (1234) g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + c_{31} (1234) g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda},
\end{aligned} \tag{3.108}$$

onde $i, j, l, m = 1, 2$ e 3 .

Fazendo $\lambda \leftrightarrow \sigma$ e $k_3 \leftrightarrow k_4$ na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu\sigma\lambda}(1243) &= \sum_{i,j,l,m} a_2^{ijlm} (1243) k_i^\mu k_j^\nu k_l^\lambda k_m^\sigma + \sum_{i,j} b_{12}^{ij} (1243) g^{\mu\nu} k_i^\lambda k_j^\sigma \\
&+ \sum_{i,j} b_{22}^{ij} (1243) g^{\mu\lambda} k_i^\nu k_j^\sigma + \sum_{i,j} b_{32}^{ij} (1243) g^{\mu\sigma} k_i^\nu k_j^\lambda \\
&+ \sum_{i,j} b_{42}^{ij} (1243) g^{\nu\lambda} k_i^\mu k_j^\sigma + \sum_{i,j} b_{52}^{ij} (1243) g^{\nu\sigma} k_i^\mu k_j^\lambda \\
&+ \sum_{i,j} b_{62}^{ij} (1243) g^{\lambda\sigma} k_i^\mu k_j^\nu + c_{12} (1243) g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \\
&+ c_{22} (1243) g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + c_{32} (1243) g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda},
\end{aligned} \tag{3.109}$$

onde $i, j, l, m = 1, 2$ e 4 .

Fazendo $\nu \leftrightarrow \lambda$ e $k_2 \leftrightarrow k_3$ na expressão (3.108), obtemos

$$\begin{aligned}
T^{\mu\lambda\nu\sigma}(1324) &= \sum_{i,j,l,m} a_3^{ijlm}(1324) k_i^\mu k_j^\nu k_l^\lambda k_m^\sigma + \sum_{i,j} b_{13}^{ij}(1324) g^{\mu\nu} k_i^\lambda k_j^\sigma \\
&+ \sum_{i,j} b_{23}^{ij}(1324) g^{\mu\lambda} k_i^\nu k_j^\sigma + \sum_{i,j} b_{33}^{ij}(1324) g^{\mu\sigma} k_i^\nu k_j^\lambda \\
&+ \sum_{i,j} b_{43}^{ij}(1324) g^{\nu\lambda} k_i^\mu k_j^\sigma + \sum_{i,j} b_{53}^{ij}(1324) g^{\nu\sigma} k_i^\mu k_j^\lambda \\
&+ \sum_{i,j} b_{63}^{ij}(1324) g^{\lambda\sigma} k_i^\mu k_j^\nu + C_{13}(1324) g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \\
&+ C_{23}(1324) g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + C_{33}(1324) g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}, \tag{3.110}
\end{aligned}$$

onde $i, j, l, m = 1, 2$ e 3 .

Para deixarmos os somatórios varrerem o mesmo conjunto de números, usaremos as seguintes relações derivadas de $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$:

$$k_1^\mu = -k_2^\mu - k_3^\mu - k_4^\mu, \tag{3.111a}$$

$$k_2^\nu = -k_1^\nu - k_3^\nu - k_4^\nu, \tag{3.111b}$$

$$k_3^\lambda = -k_1^\lambda - k_2^\lambda - k_4^\lambda, \tag{3.111c}$$

$$k_4^\sigma = -k_1^\sigma - k_2^\sigma - k_3^\sigma, \tag{3.111d}$$

que permitem escrever (3.108), (3.109) e (3.110) como

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) &= \sum_{i,j,l,m} A_1^{ijlm}(1234) k_i^\mu k_j^\nu k_l^\lambda k_m^\sigma + \sum_{l,m} B_{11}^{lm}(1234) g^{\mu\nu} k_l^\lambda k_m^\sigma \\
&+ \sum_{j,m} B_{21}^{jm}(1234) g^{\mu\lambda} k_j^\nu k_m^\sigma + \sum_{j,l} B_{31}^{jl}(1234) g^{\mu\sigma} k_j^\nu k_l^\lambda \\
&+ \sum_{i,m} B_{41}^{im}(1234) g^{\nu\lambda} k_i^\mu k_m^\sigma + \sum_{i,l} B_{51}^{il}(1234) g^{\nu\sigma} k_i^\mu k_l^\lambda \\
&+ \sum_{i,j} B_{61}^{ij}(1234) g^{\lambda\sigma} k_i^\mu k_j^\nu + C_{11}(1234) g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \\
&+ C_{21}(1234) g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + C_{31}(1234) g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}, \tag{3.112a}
\end{aligned}$$

$$T^{\mu\nu\sigma\lambda}(1243) = \sum_{i,j,l,m} A_2^{ijlm}(1243) k_i^\mu k_j^\nu k_l^\lambda k_m^\sigma + \sum_{l,m} B_{12}^{lm}(1243) g^{\mu\nu} k_l^\lambda k_m^\sigma$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j,m} B_{22}^{jm}(1243)g^{\mu\lambda}k_j^\nu k_m^\sigma + \sum_{j,l} B_{32}^{jl}(1243)g^{\mu\sigma}k_j^\nu k_l^\lambda \\
& + \sum_{i,m} B_{42}^{im}(1243)g^{\nu\lambda}k_i^\mu k_m^\sigma + \sum_{i,l} B_{52}^{il}(1243)g^{\nu\sigma}k_i^\mu k_l^\lambda \\
& + \sum_{i,j} B_{62}^{ij}(1243)g^{\lambda\sigma}k_i^\mu k_j^\nu + C_{12}(1243)g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} \\
& + C_{22}(1243)g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + C_{32}(1243)g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}, \tag{3.112b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{\mu\lambda\nu\sigma}(1324) & = \sum_{i,j,l,m} A_3^{ijlm}(1324)k_i^\mu k_j^\nu k_l^\lambda k_m^\sigma + \sum_{l,m} B_{13}^{lm}(1324)g^{\mu\nu}k_l^\lambda k_m^\sigma \\
& + \sum_{j,m} B_{23}^{jm}(1324)g^{\mu\lambda}k_j^\nu k_m^\sigma + \sum_{j,l} B_{33}^{jl}(1324)g^{\mu\sigma}k_j^\nu k_l^\lambda \\
& + \sum_{i,m} B_{43}^{im}(1324)g^{\nu\lambda}k_i^\mu k_m^\sigma + \sum_{i,l} B_{53}^{il}(1324)g^{\nu\sigma}k_i^\mu k_l^\lambda \\
& + \sum_{i,j} B_{63}^{ij}(1324)g^{\lambda\sigma}k_i^\mu k_j^\nu + C_{13}(1324)g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} \\
& + C_{23}(1324)g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + C_{33}(1324)g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}, \tag{3.112c}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
i & = 2, 3, 4, & l & = 1, 2, 4, \\
j & = 1, 3, 4, & m & = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{3.113}$$

De (3.79) e utilizando (3.112a)-(3.112c) temos

$$\begin{aligned}
G^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) & = \sum_{i,j,l,m} A^{ijlm}(1234)k_i^\mu k_j^\nu k_l^\lambda k_m^\sigma + \sum_{l,m} B_1^{lm}(1234)g^{\mu\nu}k_l^\lambda k_m^\sigma \\
& + \sum_{j,m} B_2^{jm}(1234)g^{\mu\lambda}k_j^\nu k_m^\sigma + \sum_{j,l} B_3^{jl}(1234)g^{\mu\sigma}k_j^\nu k_l^\lambda \\
& + \sum_{i,m} B_4^{im}(1234)g^{\nu\lambda}k_i^\mu k_m^\sigma + \sum_{i,l} B_5^{il}(1234)g^{\nu\sigma}k_i^\mu k_l^\lambda \\
& + \sum_{i,j} B_6^{ij}(1234)g^{\lambda\sigma}k_i^\mu k_j^\nu + C_1(1234)g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} \\
& + C_2(1234)g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + C_3(1234)g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}, \tag{3.114}
\end{aligned}$$

onde i, j, l, m são dados por (3.113).

Desta forma, precisamos determinar 81 coeficientes A , 54 coeficientes B e 3 coeficientes C . Entretanto, pelo fato de $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ ser

invariante de *gauge* e completamente simétrico por permutação dos pares $(\mu, k_1), (\nu, k_2), (\lambda, k_3)$ e (σ, k_4) , obteremos várias relações entre os seus coeficientes, de modo que $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ será expresso em termos de 5 coeficientes A .

Vamos mostrar inicialmente que os coeficientes B e C são unicamente determinados pelos coeficientes A . Para isso, utilizaremos o fato de que, quando os coeficientes A são nulos, também o serão os coeficientes B e C . Com efeito, seja

$$\begin{aligned}
G^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) &= \sum_{l,m} B_1^{lm}(1234)g^{\mu\nu}k_l^\lambda k_m^\sigma + \sum_{j,m} B_2^{jm}(1234)g^{\mu\lambda}k_j^\nu k_m^\sigma \\
&+ \sum_{j,l} B_3^{jl}(1234)g^{\mu\sigma}k_j^\nu k_l^\lambda + \sum_{i,m} B_4^{im}(1234)g^{\nu\lambda}k_i^\mu k_m^\sigma \\
&+ \sum_{i,l} B_5^{il}(1234)g^{\nu\sigma}k_i^\mu k_l^\lambda + \sum_{i,j} B_6^{ij}(1234)g^{\lambda\sigma}k_i^\mu k_j^\nu \\
&+ C_1(1234)g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + C_2(1234)g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} \\
&+ C_3(1234)g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}. \tag{3.115}
\end{aligned}$$

Sendo invariante de *gauge*, (3.115) deve satisfazer as relações (3.100). Cada uma destas relações, quando aplicadas em (3.115), fornece, após abrirmos os somatórios e agruparmos os termos semelhantes, um somatório de 49 termos cujos coeficientes são combinações de coeficientes B e C . Estes últimos devem ser nulos para que o somatório seja igual a zero.

Assim, ficamos com um sistema linear homogêneo de 196 equações (49 equações para cada condição (3.100)) por 57 variáveis (54 coeficientes B e 3 coeficientes C), cuja solução é a trivial, ou seja, todos os coeficientes B e C são nulos.

Vamos agora mostrar que os coeficientes B e C são univocamente determinados pelos coeficientes A . Sejam $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ e $G'^{\mu\nu\lambda\sigma}$ tensores de polarização do vácuo de quarta ordem que diferem somente pelos coeficientes B e C , ou seja

$$\begin{aligned}
G^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) &= \sum_{i,j,l,m} A^{ijklm}(1234)k_i^\mu k_j^\nu k_l^\lambda k_m^\sigma + \sum_{l,m} B_1^{lm}(1234)g^{\mu\nu}k_l^\lambda k_m^\sigma \\
&+ \sum_{j,m} B_2^{jm}(1234)g^{\mu\lambda}k_j^\nu k_m^\sigma + \sum_{j,l} B_3^{jl}(1234)g^{\mu\sigma}k_j^\nu k_l^\lambda \\
&+ \sum_{i,m} B_4^{im}(1234)g^{\nu\lambda}k_i^\mu k_m^\sigma + \sum_{i,l} B_5^{il}(1234)g^{\nu\sigma}k_i^\mu k_l^\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j} B_6^{ij}(1234)g^{\lambda\sigma}k_i^\mu k_j^\nu + C_1(1234)g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} \\
& + C_2(1234)g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + C_3(1234)g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}, \tag{3.116}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
G^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) & = \sum_{i,j,l,m} A^{ijklm}(1234)k_i^\mu k_j^\nu k_l^\lambda k_m^\sigma + \sum_{l,m} B_1^{lm}(1234)g^{\mu\nu}k_l^\lambda k_m^\sigma \\
& + \sum_{j,m} B_2^{jm}(1234)g^{\mu\lambda}k_j^\nu k_m^\sigma + \sum_{j,l} B_3^{jl}(1234)g^{\mu\sigma}k_j^\nu k_l^\lambda \\
& + \sum_{i,m} B_4^{im}(1234)g^{\nu\lambda}k_i^\mu k_m^\sigma + \sum_{i,l} B_5^{il}(1234)g^{\nu\sigma}k_i^\mu k_l^\lambda \\
& + \sum_{i,j} B_6^{ij}(1234)g^{\lambda\sigma}k_i^\mu k_j^\nu + C'_1(1234)g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} \\
& + C'_2(1234)g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + C'_3(1234)g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}. \tag{3.117}
\end{aligned}$$

Subtraindo (3.117) de (3.116) ficamos com

$$\begin{aligned}
& G^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) - G'^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) \\
& = \sum_{l,m} [B_1^{lm}(1234) - B'_1{}^{lm}(1234)]g^{\mu\nu}k_l^\lambda k_m^\sigma \\
& + \sum_{j,m} [B_2^{jm}(1234) - B'_2{}^{jm}(1234)]g^{\mu\lambda}k_j^\nu k_m^\sigma \\
& + \sum_{j,l} [B_3^{jl}(1234) - B'_3{}^{jl}(1234)]g^{\mu\sigma}k_j^\nu k_l^\lambda \\
& + \sum_{i,m} [B_4^{im}(1234) - B'_4{}^{im}(1234)]g^{\nu\lambda}k_i^\mu k_m^\sigma \\
& + \sum_{i,l} [B_5^{il}(1234) - B'_5{}^{il}(1234)]g^{\nu\sigma}k_i^\mu k_l^\lambda \\
& + \sum_{i,j} [B_6^{ij}(1234) - B'_6{}^{ij}(1234)]g^{\lambda\sigma}k_i^\mu k_j^\nu \\
& + [C_1(1234) - C'_1(1234)]g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + [C_2(1234) - C'_2(1234)]g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} \\
& + [C_3(1234) - C'_3(1234)]g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}. \tag{3.118}
\end{aligned}$$

Agora, como $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ e $G'^{\mu\nu\lambda\sigma}$ satisfazem as relações (3.100), o ten-

so $G^{\mu\nu\lambda\sigma} - G'^{\mu\nu\lambda\sigma}$ deve satisfazê-las também³ e, como já mostramos, isso implica que os termos entre colchetes em (3.118) são nulos. Logo, $G^{\mu\nu\lambda\sigma} = G'^{\mu\nu\lambda\sigma}$.

Como já comentado anteriormente, precisamos determinar 81 coeficientes A , 54 coeficientes B e 3 coeficientes C . Explorando a simetria de $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ por permutação dos pares (μ, k_1) , (ν, k_2) , (λ, k_3) e (σ, k_4) , podemos escrevê-lo em termos de 6 A , 4 B e 1 C utilizando as seguintes relações:

$$\begin{aligned} A^{2111}(1234) &= A^{4441}(2341) = A^{3343}(3412) = A^{2322}(4123) \\ &= A^{4111}(1432) = A^{2122}(2143) = A^{3323}(3214) = A^{4443}(4321) \quad (3.119a) \\ &= A^{3111}(1324) = A^{3313}(2413) = A^{2422}(3142) = A^{4442}(4231). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{2121}(1234) &= A^{4141}(2341) = A^{4343}(3412) = A^{2323}(4123) \\ &= A^{2112}(1243) = A^{3113}(2314) = A^{3443}(3421) = A^{2442}(4132) \quad (3.119b) \\ &= A^{4422}(3142) = A^{3322}(4213) = A^{3311}(2413) = A^{4411}(1342). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{2123}(1234) &= A^{2142}(1243) = A^{3312}(1324) = A^{4421}(1342) \\ &= A^{3413}(1423) = A^{4341}(1432) = A^{2113}(2134) = A^{2141}(2143) \\ &= A^{3112}(2314) = A^{4121}(2341) = A^{3411}(2413) = A^{4311}(2431) \quad (3.119c) \\ &= A^{3321}(3124) = A^{4412}(3142) = A^{2321}(3214) = A^{2412}(3241) \\ &= A^{4143}(3412) = A^{3143}(3421) = A^{4323}(4123) = A^{3442}(4132) \\ &= A^{4322}(4213) = A^{3422}(4231) = A^{2443}(4312) = A^{2343}(4321). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{2311}(1234) &= A^{2411}(1243) = A^{3121}(1324) = A^{4112}(1342) \\ &= A^{3141}(1423) = A^{4113}(1432) = A^{3122}(2134) = A^{4122}(2143) \\ &= A^{2313}(2314) = A^{2441}(2341) = A^{4313}(2413) = A^{3441}(2431) \quad (3.119d) \\ &= A^{2312}(3124) = A^{2421}(3142) = A^{3123}(3214) = A^{4142}(3241) \\ &= A^{3341}(3412) = A^{4413}(3421) = A^{2342}(4123) = A^{2423}(4132) \\ &= A^{3423}(4213) = A^{4342}(4231) = A^{3342}(4312) = A^{4423}(4321). \end{aligned}$$

³De fato, $k_1^\mu [G_{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) - G'_{\mu\nu\lambda\sigma}(1234)] = k_1^\mu G_{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) - k_1^\mu G'_{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) = 0$. Mostra-se que $G_{\mu\nu\lambda\sigma} - G'_{\mu\nu\lambda\sigma}$ satisfaz as outras relações de maneira idêntica.

$$A^{2143}(1234) = A^{4321}(2341) = A^{3412}(1324). \quad (3.119e)$$

$$\begin{aligned} A^{2341}(1234) &= A^{4123}(4321) = A^{2413}(1243) = A^{4312}(3124) \\ &= A^{3142}(4312) = A^{3421}(2431). \end{aligned} \quad (3.119f)$$

$$\begin{aligned} B_1^{11}(1234) &= B_1^{22}(2134) = B_2^{11}(1324) = B_2^{33}(2314) \\ &= B_4^{22}(3124) = B_4^{33}(3214) = B_5^{44}(3241) = B_6^{33}(4312) \\ &= B_3^{11}(1342) = B_3^{44}(2341) = B_5^{22}(3142) = B_6^{44}(4321). \end{aligned} \quad (3.120a)$$

$$\begin{aligned} B_1^{12}(1234) &= B_1^{21}(1243) = B_2^{31}(1423) = B_2^{13}(1324) \\ &= B_4^{32}(4123) = B_4^{23}(3124) = B_3^{41}(1432) = B_3^{14}(2431) \\ &= B_5^{42}(3241) = B_5^{24}(3142) = B_6^{43}(4312) = B_6^{34}(4321). \end{aligned} \quad (3.120b)$$

$$\begin{aligned} B_1^{13}(1234) &= B_1^{41}(1243) = B_1^{42}(2143) = B_1^{23}(2134) \\ &= B_2^{41}(1423) = B_2^{12}(1324) = B_2^{32}(2314) = B_2^{43}(2413) \\ &= B_4^{21}(3124) = B_4^{31}(3214) = B_4^{42}(4123) = B_4^{43}(4213) \\ &= B_3^{31}(1432) = B_3^{12}(1342) = B_3^{42}(2341) = B_3^{34}(2431) \\ &= B_5^{21}(3142) = B_5^{41}(3241) = B_5^{32}(4132) = B_5^{34}(4231) \\ &= B_6^{31}(3412) = B_6^{41}(3421) = B_6^{23}(4312) = B_6^{24}(4321). \end{aligned} \quad (3.120c)$$

$$\begin{aligned} B_1^{43}(1234) &= B_2^{42}(1324) = B_4^{41}(3124) = B_3^{32}(1342) \\ &= B_5^{31}(3241) = B_6^{21}(3412). \end{aligned} \quad (3.120d)$$

$$C_1(1234) = C_2(1324) = C_3(1342). \quad (3.121)$$

Além destas igualdades com os argumentos trocados (por exemplo, como $A^{2111}(1234) = A^{4441}(2341)$, segue que $A^{2111}(2341) = A^{4441}(1234)$), também seguem simetrias envolvendo alguns coeficientes A , B e C :

$$\begin{aligned} A^{2143}(1234) &= A^{2143}(2134) = A^{2143}(1243) = A^{2143}(2143) \\ &= A^{2143}(3412) = A^{2143}(3421) = A^{2143}(4312) = A^{2143}(4321). \end{aligned} \quad (3.122a)$$

$$A^{2341}(1234) = A^{2341}(2341) = A^{2341}(3412) = A^{2341}(4123). \quad (3.122b)$$

$$A^{2111}(1234) = A^{2111}(1243). \quad (3.122c)$$

$$A^{2121}(1234) = A^{2121}(2143). \quad (3.122d)$$

$$B_1^{11}(1234) = B_1^{11}(1243). \quad (3.122e)$$

$$B_1^{12}(1234) = B_1^{12}(2143). \quad (3.122f)$$

$$B_1^{43}(1234) = B_1^{43}(1243) = B_1^{43}(2134) = B_1^{43}(2143). \quad (3.122g)$$

$$\begin{aligned} C_1(1234) &= C_1(2134) = C_1(1243) = C_1(2143) = C_1(3412) \\ &= C_1(3421) = C_1(4312) = C_1(4321). \end{aligned} \quad (3.122h)$$

Utilizando (3.119)-(3.122) podemos escrever $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$ sob a forma

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) &= \sum_{24 \text{ perm}} \left\{ \frac{1}{8} A^{2143}(1234) k_2^\mu k_1^\nu k_4^\lambda k_3^\sigma + \frac{1}{4} A^{2341}(1234) k_2^\mu k_3^\nu k_4^\lambda k_1^\sigma \right. \\ &+ \frac{1}{2} A^{2111}(1234) k_2^\mu k_1^\nu k_1^\lambda k_1^\sigma + \frac{1}{2} A^{2121}(1234) k_2^\mu k_1^\nu k_2^\lambda k_1^\sigma \\ &+ A^{2311}(1234) k_2^\mu k_3^\nu k_1^\lambda k_1^\sigma + A^{2123}(1234) k_2^\mu k_1^\nu k_2^\lambda k_3^\sigma \\ &+ \frac{1}{2} B_1^{11}(1234) g^{\mu\nu} k_1^\lambda k_1^\sigma + \frac{1}{2} B_1^{12}(1234) g^{\mu\nu} k_1^\lambda k_2^\sigma \\ &+ B_1^{13}(1234) g^{\mu\nu} k_1^\lambda k_3^\sigma + \frac{1}{4} B_1^{43}(1234) g^{\mu\nu} k_4^\lambda k_3^\sigma \\ &\left. + \frac{1}{8} C_1(1234) g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \right\}, \end{aligned} \quad (3.123)$$

onde a soma sobre as permutações se refere às permutações simultâneas dos índices tensoriais e dos respectivos momentos.

Como exemplo, vamos mostrar como os coeficientes C podem ser escritos em termos de permutações de C_1 . De (3.121) temos que

$$\begin{aligned} C_1(1234) g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + C_2(1234) g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + C_3(1234) g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} = \\ C_1(1234) g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + C_1(1324) g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + C_3(1342) g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Usando (3.122h), podemos escrever

$$\begin{aligned} C_1(1234) g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} &= \frac{1}{8} [C_1(1234) + C_1(2134) + C_1(1243) + C_1(2143) \\ &+ C_1(3412) + C_1(3421) + C_1(4312) + C_1(4321)] g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{8 \text{ perm}} C_1(1234) g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma}. \end{aligned} \quad (3.125a)$$

$$\begin{aligned}
C_1(1324)g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} &= \frac{1}{8} [C_1(1324) + C_1(2314) + C_1(1423) + C_1(2413) \\
&\quad + C_1(3142) + C_1(3241) + C_1(4132) + C_1(4231)]g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} \\
&= \frac{1}{8} \sum_{8 \text{ perm}} C_1(1324)g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}. \tag{3.125b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(1342)g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} &= \frac{1}{8} [C_1(1342) + C_1(2341) + C_1(1432) + C_1(2431) \\
&\quad + C_1(3124) + C_1(3214) + C_1(4123) + C_1(4213)]g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} \\
&= \frac{1}{8} \sum_{8 \text{ perm}} C_1(1342)g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}. \tag{3.125c}
\end{aligned}$$

Nas expressões acima, cada somatório é feito sobre as 8 permutações que reproduzem os termos entre colchetes. Assim,

$$\begin{aligned}
&C_1(1234)g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + C_2(1234)g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + C_3(1234)g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} \\
&= \frac{1}{8} \sum_{8 \text{ perm}} C_1(1234)g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + \frac{1}{8} \sum_{8 \text{ perm}} C_1(1324)g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + \frac{1}{8} \sum_{8 \text{ perm}} C_1(1342)g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} \\
&= \frac{1}{8} \sum_{24 \text{ perm}} C_1(1234)g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}. \tag{3.126}
\end{aligned}$$

Explorando a invariância de *gauge* de $G^{\mu\nu\lambda\sigma}$, podemos obter relações envolvendo os coeficientes A , B e C . Para isto, é suficiente considerarmos a primeira das relações (3.100), o que implica em

$$A^{2311}(1234) = -A^{2311}(1324), \tag{3.127a}$$

$$A^{2341}(1234) = A^{2341}(4321), \tag{3.127b}$$

$$\begin{aligned}
A^{2123}(1234)(k_3 \cdot k_4) + A^{2111}(2143)(k_2 \cdot k_4) \\
+ A^{2121}(1234)(k_1 \cdot k_4) = 0, \tag{3.127c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{2311}(1234)(k_1 \cdot k_4) + A^{2311}(2314)(k_2 \cdot k_4) \\
+ A^{2311}(3124)(k_3 \cdot k_4) = 0, \tag{3.127d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1^{13}(1234) + A^{2123}(2134)(k_1 \cdot k_2) + A^{2311}(3124)(k_2 \cdot k_3) \\
+ A^{2341}(2431)(k_2 \cdot k_4) = 0, \tag{3.127e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1^{43}(1234) + A^{2143}(1234)(k_1 \cdot k_2) + A^{2123}(4312)(k_1 \cdot k_3) \\
+ A^{2123}(3412)(k_1 \cdot k_4) = 0, \tag{3.127f}
\end{aligned}$$

$$B_1^{11}(1234) + A^{2311}(1234)(k_2 \cdot k_3) + A^{2311}(1243)(k_2 \cdot k_4) \\ + A^{2111}(1234)(k_1 \cdot k_2) = 0, \quad (3.127g)$$

$$C_1(1234) + B_1^{13}(1234)(k_1 \cdot k_3) + B_1^{13}(2134)(k_2 \cdot k_3) \\ + B_1^{43}(1234)(k_3 \cdot k_4) = 0, \quad (3.127h)$$

$$B_1^{12}(1234) + A^{2121}(1243)(k_1 \cdot k_2) + A^{2311}(1423)(k_1 \cdot k_4) \\ - A^{2311}(2134)(k_2 \cdot k_3) - A^{2341}(4213)(k_3 \cdot k_4) = 0. \quad (3.127i)$$

Utilizando as relações acima, podemos escrever (3.123) em termos de 5 coeficientes A:

$$G^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) = \sum_{24 \text{ perm}} \left\{ \frac{1}{8} A^{2143}(1234) g_1^{\mu\nu\lambda\sigma} + \frac{1}{8} A^{2341}(1234) g_2^{\mu\nu\lambda\sigma} \right. \\ \left. + \frac{1}{2(k_3 \cdot k_4)} A^{2111}(1234) g_3^{\mu\nu\lambda\sigma} + \frac{1}{2(k_3 \cdot k_4)} A^{2121}(1234) g_4^{\mu\nu\lambda\sigma} \right. \\ \left. + \frac{1}{(k_2 \cdot k_4)} A^{2311}(1234) g_5^{\mu\nu\lambda\sigma} \right\}, \quad (3.128)$$

onde

$$g_1^{\mu\nu\lambda\sigma} = k_2^\mu k_1^\nu k_4^\lambda k_3^\sigma - 2(k_1 \cdot k_2) g^{\mu\nu} k_4^\lambda k_3^\sigma + (k_1 \cdot k_2)(k_3 \cdot k_4) g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma}, \quad (3.129)$$

$$g_2^{\mu\nu\lambda\sigma} = 2k_2^\mu k_3^\nu k_4^\lambda k_1^\sigma + 4(k_1 \cdot k_4) g^{\nu\lambda} k_2^\mu k_3^\lambda - 8(k_1 \cdot k_4) g^{\lambda\sigma} k_2^\mu k_3^\nu \\ + 2(k_1 \cdot k_4)(k_2 \cdot k_3) g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma}, \quad (3.130)$$

$$g_3^{\mu\nu\lambda\sigma} = (k_3 \cdot k_4) k_2^\mu k_1^\nu k_1^\lambda k_1^\sigma - (k_1 \cdot k_2)(k_3 \cdot k_4) g^{\mu\nu} k_1^\lambda k_1^\sigma \\ + 2(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot k_4) g^{\mu\nu} k_1^\lambda k_3^\sigma - (k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot k_3)(k_1 \cdot k_4) g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \\ - 2(k_1 \cdot k_4) k_2^\mu k_1^\nu k_1^\lambda k_3^\sigma + (k_1 \cdot k_3)(k_1 \cdot k_4) g^{\lambda\sigma} k_1^\nu k_3^\mu, \quad (3.131)$$

$$g_4^{\mu\nu\lambda\sigma} = (k_3 \cdot k_4) k_2^\mu k_1^\nu k_2^\lambda k_1^\sigma - 2(k_1 \cdot k_4) k_2^\mu k_1^\nu k_2^\lambda k_3^\sigma \\ - (k_1 \cdot k_2)(k_3 \cdot k_4) g^{\mu\nu} k_1^\lambda k_2^\sigma + 2(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot k_4) g^{\mu\nu} k_2^\lambda k_3^\sigma \\ - (k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot k_4)(k_1 \cdot k_3) g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + (k_1 \cdot k_4)(k_2 \cdot k_3) g^{\lambda\sigma} k_1^\nu k_2^\mu, \quad (3.132)$$

$$g_5^{\mu\nu\lambda\sigma} = (k_1 \cdot k_4) \left[k_3^\mu k_1^\nu k_2^\lambda k_2^\sigma - k_2^\mu k_3^\nu k_1^\lambda k_2^\sigma - (k_1 \cdot k_3) g^{\mu\nu} k_2^\lambda k_2^\sigma \right. \\ \left. + (k_1 \cdot k_3) g^{\nu\lambda} k_2^\mu k_2^\sigma + (k_2 \cdot k_3) g^{\mu\nu} k_1^\lambda k_2^\sigma - (k_1 \cdot k_2) g^{\nu\lambda} k_3^\mu k_2^\sigma \right. \\ \left. - (k_2 \cdot k_3) g^{\mu\lambda} k_1^\nu k_2^\sigma + (k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot k_4) g^{\mu\lambda} k_3^\nu k_2^\sigma \right]. \quad (3.133)$$

O tensor do campo eletromagnético $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$, adquire no espaço dos momentos a forma

$$f^{\mu\nu}(k) = k^\mu A^\nu(k) - k^\nu A^\mu(k). \quad (3.134)$$

Utilizando (3.129)-(3.133) podemos mostrar explicitamente, as seguintes relações:

$$f_{\alpha\beta}(k_1) f^{\beta\alpha}(k_2) f_{\gamma\delta}(k_3) f^{\delta\gamma}(k_4) = 4g_1^{\mu\nu\lambda\sigma} A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\lambda(k_3) A_\sigma(k_4), \quad (3.135a)$$

$$f_{\alpha\beta}(k_1) f^{\beta\gamma}(k_2) f_{\gamma\delta}(k_3) f^{\delta\alpha}(k_4) = g_2^{\mu\nu\lambda\sigma} A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\lambda(k_3) A_\sigma(k_4), \quad (3.135b)$$

$$f_{\alpha\beta}(k_1) f^{\beta\alpha}(k_2) k_1^\gamma f_{\gamma\delta}(k_3) f^{\delta\epsilon}(k_4) (k_1)_\epsilon = -2g_3^{\mu\nu\lambda\sigma} A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\lambda(k_3) A_\sigma(k_4), \quad (3.135c)$$

$$f_{\alpha\beta}(k_1) f^{\beta\alpha}(k_2) k_2^\gamma f_{\gamma\delta}(k_3) f^{\delta\epsilon}(k_4) (k_1)_\epsilon = -2g_4^{\mu\nu\lambda\sigma} A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\lambda(k_3) A_\sigma(k_4), \quad (3.135d)$$

$$k_2^\alpha f_{\alpha\beta}(k_4) f^{\beta\gamma}(k_1) [f_{\gamma\delta}(k_2) f^{\delta\epsilon}(k_3) - f_{\gamma\delta}(k_3) f^{\delta\epsilon}(k_2)] (k_1)_\epsilon = 2g_5^{\mu\nu\lambda\sigma} A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\lambda(k_3) A_\sigma(k_4). \quad (3.135e)$$

Precisamos determinar os cinco coeficientes A que aparecem em (3.128). De (3.79) e (3.112a)-(3.112c), vemos que os coeficientes $A^{ijklm}(1234)$ são da forma $A^{ijklm}(1234) = A_1^{ijklm}(1234) + A_2^{ijklm}(1243) + A_3^{ijklm}(1324)$. Pelo fato dos tensores $T^{\mu\lambda\nu\sigma}(1324)$ e $T^{\mu\nu\sigma\lambda}(1243)$ serem obtidos de $T^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234)$ pelas trocas $(\nu, k_2) \leftrightarrow (\lambda, k_3)$ e $(\lambda, k_3) \leftrightarrow (\sigma, k_4)$, podemos mostrar que

$$A^{2111}(1234) = A_1^{2111}(1234) + A_1^{2111}(1243) + A_1^{3111}(1324), \quad (3.136a)$$

$$A^{2121}(1234) = A_1^{2121}(1234) + A_1^{2112}(1243) + A_1^{3311}(1324), \quad (3.136b)$$

$$A^{2311}(1234) = A_1^{2311}(1234) + A_1^{2411}(1243) + A_1^{3121}(1324), \quad (3.136c)$$

$$A^{2143}(1234) = A_1^{2143}(1234) + A_1^{2143}(1243) + A_1^{3412}(1324), \quad (3.136d)$$

$$A^{2341}(1234) = A_1^{2341}(1234) + A_1^{2413}(1243) + A_1^{2413}(4132). \quad (3.136e)$$

Analisando (3.85), (3.86) e (3.112a), para obtermos os coeficien-

tes A_1^{ijlm} podemos desprezar os termos \not{p} e m em (3.86), ficando com

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) &\sim 3! \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \int \frac{X'^{\mu\nu\lambda\sigma}}{(p^2 + a^2)^4} d^4p \\
&= 3! \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz X'^{\mu\nu\lambda\sigma} \int \frac{1}{(p^2 + a^2)^4} d^4p \\
&= 3! \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz X'^{\mu\nu\lambda\sigma} \frac{i\pi^2}{a^4} \frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} \\
&= \frac{i\pi^2}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz D(1234) X'^{\mu\nu\lambda\sigma}, \quad (3.137)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
X'^{\mu\nu\lambda\sigma} &= \int d^4p \operatorname{Tr} \left[\gamma^\mu \not{K}^1 \gamma^\nu \not{K}^2 \gamma^\lambda \not{K}^3 \gamma^\sigma \not{K}^4 \right] \\
&= \int d^4p \operatorname{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta \right] \Lambda_\alpha^1 \Lambda_\beta^2 \Lambda_\gamma^3 \Lambda_\delta^4, \quad (3.138a)
\end{aligned}$$

$$\Lambda^1 \equiv K = k_1(1-x) - k_2(x-z) - k_3(x-y), \quad (3.138b)$$

$$\Lambda^2 \equiv K + k_2 = k_1(1-x) + k_2(1-x+z) - k_3(x-y), \quad (3.138c)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^3 &\equiv K + k_2 + k_3 \\
&= k_1(1-x) + k_2(1-x+z) - k_3(1-x+y), \quad (3.138d)
\end{aligned}$$

$$\Lambda^4 \equiv K - k_1 = -k_1 - k_2(x-z) - k_3(x-y), \quad (3.138e)$$

$$\begin{aligned}
D(1234) &= \frac{m^4}{a^4} = \left\{ -1 + \frac{i\varepsilon}{m^2} + \frac{1}{m^2} \left[x(1-x)(k_1)^2 + (x-z) \right. \right. \\
&\times (1-x+z)(k_2)^2 + (x-y)(1-x+y)(k_3)^2 + 2(1-x)(x-y)(k_1 \cdot k_3) \\
&\left. \left. + 2(1-x)(x-z)(k_1 \cdot k_2) + 2(x-y)(1-x+z)(k_2 \cdot k_3) \right] \right\}^{-2}. \quad (3.138f)
\end{aligned}$$

Os termos do tensor $X'^{\mu\nu\lambda\sigma}$ que produzem coeficientes A_1^{ijlm} são

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\gamma \gamma^\sigma \gamma^\delta \right] \Lambda_\alpha^1 \Lambda_\beta^2 \Lambda_\gamma^3 \Lambda_\delta^4 &\sim 4 \left\{ g^{\mu\alpha} \left[g^{\nu\beta} (g^{\lambda\gamma} g^{\sigma\delta} + g^{\lambda\delta} g^{\gamma\sigma}) \right. \right. \\
&\left. \left. + g^{\nu\gamma} (g^{\beta\lambda} g^{\sigma\delta} - g^{\beta\sigma} g^{\lambda\delta}) + g^{\nu\delta} (g^{\beta\lambda} g^{\gamma\sigma} + g^{\beta\sigma} g^{\lambda\gamma}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g^{\mu\beta} [g^{\alpha\nu} (g^{\lambda\gamma} g^{\sigma\delta} + g^{\lambda\delta} g^{\gamma\sigma}) - g^{\alpha\lambda} (g^{\nu\gamma} g^{\sigma\delta} + g^{\nu\delta} g^{\gamma\sigma}) \\
& - g^{\alpha\sigma} (g^{\nu\delta} g^{\lambda\gamma} - g^{\nu\gamma} g^{\lambda\sigma})] + g^{\mu\gamma} [g^{\alpha\nu} (g^{\beta\lambda} g^{\sigma\delta} - g^{\beta\sigma} g^{\lambda\delta}) \\
& + g^{\alpha\lambda} (g^{\nu\beta} g^{\sigma\delta} + g^{\nu\delta} g^{\beta\sigma}) - g^{\alpha\sigma} (g^{\nu\beta} g^{\lambda\delta} + g^{\nu\delta} g^{\beta\sigma})] \\
& + g^{\mu\delta} [g^{\alpha\nu} (g^{\beta\lambda} g^{\gamma\sigma} + g^{\beta\sigma} g^{\lambda\gamma}) + g^{\alpha\lambda} (g^{\nu\beta} g^{\gamma\sigma} - g^{\nu\gamma} g^{\beta\sigma}) \\
& + g^{\alpha\sigma} (g^{\nu\beta} g^{\lambda\gamma} + g^{\nu\gamma} g^{\beta\lambda})] \} \Lambda_\alpha^1 \Lambda_\beta^2 \Lambda_\gamma^3 \Lambda_\delta^4 \\
& = 4 \left\{ [(\Lambda^1)^\mu (\Lambda^2)^\nu + (\Lambda^2)^\mu (\Lambda^1)^\nu] [(\Lambda^3)^\lambda (\Lambda^4)^\sigma + (\Lambda^4)^\lambda (\Lambda^3)^\sigma] \right. \\
& + [(\Lambda^1)^\mu (\Lambda^3)^\nu + (\Lambda^3)^\mu (\Lambda^1)^\nu] [(\Lambda^2)^\lambda (\Lambda^4)^\sigma - (\Lambda^4)^\lambda (\Lambda^2)^\sigma] \\
& + [(\Lambda^1)^\mu (\Lambda^4)^\nu + (\Lambda^4)^\mu (\Lambda^1)^\nu] [(\Lambda^2)^\lambda (\Lambda^3)^\sigma + (\Lambda^3)^\lambda (\Lambda^2)^\sigma] \\
& + [(\Lambda^2)^\mu (\Lambda^3)^\nu - (\Lambda^3)^\mu (\Lambda^2)^\nu] [(\Lambda^4)^\lambda (\Lambda^1)^\sigma - (\Lambda^1)^\lambda (\Lambda^4)^\sigma] \\
& + [(\Lambda^4)^\mu (\Lambda^2)^\nu - (\Lambda^2)^\mu (\Lambda^4)^\nu] [(\Lambda^1)^\lambda (\Lambda^3)^\sigma + (\Lambda^3)^\lambda (\Lambda^1)^\sigma] \\
& \left. + [(\Lambda^3)^\mu (\Lambda^4)^\nu - (\Lambda^4)^\mu (\Lambda^3)^\nu] [(\Lambda^1)^\lambda (\Lambda^2)^\sigma - (\Lambda^2)^\lambda (\Lambda^1)^\sigma] \right\}. \quad (3.139)
\end{aligned}$$

Assim, abrindo os produtos acima, usando (3.137) e comparando com (3.112a), obtemos

$$A_1^{2111} = \frac{8i\pi^2}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz (1-2x)(2y-1)(z-1)z D(1234), \quad (3.140a)$$

$$A_1^{3111} = \frac{8i\pi^2}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz (1-2x)(y-1)y(2z-1) D(1234), \quad (3.140b)$$

$$\begin{aligned}
A_1^{2121} &= \frac{8i\pi^2}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz [(1-2x)(2y-2z-1)(z-1)z \\
&\times D(1234)], \quad (3.140c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1^{2112} &= \frac{8i\pi^2}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz [(1-2y)(2x-2z-1)(z-1)z \\
&\times D(1234)], \quad (3.140d)
\end{aligned}$$

$$A_1^{3311} = \frac{8i\pi^2}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz [(2x-1)(y-1)(2y-2z-1)y$$

$$\times D(1234)], \quad (3.140e)$$

$$\begin{aligned} A_1^{2311} &= -A_1^{3121} \\ &= \frac{8i\pi^2}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \{ [z^2 + y^2(2z - 1) - y(z + 2z^2 - 1)] \\ &\times (2x - 1)D(1234) \}, \end{aligned} \quad (3.140f)$$

$$\begin{aligned} A_1^{2411} &= \frac{8i\pi^2}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \{ [z^2 + x^2(2z - 1) - x(2z^2 + z - 1)] \\ &\times (2y - 1)D(1234) \}, \end{aligned} \quad (3.140g)$$

$$\begin{aligned} A_1^{2413} &= \frac{8i\pi^2}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \{ [-z^2 + x^2(-1 + 2y)(-1 + 2z) \\ &- x(-1 + 2y)(1 + y + z)(-1 + 2z) + y^2(-1 + 4z^2)] \\ &\times D(1234) \}, \end{aligned} \quad (3.140h)$$

$$\begin{aligned} A_1^{2341} &= \frac{-8i\pi^2}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \{ [-x + x^2 + xy - 2x^2y - y^2 + 2xy^2 \\ &+ (-1 + 2x)(-1 + 2x - 2y)yz + (-1 + 2x)(1 - 2x + 2y)z^2] \\ &\times D(1234) \}, \end{aligned} \quad (3.140i)$$

$$\begin{aligned} A_1^{2143} &= \frac{32i\pi^2}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \{ (x - y - 1)(x - y)(z - 1)z \\ &\times D(1234) \}, \end{aligned} \quad (3.140j)$$

$$\begin{aligned} A_1^{3412} &= \frac{32i\pi^2}{m^4} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \{ (y - 1)(x - z - 1)(x - z)y \\ &\times D(1234) \}, \end{aligned} \quad (3.140k)$$

$$(3.140l)$$

No limite em que os momentos k_1, k_2, k_3 e k_4 são muito menores que m , a função $D(1234)$ pode ser aproximada à unidade. Neste limite,

as integrais em (3.140) são facilmente calculadas e levam a

$$A^{2111} = A^{2121} = A^{2311} = 0, \quad (3.141a)$$

$$A^{2143} = \frac{4}{9} \frac{i\pi^2}{m^4}, \quad (3.141b)$$

$$A^{2341} = -\frac{14}{45} \frac{i\pi^2}{m^4}, \quad (3.141c)$$

que, substituídas em (3.128), fornecem

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu\lambda\sigma}(1234) &= \frac{4}{9} \frac{i\pi^2}{m^4} \left[g^{\mu\nu\lambda\sigma(1)}(1234) + g^{\mu\lambda\nu\sigma(1)}(1324) + g^{\mu\sigma\nu\lambda(1)}(1423) \right] \\ &- \frac{14}{45} \frac{i\pi^2}{m^4} \left[g^{\mu\nu\lambda\sigma(2)}(1234) + g^{\mu\lambda\nu\sigma(2)}(1324) + g^{\mu\sigma\nu\lambda(2)}(1423) \right]. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Assim, de (3.80), (3.129) e (3.130), o termo da matriz S que descreve o espalhamento fóton-fóton é

$$\begin{aligned} S^{(4)} &= -\frac{e^4}{4(4\pi)^{20}} \int \prod_{j=1}^4 d^4 k_j \int d^4 x e^{-i(k_1+k_2+k_3+k_4)x} \\ &\times \left\{ \frac{i\pi^2}{9m^4} \left[f_{\alpha\beta}(1) f^{\beta\alpha}(2) f_{\gamma\delta}(3) f^{\delta\gamma}(4) + f_{\alpha\beta}(1) f^{\beta\alpha}(3) f_{\gamma\delta}(2) f^{\delta\gamma}(4) \right. \right. \\ &+ f_{\alpha\beta}(1) f^{\beta\alpha}(4) f_{\gamma\delta}(2) f^{\delta\gamma}(3) \left. \right] - \frac{14i\pi^2}{45m^4} \left[f_{\alpha\beta}(1) f^{\beta\gamma}(2) f_{\gamma\delta}(3) f^{\delta\alpha}(4) \right. \\ &+ f_{\alpha\beta}(1) f^{\beta\gamma}(3) f_{\gamma\delta}(2) f^{\delta\alpha}(4) + f_{\alpha\beta}(1) f^{\beta\gamma}(4) f_{\gamma\delta}(2) f^{\delta\alpha}(3) \left. \right] \left. \right\} \\ &= -\frac{i e^4 \pi^2}{12(2\pi)^4 m^4} \int d^4 x \left[\frac{1}{3} F_{\alpha\beta}(x) F^{\beta\alpha}(x) F_{\gamma\delta}(x) f^{\delta\gamma}(x) \right. \\ &- \left. \frac{14}{15} F_{\alpha\beta}(x) F^{\beta\gamma}(x) F_{\gamma\delta}(x) F^{\delta\alpha}(x) \right] \\ &= -\frac{i\alpha^2}{180m^4} \int d^4 x \left[5 F_{\alpha\beta}(x) F^{\beta\alpha}(x) F_{\gamma\delta}(x) F^{\delta\gamma}(x) \right. \\ &- \left. 14 F_{\alpha\beta}(x) F^{\beta\gamma}(x) F_{\gamma\delta}(x) F^{\delta\alpha}(x) \right] \\ &= \frac{2i\alpha^2}{45m^4} \int d^4 x \left[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Poderíamos ter calculado outros processos, como o espalhamento Delbrück ou campo externo por campo externo. O resultado seria

idêntico ao obtido na expressão acima, uma vez que o cálculo envolve apenas propagadores fermiônicos.

Definindo,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{2\alpha^2}{45m^4} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2], \quad (3.144)$$

o termo S_4 pode ser escrito como

$$S^4 = i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}. \quad (3.145)$$

A expressão (3.144) pode ser incorporada ao setor de Maxwell da lagrangiana original. Se considerarmos sua contribuição desde a primeira iteração da série perturbativa para o operador evolução na *representação de Heisenberg*, envolvendo o hamiltoniano modificado

$$H = H_{\text{QED}} + H_{\text{eff}}, \quad (3.146)$$

onde H_{eff} corresponde à densidade lagrangiana (3.144). Na representação de interação, os estados evoluiriam de acordo com o novo hamiltoniano

$$H^I = H_{\text{QED}}^I + H_{\text{eff}}^I, \quad (3.147)$$

o qual dá origem a diagramas de autointeração descrevendo, por exemplo, o espalhamento de fótons.

Veremos na próxima seção que \mathcal{L}_{eff} é a densidade lagrangiana efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg, que incorpora efeitos quânticos numa lagrangiana clássica, ou seja, o espalhamento fóton-fóton pode ser descrito classicamente através de \mathcal{L}_{eff} , que modifica as equações de Maxwell incorporando efeitos não-lineares.

4 LAGRANGIANA EFETIVA PARA A QED EM (3+1) DIMENSÕES

Neste capítulo, o conceito de ação efetiva é introduzido e a partir deste obteremos a lagrangiana efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg na aproximação de campos fracos. Durante este desenvolvimento, surgirão quantidades mal definidas matematicamente que serão tratadas com a regularização de Pauli-Villars.

4.1 AÇÃO EFETIVA

Conforme vimos na seção 3.3, a eletrodinâmica quântica prevê fenômenos que não são privilegiados pelo eletromagnetismo clássico. Por serem lineares, as equações de Maxwell não descrevem fenômenos de interação entre ondas eletromagnéticas, como é o caso do espalhamento fóton-fóton.

Contudo, este efeito estritamente quântico pode ser simulado no âmbito de uma teoria clássica, modificando-se as equações de Maxwell. Generalizações destas equações começaram a ser propostas no início do século XX, visando solucionar o problema da divergência da auto-energia de uma partícula pontual carregada (ROHRLICH, 2007).

Pelo fato das equações que descrevem os campos elétrico e magnético poderem ser obtidas a partir de um princípio variacional que envolve uma densidade lagrangiana \mathcal{L} , generalizações das equações de Maxwell podem ser obtidas pela modificação de \mathcal{L} , que deve satisfazer alguns critérios:

- para que as equações sejam covariantes, \mathcal{L} deve ser invariante de Lorentz;
- \mathcal{L} deve ser invariante de *gauge*;
- no limite de baixa intensidade dos campos, \mathcal{L} deve tender à densidade lagrangiana que leva às equações de Maxwell, $\mathcal{L}_{\text{rad}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$.

O campo eletromagnético possui somente os seguintes invariantes de Lorentz e *gauge*

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2, \quad \mathcal{G} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (4.1)$$

onde $F_{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu}$ foram definidos em (2.33). Assim, \mathcal{L} pode depender apenas de \mathcal{F} e \mathcal{G} .

Como exemplo de uma generalização das equações de Maxwell, citamos a teoria de Born e Infeld (BORN; INFELD, 1934). Tentando resolver o problema da auto-energia citado acima, em 1934 Born e Infeld propuseram a seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{BI}} = E_0^2 \left[1 - \sqrt{1 + \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{E_0^2} - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}{E_0^4}} \right], \quad (4.2)$$

em clara analogia com a lagrangiana relativística de uma partícula livre $L = m[1 - \sqrt{1 - \mathbf{v}^2}]$, que reduz-se à expressão não-relativística $L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ quando $|\mathbf{v}| \ll 1$. No caso em que $|\mathbf{E}| \ll E_0$ e $|\mathbf{B}| \ll E_0$, se expandirmos a raiz quadrada que aparece em (4.2) e considerarmos apenas os termos de segunda ordem, recuperamos \mathcal{L}_{rad} . Deste modo, o termo E_0 representa uma intensidade máxima para os campos.

Embora a proposta de Born e Infeld tenha levado a uma auto-energia finita, outros problemas do eletromagnetismo clássico, como a auto-aceleração de partículas carregadas, não foram resolvidos (DITTRICH; REUTER, 1985; ROHRLICH, 2007), levando ao abandono dessa teoria.

De modo a determinarmos uma densidade lagrangiana efetiva para o campo eletromagnético que descreva efeitos não-lineares, definiremos a ação efetiva por (DITTRICH; REUTER, 1985)

$$S_{\text{eff}}[A] = S^{(0)}[A] + S^{(1)}[A] \equiv \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}(x), \quad (4.3)$$

onde $S^{(0)}[A]$ é a ação clássica para as equações de Maxwell na ausência de fontes de carga e corrente

$$S^{(0)}[A] = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{rad}}(x), \quad (4.4)$$

e $S^{(1)}[A]$ é a ação que descreverá efeitos não-lineares induzidos pelo campo fermiônico quantizado

$$S^{(1)}[A] = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{ind}}(x). \quad (4.5)$$

Desta forma, as equações de movimento podem ser derivadas a partir

do princípio variacional (2.13)

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}[A]}{\delta A^\mu(x)} \equiv \frac{\delta}{\delta A^\mu(x)} \int d^4x' \mathcal{L}_{\text{eff}}(x') = 0. \quad (4.6)$$

Assumindo que a interação entre o campo fermiônico e o campo eletromagnético seja descrita pela densidade lagrangiana (2.227)

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \equiv j^\mu A_\mu, \quad (4.7)$$

a corrente j^μ pode ser obtido da ação $S_I[A, \psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \mathcal{L}_I(x)$ por

$$\frac{\delta S_I}{\delta A_\mu(x)} = j^\mu. \quad (4.8)$$

Entretanto, não estamos interessados numa teoria que envolva explicitamente o campo de Dirac ψ . Ao invés disso, buscamos uma teoria que simule efeitos quânticos em um nível puramente clássico. Sendo assim, definiremos $S^{(1)}[A]$ de tal forma que ela produza o valor esperado de j^μ no vácuo na presença do campo A , isto é

$$\frac{\delta S^{(1)}[A]}{\delta A_\mu(x)} = -\langle 0|j^\mu(x)|0\rangle, \quad (4.9)$$

junto com a condição de contorno de que $S^{(1)}[A] = 0$ quando $F^{\mu\nu} = 0$.

As novas equações de movimento são obtidas de (4.3), (4.6) e (4.9)

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{eff}}[A]}{\delta A^\mu(x)} &= \frac{\delta S^0[A]}{\delta A^\mu(x)} + \frac{\delta S^1[A]}{\delta A^\mu(x)} = \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) - \langle 0|j^\nu(x)|0\rangle = 0 \\ \therefore \quad \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) - \langle 0|j^\nu(x)|0\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde usamos o fato de que a extremização de (4.4) leva às equações de Maxwell na ausência de fontes.

Contraindo ambos os lados de (4.9) com A_μ e integrando em relação a x , temos

$$\begin{aligned} S^{(1)}[A] &= \int d^4x A_\mu(x) \frac{\delta S^{(1)}[A]}{\delta A_\mu(x)} = - \int d^4x A_\mu(x) \langle 0|j^\mu(x)|0\rangle \\ &= - \left\langle 0 \left| \int d^4x A_\mu(x) j^\mu(x) \right| 0 \right\rangle = - \int dt \langle 0|H_I|0\rangle \end{aligned}$$

$$= \int dt \langle 0|H_0|0\rangle - \int dt \langle 0|H|0\rangle, \quad (4.11)$$

onde H_0 e H são, respectivamente, o hamiltoniano livre e o total do sistema.

No caso de um campo magnético uniforme e independente do tempo, a energia do vácuo permanece constante, de modo que podemos calcular os valores esperados dos hamiltonianos no estado assintótico do vácuo num passado remoto. Além disso, para campos suficientemente fracos, o hamiltoniano H comuta com H_0 e, nesta aproximação, o último termo no lado direito de (4.11) pode ser identificado como a energia do estado de vácuo do campo de Dirac livre. Consequentemente,

$$S^{(1)} = - \int dt (\epsilon_0[A] - \epsilon[0]) = - \int dt \int d^3x [\epsilon_0 - (\epsilon_0)_{\mathbf{E}=\mathbf{B}=0}]. \quad (4.12)$$

Utilizando (4.3), (4.4) e (4.12), podemos concluir que a densidade lagrangiana efetiva é obtida adicionando-se à densidade lagrangiana do campo eletromagnético livre \mathcal{L}_{rad} o termo

$$\mathcal{L}_{\text{ind}} = \mathcal{L}_{\text{eff}} - \mathcal{L}_{\text{rad}} = - [\epsilon_0 - (\epsilon_0)_{\mathbf{E}=\mathbf{B}=0}]. \quad (4.13)$$

A expressão acima pode ser derivada heurísticamente seguindo a ideia de Weisskopf (WEISSKOPF, 1936). Conforme vimos na seção 2.3.2, ao efetuarmos a quantização do campo de Dirac livre na representação de Heisenberg, o hamiltoniano adquire a forma (2.199)

$$H = \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} \left[c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) \right] + \epsilon_0,$$

onde ϵ_0 é dada por

$$\epsilon_0 = - \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} \equiv - \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}. \quad (4.14)$$

Os níveis de energia $\epsilon_{\mathbf{p}}^{(-)}$ estão associados aos modos de frequência negativa das soluções da equação de Dirac e, quando somados, levam a uma energia de ponto zero ϵ_0 divergente. Esta última é eliminada do hamiltoniano, afim de que os seus autovalores sejam finitos.

Entretanto, com o cálculo do efeito Casimir na seção 2.4, mostrou-se que a energia de ponto zero é alterada quando impomos condições

de contorno ao campo eletromagnético. Da mesma forma, os autovalores de energia do hamiltoniano na representação de Heisenberg $\epsilon_{\mathbf{p}}^{(-)}$ sofrerão alterações quando o vácuo fermiônico estiver na presença de um campo eletromagnético externo. Estas variações são finitas e importantes do ponto de vista físico, pois mudanças nas propriedades do vácuo fermiônico alteram aquelas do sistema físico e, em particular, as equações do campo eletromagnético que, por sua vez, implicam em modificações na densidade lagrangiana que o descreve.

Para derivarmos a densidade lagrangiana de Euler-Koeckel-Heisenberg assumiremos que:

1. os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} variam lentamente no espaço e no tempo, de tal forma que possam ser tratados como campos uniformes e constantes.
2. o campo \mathbf{E} é suficientemente fraco para que não haja produção de pares.
3. a lagrangiana efetiva pode depender apenas dos invariantes relativísticos (4.1).

A segunda condição é satisfeita se

$$|\mathbf{E}| \ll \frac{m^2}{|e|} \left(= \frac{m^2 c^3}{e \hbar} \right), \quad (4.15)$$

pois, neste caso, a probabilidade de produção de pares é exponencialmente pequena (BERESTETSKII; LIFSHITZ; PITAEVSKII, 1982).

De agora em diante, adotaremos um referencial onde os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} são paralelos, pois, neste referencial, a influência de \mathbf{B} no movimento da carga na direção de \mathbf{E} é eliminada. Desta maneira, a condição (4.15) garante a não criação de pares no caso em que \mathbf{E} e \mathbf{B} são não nulos.

Referenciais no qual \mathbf{E} e \mathbf{B} são paralelos existem em um número infinito. De fato, sob um *boost* de Lorentz com velocidade \mathbf{v} , os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} se transformam do seguinte modo (JACKSON, 1962):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}), \\ \mathbf{B}' &= \gamma (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$. Assim, se \mathbf{E} e \mathbf{B} são paralelos em um referencial K , então, para qualquer outro referencial K' que se move com

velocidade \mathbf{v} , paralela a \mathbf{E} e \mathbf{B} , as equações (4.16) implicam que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}' \times \mathbf{B}' &= \left[\gamma \mathbf{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \right] \times \left[\gamma \mathbf{B} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right] \\
 &= \gamma^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \frac{\gamma^3}{\gamma+1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{E} \times \mathbf{v}) - \frac{\gamma^3}{\gamma+1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\
 &\quad + \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \right)^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

ou seja, os campos \mathbf{E}' e \mathbf{B}' são paralelos em K' . Portanto, precisamos determinar apenas um destes referenciais que satisfazem a condição requerida.

Tomando $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{E} \times \mathbf{B}|}$ temos $\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = 0$. Então, impondo $\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = 0$, segue das equações (4.16) e da identidade vetorial $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

$$\begin{aligned}
 0 &= \mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = \gamma^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) \\
 &= \gamma^2 \{ \mathbf{E} \times \mathbf{B} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})\mathbf{v} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})\mathbf{B} \\
 &\quad - [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}]\mathbf{v} + [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}]\mathbf{E} \} \\
 &= \gamma^2 \{ \mathbf{E} \times \mathbf{B} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})\mathbf{v} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} - [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}]\mathbf{v} \}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Logo,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} - E^2 \mathbf{v} - B^2 \mathbf{v} - [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}]\mathbf{v} = 0. \tag{4.19}$$

Rearranjando e usando a identidade vetorial $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= E^2 \mathbf{v} + B^2 \mathbf{v} + [(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}]\mathbf{v} = E^2 \mathbf{v} + B^2 \mathbf{v} - [(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}]\mathbf{v} \\
 &= E^2 \mathbf{v} + B^2 \mathbf{v} - |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| v \mathbf{v}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Agora,

$$|\mathbf{E} \times \mathbf{B}| v \mathbf{v} = v^2 |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \hat{\mathbf{v}} = v^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \tag{4.21}$$

e, substituindo este resultado em (4.20),

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= E^2 \mathbf{v} + B^2 \mathbf{v} - v^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\
 \therefore \quad \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{E^2 + B^2} &= \frac{\mathbf{v}}{1 + v^2}.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Assim, o *boost* procurado é aquele cuja velocidade \mathbf{v} satisfaz a equação acima.

A lagrangiana efetiva será obtida a partir do cálculo da variação W' da energia de ponto zero (4.14) devido à presença do campo eletromagnético. Antes disso, precisamos subtrair de (4.14) o valor médio da energia potencial dos elétrons nos estados de energia negativa. Fisicamente, esta subtração faz com que a carga do vácuo seja nula por definição.

A energia de ponto zero na presença do campo eletromagnético é dada por

$$\varepsilon_0 = - \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \int \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)*} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)} d^3x, \quad (4.23)$$

onde $\psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}$ são as soluções de frequência negativa da equação de Dirac. Estamos assumindo que a integração se dá sobre um volume unitário e que as funções de onda estão normalizadas neste volume. Desta forma, ε_0 é a energia por unidade de volume.

Como já discutido, precisamos subtrair de ε_0 o valor médio da energia potencial do elétron nos estados de energia negativa, U_0 , que é dado por

$$U_0 = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \int \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)*} e\phi \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)} d^3x, \quad (4.24)$$

onde ϕ é o potencial escalar associado ao campo elétrico \mathbf{E} . Como estamos considerando que o campo elétrico é uniforme, temos $\phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$ e, então, (4.24) torna-se

$$\begin{aligned} U_0 &= - \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \int \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)*} e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)} d^3x \\ &= -\mathbf{E} \cdot \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \int \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)*} e\mathbf{r} \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)} d^3x \\ &= -\mathbf{E} \cdot \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \int \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)*} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}} \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)} d^3x. \end{aligned} \quad (4.25)$$

A expressão acima pode convenientemente ser escrita em termos de ε_0 . Para isto, utilizaremos o seguinte resultado: seja $H(\lambda)$ uma hamiltoniana dependente do parâmetro λ e $|\psi_n(\lambda)\rangle$ um autoestado

normalizado de $H(\lambda)$. Temos que

$$\begin{aligned} H(\lambda)|\psi_n(\lambda)\rangle &= \varepsilon_n(\lambda)|\psi_n(\lambda)\rangle \\ [H(\lambda) - \varepsilon_n(\lambda)]|\psi_n(\lambda)\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Derivando a equação (4.26) em relação a λ e projetando em $\langle\psi_n(\lambda)|$:

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_n(\lambda) \left| \frac{\partial H(\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\partial \varepsilon_n(\lambda)}{\partial \lambda} \right| \psi_n(\lambda) \right\rangle + \\ \left\langle \psi_n(\lambda) \left| [H(\lambda) - \varepsilon_n(\lambda)] \frac{\partial}{\partial \lambda} \right| \psi_n(\lambda) \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_n(\lambda)}{\partial \lambda} \langle \psi_n(\lambda) | \psi_n(\lambda) \rangle = \\ \left\langle \psi_n(\lambda) \left| \frac{\partial H(\lambda)}{\partial \lambda} \right| \psi_n(\lambda) \right\rangle + \left\langle \psi_n(\lambda) \left| [H(\lambda) - \varepsilon_n(\lambda)] \frac{\partial}{\partial \lambda} \right| \psi_n(\lambda) \right\rangle. \end{aligned}$$

O segundo termo do lado direito da equação acima é nulo, pois sendo o hamiltoniano hermitiano, $\langle \psi_n(\lambda) | H(\lambda) = \langle \psi_n(\lambda) | \varepsilon_n(\lambda)$. Logo,

$$\frac{\partial \varepsilon_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \left\langle \psi_n(\lambda) \left| \frac{\partial H(\lambda)}{\partial \lambda} \right| \psi_n(\lambda) \right\rangle. \quad (4.27)$$

Aplicando (4.27) na equação (4.25), com o campo elétrico \mathbf{E} no papel do parâmetro λ , e utilizando (4.14) obtemos

$$U_0 = -\mathbf{E} \cdot \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}}{\partial \mathbf{E}} = -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \epsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{E}}. \quad (4.28)$$

Assim, o desvio total sofrido pela densidade de energia do vácuo devido à presença do campo eletromagnético é dado por

$$W' = \left(\varepsilon_0 - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{E}} \right) - \left(\varepsilon_0 - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{E}} \right)_{\mathbf{E}=\mathbf{B}=0}. \quad (4.29)$$

A relação entre a densidade de energia (densidade hamiltoniana)

e a densidade lagrangiana se dá pela transformada de Legendre

$$W = \sum_i \dot{\phi}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} - \mathcal{L}, \quad (4.30)$$

onde ϕ_i são os campos que descrevem um sistema com infinitos graus de liberdade. No caso do campo eletromagnético, este é descrito pelos potenciais vetor \mathbf{A} e escalar ϕ que se relacionam com \mathbf{E} e \mathbf{B} pelas equações (2.31)

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A};$$

então, de (4.30) e das equações acima, segue

$$\begin{aligned} W &= \sum_i \dot{\phi}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} - \mathcal{L} = \dot{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{A}}} + \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L} \\ &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}} - \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Assumindo $\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{rad}} + \mathcal{L}_{\text{ind}}$, da expressão (4.31), temos

$$\begin{aligned} W_{\text{eff}} &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \mathbf{E}} - \mathcal{L}_{\text{eff}} \\ &= \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{rad}}}{\partial \mathbf{E}} - \mathcal{L}_{\text{rad}} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ind}}}{\partial \mathbf{E}} - \mathcal{L}_{\text{ind}} = W_0 + W', \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde

$$W' = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ind}}}{\partial \mathbf{E}} - \mathcal{L}_{\text{ind}}. \quad (4.33)$$

Comparando (4.33) com (4.29), concluímos que

$$\mathcal{L}_{\text{ind}} = -[\varepsilon_0 - (\varepsilon_0)_{\mathbf{E}=0=\mathbf{B}}],$$

resultado idêntico ao obtido em (4.13).

4.1.1 Lagrangiana de Euler-Kockel-Heisenberg: Caso $\mathbf{E}=0$

Nesta seção, derivaremos a lagrangiana efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg, \mathcal{L}_{ind} , para o caso particular em que o campo elétrico é nulo.

Os níveis de energia negativa de um elétron com carga $-|e|$ em um campo magnético constante e uniforme $B_z = -B$ são, de acordo com (B.31),

$$-\epsilon_{p\sigma}^{(-)} = -\sqrt{m^2 + (2n + 1 - \sigma)|e|B + p_z^2}, \quad (4.34)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e $\sigma = \pm 1$. Desta forma, a energia de ponto zero do vácuo é dada pela soma sobre todos os n , σ e p_z .

A soma sobre todas as componentes z dos momentos do elétron em (4.34) pode ser calculada no limite do contínuo. Para isto, considera-se a correspondente densidade de estados de momento (B.55):

$$\frac{|e|B}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi}.$$

Portanto, a energia de ponto zero do vácuo pode ser escrita como

$$\begin{aligned} -\varepsilon_0 &= \frac{|e|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \epsilon_{n,\sigma}(p_z) \\ &= \frac{|e|B}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \left\{ \sqrt{m^2 + p_z^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{m^2 + 2|e|Bn + p_z^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

As integrais acima são quadraticamente divergentes. No limite de extrairmos um resultado finito e com significado físico de \mathcal{L}_{ind} , dado pela expressão (4.49), faz-se necessário adotar um procedimento de subtração consistente, partindo-se de uma expressão bem definida para a energia de ponto zero, em outras palavras, ε_0 precisa ser regularizado. Isto pode ser obtido pelo método de regularização de Pauli-Villars-Rayski, que consiste na introdução de massas reguladoras fictícias que, por satisfazerem a certas condições adequadas, eliminam as divergências da teoria original. Esta última é recuperada tomando-se o limite em que as massas reguladoras vão ao infinito, ao final dos cálculos.

Inicialmente, precisamos analisar as condições que as massas auxiliares devem satisfazer para que as divergências sejam eliminadas. Para tal, devemos analisar o grau de singularidade da função

$$\mathcal{D}(m^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \sqrt{m^2 + p^2}. \quad (4.36)$$

Esta deve ser interpretada no sentido da sua continuação analítica

(KNOPP, 1996)

$$\mathcal{D}_\delta(m^2) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dp (m^2 + p^2)^{\frac{1}{2} - \delta}, \quad (4.37)$$

a qual pode ser diferenciada com relação ao parâmetro m^2 antes do limite $\delta \rightarrow 0$ ser tomado.

Da expansão assintótica da integral (4.36) para $p^2 \gg m^2$ (BOGOLIUBOV; SHIRKOV, 1980),

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(m^2) &\sim \int dp |p| \left[1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{p^2} - \frac{1}{8} \frac{m^4}{p^4} + \mathcal{O}\left(\frac{m^6}{p^6}\right) \right] \\ &= \int dp |p| \left(1 + \frac{m^2}{2p^2} \right) + (\text{termos não divergentes}), \end{aligned} \quad (4.38)$$

vemos que $\mathcal{D}(m^2)$ possui divergências quadráticas e logarítmicas. Definindo a expressão regularizada

$$\mathcal{D}^R(m^2) = \sum_{i=0}^N c_i \mathcal{D}(m_i^2), \quad (4.39)$$

onde N é o número total de reguladores, $c_0 = 1$ e $m_0 = m$ é a massa do elétron, a expansão (4.39) fornece

$$\mathcal{D}^R(m^2) \sim \int dp |p| \sum_{i=0}^N c_i \left(1 + \frac{m_i^2}{2p^2} \right) + (\text{termos não divergentes}). \quad (4.40)$$

Logo, as relações

$$\sum_{i=0}^N c_i = 0, \quad \sum_{i=0}^N c_i m_i^2 = 0 \quad (4.41)$$

devem ser impostas à expressão regularizada de modo a eliminar as divergências quadráticas e logarítmicas, respectivamente.

Ao invés de considerarmos a expressão regularizada ε_0^R para a energia de ponto zero (4.35), é conveniente lidarmos com a função

$$\Phi^R(B) = \sum_i c_i \Phi_i(B), \quad (4.42)$$

onde

$$\begin{aligned}\Phi_i(B) &\equiv -\frac{\partial^2 \varepsilon_0^R}{\partial(m_i^2)^2} \\ &= \frac{-|e|B}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty dp_z \left\{ (m_i^2 + p_z^2)^{-\frac{3}{2}-\delta} + 2 \sum_{n=1}^\infty (m_i^2 + 2|e|Bn + p_z^2)^{-\frac{3}{2}-\delta} \right\}.\end{aligned}\quad (4.43)$$

Utilizando a representação integral da função gama (2.255), válida para $\delta > -1$,

$$\frac{1}{A^{1+\delta}} = \frac{1}{\Gamma(1+\delta)} \int_{0+}^\infty d\eta \eta^\delta e^{-A\eta},$$

$\Phi_i(B)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\Phi_i(B) &= \frac{-|e|B}{2(2\pi)^2 \Gamma(\frac{3}{2} + \delta)} \\ &\times \int_0^\infty dp_z \left[\int_0^\infty \eta^{\frac{1}{2}+\delta} e^{-\eta(m_i^2 + p_z^2)} d\eta + 2 \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \eta^{\frac{1}{2}+\delta} e^{-\eta(m_i^2 + 2|e|Bn + p_z^2)} d\eta \right] \\ &= \frac{-|e|B}{2(2\pi)^2 \Gamma(\frac{3}{2} + \delta)} \int_0^\infty d\eta \eta^{\frac{1}{2}+\delta} e^{-\eta m_i^2} \underbrace{\left[1 + 2 \sum_{n=1}^\infty e^{-2|e|Bn\eta} \right]}_{= \coth(|e|B\eta)} \underbrace{\int_0^\infty dp_z e^{-\eta p_z^2}}_{= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{\eta})^{1/2}} \\ &= -\frac{|e|B\sqrt{\pi}}{4(2\pi)^2 \Gamma(\frac{3}{2} + \delta)} \int_{0+}^\infty d\eta \eta^\delta e^{-\eta m_i^2} \coth(|e|B\eta).\end{aligned}\quad (4.44)$$

Duas integrações em relação a m_i^2 e tomando o limite $\delta \rightarrow 0$ resultam em

$$-\varepsilon_{0i} = \frac{-|e|B}{8\pi^2} \int_{0+}^\infty \frac{d\eta}{\eta^2} e^{-m_i^2 \eta} \coth(|e|B\eta) + C^{(0)}(B) + C^{(1)}(B)m_i^2, \quad (4.45)$$

onde $C^{(0)}$ e $C^{(1)}$ são constantes que não dependem de m_i^2 e já utilizamos $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Assim, a partir de (4.13) e das condições (4.41), a correção

regularizada para a densidade lagrangiana eletromagnética é

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{ind}}^R &= \sum_{i=0}^N c_i \mathcal{L}_{\text{ind}}^i = - \sum_{i=0}^N c_i [\varepsilon_{0i} - (\varepsilon_{0i})_{\mathbf{E}=\mathbf{B}=0}] \\
&= - \frac{|e|B}{8\pi^2} \sum_{i=0}^N c_i \left[\int_{0+}^{\infty} d\eta \frac{e^{-m_i^2 \eta}}{\eta^2} \coth(|e|B\eta) - \int_{0+}^{\infty} d\eta \frac{e^{-m_i^2 \eta}}{|e|B\eta^3} \right] \\
&+ \sum_{i=0}^N c_i \left[C^{(0)}(B) - C^{(0)}(B) \right] + \sum_{i=0}^N c_i m_i^2 \left[C^{(1)}(B) - C^{(1)}(B) \right] \\
&= - \frac{1}{8\pi^2} \sum_{i=0}^N c_i \int_{0+}^{\infty} d\eta \frac{e^{-m_i^2 \eta}}{\eta^3} [|e|B\eta \coth(|e|B\eta) - 1]. \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Para $B \ll m_i^2$, as contribuições individuais para a soma acima são da forma $m_i^4 F\left(\frac{B^2}{m_i^4}\right)$, onde F é uma função adimensional cuja expansão em série não contém um termo independente B divergente. Os termos divergentes restantes, proporcionais a B^2 , podem ser eliminados do somatório pela primeira condição em (4.41). Para isto, é suficiente introduzirmos duas massas auxiliares, M_1 e M_2 , além de tomarmos $c_1 = c_2 = -1/2$. Esta escolha garante que a primeira condição em (4.41) é satisfeita.

Se escolhermos M_1 e M_2 reais, a segunda condição em (4.41) torna-se $M_1^2 + M_2^2 = 2m^2$ e no limite $|M_1|, |M_2| \rightarrow \infty$ a massa deve ser renormalizada e a contribuição dos reguladores é

$$\begin{aligned}
c_1 \mathcal{L}_{\text{ind}}^1 + c_2 \mathcal{L}_{\text{ind}}^2 &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{0+}^{\infty} d\eta \left(\frac{e^{-M_1^2 \eta}}{\eta^3} + \frac{e^{-M_2^2 \eta}}{\eta^3} \right) [|e|B\eta \coth(|e|B\eta) - 1] \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \left\{ M_1^4 \int_{0+}^{\infty} d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} [b_1 \coth(b_1 \eta) - 1] + M_2^4 \int_{0+}^{\infty} d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} [b_2 \coth(b_2 \eta) - 1] \right\},
\end{aligned}$$

onde $b_i = |e|B/M_i^2$. Como tomaremos o limite $|M_1|, |M_2| \rightarrow \infty$, mantendo apenas o primeiro termo da série de Laurent

$$x \coth(x) - 1 = \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + \mathcal{O}(x^6), \quad (4.47)$$

segue

$$c_1 \mathcal{L}_{\text{ind}}^1 + c_2 \mathcal{L}_{\text{ind}}^2 = \frac{e^2 B^2}{3(8\pi^2)} \int_{0+}^{\infty} d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta}, \quad (4.48)$$

expressão independente das massas auxiliares e corresponde ao bem conhecido contra-termo de renormalização de carga.

Finalmente, de (4.46)) e (4.48)) temos

$$\mathcal{L}_{\text{ind}} = \frac{m^4}{8\pi^2} \int_{0+}^{\infty} d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left\{ -\eta b \coth(\eta b) + 1 - \frac{1}{3} b^2 \eta^2 \right\}, \quad (4.49)$$

onde $b = |e|B/m^2$.

Por outro lado, se considerarmos M_1 como um número real e M_2 como imaginário, então a segunda condição em (4.41) torna-se $M_1^2 - M_2^2 = 2m^2$ e no limite $|M_1|, |M_2| \rightarrow \infty$ a massa não precisa ser regularizada. A contribuição dos reguladores é

$$\begin{aligned} c_1 \mathcal{L}_{\text{ind}}^1 + c_2 \mathcal{L}_{\text{ind}}^2 &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{0+}^{\infty} d\eta \left(\frac{e^{-M_1^2 \eta}}{\eta^3} + \frac{e^{M_2^2 \eta}}{\eta^3} \right) [|e|B\eta \coth(|e|B\eta) - 1] \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left\{ M_1^4 \int_{0+}^{\infty} d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} [b_1 \coth(b_1 \eta) - 1] + M_2^4 \int_{0+}^{\infty} d\eta \frac{e^{\eta}}{\eta^3} [b_2 \coth(b_2 \eta) - 1] \right\} \\ &= \frac{e^2 B^2}{3(16\pi^2)} \int_{0+}^{\infty} d\eta \frac{\cosh(\eta)}{\eta}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde novamente utilizamos a expansão (4.47). Esta expressão é independente das massas auxiliares e corresponde a um contra-termo de renormalização da carga mais um termo que corrige a susceptibilidade magnética

4.1.2 Lagrangiana de Euler-Kockel-Heisenberg: Caso Geral

Seguindo a idéia de Weisskopf apresentada no final da seção 4.1, derivaremos a lagrangiana efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg para o caso em que, além do campo magnético \mathbf{B} , existe um campo elétrico \mathbf{E} . Com este objetivo, adotaremos um referencial onde \mathbf{E} e \mathbf{B} são paralelos. Este referencial é obtido, como já mencionado, por um *boost* de Lorentz

que satisfaz a condição (4.22),

$$\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{E^2 + B^2} = \frac{\mathbf{v}}{1 + v^2}.$$

Primeiramente, notemos de (4.34) que a influência do campo magnético \mathbf{B} reflete-se na massa da partícula através da relação

$$m^2 \longrightarrow m^2 + |e|B(2n + 1 - \sigma). \quad (4.51)$$

Diante disso, contruímos uma função Φ , similar a (4.43) e que, por argumentos dimensionais, é escrita genericamente como

$$\begin{aligned} \Phi(B, E) &\equiv -\frac{\partial^2 \varepsilon_0}{(\partial m^2)^2} \\ &= -\frac{|e|B}{8\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{F((m^2 + |e|B(2n + 1 + \sigma))/|e|B)}{m^2 + |e|B(2n + 1 + \sigma)}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde F é uma função desconhecida, que será determinada através da imposição de vínculos estruturais da teoria, como invariância relativística e argumentos dimensionais.

Usando $b = |e|B/m^2$ e manipulando (4.52) ficamos com

$$\begin{aligned} \Phi(B, E) &= -\frac{b}{8\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{F((1 + b(2n + 1 + \sigma))/b)}{1 + b(2n + 1 + \sigma)} \\ &= -\frac{b}{8\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{F(\frac{1}{b} + 2n)}{1 + 2bn} + \frac{F(\frac{1}{b} + 2(n + 1))}{1 + 2b(n + 1)} \right\} \\ &= -\frac{b}{8\pi^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} F\left(\frac{1}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\frac{1}{b} + 2n)}{1 + 2bn} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(\frac{1}{b} + 2(n + 1))}{1 + 2b(n + 1)} \right\} \\ &= -\frac{b}{8\pi^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} F\left(\frac{1}{b}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\frac{1}{b} + 2n)}{1 + 2bn} \right\}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Definindo a quantidade adimensional

$$a = \frac{|e|E}{m^2} \quad (4.54)$$

e introduzindo-a em (4.53) através da identidade $aa^{-1} = 1$, resulta

$$\begin{aligned}\Phi(B, E) &= -\frac{b}{8\pi^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} F\left(\frac{a}{ab}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(1+2bn)a/ab}{1+2bn} \right\} \\ &= -\frac{b}{8\pi^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}\left(\frac{1}{a}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}(1+2bn)/a}{1+2bn} \right\} \quad (4.55)\end{aligned}$$

onde F foi modificada funcionalmente,

$$F(\alpha(a/b)a^{-1}) \rightarrow \tilde{F}(\alpha a^{-1}). \quad (4.56)$$

Na substituição acima, α representa os demais argumentos de F .

Até aqui, desconhecemos \tilde{F} . Para derivá-la, usaremos considerações de invariância relativística. Assim, exigiremos que Φ seja uma função dos invariantes (4.1), ou seja,

$$\Phi(B, E) = f(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2, \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}). \quad (4.57)$$

Note que, no caso em que $B = 0$, teremos

$$\Phi(B, E) = f(-\mathbf{E}^2, 0) = \Phi(iE, 0). \quad (4.58)$$

Logo, pelo fato de que $\Phi(B, 0)$ deve ser igual a (4.43), a função $\Phi(iE, 0)$ pode ser obtida de (4.44) fazendo $B \rightarrow iE$,

$$\begin{aligned}\Phi(iE) &= -\frac{|e|iE}{8\pi^2} \int_0^{\infty} d\eta e^{-m^2\eta} \coth(|e|iE\eta) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} d\eta e^{-\eta/a} \cot(\eta).\end{aligned} \quad (4.59)$$

Assim, \tilde{F} é encontrada comparando-se (4.59) com o limite $\Phi(B \rightarrow 0, E)$ de (4.55).

A passagem ao limite $B \rightarrow 0$ em (4.55) pode ser efetuada através da mudança de variável $2bn \rightarrow x$ e da substituição da soma sobre n por uma integração em $dn = dx/2b$,

$$\begin{aligned}\Phi(B \rightarrow 0, E) &= \lim_{b \rightarrow 0} -\frac{b}{8\pi^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}\left(\frac{1}{a}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}(1+2bn)/a}{1+2bn} \right\} \\ &= 0 + \lim_{b \rightarrow 0} -\frac{b}{8\pi^2} 2 \int_{2b}^{\infty} \frac{\tilde{F}((1+x)/a)}{1+x} \frac{dx}{2b}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2} 2 \int_{2b}^{\infty} \frac{\tilde{F}((1+x)/a)}{1+x} dx. \quad (4.60)$$

Fazendo a substituição $\frac{x+1}{a} \rightarrow y$, segue

$$\Phi(0, E) = -\frac{1}{8\pi^2} 2 \int_{1/a}^{\infty} \frac{\tilde{F}(y)}{y} dy. \quad (4.61)$$

Igualando (4.59) com (4.61) e derivando a expressão resultante em relação a $z \equiv 1/a$, obtemos

$$\frac{\tilde{F}(z)}{z} = \int_0^{\infty} d\eta e^{-\eta z} \eta \cot(\eta). \quad (4.62)$$

Agora, fazendo $z \equiv 1/a$ em (4.55),

$$\begin{aligned} \Phi(B, E) &= -\frac{b}{8\pi^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}(1+2bn)z}{1+2bn} \right\} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{b}{a} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{F}(1+2bn)z}{(1+2bn)z} - \frac{\tilde{F}(z)}{z} \right\}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Com o auxílio de (4.62), o termo com somatório em (4.63) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{F}(1+2bn)z}{(1+2bn)z} &= 2 \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\eta(1+2bn)z} \eta \cot(\eta) d\eta \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\eta z} \eta \cot(\eta) \left[2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2bn\eta z} \right] = \int_0^{\infty} e^{-\eta z} \eta \cot(\eta) \frac{2}{1 - e^{-2bn\eta z}}, \end{aligned}$$

onde identificamos o termo entre colchetes acima como sendo uma progressão geométrica. Logo, (4.63) torna-se

$$\begin{aligned} \Phi(B, E) &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{b}{a} \int_0^{\infty} e^{-\eta z} \eta \cot(\eta) \left[\frac{2}{1 - e^{-2bn\eta z} - 1} \right] \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{b}{a} \int_0^{\infty} e^{-\eta z} \eta \cot(\eta) \coth(bz\eta). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Lembrando que $z = \frac{1}{a} = \frac{m^2}{|e|B}$ e fazendo $\frac{\eta}{|e|B} \rightarrow \eta$, resulta, finalmente,

$$\Phi(B, E) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty e^{-\eta m^2} |e|B\eta \coth(|e|B\eta) |e|E \cot(|e|E). \quad (4.65)$$

Por um procedimento análogo ao caso $\mathbf{E} = 0$, podemos mostrar que a lagrangiana efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{ind}} = \frac{m^4}{8\pi^2} \int_{0+}^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left\{ -b\eta \coth(\eta b) a\eta \cot(\eta a) + 1 - \frac{1}{3}(b^2 - a^2)\eta^2 \right\},$$

onde $\mathbf{b} = |e|\mathbf{B}/m^2$ e $\mathbf{a} = |e|\mathbf{E}/m^2$, um resultado derivado por Schwinger (SCHWINGER, 1951) usando o método do tempo próprio de Fock (FOCK, 1937). Além disso, expandindo o integrando acima e considerando campos “fracos” obtemos (3.144).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos capítulos anteriores, abordamos de duas maneiras distintas a construção da teoria efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg.

Apresentamos, no segundo capítulo, a quantização canônica dos campos eletromagnético e de Dirac livres. Vimos que energias de ponto zero surgem pelo fato do processo de quantização não estabelecer, univocamente, o ordenamento de operadores. Estas divergências foram removidas pela imposição do ordenamento normal. Por fim, através da variação da energia de ponto zero eletromagnética, causada pela imposição de condições de contorno, calculamos o efeito Casimir para placas paralelas.

De modo a descrevermos campos interagentes, introduzimos no capítulo 2 a representação de interação. Vimos que o operador de espalhamento S é dado, nesta representação, pela série perturbativa de Dyson. Considerando o respectivo termo de quarta ordem desta série, calculamos o espalhamento Halpern. Após um cálculo extenso, obtivemos, no limite de baixas energias, a correspondência entre tal contribuição e a densidade lagrangiana efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg.

No capítulo 3, rederivamos a lagrangiana efetiva a partir do método de Weisskopf e da ação efetiva na aproximação de campo fraco. Ambos os métodos levaram ao cálculo da variação da energia de ponto zero que, por ser divergente, exigiu um procedimento de regularização consistente.

Diante disso, vemos que a teoria efetiva de Euler-Kockel-Heisenberg pode ser obtida a partir da eletrodinâmica quântica perturbativa, no limite de baixas energias. Esta última, além de ser uma teoria fundamental, prescinde do conceito de energia de ponto zero.

Como perspectivas futuras, pretendemos estudar o efeito Casimir no contexto da eletrodinâmica quântica perturbativa (JAFPE, 2005) a baixas dimensões bem como a temperatura finita, incluindo possíveis extensões renormalizáveis (BONNEAU; COSTA; TOMAZELLI, 2008). Outra linha de pesquisa bastante promissora é o estudo da estabilidade do vácuo da eletrodinâmica quântica na presença de campos intensos e a altas temperaturas (GAVRILOV; GITMAN; TOMAZELLI, 2008).

A CAVIDADE RESSONANTE RETANGULAR

Considere uma caixa retangular de dimensões L_x , L_y e L_z cujas paredes são constituídas de um material perfeitamente condutor. Tal caixa forma uma cavidade ressonante retangular.

Por conveniência adotaremos o sistema de coordenadas representado na figura abaixo.

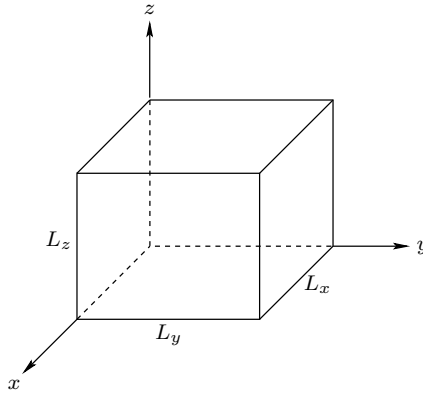


Figura 2 – Cavidade retangular.

Para encontrarmos as frequências de ressonância, precisamos resolver as equações de Maxwell, na ausência de fontes de cargas e correntes,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

sujeitas a condições de contorno adequadas.

Como é bem conhecido, as condições de contorno para os campos \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} e \mathbf{H} na interface entre dois meios são (JACKSON, 1962):

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma, \quad (\text{A.2})$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}, \quad (\text{A.5})$$

onde σ e \mathbf{K} são, respectivamente, as densidades de carga e de corrente

superficiais na interface e \mathbf{n} é o vetor normal à interface, cujo sentido é do meio 1 para o meio 2.

Se considerarmos as paredes da caixa como meio 1 e o seu interior (vácuo) como meio 2, temos que $\mathbf{E}_1 = \mathbf{B}_1 = 0$, pois no interior de um condutor perfeito os campos elétrico e magnético são nulos. Além disso, no meio 2 temos que $\mathbf{D}_2 = \mathbf{E}_2$ e $\mathbf{H}_2 = \mathbf{B}_2$. Desta forma, para encontrarmos as frequências de ressonância, resolveremos as equações de Maxwell (A.1) no vácuo com as condições de contorno de Dirichlet

$$\begin{aligned} B^\perp &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \mathbf{E}^\parallel &= \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \end{aligned} \tag{A.6}$$

isto é, as componentes perpendicular e paralela às paredes da caixa, respectivamente, dos campos magnético e elétrico são nulas. Não nos preocuparemos com as demais condições de contorno, pois não estamos interessados em obter as densidades σ e \mathbf{K} que surgem na interface para que os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} sejam nulos no interior do condutor.

Como já discutido na seção 2.2, as equações (A.1) no vácuo podem ser escritas em termos dos potenciais ϕ e \mathbf{A} que, no *gauge* de Coulomb, obedecem às equações

$$\phi = 0, \quad \square \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = 0, \tag{A.7}$$

com os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} dados por

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{A.8}$$

Assumindo que $\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \alpha(t)\mathbf{A}_0(\mathbf{x})$, da segunda equação em (A.7) temos

$$\ddot{\alpha}(t) + \omega^2 \alpha(t) = 0, \tag{A.9}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) + \omega^2 \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = 0, \tag{A.10}$$

onde já adiantamos que a constante de separação de variáveis, $-\omega^2$, deve ser negativa como consequência das condições de contorno (A.6). Além disso, utilizando (A.8) podemos ver que (A.6) se torna

$$(\nabla \times \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{A.11a}$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A}_0 = 0. \tag{A.11b}$$

A equação (A.9) possui solução geral

$$\alpha(t) = D_1 e^{i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t}, \quad (\text{A.12})$$

onde $D_1, D_2 \in \mathbb{R}$.

A equação de Helmholtz (A.10) pode ser resolvida por separação de variáveis. Assumindo que $A_{0i}(\mathbf{x}) = X_i(x)Y_i(y)Z_i(z)$, com $i = 1, 2$ e 3 , segue de (A.10) que

$$\frac{d^2 X_i}{dx^2} + k_{1i}^2 X_i = 0, \quad (\text{A.13a})$$

$$\frac{d^2 Y_i}{dy^2} + k_{2i}^2 Y_i = 0, \quad (\text{A.13b})$$

$$\frac{d^2 Z_i}{dz^2} + k_{3i}^2 Z_i = 0, \quad (\text{A.13c})$$

onde as constantes de separação de variáveis, $-k_{ij}^2$ com $i, j = 1, 2$ e 3 , devem ser negativas para que as condições de contorno (A.6) sejam satisfeitas. Além disso, por consistência devemos ter

$$\omega^2 = k_{1i}^2 + k_{2i}^2 + k_{3i}^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.14})$$

As equações (A.13) possuem as seguintes soluções gerais:

$$X_i(x) = B_{1i} \cos(k_{1i}x) + B_{2i} \sin(k_{1i}x), \quad (\text{A.15})$$

$$Y_i(y) = B_{3i} \cos(k_{2i}y) + B_{4i} \sin(k_{2i}y), \quad (\text{A.16})$$

$$Z_i(z) = B_{5i} \cos(k_{3i}z) + B_{6i} \sin(k_{3i}z), \quad (\text{A.17})$$

de modo que $A_{0i}(\mathbf{x})$ é dado por ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} A_{0i}(\mathbf{x}) &= X_i(x)Y_i(y)Z_i(z) \\ &= [B_{1i} \cos(k_{1i}x) + B_{2i} \sin(k_{1i}x)][B_{3i} \cos(k_{2i}y) + B_{4i} \sin(k_{2i}y)] \\ &\quad \times [B_{5i} \cos(k_{3i}z) + B_{6i} \sin(k_{3i}z)]. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Aplicando a condição de contorno (A.11b) em (A.18):

- na parede em $x = 0$, temos que $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ e então $\mathbf{n} \times \mathbf{A}_0 = 0$ implica que $A_{02}(0, y, z) = 0 = A_{03}(0, y, z)$. Logo, $B_{12} = B_{13} = 0$;
- na parede em $y = 0$, temos que $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ e então $\mathbf{n} \times \mathbf{A}_0 = 0$ implica que $A_{01}(x, 0, z) = 0 = A_{03}(x, 0, z)$. Logo, $B_{31} = B_{33} = 0$;
- na parede em $z = 0$, temos que $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ e então $\mathbf{n} \times \mathbf{A}_0 = 0$

implica que $A_{01}(x, y, 0) = 0 = A_{02}(x, y, 0)$. Logo, $B_{51} = B_{52} = 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} A_{01}(\mathbf{x}) &= C_1 [B_{11} \cos(k_{11}x) + B_{21} \sin(k_{11}x)] \sin(k_{21}y) \sin(k_{31}z), \\ A_{02}(\mathbf{x}) &= C_2 \sin(k_{12}x) [B_{32} \cos(k_{22}y) + B_{42} \sin(k_{22}y)] \sin(k_{32}z), \\ A_{03}(\mathbf{x}) &= C_3 \sin(k_{13}x) \sin(k_{23}y) [B_{53} \cos(k_{33}z) + B_{63} \sin(k_{33}z)]. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

- Na parede em $x = L_x$, temos que $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ e então $\mathbf{n} \times \mathbf{A}_0 = 0$ implica que $A_{02}(L_x, y, z) = 0 = A_{03}(L_x, y, z)$. Logo, $k_{12} = \frac{l_2\pi}{L_x}$ e $k_{13} = \frac{l_3\pi}{L_x}$, onde $l_2, l_3 \in \mathbb{Z}$;
- Na parede em $y = L_y$, temos que $\mathbf{n} = (0, -1, 0)$ e então $\mathbf{n} \times \mathbf{A}_0 = 0$ implica que $A_{01}(x, L_y, z) = 0 = A_{03}(x, L_y, z)$. Logo, $k_{21} = \frac{m_1\pi}{L_y}$ e $k_{23} = \frac{m_3\pi}{L_y}$, onde $m_1, m_3 \in \mathbb{Z}$;
- Na parede em $z = L_z$, temos que $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ e então $\mathbf{n} \times \mathbf{A}_0 = 0$ implica que $A_{01}(x, y, L_z) = 0 = A_{02}(x, y, L_z)$. Logo, $k_{31} = \frac{n_1\pi}{L_z}$ e $k_{32} = \frac{n_2\pi}{L_z}$, onde $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

Dessa forma, (A.19) torna-se

$$\begin{aligned} A_{01}(\mathbf{x}) &= \tilde{C}_1 [B_{11} \cos(k_{11}x) + B_{21} \sin(k_{11}x)] \sin(k_{21}y) \sin(k_{31}z), \\ A_{02}(\mathbf{x}) &= \tilde{C}_2 \sin(k_{12}x) [B_{32} \cos(k_{22}y) + B_{42} \sin(k_{22}y)] \sin(k_{32}z), \\ A_{03}(\mathbf{x}) &= \tilde{C}_3 \sin(k_{13}x) \sin(k_{23}y) [B_{53} \cos(k_{33}z) + B_{63} \sin(k_{33}z)]. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Utilizando (A.20), pode-se mostrar diretamente que a outra condição de contorno, (A.11a), é automaticamente satisfeita.

Pelo fato de termos escolhido o *gauge* de Coulomb, devemos ter $\nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \alpha(t) \nabla \cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = 0$. Como $\alpha(t)$, dado por (A.12), nunca se anula, segue de (A.20) que $\forall \mathbf{x} \in [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) &= \tilde{C}_1 [-B_{11}k_{11} \sin(k_{11}x) + B_{21}k_{11} \cos(k_{11}x)] \sin(k_{21}y) \sin(k_{31}z) \\ &+ \tilde{C}_2 \sin(k_{12}x) [-B_{32}k_{22} \sin(k_{22}y) + B_{42}k_{22} \cos(k_{22}y)] \sin(k_{32}z) \\ &+ \tilde{C}_3 \sin(k_{13}x) \sin(k_{23}y) [-B_{53}k_{33} \sin(k_{33}z) + B_{63}k_{33} \cos(k_{33}z)] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Em particular,

- para $\mathbf{x} = (0, \frac{1}{2}L_y, \frac{1}{2}L_z)$ temos que $B_{21} = 0$;
- para $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}L_x, 0, \frac{1}{2}L_z)$ temos que $B_{42} = 0$;
- para $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}L_x, \frac{1}{2}L_y, 0)$ temos que $B_{63} = 0$;
- para $\mathbf{x} = (L_x, \frac{1}{2}L_y, \frac{1}{2}L_z)$ temos que $k_{11} = \frac{l_1\pi}{L_x}$, onde $l_1 \in \mathbb{Z}$;
- para $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}L_x, L_y, \frac{1}{2}L_z)$ temos que $k_{22} = \frac{m_2\pi}{L_y}$, onde $m_2 \in \mathbb{Z}$;
- para $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}L_x, \frac{1}{2}L_y, L_z)$ temos que $k_{33} = \frac{n_3\pi}{L_z}$, onde $n_3 \in \mathbb{Z}$.

Assim, (A.20) fica

$$\begin{aligned} A_{01}(\mathbf{x}) &= C_1 \cos(k_{11}x) \sin(k_{21}y) \sin(k_{31}z), \\ A_{02}(\mathbf{x}) &= C_2 \sin(k_{12}x) \cos(k_{22}y) \sin(k_{32}z), \\ A_{03}(\mathbf{x}) &= C_3 \sin(k_{13}x) \sin(k_{23}y) \cos(k_{33}z), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

de onde podemos ver que todos os k_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) são da forma

$$k_{ij} = \frac{I_{ij}\pi}{L_j}, \quad I_{ij} \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.23})$$

Analisando (A.22), vemos que esta consiste no produto de funções pares e ímpares. Desse modo, os I_{ij} negativos não produzem novas auto-funções para o operador ∇^2 , pois, no máximo, alteram as constantes C_1, C_2 e C_3 . Assim, podemos restringir os I_{ij} ao conjunto dos inteiros não-negativos sem perda de generalidade.

Outro ponto importante é que ainda não garantimos que, para (A.22), tenhamos $\nabla \cdot \mathbf{A}_0 = 0$. Para isso, consideraremos o caso particular $k_{i1} = k_{i2} = k_{i3}$, que corresponde a considerarmos $I_{i1} = I_{i2} = I_{i3}$ em (A.23). Neste caso, as equações (A.22) tornam-se

$$\begin{aligned} A_{01}(\mathbf{x}) &= C_1 \cos(k_1x) \sin(k_2y) \sin(k_3z), \\ A_{02}(\mathbf{x}) &= C_2 \sin(k_1x) \cos(k_2y) \sin(k_3z), \\ A_{03}(\mathbf{x}) &= C_3 \sin(k_1x) \sin(k_2y) \cos(k_3z), \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

onde

$$k_1 = \frac{l\pi}{L_x}, \quad k_2 = \frac{m\pi}{L_y}, \quad k_3 = \frac{n\pi}{L_z}, \quad l, m, n \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \dots\}. \quad (\text{A.25})$$

Além disso, as amplitudes em (A.24) não podem ser independentes entre si, pois, para que

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) &= -(C_1 k_1 + C_2 k_2 + C_3 k_3) \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z) \\ &= 0,\end{aligned}\tag{A.26}$$

C_1 , C_2 e C_3 devem satisfazer a relação

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{k} = C_1 k_1 + C_2 k_2 + C_3 k_3 = \pi \left(\frac{l}{L_x} + \frac{m}{L_y} + \frac{n}{L_z} \right) = 0,\tag{A.27}$$

onde $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3)$ e $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$.

No caso em que dois ou todos os l, m, n são nulos, vemos de (A.24) que $\mathbf{A}_0 = 0$. Logo, para não obtermos a solução trivial, no máximo um dos l, m, n pode ser 0.

Se um dos l, m, n for nulo, então de (A.24) podemos notar que apenas uma das componentes de \mathbf{A}_0 será não nula. Neste caso, o potencial \mathbf{A}_0 define um modo com uma única polarização, correspondendo ao modo elétrico transverso (TE). Por exemplo, se $k_3 = 0$, temos que $\mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = C_3 \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{k} = k_1 \hat{\mathbf{x}} + k_2 \hat{\mathbf{y}}$ e, de (A.8), $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = C_3 \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \hat{\mathbf{z}}$. Logo, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$.

Se nenhum dos l, m, n for nulo, podemos encontrar vetores $\boldsymbol{\epsilon}_1(\mathbf{k})$, $\boldsymbol{\epsilon}_2(\mathbf{k})$, que correspondem a duas possíveis polarizações, tais que $\boldsymbol{\epsilon}_1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$ e $\boldsymbol{\epsilon}_2(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$. Assim, fazendo $\mathbf{C} = a\boldsymbol{\epsilon}_1(\mathbf{k}) + b\boldsymbol{\epsilon}_2(\mathbf{k})$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, a condição (A.27) é satisfeita.

Portanto, de (A.14) e (A.25) as frequências de ressonância são dadas por

$$\omega_{lmn} = \sqrt{\left(\frac{l\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2}, \quad l, m, n \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\},\tag{A.28}$$

sendo estas duplamente degeneradas quando l, m, n são não nulos e não degeneradas quando um dos l, m, n for nulo.

B ELÉTRON EM UM CAMPO MAGNÉTICO

Neste apêndice obteremos a solução da equação de Dirac para um elétron na presença de um campo magnético uniforme.

Conforme visto na seção 2.3.2, a equação de Dirac é dada por

$$i \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m) \psi(\mathbf{x}, t),$$

onde $\psi(\mathbf{x}, t)$ é um spinor de dimensão N , $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e β são matrizes hermitianas de dimensão N que satisfazem $(i, j = 1, 2, 3)$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = O, \quad \alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{I},$$

onde \mathbb{I} e O são, respectivamente, a matriz identidade $N \times N$ e a matriz nula $N \times N$.

A equação que considera a interação de uma partícula carregada com um campo eletromagnético clássico, caracterizado pelos potenciais vetor $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ e escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$, é obtida pela substituição mínima. Esta consiste na modificação da equação de Dirac pelas substituições

$$i \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow i \frac{\partial}{\partial t} - q\phi, \quad \hat{\mathbf{p}} \longrightarrow \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}, \quad (\text{B.1})$$

onde q é a carga da partícula em interação com o campo.

A substituição mínima fornece

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \right) \psi(\mathbf{x}, t) = [\boldsymbol{\alpha} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) + \beta m] \psi(\mathbf{x}, t),$$

cujos rearranjo dos termos leva à equação desejada

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= [\boldsymbol{\alpha} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) + q\phi + \beta m] \psi(\mathbf{x}, t) \\ &\equiv \mathcal{H} \psi(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

A solução da equação acima pode ser expressa em termos da função de onda num instante t_0 , $\psi(\mathbf{x}, t_0) \equiv \psi(\mathbf{x})$, e do operador de evolução temporal

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \mathcal{H}(t') \right] \psi(\mathbf{x}), \quad (\text{B.3})$$

onde estamos assumindo que o hamiltoniano \mathcal{H} seja dependente do tempo e comuta a tempos diferentes, isto é, $[\mathcal{H}(t), \mathcal{H}(t')] = 0, \forall t, t' \in \mathbb{R}$.

Para resolvermos a equação (B.2), utilizaremos a representação quadridimensional de Dirac-Pauli para as matrizes α_i ($i = 1, 2, 3$) e β :

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} O_{2 \times 2} & \sigma_i \\ \sigma_i & O_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

onde \mathbb{I} é a matriz identidade 2×2 , O é a matriz nula 2×2 e σ_i são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Nesta representação, $\psi(\mathbf{x})$ é um spinor com quatro componentes que, por conveniência, será expresso em termos de dois spinores com duas componentes, $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\chi}$, ou seja:

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1(t, \mathbf{x}) \\ \psi_2(t, \mathbf{x}) \\ \psi_3(t, \mathbf{x}) \\ \psi_4(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

onde $\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \psi_1(t, \mathbf{x}) \\ \psi_2(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}$ e $\tilde{\chi} = \begin{pmatrix} \psi_3(t, \mathbf{x}) \\ \psi_4(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}$.

Utilizando (B.4) e (B.6) em (B.2), temos que

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} O & \sigma \\ \sigma & O \end{pmatrix} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) + q\phi + \begin{pmatrix} \mathbb{I} & O \\ O & -\mathbb{I} \end{pmatrix} m \right] \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O & \sigma \\ \sigma & O \end{pmatrix} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + q\phi \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \mathbb{I} & O \\ O & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O & \sigma \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \\ \sigma \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + q\phi \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \tilde{\chi} \\ \sigma \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \tilde{\varphi} \end{pmatrix} + q\phi \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \tilde{\chi} + q\phi \tilde{\varphi} + m \tilde{\varphi} \\ \sigma \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \tilde{\varphi} + q\phi \tilde{\chi} - m \tilde{\chi} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

ou seja,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \tilde{\chi} + q\phi\tilde{\varphi} + m\tilde{\varphi}, \quad (\text{B.8})$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\chi} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \tilde{\varphi} + q\phi\tilde{\chi} - m\tilde{\chi}. \quad (\text{B.9})$$

No caso particular de um campo magnético constante e uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, podemos utilizar o potencial vetor

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{2}(yB, -xB, 0), \quad (\text{B.10})$$

que possui divergência nula

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) &= -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{2} \partial_k \epsilon_{ijk} x_i B_j = -\frac{B}{2} \epsilon_{ijk} \delta_{j3} \partial_k x_i \\ &= -\frac{B}{2} \epsilon_{i3k} \delta_{ki} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Este fato implica, conforme discutido na seção 2.2, que o potencial escalar é nulo para esta escolha de \mathbf{A} . Assim, (B.8) e (B.9) tornam-se

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \tilde{\chi} + m\tilde{\varphi}, \\ i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\chi} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \tilde{\varphi} - m\tilde{\chi}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Pelo fato de \mathbf{A} ser independente do tempo, (B.3) torna-se

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' \mathcal{H}(t') \right] \psi(\mathbf{x}) = e^{-i\mathcal{H}(t-t_0)} \psi(\mathbf{x}) \\ &= \psi(\mathbf{x}) e^{-i\varepsilon(t-t_0)}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

que substituindo em (B.12) leva a

$$(\varepsilon - m)\varphi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \chi, \quad (\text{B.14})$$

$$(\varepsilon + m)\chi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \varphi, \quad (\text{B.15})$$

onde $\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \psi_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ e $\chi = \begin{pmatrix} \psi_3(\mathbf{x}) \\ \psi_4(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$.

Multiplicando (B.14) por $(\varepsilon + m)$ e usando (B.15), obtém-se a

equação desacoplada

$$\begin{aligned}(\varepsilon + m)(\varepsilon - m)\varphi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})(\varepsilon + m)\chi \\(\varepsilon^2 - m^2)\varphi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \varphi.\end{aligned}\quad (\text{B.16})$$

Da identidade $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbb{I}_{2 \times 2} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ segue que

$$\begin{aligned}(\varepsilon^2 - m^2)\varphi &= \left\{ (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2 \mathbb{I}_{2 \times 2} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \times (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})] \right\} \varphi \\&= \left[\hat{\mathbf{p}}^2 - q\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A} - q\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}} + q^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \right] \varphi \\&\quad + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}} - q\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{A} - q\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{p}} + q^2 \mathbf{A} \times \mathbf{A} \right] \varphi \\&= \left[\hat{\mathbf{p}}^2 - q\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A} - q\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}} + q^2 \mathbf{A}^2 \right] \varphi \\&\quad + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}} - q\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{A} - q\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{p}} \right] \varphi\end{aligned}\quad (\text{B.17})$$

Agora, utilizando uma função teste f de classe C^2 temos

$$\begin{aligned}\bullet \quad (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A})f &= \hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{A}f) = -i \sum_{j=1}^3 \partial_j (A_j f) = -i \sum_{j=1}^3 [(\partial_j A_j) f + A_j (\partial_j f)] \\&= \sum_{j=1}^3 (-i \partial_j A_j) f + \sum_{j=1}^3 A_j (-i \partial_j f) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) f + (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}}) f;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \quad [(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}) f]_l &= \left(- \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkl} \partial_j \partial_k \right) f = \left[- \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 (\epsilon_{jkl} \partial_j \partial_k + \epsilon_{jkl} \partial_j \partial_k) \right] f \\&= \left[- \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 (\epsilon_{jkl} \partial_j \partial_k + \epsilon_{kjl} \partial_k \partial_j) \right] f = \left[- \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 (\epsilon_{jkl} \partial_j \partial_k - \epsilon_{jkl} \partial_j \partial_k) \right] f \\&= 0 \qquad \qquad \qquad l = 1, 2, 3;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \quad [(\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{A}) f]_l &= -i \left(\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkl} \partial_j A_k \right) f = -i \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkl} \partial_j (A_k f) \\&= \left(-i \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkl} \partial_j A_k \right) f + \left(-i \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jkl} A_k \partial_j \right) f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i(\nabla \times \mathbf{A})_l f - \left[\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{kjl} A_k (-i\partial_j) \right] f \\
&= -i(\mathbf{B})_l f - (\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{p}})_l f \quad (l = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

Utilizando os resultados acima e (B.10) em (B.17) ficamos com

$$\begin{aligned}
(\varepsilon^2 - m^2)\varphi &= \left[\hat{\mathbf{p}}^2 - q\nabla \cdot \mathbf{A} - 2q\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}} + q^2 \mathbf{A}^2 \right] \varphi - q\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}\varphi \\
&= \left[\hat{\mathbf{p}}^2 + qB(y\hat{p}_x - x\hat{p}_y) + \frac{q^2 B^2}{4}(x^2 + y^2) - q\sigma_3 B \right] \varphi. \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

A matriz de Pauli σ_3 foi definida em (B.5) por

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.19})$$

Seus autovalores e autovetores são, respectivamente, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Além disso, u_1 e u_2 formam um conjunto completo, pois um spinor arbitrário $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, onde $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$, pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

Desta forma,

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \psi_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \psi_1(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_2(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \psi_1(\mathbf{x})u_1 + \psi_2(\mathbf{x})u_2. \quad (\text{B.21})$$

Substituindo (B.21) em (B.18) e usando $\sigma_3 u_1 = u_1$, $\sigma_3 u_2 = -u_2$:

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon^2 - m^2) [\psi_1(\mathbf{x})u_1 + \psi_2(\mathbf{x})u_2] \\
&= \left[\hat{\mathbf{p}}^2 + qB(y\hat{p}_x - x\hat{p}_y) + \frac{q^2 B^2}{4}(x^2 + y^2) - qB\sigma_3 \right] [\psi_1(\mathbf{x})u_1 + \psi_2(\mathbf{x})u_2] \\
&= \left[\hat{\mathbf{p}}^2 + qB(y\hat{p}_x - x\hat{p}_y) + \frac{q^2 B^2}{4}(x^2 + y^2) - qB \right] \psi_1(\mathbf{x})u_1 \\
&\quad + \left[\hat{\mathbf{p}}^2 + qB(y\hat{p}_x - x\hat{p}_y) + \frac{q^2 B^2}{4}(x^2 + y^2) + qB \right] \psi_2(\mathbf{x})u_2,
\end{aligned}$$

que leva às equações

$$\begin{aligned}
(\varepsilon^2 - m^2)\psi_1(\mathbf{x}) &= \left[\hat{\mathbf{p}}^2 + qB(y\hat{p}_x - x\hat{p}_y) + \frac{q^2B^2}{4}(x^2 + y^2) - qB \right] \psi_1(\mathbf{x}), \\
(\varepsilon^2 - m^2)\psi_2(\mathbf{x}) &= \left[\hat{\mathbf{p}}^2 + qB(y\hat{p}_x - x\hat{p}_y) + \frac{q^2B^2}{4}(x^2 + y^2) + qB \right] \psi_2(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Introduzindo a notação

$$\psi_1 = \psi_+, \quad \psi_2 = \psi_-, \quad \sigma_+ = 1, \quad \sigma_- = -1, \quad (\text{B.22})$$

as equações acima são escritas compactamente como

$$\begin{aligned}
(\varepsilon^2 - m^2)\psi_{\pm}(\mathbf{x}) \\
= \left[\hat{\mathbf{p}}^2 + qB(y\hat{p}_x - x\hat{p}_y) + \frac{q^2B^2}{4}(x^2 + y^2) - qB\sigma_{\pm} \right] \psi_{\pm}(\mathbf{x}). \quad (\text{B.23})
\end{aligned}$$

O lado direito da equação acima comuta com \hat{p}_z , sugerindo o *ansatz*

$$\psi_{\pm}(\mathbf{x}) = e^{ip_z z} f_{\pm}(x, y), \quad (\text{B.24})$$

que substituindo em (B.23) leva a

$$\begin{aligned}
(\varepsilon^2 - m^2)e^{ip_z z} f_{\pm}(x, y) = \\
\left[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 + qB(y\hat{p}_x - x\hat{p}_y) + \frac{q^2B^2}{4}(x^2 + y^2) - qB\sigma_{\pm} \right] e^{ip_z z} f_{\pm}(x, y).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon^2 - m^2 + qB\sigma_{\pm} - \hat{p}_z^2) f_{\pm}(x, y) = \\
\left[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + qB(y\hat{p}_x - x\hat{p}_y) + \frac{q^2B^2}{4}(x^2 + y^2) \right] f_{\pm}(x, y), \quad (\text{B.25})
\end{aligned}$$

que pode ser escrito compactamente como

$$\hat{H} f_{\pm}(x, y) = E f_{\pm}(x, y), \quad (\text{B.26})$$

onde $\hat{H} = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + qB(y\hat{p}_x - x\hat{p}_y) + \frac{q^2B^2}{4}(x^2 + y^2)$ e $E = \varepsilon^2 - m^2 + qB\sigma_{\pm} - \hat{p}_z^2$.

Definindo os operadores

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \frac{1}{\sqrt{2|q|B}} \left(i\hat{p}_x - \hat{p}_y + \frac{qB}{2}x + \frac{iqB}{2}y \right), \\ \tilde{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2|q|B}} \left(-i\hat{p}_x - \hat{p}_y + \frac{qB}{2}x - \frac{iqB}{2}y \right),\end{aligned}\tag{B.27}$$

temos

$$\begin{aligned}\tilde{a}\tilde{a}^\dagger &= \frac{1}{2|q|B} \left(i\hat{p}_x - \hat{p}_y + \frac{qB}{2}x + \frac{iqB}{2}y \right) \left(-i\hat{p}_x - \hat{p}_y + \frac{qB}{2}x - \frac{iqB}{2}y \right) \\ &= \frac{1}{2|q|B} \left(\hat{p}_x^2 - i\hat{p}_x\hat{p}_y + \frac{iqB}{2}\hat{p}_x x + \frac{qB}{2}\hat{p}_x y + i\hat{p}_y\hat{p}_x + \hat{p}_y^2 - \frac{qB}{2}\hat{p}_y x \right. \\ &\quad + \frac{iqB}{2}\hat{p}_y y - \frac{iqB}{2}x\hat{p}_x - \frac{qB}{2}x\hat{p}_y + \frac{q^2 B^2}{4}x^2 - \frac{iq^2 B^2}{4}xy + \frac{qB}{2}y\hat{p}_x \\ &\quad \left. - \frac{iqB}{2}y\hat{p}_y + \frac{iq^2 B^2}{4}yx + \frac{q^2 B^2}{4}y^2 \right) \\ &= \frac{1}{2|q|B} \left[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + qB(y\hat{p}_x - x\hat{p}_y) + \frac{q^2 B^2}{4}(x^2 + y^2) + \frac{iqB}{2}[\hat{p}_x, x] \right. \\ &\quad \left. + \frac{iqB}{2}[\hat{p}_y, y] \right] \\ &= \frac{1}{2|q|B} \left[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + qB(y\hat{p}_x - x\hat{p}_y) + \frac{q^2 B^2}{4}(x^2 + y^2) + qB \right],\end{aligned}\tag{B.28}$$

e a seguinte relação de comutação

$$\begin{aligned}[\tilde{a}, \tilde{a}] &= [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = \frac{1}{2|q|B} \left(\frac{iqB}{2}[\hat{p}_x, x] + \frac{iqB}{2}[\hat{p}_y, y] - \frac{iqB}{2}[x, \hat{p}_x] - \frac{iqB}{2}[y, \hat{p}_y] \right) \\ &= \frac{q}{|q|},\end{aligned}\tag{B.29}$$

que é a mesma relação de comutação dos operadores de levantamento e abaixamento do oscilador harmônico dependendo da interpretação de \tilde{a} e \tilde{a}^\dagger conforme q .

No caso em que $q = -|e|$, onde $|e|$ é a carga fundamental, definindo $a = \tilde{a}^\dagger$ e $a^\dagger = \tilde{a}$, segue $[a, a^\dagger] = -[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = |e|/|e| = 1$. Assim, interpretaremos a e a^\dagger como operadores de abaixamento e levantamento,

respectivamente.

De (B.26) e (B.28) segue que

$$\begin{aligned} a^\dagger a &= \frac{H}{2|e|B} - \frac{1}{2} \\ \therefore H &= 2|e|B \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

cujo espectro de autovalores é $E = 2|e|B \left(n + \frac{1}{2} \right)$, onde $n = 0, 1, \dots$. Então, segue de (B.26) que os níveis de energia de um elétron da presença de um campo magnético constante e uniforme são dados por

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 - m^2 - |e|B\sigma_\pm - p_z^2 &= 2|e|B \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ \therefore \varepsilon &= \pm \sqrt{m^2 + (2n + 1 - \sigma)|e|B + p_z^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e $\sigma = \pm 1$.

A equação (B.23) pode ser expressa sob a forma

$$(\varepsilon^2 - m^2 - |e|B\sigma_\pm)\psi_\pm(\mathbf{x}) = \left[\hat{\mathbf{p}}^2 + |e|B\hat{L}_z + \frac{|e|^2 B^2}{4}(x^2 + y^2) \right] \psi_\pm(\mathbf{x}),$$

a qual, escrita em coordenadas cilíndricas através do *ansatz*

$$\psi_\pm(\mathbf{x}) = e^{im_l\theta} e^{ip_z z} u_l(\rho), \quad (\text{B.32})$$

leva à equação

$$\begin{aligned} &(\varepsilon^2 - m^2 - |e|B\sigma_\pm) e^{im_l\theta} e^{ip_z z} u_l(\rho) \\ &= \left[-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - i|e|B \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{|e|^2 B^2}{4} \rho^2 \right] e^{im_l\theta} e^{ip_z z} u_l(\rho) \\ &= \left[-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{m_l^2}{\rho^2} + p_z^2 + |e|Bl + \frac{|e|^2 B^2}{4} \rho^2 \right] e^{im_l\theta} e^{ip_z z} u_l(\rho), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m_l^2}{\rho^2} - \frac{|e|^2 B^2}{4} \rho^2 \right] u_l(\rho) \\ &= -\left[\varepsilon^2 - m^2 - |e|B(m_l + \sigma_\pm) - p_z^2 \right] u_l(\rho). \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$x = \sqrt{\frac{|e|B}{2}} \rho, \quad (\text{B.34})$$

temos

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{m_l^2}{x^2} - x^2 + \lambda \right] u_l(x) = 0, \quad (\text{B.35})$$

onde

$$\lambda = \frac{2}{|e|B} \left[\varepsilon^2 - m^2 - |e|B(m_l + \sigma_{\pm}) - p_z^2 \right]. \quad (\text{B.36})$$

A análise dos comportamentos assintóticos $x \rightarrow \pm\infty$ da equação (B.35) e, bem como em torno da origem, sugerem o *ansatz*

$$u_l(x) = x^{|m_l|} e^{-x^2/2} G(x), \quad (\text{B.37})$$

que leva à seguinte equação para G

$$\frac{d^2 G(y)}{dy^2} + \left(\frac{|m_l| + 1}{y} - 1 \right) \frac{dG(y)}{dy} + \frac{\lambda - 2 - 2|m_l|}{4y} G(y) = 0, \quad (\text{B.38})$$

onde a mudança de variável $y = x^2$ foi efetuada.

A equação (B.38) possui como solução os polinômios associados de Laguerre

$$G(y) = L_{n_r}^{|m_l|}(y) = \sum_{k=0}^{n_r} \frac{(-1)^k (n_r + |m_l|)!}{(|m_l| + k)! (n_r - k)! k!} y^k, \quad (\text{B.39})$$

juntamente com a condição envolvendo os autovalores

$$\frac{1}{4} \lambda - \frac{1 + |m_l|}{2} = n_r, \quad (\text{B.40})$$

onde $n_r = 0, 1, 2, \dots$

De (B.36) e da condição acima obtém-se

$$\varepsilon = \pm \sqrt{m^2 + |e|B(2n_r + m_l + |m_l| + 1 + \sigma_{\pm}) + p_z^2}, \quad (\text{B.41})$$

resultado que concorda com (B.31) tomando-se $2n_r + m_l + |m_l| = 2n$.

Para efetuarmos a contagem de estados de momento linear e an-

gular, consideraremos a aproximação semiclássica da equação de Dirac. Desconsiderando-se a contribuição de projeção de spin σ e a energia de repouso do elétron, a expressão (B.41) torna-se, na aproximação não-relativística,

$$\varepsilon = \frac{|e|B}{2m}(2n_r + 1 + |m_l| + m_l + p_z^2). \quad (\text{B.42})$$

Além disso, a contagem será efetuada em intervalos de variação apreciáveis dos respectivos números quânticos Δn_z e Δm_l .

Impondo a condição de periodicidade

$$\psi_{\pm}(x, y, z) = \psi_{\pm}(x, y, z + L), \quad (\text{B.43})$$

segue de (B.32) que

$$\Delta n_z = \frac{L}{2\pi} \Delta p_z. \quad (\text{B.44})$$

A variação da energia em (B.42) só é significativa quando a quantidade $(2n_r + 1 + |m_l| + m_l + p_z^2)$ for grande. No caso em que $m_l < 0$, temos

$$\varepsilon = \frac{|e|B}{2m}(2n_r + 1 + p_z^2), \quad (\text{B.45})$$

e então n_r deve ser grande. Entretanto, à medida em que n_r cresce, o número de zeros do polinômio $L_{n_r}^{|m_l|}(y)$ também aumenta¹, o que significa que a densidade de probabilidade de localizar o elétron numa vizinhança de

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{|e|B}}x = \sqrt{\frac{2y}{|e|B}}, \quad (\text{B.46})$$

correspondente ao raio da órbita clássica, diminui. Devemos, desta forma, tomar $m_l \gg n > 0$.

¹A expressão assintótica dos polinômios de Laguerre é dada por

$$L_{n_r}^{|m_l|}(x^2) = \frac{n_r^{\frac{|m_l|}{2} - \frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^{|m_l| + \frac{1}{2}}} \cos\left(2\sqrt{n_r x^2} - \frac{\pi}{2} \left(|m_l| + \frac{1}{2}\right)\right) + \mathcal{O}\left(n_r^{\frac{|m_l|}{2} - \frac{3}{4}}\right).$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} L_{n_r}^{|m_l|}(y) &\sim \sum_{k=0}^{n_r} \frac{m_l!}{m_l!(n_r - k)!} \frac{(-1)^k y^k}{k!} = \frac{(-1)^{-n_r}}{n_r!} \sum_{k=0}^{n_r} \frac{(-1)^{n_r - k} n_r!}{k!(n_r - k)!} y^k, \\ &= \frac{(-1)^{n_r}}{n_r!} (y - 1)^{n_r}. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Portanto, a probabilidade

$$P(\rho) = |\psi_{\pm}(\rho, \phi, z)|^2 = |u_l(\rho)|^2 = \frac{x^{2m_l} e^{-x^2}}{(n_r!)^2} (1 - x^2)^{2n_r}, \quad (\text{B.48})$$

possui um valor máximo nos pontos em que

$$\frac{dP}{dx} = -2x(1 - x^2)^{2n_r - 1} x^{2m_l} e^{-x^2} f(x) = 0, \quad (\text{B.49})$$

onde $f(x) = 2n_r + (x^2 - 1)(m_l x^{-2} - 1)$ ou em $x = 0$, onde P não é diferenciável. Como P nunca assume valores negativos e P é nula em $x = 0$ e em $x = \pm 1$, segue que estes pontos são de mínimo. Além disso, (B.49) anula-se nas raízes do polinômio

$$x^4 - (2n_r + m_l + 1)x^2 + m_l = 0, \quad (\text{B.50})$$

que são dadas por

$$y = x^2 = \frac{(2n_r + 1 + m_l) \pm [(2n_r + 1 + m_l)^2 - 4m_l]^{1/2}}{2}, \quad (\text{B.51})$$

ou seja, $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{m_l}$. Pelo fato de $P(\pm\sqrt{m_l}) > 0$, conclui-se que os pontos $x = \pm\sqrt{m_l}$ são pontos de máximo.

Assim, a densidade de probabilidade de encontrar o elétron é máxima na vizinhança da órbita clássica de raio

$$\rho_c = \sqrt{\frac{2m_l}{|e|B}} = \sqrt{\frac{2L_z}{|e|B}}, \quad (\text{B.52})$$

onde associamos o autovalor m_l do operador de momento angular \hat{L}_z ao momento angular do elétron na órbita circular clássica. Desta forma,

$$\Delta m_l = \Delta L_z = \frac{|e|B}{2} \Delta(\rho_c^2) = |e|B\rho_c \Delta(\rho_c), \quad (\text{B.53})$$

mas pelo fato de

$$\begin{aligned} \Delta(\rho_c) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{eB} \right)^{1/2} \frac{\Delta L_z}{\sqrt{L_z}} = \frac{1}{2} \rho_c \frac{\Delta L_z}{L_z} = \frac{1}{2} \rho_c \frac{\Delta m_l}{m_l} \\ &\sim \frac{\rho_c}{2}, \quad (m_l \sim \Delta m_l \gg 1) \end{aligned}$$

segue que

$$\Delta m_l = \frac{|e|B}{2} \rho_c^2. \quad (\text{B.54})$$

Portanto, do resultado acima e de (B.44) temos

$$\Delta m_l \Delta n_z = \frac{|e|B}{2} \rho_c^2 \frac{L}{2\pi} \Delta p_z = \frac{|e|B}{(2\pi)^2} L(\pi \rho_c^2) \Delta p_z, = \frac{|e|B}{(2\pi)^2} V \Delta p_z,$$

e a densidade de estados encerrada pelo raio da órbita clássica é

$$\frac{\Delta m_l \Delta n_z}{V} = \frac{|e|B}{(2\pi)^2} \Delta p_z. \quad (\text{B.55})$$

REFERÊNCIAS

- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. [S.l.]: Academic Press, 2001.
- BERESTETSKII, V. B.; LIFSHITZ, E. M.; PITAEVSKII, L. P. *Quantum Electrodynamics*. [S.l.]: Butterworth and Heinemann, 1982.
- BOGOLIUBOV, N.; SHIRKOV, D. *Introduction to the Theory of Quantized Fields*. [S.l.]: John Wiley and Sons Inc., 1980.
- BONNEAU, G.; COSTA, L. C.; TOMAZELLI, J. L. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 47, p. 1764, 2008.
- BORN, M.; HEISENBERG, W.; JORDAN, P. *Zeits. für Phys.*, v. 35, p. 557, 1926.
- BORN, M.; INFELD, L. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 144, p. 425, 1934.
- BOYER, T. H. *Phys. Rev.*, v. 174, p. 1764, 1968.
- BRESSI, G. et al. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, p. 041804, 2002.
- CASIMIR, H. B. G. *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, v. 51, p. 793, 1948.
- COHEN-TANNOUJDI, C.; DUPONT-ROC, J.; GRYNBERG, G. *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*. [S.l.]: Wiley-VCH, 2004.
- COSTANTINI, V.; TOLLIS, B. D.; PISTONI, G. Nonlinear effects in quantum electrodynamics. *Il Nuovo Cimento*, v. 2A, n. 3, p. 733–787, 1971.
- DELBRÜCK, M. *Zeits. für Phys.*, v. 84, p. 144, 1933.
- DIRAC, P. A. M. *Canad. J. Math.*, v. 2, p. 129, 1950.
- DIRAC, P. A. M. *Lectures on Quantum Mechanics*. [S.l.]: Dover Publications, 2001.
- DITTRICH, W.; REUTER, M. *Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1985.
- EULER, H.; KOCKEL, B. *Naturwiss.*, v. 23, p. 246, 1935.

- FOCK, V. *Physik. Z. Sowjetunion*, v. 12, p. 404, 1937.
- GAVRILOV, S. P.; GITMAN, D. M.; TOMAZELLI, J. L. *Nucl. Phys. B*, v. 795, p. 645, 2008.
- GITMAN, D. M.; TYUTIN, I. V. *Quantization of Fields with Constraints*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1990. (Springer Series in Nuclear and Particle Physics).
- GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field Quantization*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1996.
- GUPTA, S. N. *Quantum Electrodynamics*. [S.l.]: Gordon and Breach, 1977.
- HALPERN, O. *Phys. Rev.*, v. 44, p. 885, 1934.
- HEISENBERG, W.; EULER, H. *Zeits. für Phys.*, v. 714, p. 714, 1936.
- HUGHES, R. J.; ANBJORN, J. *Nucl. Phys. B*, v. 217, p. 336, 1983.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J. *Quantum Field Theory*. [S.l.]: Dover Publications, 2005.
- JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1962.
- JAFFE, R. L. *Phys. Rev. D*, v. 72, p. 021301, 2005.
- JAUCH, J. M.; ROHRlich, F. *The Theory of Photons and Electrons*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1980.
- KARPLUS, R.; NEUMAN, M. Non-linear interactions between electromagnetic fields. *Physical Review*, v. 80, n. 3, p. 380–385, 1950.
- KNOPP, K. *Theory of Functions*. [S.l.]: Dover Publications, 1996.
- LAMOREAUX, S. K. *Physics Letters*, v. 78, p. 5, 1997.
- MANDL, F.; SHAW, G. *Quantum Field Theory*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1984.
- MOHIDEEN, U.; ROY, A. *Phys. Rev. Lett.*, v. 81, p. 4549, 1998.
- PAULI, W.; VILLARS, F. *Rev. Mod. Phys.*, v. 21, p. 434, 1949.
- PLUNIEN, G.; MÜLLER, B.; GREINER, W. *Physics Reports*, v. 134, p. 87, 1986.

RAYSKI, G. *Acta Phys. Polonica*, v. 9, p. 129, 1948.

ROHRLICH, F. *Classical Charged Particles*. [S.l.]: World Scientific Publishing, 2007.

SCHWEBER, S. S. *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. [S.l.]: Dover Publications, 2005.

SCHWINGER, J. *Phys. Rev.*, v. 82, p. 664, 1951.

SCHWINGER, J. *Lett. Math. Phys.*, v. 1, p. 43, 1975.

SPARNAAY, M. J. *Physica*, v. 24, p. 751, 1958.

WEISSKOPF, V. *Kgl. Danske Videnskab. Selskab*, v. 14, p. 1, 1936.

