

Fernando Luís Flach

VIBRAÇÃO TORCIONAL EM POWERTRAIN

Trabalho de Conclusão de Curso
submetido ao Programa de graduação
da Universidade Federal de Santa
Catarina para a obtenção do Grau de
Bacharel em Engenharia Automotiva.
Orientador: Prof. Dr. Sérgio Junichi
Idehara



Joinville
2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária
da UFSC.

FLACH, FERNANDO LUÍS
VIBRAÇÃO TORCIONAL EM POWERTRAIN / FERNANDO LUÍS FLACH
; orientador, SÉRGIO JUNICHI IDEHARA - Florianópolis, SC,
2014.

63 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Joinville.
Graduação em Engenharia Automotiva.

Inclui referências

1. Engenharia Automotiva. 2. RUIDO DE RATTLE. 3. MODELO
NUMÉRICO. 4. TESTES EXPERIMENTAIS . I. IDEHARA, SÉRGIO
JUNICHI. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Graduação em Engenharia Automotiva. III. Título.

Fernando Luís Flach

VIBRAÇÃO TORCIONAL EM POWERTRAIN

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Engenheiro Automotivo, e aprovado em sua forma final pelo Programa de graduação.

Joinville, 18 de julho de 2014.

Prof. Leonel Rincon Cancino, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Sérgio Junichi Idehara, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Eduardo Lenz Cardoso, Dr.
Universidade do Estado de Santa Catarina

Prof. Thiago Antonio Fiorentin, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina



Este trabalho é dedicado a minha querida esposa Luiza, aos meus colegas de classe e aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar todas as dificuldades durante a graduação.

A esta universidade, seu corpo docente, direção, administradores e demais servidores que oportunizaram e viabilizaram a realização do curso.

Ao meu orientador Sérgio Junichi Idehara pelo suporte, pelas correções e incentivos.

A Douglas Vinicius Lemes e sua equipe de engenharia da ZF do Brasil pela oportunidade de estágio, pelo apoio e pela estrutura disponibilizada para a realização dos testes experimentais.

Aos colegas Hugo Heidy Miyasato e Vinicius Gabriel Segala Simionatto da Universidade Estadual de Campinas pelas orientações e auxílio no Matlab.

A minha esposa Luiza Grazielle e meus pais Pedro e Lúcia pelo amor, compreensão e apoio em todas as dificuldades.

Aos meus amigos e colegas, principalmente Diego, Alberto e Alexandre pelo apoio em todas as horas e pelos inesquecíveis momentos de descontração.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.



“Uma pessoa inteligente resolve um problema, um sábio o previne”.

Albert Einstein

RESUMO

Com as evoluções tecnológicas e, também, devido às exigências dos consumidores, o conforto acústico no interior de veículos automotores vem sendo cada vez mais aprimorado, sendo uma das exigências no projeto de veículos. Neste sentido, busca-se fazer um estudo com base em modelagem matemática e comparação de dados experimentais para identificar qual a relação dos coeficientes elásticos das molas e do atrito da embreagem no amortecimento e na redução do ruído rattle, que ocorre nas engrenagens não sincronizadas da transmissão, visto que uma parcela considerável dos ruídos emitidos para o interior do veículo, além do ruído do motor, ainda é oriunda do sistema de transmissão.

Palavras-chave: Rattle. Caixa de transmissão. Impactos entre engrenagens. Modelo não-linear.



ABSTRACT

With technological developments and also due to consumer demand, the acoustic comfort inside of motor vehicles has been increasingly improved, one of the requirements in the design of vehicles. In this sense, we seek to make a study based on mathematical modeling and comparison of experimental data to identify what the relationship of the elastic coefficients of the springs and friction clutch in cushioning and reduce the rattle noise that occurs in the gears of unsynchronized transmission, since a considerable portion of the noise emitted into the vehicle, plus the engine noise is still coming from the transmission system.

Keywords: Rattle. Gearbox. Impacts between gears. Non-linear model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Exemplo dos principais componentes de um Powertrain.....	17
Figura 2 - Exemplo de curva do comportamento de pacote torcional de disco com dois estágios de amortecimento.....	20
Figura 3 - Tabela SAE para classificação de avaliações subjetivas de ruído.....	21
Figura 4 - Ilustração esquemática de powertrain.....	26
Figura 5 - Fotografia do volante (a direita) e do platô (a esquerda) utilizados no veículo sob análise.....	27
Figura 6 - Diagrama de corpo rígido do powertrain.....	28
Figura 7 - Diagrama de corpo livre do powertrain.....	29
Figura 8 - Pontos da instrumentação para medição da vibração torcional.....	31
Figura 9 - Sensor posicionado na cremalheira do volante através de furo na caixa seca.....	32
Figura 10 - Sensor posicionado na engrenagem solidária ao eixo da transmissão através de furo na caixa de transmissão.....	32
Figura 11 - Fotografias do Rotec, ilustrando os canais de entrada de sinais.....	33
Figura 12 - Máquina hidráulica de medições funcionais de disco.....	35
Figura 13 - Medição funcional de disco com bastante atrito, ilustrando a histerese.....	36
Figura 14 - Mapa de ordens do volante do motor para amostra 01.....	39
Figura 15 - Mapa de ordens do eixo primário da transmissão para amostra 01.....	39
Figura 16 - Mapa de ordens do eixo primário da transmissão para amostra 02.....	40
Figura 17 - Mapa de ordens do eixo primário da transmissão para amostra 03.....	40
Figura 18 - Mapa de ordens do eixo primário da transmissão para amostra 04.....	41
Figura 19 - Diagrama da segunda ordem do mapa de ordens da amostra 01 (sem atrito).....	42
Figura 20 - Diagrama da segunda ordem do mapa de ordens da amostra 02 (sem atrito).....	42
Figura 21 - Diagrama da segunda ordem do mapa de ordens da amostra 03 (com atrito).....	43
Figura 22 - Diagrama da segunda ordem do mapa de ordens da amostra 04 (com atrito).....	43

Figura 23 - Flutuações de velocidade para amostra 01 medidas na cremalheira do volante e no eixo primário da transmissão (sem atrito)...	44
Figura 24 - Flutuações de velocidade para amostra 02 (sem atrito).....	45
Figura 25 - Flutuações de velocidade para amostra 03 (com atrito).....	45
Figura 26 - Flutuações de velocidade para amostra 04 (com atrito).....	46
Figura 27 - Diagrama de corpo rígido com as inércias e rigidezes.....	47
Figura 28- Resposta da transmissão com força excitadora constante de 10 Hertz.....	50
Figura 29 - Resposta da transmissão com força excitadora constante de 70 Hertz.....	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Medições funcionais das amostras sob estudo.	35
Tabela 2 - Resumo dos resultados obtidos.....	48



LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ASCII – American Standard Code for Information Interchange

A. P. – Amortecimento principal

P. A. – Pré amortecimento

SAE – Society of Automotive Engineers

LISTA DE SÍMBOLOS

τ	Torque de excitação do powertrain
I_1	Inércia do volante do motor
I_2	Inércia da transmissão
I_3	Inércia do veículo
C_{12}	Amortecimento de atrito do disco
C_{23}	Amortecimento de atrito da transmissão
K_{12}	Rigidez do pacote torcional
K_{12}	Rigidez dos semi-eixos
θ_1	Deslocamento angular do volante
θ_2	Deslocamento angular da transmissão
θ_3	Deslocamento angular da roda do veículo
$\dot{\theta}_1$	Velocidade angular do volante
$\dot{\theta}_2$	Velocidade angular da transmissão
$\dot{\theta}_3$	Velocidade angular da roda do veículo
$\ddot{\theta}_1$	Aceleração angular do volante
$\ddot{\theta}_2$	Aceleração angular da transmissão
$\ddot{\theta}_3$	Aceleração angular da roda do veículo
m	Massa do veículo
r_d	Raio dinâmico da roda
i_d	Relação do diferencial
i_t	Relação da marcha selecionada da transmissão
I_v	Inércia equivalente do volante
$K_{paralelo}$	Rigidez em paralelo
$K_{eq.}$	Rigidez equivalente
f_{NT}	Frequência natural do powertrain
N_{motor}	Rotação do motor
$CalcS$	Velocidade calculada
T	Tempo integrado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	15
1.1	OBJETIVOS.....	16
1.1.1	Objetivo Geral.....	16
1.1.2	Objetivos Específicos.....	16
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	17
2.1	CONCEITOS GERAIS.....	17
2.2	GERAÇÃO DO RUÍDO DE RATTLE.....	19
2.3	MODELAGEM DE POWERTRAIN.....	22
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	26
3.1	MODELAGEM.....	26
4	MATERIAIS E MÉTODOS.....	31
4.1	INSTRUMENTAÇÃO DO VEÍCULO.....	31
4.2	DADOS DO TRÊM DE POTÊNCIA.....	34
5	RESULTADOS.....	38
5.1	RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....	38
5.2	RESULTADOS TEÓRICOS.....	46
5.2.1	Simulação temporal.....	48
6	CONCLUSÃO.....	51
	REFERÊNCIAS.....	52
	ANEXO A – CÓDIGO PRINCIPAL DO MATLAB.....	53
	ANEXO B – FUNÇÃO MATRIZES DO MATLAB.....	59
	ANEXO C – FUNÇÃO EXCIT DO MATLAB.....	60
	ANEXO D – HELP ODE45 MATLAB.....	61
	ANEXO E – HELP EIG MATLAB.....	63

INTRODUÇÃO

As flutuações dinâmicas de torque e velocidade nos motores a combustão interna são uma característica inevitável desses motores. Por consequência, essas máquinas terão sempre vibrações angulares associadas ao seu funcionamento. Desta forma, para garantir o conforto dos usuários de veículos automotores, bem como a durabilidade dos componentes de transmissão de torque, muitos esforços são necessários para eliminar ou atenuar os problemas relacionadas a essas flutuações. Vários estudos, bem como diferentes princípios de solução, para resolver esse tipo de problema, vêm sendo gerados nas indústrias e, principalmente, nas universidades.

Cada configuração de motor apresenta suas características peculiares. Motores quatro tempos de quatro cilindros, por exemplo, geram duas combustões por revolução do virabrequim, enquanto um motor quatro tempos de seis cilindros gera três. Desta forma, a frequência com que ocorrem as flutuações está intimamente ligado ao número de cilindros do motor. Da mesma maneira, diferentes tipos de motores apresentam amplitudes de vibração distintos. Tudo isso mostra que dificilmente é possível gerar uma solução única para resolver este problema.

Ao decorrer das últimas décadas, com o avanço das exigências dos consumidores, bem como com as normas relacionadas a acústica, principalmente no interior dos veículos, montadoras e sistemistas de componentes de powertrain foram investindo muitos recursos humanos e financeiros para tornar todo sistema de geração e transferência de potência nos veículos mais robustos no que diz respeito a vibrações e geração de ruídos. Volantes de dupla massa e discos de torção com amortecimento torcional são exemplos das evoluções conseguidas nesse setor.

Na indústria, no entanto, muitos esforços ainda são concentrados na confecção de protótipos e amostras que posteriormente passam por baterias de testes experimentais para identificação da resposta do powertrain quando este é excitado por um motor convencional de um dado veículo. A grande dificuldade é a ampla gama de aplicações que existem dentro do setor automotivo, todas elas com suas particularidades e configurações. Assim, para validação e liberação de produtos é inevitável que sejam altos os investimentos em testes.

A quantidade de testes e, conseqüentemente, investimentos poderia ser significativamente reduzida se as diferentes configurações e, portanto, diferentes comportamentos de powertrain pudessem ser simuladas

numericamente. Nesse sentido, este estudo, realizado em parceria com uma fabricante de discos de torção com amortecimento para veículos de passeio e também veículos comerciais, objetiva a confecção de amostras com diferentes configurações, realização de testes experimentais controlados em veículo de passeio para posteriormente desenvolvimento de uma ferramenta numérica que possa ser empregada na concepção de novos produtos reduzindo custo e tempo. Esses objetivos são melhor descritos como segue.

1.1 OBJETIVOS

Objetiva-se identificar e estudar os parâmetros físicos passíveis de modificações nos projetos da embreagem que podem contribuir para geração ou redução do ruído de rattle. Também, estudar as características do powertrain para usá-las nas modelagens numéricas.

1.1.1 Objetivo Geral

Diante da proposta da combinação apropriada dos parâmetros físicos da embreagem para evitar o ruído de rattle, o presente trabalho objetiva elaborar e validar um modelo numérico não-linear que permita estabelecer uma relação entre os parâmetros da embreagem, as características do powertrain e do veículo em relação a geração de ruído. Modelo este que possa ser uma ferramenta no desenvolvimento e controle das vibrações torcionais no trem de potência de veículos.

1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos do trabalho são:

- Gerar um modelo numérico;
- Medir a vibração torcional em veículo;
- Ajustar o modelo com os dados experimentais;
- Simular a resposta temporal do sistema não linear.

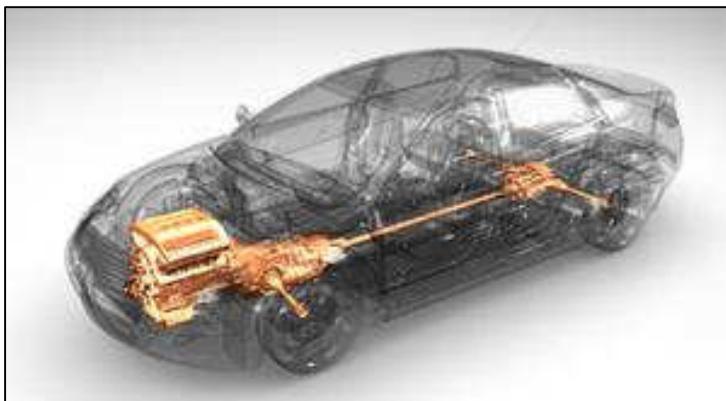
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 CONCEITOS GERAIS

O powertrain, ou trem de potência, de qualquer tipo de veículo automotor é a denominação dada ao grupo de componentes que geram e conduzem potência até a superfície de rodagem, água ou ar em veículos motorizados, ou seja, são os elementos necessários para executar a locomoção. Em um veículo automotor terrestre de uso cotidiano, como um carro de passeio ou um veículo comercial, por exemplo, ele inclui o motor, a transmissão, os eixos, diferenciais, relação final e as rodas de tração.

A Figura 1 destaca, na coloração laranja, os principais componentes do powertrain de um veículo de passeio que apresenta na sua configuração motorização frontal e tração integral (possibilidade de tração nas quatro rodas).

Figura 1 - Exemplo dos principais componentes de um Powertrain.



Fonte: <https://www.dowcorning.com/images/auto/autoengine/AP-2-PT-Powertrain-Solutions-Header-518-163.jpg>. Acesso em: 19 dez. 2013.

Há diferentes tipos de motorização para as diversas categorias e configurações de veículos automotores, sendo no entanto, a grande maioria absoluta os veículos terrestres rodoviários movidos a motores de combustão interna.

Segundo um estudo com dados até 2013, a frota circulante brasileira registrada de veículos automotores, movidos a motores de combustão interna foi de 40,1 milhões de unidades, entre veículos de passeio, comerciais leves, caminhões e ônibus. Segundo este mesmo estudo do Sindipeças (2014), a frota apresentou crescimento de 5,7% em relação ao ano de 2012.

Os motores a combustão interna apresentam, devido às suas características funcionais, flutuações dinâmicas de rotação e torque. Quando os pistões comprimem os gases dentro da câmara de combustão os mesmos usam da energia cinética dos elementos em movimento de rotação para fazer este trabalho de compressão perdendo, com isso, torque e rotação. Quando a mistura anteriormente comprimida entra em combustão, há a conversão da energia da explosão em trabalho de movimento do pistão resultando em um acréscimo na velocidade de rotação do conjunto girante e produzindo um aumento de torque disponível no eixo do motor.

Desta maneira, é inevitável que motores a combustão interna apresentem flutuações dinâmicas de velocidade de rotação e torque, gerando assim vibrações torcionais que se manifestam no volante do motor. Vibrações torcionais são vibrações angulares que ocorrem em objetos submetidos a rotação. Ocorrem, geralmente, no eixo de rotação de elementos girantes que apresentem oscilações de torque e velocidade. As vibrações torcionais, associada às flutuações dinâmicas de torque e velocidade no volante do motor necessitam ser atenuadas para evitar que se propagem para os demais componentes do powertrain. A atenuação das vibrações torcionais é uma das funções mais importantes das embreagens dos veículos. Muitos recursos humanos e financeiros estão sendo empregados na indústria para desenvolvimento de embreagens cada vez mais eficientes no que diz respeito a amortecimento torcional.

Se essas vibrações não forem atenuadas suficientemente, atingindo a transmissão e demais elementos do powertrain do veículo, podem ocasionar sérios problemas de durabilidade e também de reclamações de usuários devido aos desconfortos no interior do veículo. Os desconfortos reclamados pelos usuários relacionados às vibrações torcionais são trepidações da embreagem, trepidações de componentes no interior do veículo, tais como componentes do painel e além dos desconfortos acústicos (ruídos) produzidos nos componentes do powertrain, principalmente na caixa de transmissão.

Um dos ruídos mais característicos, produzidos pela não atenuação ou pela atenuação insuficiente da vibração torcional, que se manifesta na caixa de transmissão é conhecido como ruído de rattle.

2.2 GERAÇÃO DO RUÍDO DE RATTLE

Segundo Kadmiri et al. (2012), rattle é o ruído gerado pelo choque entre as engrenagens que não submetidas a transmissão de torque na caixa de engrenagens, devido às vibrações torcionais oriundas das flutuações dinâmicas de torque de motores a combustão.

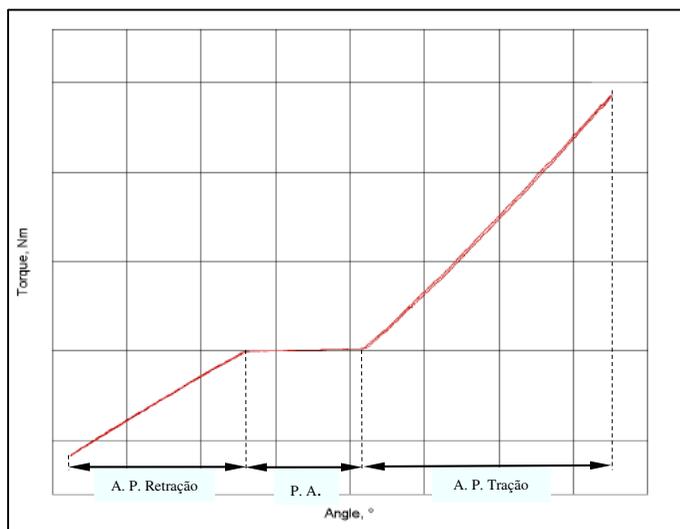
A manifestação do ruído de rattle é muito característica. Ele se apresenta como se fosse um chocalho, forma que as vezes também é chamado. Ouve-se choques metálicos de altas frequências entre os dentes das engrenagens da caixa de transmissão.

O ruído de rattle, além do desconforto acústico, causa aos usuários uma sensação de insegurança e de que há componentes soltos no powertrain. No entanto, todos os sistemas engrenados ou devido ao projeto ou devido a tolerâncias de fabricação e/ou desgaste mecânico apresentam algum tipo de folga. Essas folgas entre as engrenagens engrenadas induzem vibro-impactos ou rattle, levando os sistemas rotativos a vibração excessiva, ruídos e cargas dinâmicas, ocasionando fadiga mecânica.

A condição de marcha lenta é favorável para a ocorrência do ruído rattle, visto que nenhum dos pares de engrenagens da caixa de transmissão está sujeito a transmissão de torque e velocidade. Assim vibrações torcionais insuficientemente atenuadas que chegam ao eixo primário da caixa de engrenagens encontram todas os pares de engrenagens propícios a contribuir na geração de rattle.

A condição de marcha lenta, conhecida por idle, ocorre, por exemplo, quando paramos com o carro num sinal vermelho numa via urbana. Quando em idle o torque do motor e, conseqüentemente, a magnitude dos picos de oscilação dinâmica de velocidade e torque são menores. Desta maneira, a grande maioria dos discos, principalmente de veículos de passeio, tem dois estágios dentro do seu pacote torcional, como pode ser visto na figura 2. O primeiro estágio é conhecido como pacote torcional de pré amortecimento (P.A.), visto que este possui molas com menor rigidez e atrito menor. O segundo estágio, conhecido como amortecimento principal (A.P.), por sua vez, possui molas de maior rigidez, projetadas para suportar o torque máximo do motor, amortecendo as vibrações torcionais quando o torque do motor é superior a condição de idle. Vale ressaltar, no entanto, que o segundo estágio é composto por duas faixas, conhecidas como amortecimento principal lado da retração e amortecimento principal lado da tração, como indicado na figura 2.

Figura 2 - Exemplo de curva do comportamento de pacote torcional de disco com dois estágios de amortecimento.



Fonte: Autor.

Além da condição de marcha lenta, existem outras condições nas quais o motor pode excitar a transmissão e o powertrain numa frequência que case com a frequência natural do sistema gerando rattle. A condição de creeping, por exemplo, é aquela na qual o veículo se desloca com o motor em marcha lenta com uma marcha engatada. Nesta condição ocorre a transição entre o pré amortecimento e amortecimento principal. Passa-se por uma região de instabilidade, pois as flutuações de torque do motor por vezes acionam somente o pacote do pré amortecimento ou do amortecimento principal acionado quando ocorrem picos de torque do motor superiores aos projetados para o pré amortecimento.

A condição de tração (drive), utilizada na maior parte do tempo na direção do veículo é aquela na qual há fluxo de torque do motor para as rodas do veículo, passando pela transmissão, excitando todo conjunto powertrain. Nos testes veiculares, costuma-se avaliar esta condição acionando totalmente o pedal do acelerador e controlando a rotação do motor através de carga, pelo pedal de freio, no sistema de frenagem do veículo. Procura-se começar com baixas rotações e, ao liberar lentamente a carga imposta com o freio, varrer toda faixa de rotação de operação do motor do veículo, a fim de excitar o powertrain com a maior faixa de

frequências possível. Esta, em particular, será a condição analisada neste trabalho.

Já no caso de retração (coast), o fluxo de torque é no sentido oposto do que ocorre na condição de drive. Ou seja, o fluxo de torque vai das rodas de tração para o motor, condição conhecida também por freio motor. O amortecimento das vibrações torcionais nesta condição é dado pela rigidez e atrito projetados especificamente para o lado de retração do pacote torcional do disco. Para a realização do teste desta condição, leva-se o veículo a uma certa velocidade e deixa-se o mesmo desacelerar por meio das forças de resistência ao movimento, varrendo desta forma da máxima rotação do motor até a marcha lenta.

Além destas condições, há ainda os momentos em que é dada a partida no motor do veículo (start) e quando o mesmo é desligado (stop). Nestas duas condições, se a embreagem estiver acoplada, o motor passa a excitar o powertrain com frequências abaixo da rotação de marcha lenta, podendo também gerar ruído de rattle.

O conjunto de teste para avaliar todas as condições descritas é conhecido como teste de tuning. Neste teste, avaliadores treinados avaliam de forma subjetiva, segundo os critérios da SAE da figura 3, o ruído de rattle que percebem dentro do veículo, atribuindo notas entre 1 (não aceitável) e 10 (imperceptível).

Figura 3 - Tabela SAE para classificação de avaliações subjetivas de ruído.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
UNACCEPTABLE				BORDER LINE	ACCEPTABLE				
CONDITION NOTED BY									
ALL OBSERVERS		MOST OBSERVERS		SOME OBSERVERS	CRITICAL OBSERVERS		TRAINED OBSERVERS		NOT OBSERVED
INTOLERABLE	SEVERE	VERY POOR	POOR	MARGINAL	BARELY ACCEPTABLE	FAIR	GOOD	VERY GOOD	EXCELLENT
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Fonte: SAE

2.3 MODELAGEM DE POWERTRAIN

Nos últimos anos muitos estudos e diferentes tipos de modelagens vêm sendo desenvolvidos por vários autores. O problema é abordado de diversas maneiras por esses autores. Alguns se preocupam apenas em apresentar uma descrição do mesmo, outros em apresentar modelos para representar o fenômeno de rattle e gerar uma solução que possa ser aplicada nas transmissões automotivas.

Segundo Steinel (2000), por exemplo, todos os testes de tuning além das avaliações subjetivas do ruído, com atribuição notas segundo a tabela da figura 3, deveriam sempre ser acompanhados de cálculos e simulações, além de medições de vibrações torcionais, uma vez que a avaliação subjetiva de ruído é muito sensível ao treinamento e também ao estado de humor do avaliador.

As simulações são ferramentas empregadas para a pré-seleção dos componentes da embreagem na fase conceitual do projeto. Já na fase de protótipos, o pacote torcional pode ser ajustado com uso de medição de vibrações, garantindo assim uma configuração ótima da embreagem para os fabricantes de veículos. Steinel (2000) baseou-se em exemplos específicos para identificar os parâmetros de embreagem que tem influência relevante no rattle e para identificação da correlação entre estes parâmetros.

Nesta mesma linha, Singh, Xie e Comparin (1989), por exemplo, descreveu um estudo do rattle na condição de marcha lenta tendo como base um veículo de passeio de cinco marchas com tração dianteira. Esse estudo, baseia-se na avaliação comparativa das acelerações angulares das engrenagens de saída e das engrenagens de entrada e nos deslocamentos relativos entre as engrenagens por meio de simulações numéricas.

Para realização deste estudo foi necessário primeiramente representar o problema e definir um número de graus de liberdade com o qual seria descrito. Segundo Singh, Xie e Comparin (1989), um modelo de quatro graus de liberdade é suficiente para a avaliação do rattle em marcha lenta. A partir do modelo foram descritas as equações de movimento do sistema para a implementação numérica e posteriores simulações. O modelo desenvolvido por Singh, Xie e Comparin (1989) visava a avaliação da influência das não-linearidades da embreagem na geração do rattle. Para isso, foi considerado pelos autores que as folgas existentes entre os dentes da transmissão eram constantes. Além disso, foram inicialmente definidos índices para que os resultados das simulações numéricas pudessem ser comparados quantitativamente

segundo um mesmo critério da ocorrência ou não ocorrência do ruído de rattle.

Além dos parâmetros de embreagem utilizados no amortecimento torcional, pesquisadores têm investigado e mostrado que há outras características do powertrain que contribuem na geração de rattle. A avaliação e otimização dessas características pode reduzir ou eliminar o fenômeno de geração de rattle em sistemas engrenados.

Um modelo dinâmico com vários parâmetros das engrenagens, incorporando os efeitos da variação no tempo e assimetria da rigidez de engrenamento e uma não-linearidade das folgas foi formulado por Chen, Shao e Lim (2012) para analisar a resposta de rattle em engrenagens ociosas. A teoria proposta assume uma função retangular variando no tempo da rigidez de engrenamento levando também em consideração a mudança de fase entre a rigidez de engrenamento para o contato para frente e para trás. Estudos numéricos foram usados pelos autores para examinar os efeitos das flutuações de torque do motor e superfícies de atrito dos dentes. Foram encontradas diferenças na comparação entre os resultados do modelo com rigidez de engrenamento variando no tempo proposto pelos autores e um modelo cuja rigidez não varia no tempo.

Uma investigação da influência de erros de fabricação no perfil dos dentes de engrenagens na geração de rattle foi realizada por Ottewill, Neild e Wilson (2010). O estudo foi baseado na derivação de uma equação de movimento incorporando uma função de erros e perdas na interface de engrenamento, através valores obtidos de dados experimentais. Pela solução das equações de movimento, trajetórias teóricas para as engrenagens com o rattle obtido. Essas trajetórias teóricas foram então comparadas com as trajetórias experimentais por meio de gráficos no domínio do tempo, bem como, por meio de gráficos de contorno relacionando a amplitude das oscilações das folgas com a amplitude e fase da força de entrada. Para a maioria das funções de erro de perfil, o modelo numérico obteve boa concordância com os dados experimentais.

Para a realização do estudo foram usadas engrenagens retificadas, extremamente precisas. Os erros nos dentes destas engrenagens produziam um pequeno erro estático de transmissão, um arco de 51 μm de comprimento no círculo do raio primitivo. Apesar do erro ser muito pequeno, os autores conseguiram mostrar a grande influência sobre a geração de rattle de erros de perfil nos dentes das engrenagens. Justificado por meio de uma série de teste, foi introduzido por Ottewill, Neild e Wilson (2010) um parâmetro de amortecimento no contato entre os dentes para incorporar no modelo as perdas de atrito que

ocorrem na superfície de engrenamento, tornando assim o modelo ainda mais próximo aos resultados de testes experimentais.

Rocca e Russo (2011) elaboraram uma investigação da influência da variação periódica nos limites da zona morta entre os dentes das engrenagens, causada pelos erros da transmissão, no fenômeno de rattle. O estudo apresenta uma avaliação de um modelo teórico que foi desenvolvido inicialmente pelos autores para analisar pares de engrenagens levemente carregadas, representando os efeitos da compressão do óleo lubrificante entre os dentes. Um equipamento de testes experimentais foi desenvolvido para estimar os parâmetros influentes dos erros da transmissão no problema. Para validar o modelo e comprovar sua robustez, várias correlações teórico-experimentais foram feitas com os parâmetros de erros da transmissão.

A influência no ruído de rattle dos efeitos do óleo lubrificante, necessário nas engrenagens de transmissões automotivas, também já foi amplamente investigada. Brancati, Rocca e Russo (2007), por exemplo, modelam de forma analítica em seu estudo os efeitos do amortecimento de choques entre os dentes das engrenagens devido à presença e compressão de óleo lubrificante na superfície de contato dos dentes.

Theodossiades, Tangasawi e Rahnejat (2007) apresentam em seus estudos a influência da lubrificação na vibração torcional de engrenagens ociosas, carregadas levemente apenas com o torque de arrasto que promove condições hidrodinâmicas viscosas. Os autores mostram que o filme de lubrificante nestas condições se comporta como um elemento não linear de amortecimento que varia no tempo, afetando fortemente a resposta do sistema, sendo a viscosidade um dos principais fatores desta modificação.

Kadmiri et al. (2012), por sua vez, modelaram os impactos entre os dentes de engrenagens não selecionadas por um coeficiente de restituição que descreve o amortecimento durante a compressão do filme lubrificante das superfícies se aproximando, e a deformação elástica dos corpos impactando. O torque de arrasto e o coeficiente de restituição, parâmetros desconhecidos necessários para o estudo, foram identificados experimentalmente pela implementação de dois encoders ópticos (sensores eletromecânicos que produzem pulsos elétricos a partir do movimento rotacional) em uma caixa de transmissão automotiva e operando-a em um teste de bancada específico para reproduzir um powertrain automotivo.

Assim, é possível constatar que ainda há diferentes maneiras de análise e, também, muitos parâmetros para serem investigados quando se trata da modelagem e resolução do problema do ruído de rattle em

transmissões automotivas e sistemas engrenados em geral. Neste sentido, o presente trabalho visa o desenvolvimento de um modelo matemático que consiga estabelecer uma boa relação entre os parâmetros da embreagem com o ruído de rattle. A modelagem matemática utilizada é descrita no próximo capítulo, sendo que a instrumentação utilizada no veículo, os respectivos resultados e conclusões nos capítulos seguintes.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

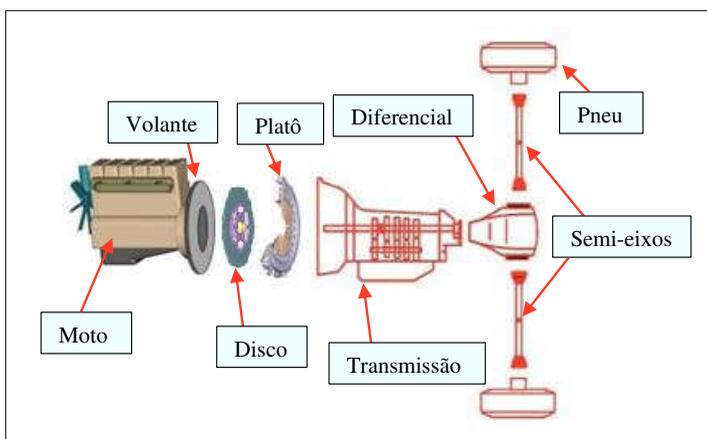
Para analisar a influência dos parâmetros do disco de embreagem na geração de rattle será desenvolvido, primeiramente, um modelo matemático para representar o sistema mecânico do powertrain, que posteriormente será integrado numericamente e ajustado através de dados de testes experimentais, a partir de discos de diferentes configurações de rigidez e atrito interno, realizados em um veículo de passeio.

3.1 MODELAGEM FÍSICA

O objetivo da modelagem matemática é tentar representar o powertrain do veículo com poucos graus de liberdade para que a influência da rigidez torcional e do atrito interno do disco sobre o amortecimento das vibrações torcionais, geradas pelas flutuações dinâmicas do motor, possa ser avaliada de forma quantitativa.

O modelo é desenvolvido a partir de um veículo popular leve, de tração dianteira com cinco marchas, cujo powertrain é ilustrado esquematicamente na figura 4. Partindo deste esquema, se desenvolve toda a análise começando pelo diagrama de corpo livre e posterior equacionamento. Para facilitar a modelagem e a posterior análise são assumidas algumas considerações e simplificações.

Figura 4 - Ilustração esquemática de powertrain.



Fonte: Autor.

A primeira consideração é em relação à inércia do volante do motor e do platô de embreagem. Visto que não há qualquer tipo de movimento entre estes dois componentes, pois o platô é fixado por parafusos ao volante e assim a inércia considerada será a soma das duas inércias. A figura 5 ilustra o volante e o platô utilizados no estudo.

Figura 5 - Fotografia do volante (a direita) e do platô (a esquerda) utilizados no veículo sob análise.



Fonte: Autor.

A massa do veículo, considerada no cubo das duas rodas, é revertida ao volante do motor, como uma inércia equivalente, considerando o raio dinâmico dos pneus de tração e a relação de transmissão do diferencial e a relação de transmissão da segunda marcha do veículo, sendo esta a marcha escolhida para as análises.

As inércias do diferencial e da transmissão (em segunda marcha) serão estimadas como uma única inércia aparente por meio da frequência natural do powertrain através dos testes experimentais, e considerando conhecido todos os demais parâmetros de massa e rigidez do powertrain, as quais serão calculados ou medidos em bancada antes da execução dos testes no veículo.

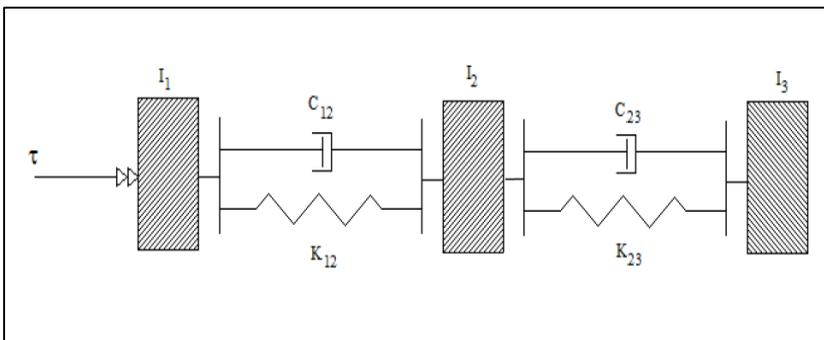
Outra observação a ser feita é que os dois semi-eixos terão sua rigidez combinadas como molas em paralelo, visto que a inércia do veículo é considerada no cubo da roda e o modelo não diferencia o

movimento entre elas, ou seja, sem considerar de forma independente o movimento de cada uma das rodas.

Após estas considerações o diagrama de corpo rígido do modelo já pode ser elaborado. Com as simplificações assumidas, um modelo com três graus de liberdade consegue representar o conjunto do powertrain do veículo, como ilustrado esquematicamente na figura 6. Onde τ representa a força excitadora (torque) das flutuações dinâmicas de torque no volante do motor, as inércias I_1 , I_2 e I_3 representam, respectivamente, o volante do motor, o sistema de transmissão em segunda marcha e a massa do veículo refletida ao motor. Os coeficientes C_{12} e C_{23} representam respectivamente os amortecimentos devido ao atrito do disco de embreagem e dos elementos entre a caixa de transmissão e o cubo da roda, enquanto K_{12} e K_{23} a rigidez do pacote torcional e rigidez associada aos semi-eixos, respectivamente.

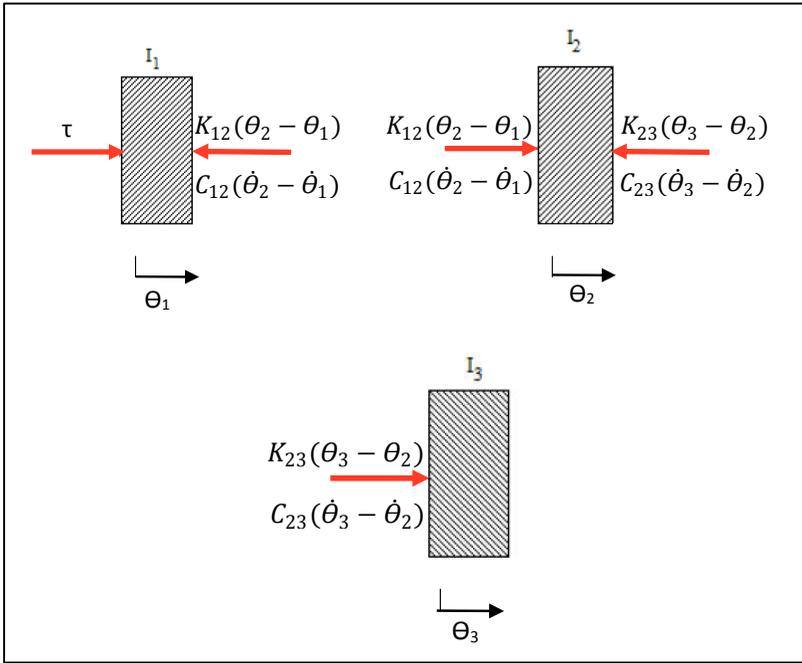
A partir deste modelo é obtido o diagrama de corpo livre que é utilizado para a confecção do modelo numérico. Para cada uma das massas inerciais é ilustrado na figura 7 o diagrama de corpo livre, onde θ_1 , θ_2 e θ_3 representam, respectivamente, os deslocamentos angulares das inércias I_1 , I_2 e I_3 enquanto $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ e $\dot{\theta}_3$ são, respectivamente, as velocidades de rotação da vibração torcional.

Figura 6 - Diagrama de corpo rígido do powertrain.



Fonte: Autor.

Figura 7 - Diagrama de corpo livre do powertrain.



Fonte: Autor.

Dos somatórios das forças de cada uma das massas inerciais dos diagramas de corpo livre são descritas as equações que governam o movimento do sistema, onde $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$ e $\ddot{\theta}_3$ são as acelerações angulares de cada uma das três inércias, como segue:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 = K_{12}(\theta_2 - \theta_1) + C_{12}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + \tau & (1) \\ I_2 \ddot{\theta}_2 = -K_{12}(\theta_2 - \theta_1) - C_{12}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) & (2) \\ \quad + K_{23}(\theta_3 - \theta_2) + C_{23}(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) \\ I_3 \ddot{\theta}_3 = -K_{23}(\theta_3 - \theta_2) - C_{23}(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) & (3) \end{cases}$$

As equações 1 a 3, que descrevem o comportamento do powertrain, podem também ser expressas na forma matricial para isolar as variáveis de interesse a serem investigadas, como segue:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{12} & -C_{12} & 0 \\ -C_{12} & C_{12} + C_{23} & -C_{23} \\ 0 & -C_{23} & C_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} K_{12} & -K_{12} & 0 \\ -K_{12} & K_{12} + K_{23} & -K_{23} \\ 0 & -K_{23} & K_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)
\end{aligned}$$

A equação 4 pode agora ser utilizada para obter os valores das acelerações angulares do powertrain para a avaliação quantitativa do rattle, por meio da integração numérica com o auxílio do Matlab. Para a integração numérica é utilizado o ODE45, ferramenta de integração disponível na biblioteca do programa Matlab, cujo help é apresentado no anexo D. Os parâmetros de rigidez, inércia e atrito, necessários para o estudo, serão todos baseados no veículo sob estudo.

Para estimar a inércia da transmissão e diferencial, ajustar o modelo e verificar sua eficiência foi necessário instrumentar o veículo para fazer as medições de interesse. Os demais dados e, também, os acima citados serão todos apresentados e melhor descritos no capítulo 4.

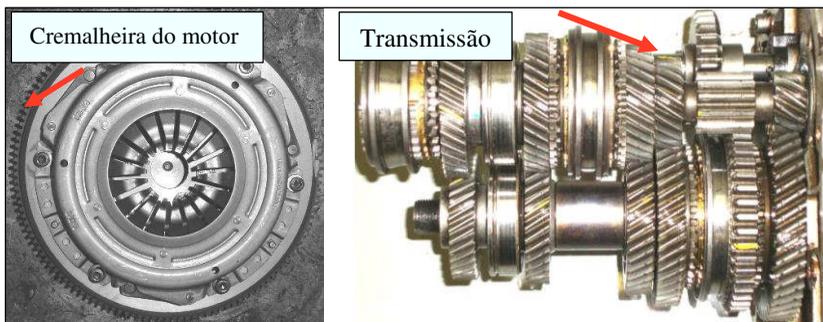
4 MATERIAIS E MÉTODOS

Para ajustar, validar e avaliar o modelo matemático foi necessária a realização de medições experimentais. Para a realização destas medições foi instrumentado o veículo popular de passeio de tração diante com câmbio de cinco marchas, equipado com motor Flex (quatro tempos) de quatro cilindros, veículo sob avaliação neste estudo. A instrumentação consiste basicamente de dois sensores magnéticos de velocidade, sistema de aquisição de sinais (Rotec), computador para posterior processamento e avaliação dos dados e cabeamentos.

4.1 INSTRUMENTAÇÃO DO VEÍCULO

Primeiramente, foram definidos os pontos de interesse nos quais seriam posicionados os sensores para aquisição dos sinais de rotação. Visto que o estudo foca na influência dos parâmetros da embreagem sobre a atenuação das vibrações torcionais, os pontos escolhidos para as aquisições foram a cremalheira do volante do motor e uma engrenagem solidária ao eixo primário da transmissão, elementos imediatamente antes e depois do disco de embreagem. Na figura 8 estão indicados os pontos onde os sensores farão as aquisições. Para o posicionamento dos dois sensores, foi necessário fazer furos na caixa seca para dar acesso a cremalheira do volante e na caixa de engrenagens para possibilitar o acesso a engrenagem do eixo primário, como visto na figura 9 e na figura 10, respectivamente.

Figura 8 - Pontos da instrumentação para medição da vibração torcional.



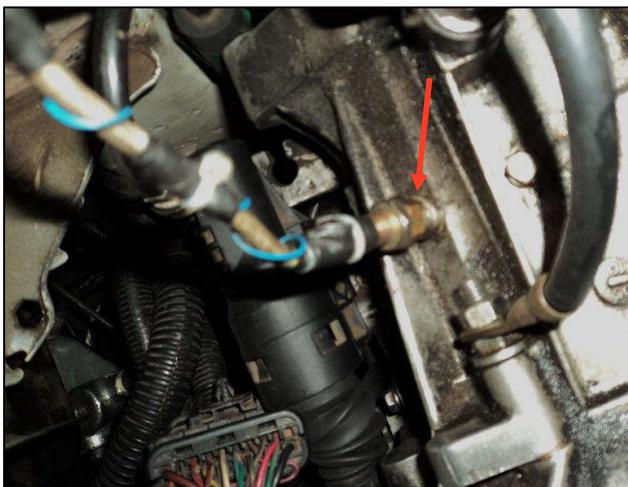
Fonte: Autor.

Figura 9 - Sensor posicionado na cremalheira do volante através de furo na caixa seca.



Fonte: Autor.

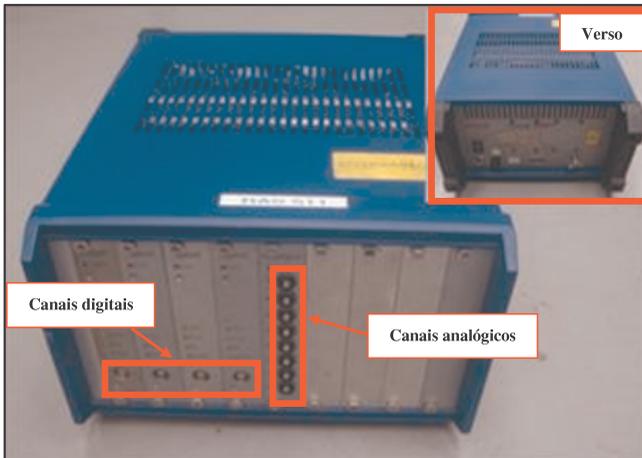
Figura 10 - Sensor posicionado na engrenagem solidária ao eixo da transmissão através de furo na caixa de transmissão.



Fonte: Autor.

Os sensores geram um pulso cada vez que identificam a passagem de um dente da engrenagem. O Rotec, figura 11, é uma ferramenta desenvolvida para a aquisição de sinais, especialmente para o estudo de vibrações mecânicas, que é instalado geralmente no banco traseiro do veículo durante a etapa do teste de tuning. É composto de várias placas que possuem entradas tanto para sinais digitais como para sinais analógicos, que podem ser utilizados de forma simultânea ou isolada. Para este estudo foram utilizadas somente duas entradas digitais para a leitura dos sinais dos dois sensores de velocidade.

Figura 11 - Fotografias do Rotec, ilustrando os canais de entrada de sinais.



Fonte: Autor.

Os dados enviados ao Rotec passam primeiramente por um pré processamento, o qual consiste em converter os pulsos em velocidade. O Rotec armazena, além dos pulsos, o tempo entre estes. Quando informado o número de dentes da engrenagem, o Rotec tem dados suficientes e a capacidade de calcular a velocidade instantânea do eixo na passagem de cada dente. Os dados pré processados são enviados ao computador para pós processamento em software específico do Rotec. Nesta etapa de pós processamento um grande número de combinações de análises e também gráficos podem ser executados. No entanto, neste estudo as análises serão mais restritas, interessando apenas o mapa de ordens do motor e as flutuações de velocidade no volante e no eixo piloto da transmissão.

Antes da montagem do conjunto de embreagem no veículo para a realização dos testes, o disco passa por medição funcional para verificação dos parâmetros físicos (rigidez torcional e atrito interno) que serão utilizados no ajuste do modelo. Os dados obtidos desta instrumentação e as respectivas análises são descritas no capítulo dos resultados.

4.2 DADOS DO TRÊM DE POTÊNCIA

Antes de fazer a simulação numérica é necessário fornecer ao modelo os dados reais do powertrain do veículo. Esses dados são oriundos, na sua maioria, do catálogo do fabricante do veículo e os demais são medidos em bancada ou calculados. O atrito interno do disco e a rigidez do pacote torcional são medidos, por exemplo, numa máquina hidráulica, visto na figura 12, que simula a compressão do disco contra o volante pelo platô equipada com células de carga e sensores de deslocamento angular. Por meio de um eixo estriado, com mesmo perfil do cubo do disco, a máquina fornece torque, medindo o deslocamento, e dessa maneira determinando a rigidez torcional do disco. Já o atrito, equivale a histerese entre as curvas de deslocamento para o acionamento e de liberação das molas do disco, como ilustrado na figura 13.

As amostras de disco utilizadas para este estudo foram medidas nesta máquina e as características funcionais de interesse (amortecimento principal lado da tração) são mostradas na tabela 1. Vale ressaltar que as amostras 01 e 02 são produzidas especialmente para avaliação de tuning com rigidez diferente uma da outra e com o mínimo atrito interno, possível para facilitar a identificação dos picos da frequência natural do powertrain nas avaliações de tuning e, também, para facilitar o ajuste do modelo numérico. Enquanto isso, as amostras 03 e 04 são peças normais de produção com atrito e rigidez conforme especificação de projeto, no entanto com atrito próximo ao mínimo e ao máximo especificado, respectivamente. A máquina gera tabelas e gráficos, sendo que o deslocamento é medido em graus, no entanto, para as análises a serem realizadas neste estudo é mais interessante tratar o deslocamento em radianos, como pode visto na tabela 1. Antes da medição todas as amostras passaram por uma série de ciclos de acionamento, em bancada de durabilidade, para garantir assentamento das peças e consequentemente do atrito interno.

Figura 12 - Máquina hidráulica de medições funcionais de disco.



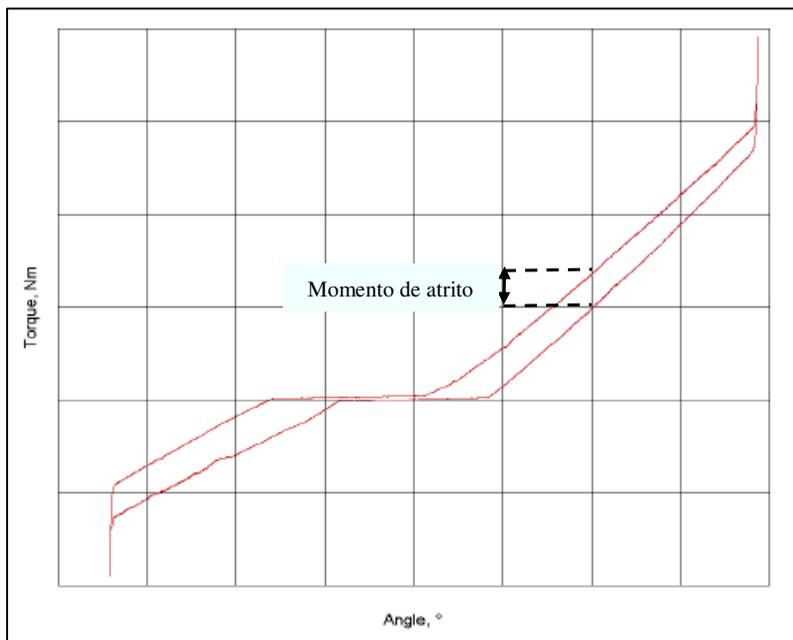
Fonte: Autor.

Tabela 1 - Medições funcionais das amostras sob estudo.

Amostra	01	02	03	04
Rigidez [Nm/rad]	504,20	721,90	504,20	492,75
Momento de atrito interno [Nm]	0,69	0,80	4,51	8,43

Fonte: Autor.

Figura 13 - Medição funcional de disco com bastante atrito, ilustrando a histerese.



Fonte: Autor.

Além da embreagem, os demais dados do powertrain precisam ser listados. O volante do motor, por exemplo, possui uma massa de 6,720 kg e a sua inércia é de 0,06009 kgm², enquanto a massa do platô e seu momento de inércia são 2,390 kg e 0,001442 kgm², respectivamente. Para este problema, como já mencionado anteriormente, será considerada a soma dos dois momentos de inércia, resultando numa inércia total de 0,061532 kgm².

Para facilitar as análises, a inércia da massa do veículo será revertida ao volante para fazer as análises em uma mesma referência. Para isso serão consideradas as relações de redução do diferencial (4,067) e da segunda marcha do veículo (2,24), ambas fornecidas pelo fabricante do veículo. O pneu utilizado no veículo é um 185/60R14, com raio dinâmico de 275 mm, aproximadamente. A massa do veículo é de 1.380 kg. Com esses dados inércia aparente do veículo I_v já pode ser calculada, como expresso pela equação 5, m é a massa do veículo, r_d o raio dinâmico do pneu, i_d e i_t são a relação de transmissão do diferencial e da segunda

marcha, respectivamente. Substituindo os valores na equação obtêm-se uma inércia de 1,257477 kgm².

$$I_v = \frac{m * r_d^2}{i_d^2 * i_t^2} \quad (5)$$

De forma similar a inércia do veículo, a rigidez dos semi-eixos também é revertida para a mesma referência (volante do motor) pelas relações do diferencial e da segunda marcha. Como os dois eixos possuem comprimentos diferentes e o mesmo diâmetro, a rigidez entre destes é distinta. No entanto, como o modelo não diferencia o movimento independente das rodas, a rigidez dos dois semi-eixos será considerada como sendo uma só por uma associação de molas em paralelo, ou seja, pela soma da rigidez de cada eixo. Segundo dados do fabricante do veículo, a rigidez do semi-eixo direito e esquerdo são, respectivamente, 2.922,10 Nm/rad e 4.812,85 Nm/rad e sua associação em paralelo $K_{paralelo}$ é de 7.734,95 Nm/rad. Essa rigidez, refletida ao lado primário da transmissão pela equação 6, é vista pelo volante como uma rigidez equivalente K_{eq} , igual a 93,20 Nm/rad.

$$K_{eq.} = \frac{K_{paralelo}}{i_d^2 * i_t^2} \quad (6)$$

O último parâmetro necessário para completar o modelo é a inércia da caixa de transmissão, na marcha selecionada, em conjunto com a inércia do diferencial. Este parâmetro será estimado em função dos resultados obtidos nos testes de tuning com as amostras 01 e 02, visto que os demais parâmetros de interesse do powertrain já são conhecidos. Assim, é necessário rodar os testes e fazer as análises sobre os resultados destes para concluir o modelo numérico.

5 RESULTADOS

A sequência dos testes foi a seguinte. Primeiramente foram feitas as medições funcionais das amostras de disco antes de serem instaladas no veículo para as avaliações práticas. Os resultados obtidos no veículo foram as medições com os sensores processados no rotec, ou seja, os resultados experimentais. Posteriormente, com estes resultados, foi feito o ajuste do modelo numérico para obtenção dos resultados teóricos.

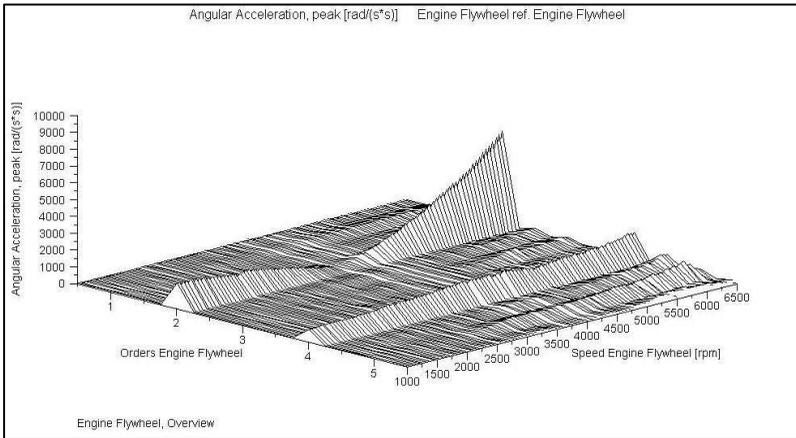
5.1 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Com o veículo instrumentado como descrito no capítulo 4, foram realizados os testes de tuning com as quatro amostras sob avaliação. Os sinais obtidos pelos sensores foram processados no Rotec e exportados de duas maneiras distintas, na forma de gráficos e na forma de tabelas no formato ASCII. Os gráficos correspondem as figuras a seguir, enquanto as tabelas foram salvas em arquivos Excel para auxiliar nas análises numéricas.

Para cada uma das quatro amostras foram obtidos, por exemplo, os mapas tridimensionais das ordens das vibrações do motor e da transmissão. A figura 14 ilustra a medição realizada com a amostra 01 com o sensor posicionado na cremalheira do volante do motor. As medições das flutuações dinâmicas do motor, para as quatro configurações de pacote torcional, apresentam-se muito similares entre si, como era de se esperar. Outra observação a ser feita é que entre as ordens a segunda é a mais significativa que é a ordem de excitação devido à combustão do motor, visto que o veículo é equipado com motor ciclo otto (gasolina/álcool), de quatro cilindros, correspondendo às duas combustões por revolução do virabrequim.

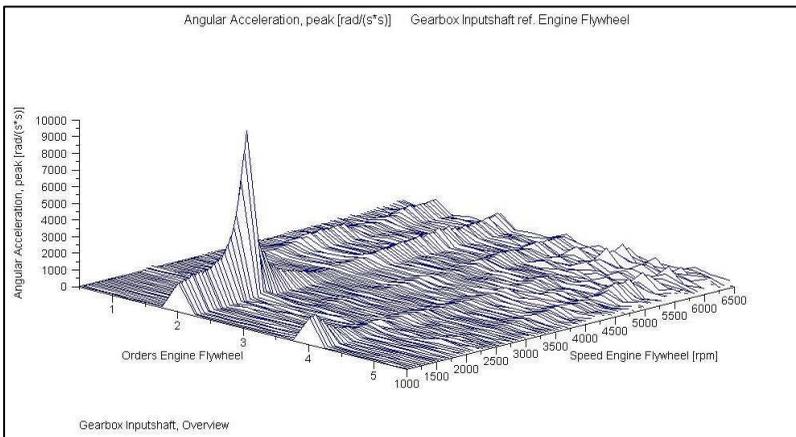
As figuras de 15 a 18 ilustram, para o mesmo intervalo de tempo, as medições realizadas com o sensor apontado para a engrenagem solidária ao eixo primário da transmissão para as amostras de 01 a 04, respectivamente. Observa-se que as diferentes configurações de pacote torcional induzem a transmissão a apresentar comportamentos significativamente distintos entre si. A figura 15, por exemplo, que ilustra o comportamento da transmissão quando o veículo é montado com a amostra 01, mostra claramente o pico de aceleração angular numa dada rotação. Esse pico corresponde a frequência natural de powertrain e, como ele ocorre dentro da faixa de rotação útil do motor é um exemplo muito nítido da ocorrência do ruído de rattle.

Figura 14 - Mapa de ordens do volante do motor para amostra 01.



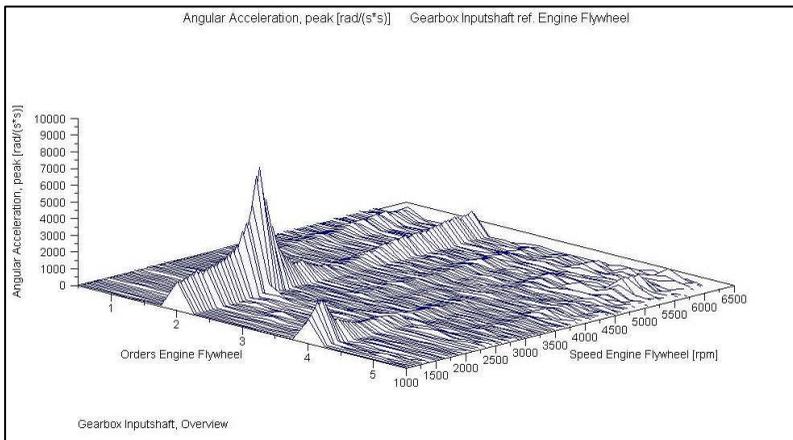
Fonte: Autor.

Figura 15 - Mapa de ordens do eixo primário da transmissão para amostra 01.



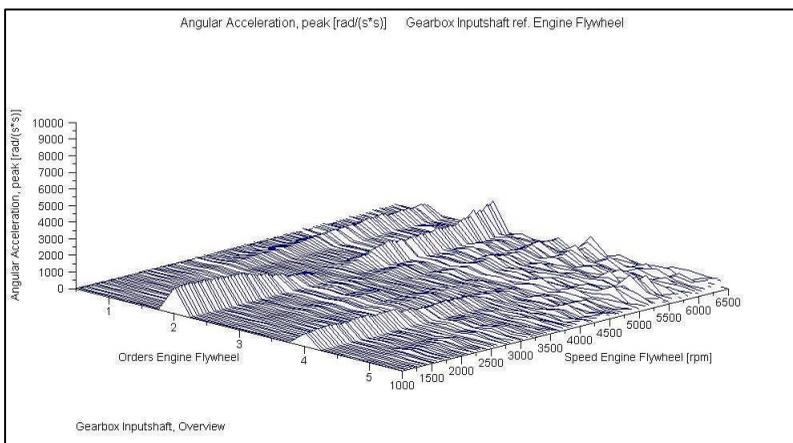
Fonte: Autor.

Figura 16 - Mapa de ordens do eixo primário da transmissão para amostra 02.



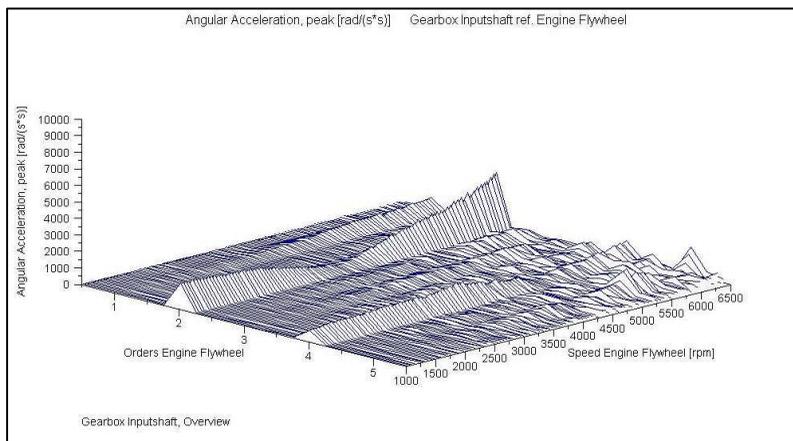
Fonte: Autor.

Figura 17 - Mapa de ordens do eixo primário da transmissão para amostra 03.



Fonte: Autor.

Figura 18 - Mapa de ordens do eixo primário da transmissão para amostra 04.



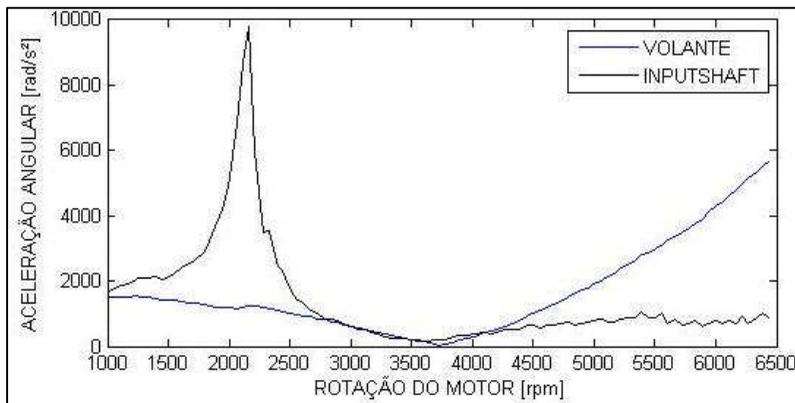
Fonte: Autor.

De forma similar a figura 15, a figura 16 (amostra 02) também ilustra um exemplo onde ruído de rattle pode ser constatado. Observa-se que a diferença de rigidez apenas deslocou a frequência natural para uma rotação mais alta, não afetando significativamente o pico da mesma. Enquanto isso, para as configurações das amostras 03 e 04 (figuras 17 e 18, respectivamente) fica evidente a influência do atrito interno do disco na resposta da transmissão às vibrações torcionais oriundas da combustão interna do motor. Observa-se que nos dois casos (amostras 03 e 04) a energia do pico da frequência natural, evidente nas amostras 01 e 02, é distribuída ao longo da faixa de rotação do motor. Com este comportamento, torna-se extremamente difícil ouvir qualquer indício do ruído de rattle para esta marcha.

Como dito anteriormente, a ordem que mais nos interessa é a segunda ordem, pois é a ordem de excitação devido à combustão. Para facilitar a visualização do comportamento vibratório do motor e sua influência sobre a resposta da transmissão, foram traçadas com o auxílio do Matlab, para cada uma das amostras, as curvas das acelerações angulares de segunda ordem, conforme ilustrada nas figuras 19 a 22. A curva azul é a medição realizada com o sensor da cremalheira do volante do motor e representa a excitação do sistema, enquanto a curva preta é a medição realizada com o sensor que está apontado para a engrenagem solidária a eixo primário da transmissão que representa a resposta do

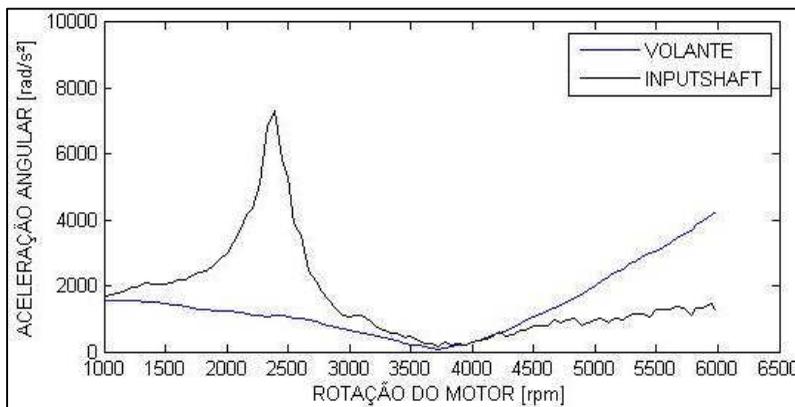
sistema (resposta do powertrain). Nas figuras de 19 a 22 verifica-se com mais facilidade que o comportamento do motor é praticamente o mesmo para as quatro configurações de disco, como já mencionado anteriormente.

Figura 19 - Diagrama da segunda ordem do mapa de ordens da amostra 01 (sem atrito).



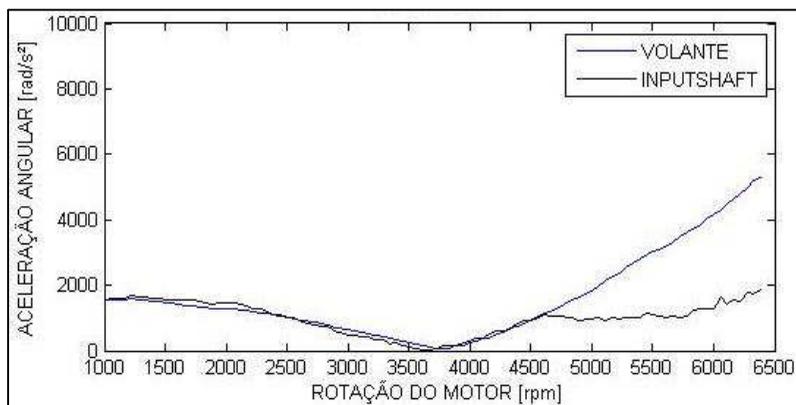
Fonte: Autor.

Figura 20 - Diagrama da segunda ordem do mapa de ordens da amostra 02 (sem atrito).



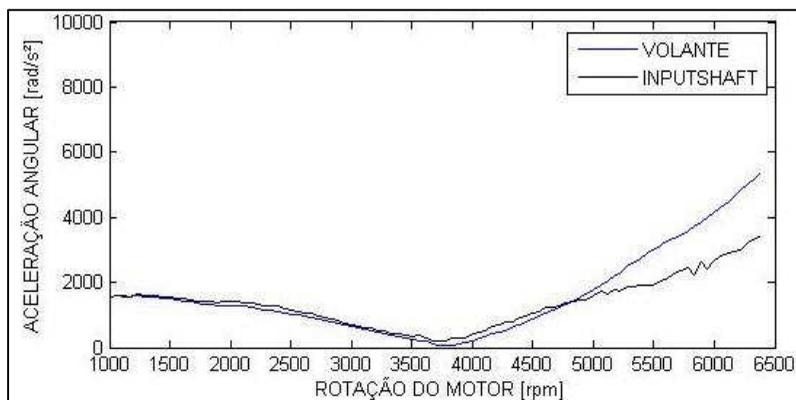
Fonte: Autor.

Figura 21 - Diagrama da segunda ordem do mapa de ordens da amostra 03 (com atrito).



Fonte: Autor.

Figura 22 - Diagrama da segunda ordem do mapa de ordens da amostra 04 (com atrito).



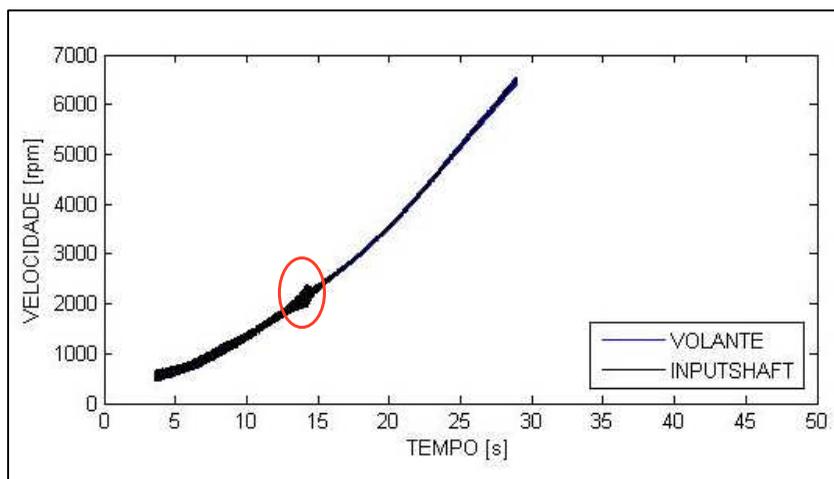
Fonte: Autor.

Outros gráficos que podem ser gerados com o auxílio do Matlab são o das flutuações da velocidade do volante e da transmissão em função do tempo de medição. As figuras de 23 a 26 ilustram o comportamento das flutuações de velocidade medidas com os sensores da cremalheira do

volante do motor e também da resposta da transmissão medida pelo sensor da mesma. A curva azul representa a velocidade do volante, enquanto a curva preta a velocidade da transmissão. Vale ressaltar que a inclinação da curva representa apenas o quão rápido foi varrida a faixa de rotação do veículo. As curvas da figura 23 e 25, por exemplo, representam, respectivamente, as medições realizadas com as amostras 01 e 03, nas quais o teste foi realizado de forma mais rápida que nas amostras 02 e 04. Observa-se que nas medições das amostras 01 e 02 (figuras 23 e 24), na mesma rotação que aparecem os picos de aceleração nas figuras 19 e 20, aparecem maiores amplitudes nas flutuações da velocidade do eixo piloto da transmissão, conforme circulado em vermelho.

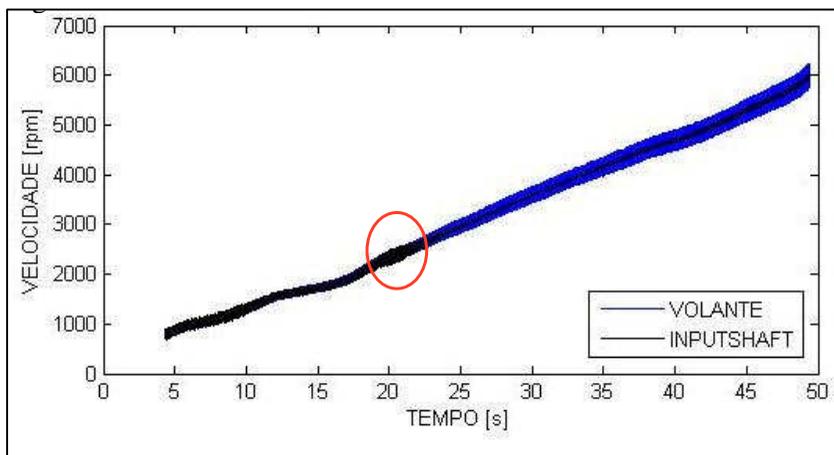
Os resultados das medições experimentais servirão de base para as simulações e análises teóricas. Os dados exportados na forma de tabelas de todas as medições realizadas são organizados na forma de arquivos na ferramenta Excel para posteriormente serem importados com o Matlab, conforme descrito no subcapítulo 5.2.

Figura 23 - Flutuações de velocidade para amostra 01 medidas na cremalheira do volante e no eixo primário da transmissão (sem atrito).



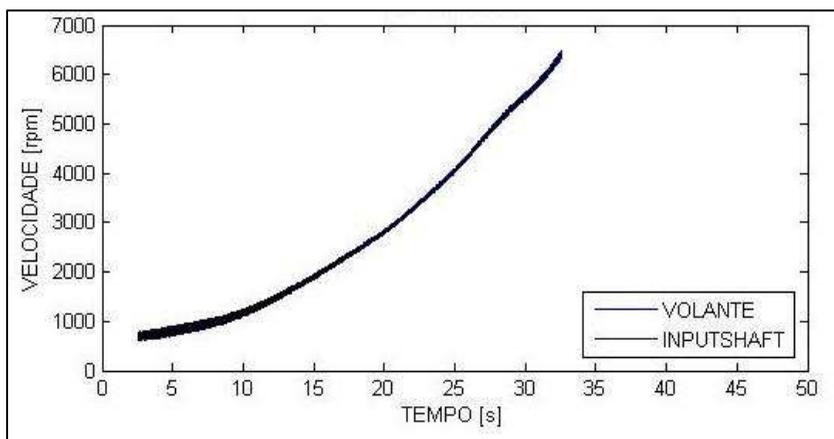
Fonte: Autor.

Figura 24 - Flutuações de velocidade para amostra 02 (sem atrito).



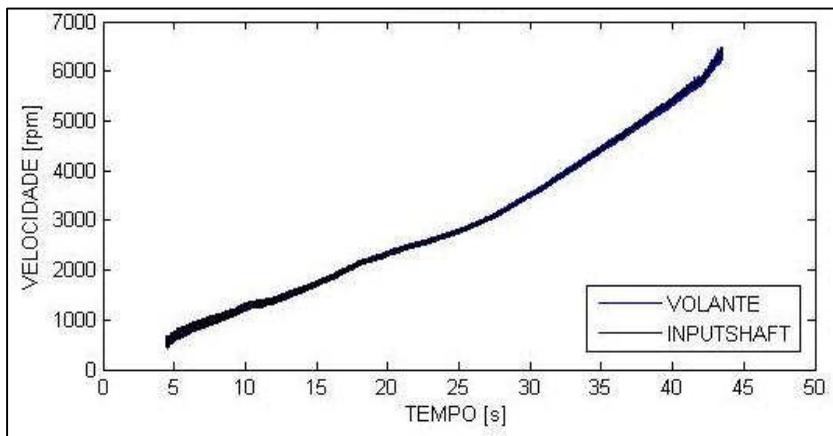
Fonte: Autor.

Figura 25 - Flutuações de velocidade para amostra 03 (com atrito).



Fonte: Autor.

Figura 26 - Flutuações de velocidade para amostra 04 (com atrito).



Fonte: Autor.

5.2 RESULTADOS TEÓRICOS

Os resultados teóricos são gerados com o auxílio dos códigos gerados no Matlab. O primeiro passo foi organizar os dados das medições da forma mais didática possível. Foram separadas em arquivos Excel as medições das flutuações de velocidade para cada uma das quatro amostras. Também foram organizados, da mesma maneira, os dados medidos das acelerações angulares do volante e da transmissão.

O próximo passo é a identificação da frequência natural do powertrain para uma das medições (neste caso da amostra 01), para a identificação da inércia da transmissão, visto que todas as demais massas do powertrain são conhecidas, bem como todas as rigidezes necessárias como mostrado no subcapítulo 4.1. Analisando os pontos na forma de tabela no Excel, observou-se que o pico da aceleração de 9.802 rad/s^2 ocorre com rotação de 2.120 rpm (figura 19). O dobro desta rotação, convertida em Hertz representa a frequência natural de vibração do powertrain, visto que o pico equivale a segunda ordem de vibração. Assim, pela equação 7, a frequência natural da transmissão é 70,66 Hz. Com o auxílio da ferramenta do código desenvolvido no Matlab com as matrizes de rigidez e inércia e com a função “eig”, cujo help é apresentado no anexo E, são calculados os autovalores do sistema que representam os modos de vibração do powertrain. O autovalor calculado

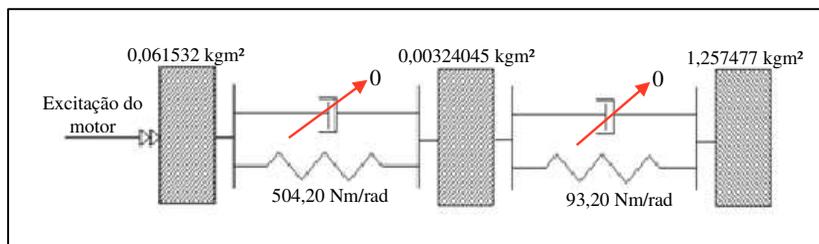
pelo “eig”, para a amostra 01 com 504,20 Nm/rad de rigidez torcional, deve ser ajustado até ficar igual aos 70,66 Hz da frequência natural do powertrain, pois esta é a condição para gerar ruído de rattle audível: excitar o powertrain na sua frequência natural

$$f_{NT} = \frac{N_{motor} * 2}{60}. \quad (7)$$

A inércia para a transmissão que ajusta o modelo numérico com a frequência natural medida do powertrain é de 0,00324045 kgm². Após ajustar a inércia da transmissão para o modelo com a amostra 01, a amostra 02 é utilizada para confirmar que o modelo realmente representa o comportamento vibratório do powertrain, conforme medição com o sensor da transmissão. De maneira similar ao que foi feito para a amostra 01, para a amostra 02 foi calculada, através da equação 7, a frequência natural da transmissão representada pelo pico medido no teste de tuning no veículo. O pico de 7.300 rad/s² ocorreu em 2.400 rpm (figura 20), o que significa que a frequência natural do powertrain é de 80 Hz para esta configuração de disco. A resposta do modelo numérico foi muito próxima, com aproximadamente 82 Hz.

A figura 27 ilustra o diagrama de corpo rígido, com os três graus de liberdade adotados na modelagem, com os valores encontrados no ajuste de modelo. Como já mencionado anteriormente, o modelo foi ajustado com a amostra 01 e sua representatividade foi confirmada com a amostra 02. Na figura 27 a rigidez do pacote torcional considerada é da amostra 01, onde o amortecimento de atrito interno foi desconsiderado. Já na tabela 2 mostra um resumo dos resultados obtidos com as medições experimentais em comparação com o modelo numérico.

Figura 27 - Diagrama de corpo rígido com as inércias e rigidezes.



Fonte: Autor.

Tabela 2 - Resumo dos resultados obtidos.

Amostra	Resultados Experimentais		Resultados do Modelo Numérico		
	Rigidez [Nm/rad]	Frequência Natural [Hz]	Inércia da transmissão [kgm ²]	Frequência Natural [Hz]	Erro [%]
01	504,20	70,66	0,00324045	70,6661	0,01
02	721,90	80,00	0,00324045	82,666	3,33

Fonte: Autor.

O erro calculado e expresso na tabela 2 representa a diferença entre a frequência natural do powertrain medida experimentalmente em relação a frequência natural dada pela simulação numérica e, é muito baixo visto que sua influência sobre a faixa de rotação do motor muito pequena. Esse erro pode estar associado a taxa amostral das medições da aceleração angular. Com a taxa amostral adotada, a medição da aceleração em relação a velocidade de rotação do motor para a amostra 01, por exemplo, é discretizada com apenas 96 pontos, comprometendo a precisão da identificação da rotação na qual se encontra o pico da frequência natural do powertrain. Essa imprecisão pode estar agregando um erro no ajuste da inércia da transmissão na medição realizada com a amostra 01, ou ainda, na rotação que representa o pico na segunda medição, que possui a mesma taxa amostral.

O código Matlab utilizado para os cálculos realizados nas análises numéricas e também para traçar as curvas dos testes experimentais consta no Anexo A.

5.2.1 Simulação temporal

O código do anexo A, código principal da plotagem dos gráficos dos dados experimentais, é usado também para integrar numericamente o modelo para obter a resposta temporal vibratória da transmissão com o modelo ajustado. A integração, feita com o auxílio do integrador numérico ODE45, necessita que as matrizes sejam escritas, primeiramente, na forma de estado para que possam ser usadas como entrada do integrador. Essa forma de estado é obtida com o auxílio da função matrizes, expressa no anexo B. Essa função recebe do arquivo principal (Anexo A), as matrizes de massa, inércia e a amortecimento (considerada igual a zero neste estudo). Além disso, recebe os vetores de tempo, posição e velocidade iniciais, atualizando a cada iteração esses vetores com as respostas integradas.

O vetor de forças excitadoras, usado no código do anexo B, é a resposta do código da função excit do anexo C. Essa função também é constantemente atualizada a cada instante de tempo da integração. A força excitadora, gerada pelas flutuações do motor, é calculada multiplicando a inércia do volante pelas amplitudes da aceleração angular do motor. Para estas análises foi considerada a amplitude média das flutuações medidas experimentalmente com a amostra 01. Além disso, ainda é inserido um tempo variante no tempo com amplitude constante.

No entanto, as respostas geradas pela integração um vetor de tempo e uma matriz da posição e da velocidade de cada uma das inércias do sistema. Para obter a aceleração da transmissão é necessário um passo a mais. Para isso, foi usado o comando `diff` do Matlab, que calculada a diferença entre dois pontos consecutivos de um vetor. Assim, calculando as diferenças entre os pontos da velocidade da transmissão e dividindo pelo vetor das diferenças entre os mesmos pontos do vetor de tempo, é obtida a aceleração instantânea da transmissão.

Para conseguir obter a resposta temporal das amplitudes das acelerações angulares da transmissão, em função da rotação do motor (de forma similar aos dados experimentais), foi necessário a criação de uma função que representação a velocidade de rotação do motor em função do tempo. Para, com o auxílio do Excel, foi criada uma curva de tendência a partir dos dados medidos experimentalmente com a amostra 01. A equação 8 é a equação desta curva de tendência, que calcula a velocidade *CalcS*, onde *T* é o tempo do integrador numérico.

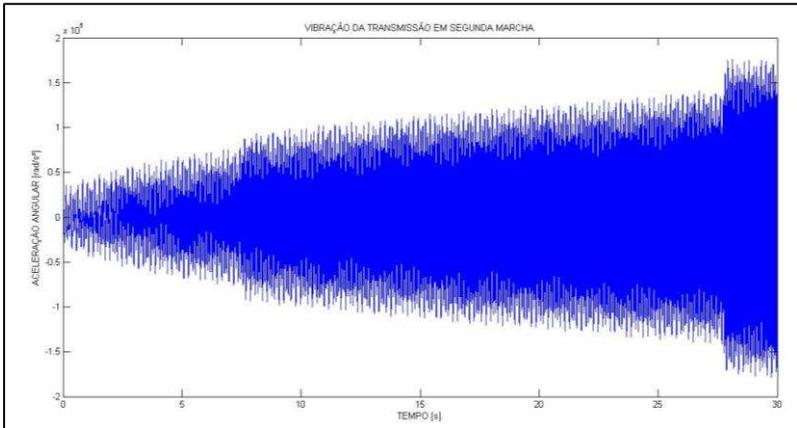
$$CalcS = -0,0319 * T.^3 + 7,4902 * T.^2 + 22,362 * T + 394,64 \quad (8)$$

A figura 28, por exemplo, ilustra a resposta vibratória da transmissão excitando o sistema com uma força excitadora, conforme descrito, com uma frequência constante de 10 Hertz. Vale ressaltar que as amplitudes da resposta do modelo matemático são superiores aos medidos experimentalmente devido ao erro inserido pelo integrador na integração da fase transiente do modelo, região na qual são excitadas as frequências naturais, que não são excitadas pelo experimentalmente.

De forma similar, na figura 29 é ilustrada e resposta quando o sistema é excitado com uma força com frequência de 70 Hz, próxima similar a frequência natural do powertrain (amostra 01). Novamente, na amplitude há componentes de frequências excitadas pelo modelo em regime transiente. O que pode ser observado neste exemplo, é que a resposta é similar a resposta de batimento, que ocorre quando um sistema é excitado na região sua frequência natural. Desta maneira, é possível

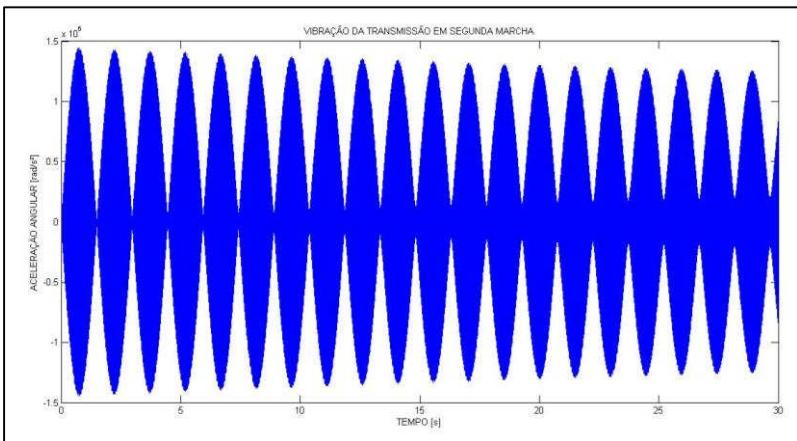
verificar que o modelo ajustado consegue descrever o real comportamento do powertrain.

Figura 28- Resposta da transmissão com força excitadora constante de 10 Hertz.



Fonte: Autor.

Figura 29 - Resposta da transmissão com força excitadora constante de 70 Hertz.



Fonte: Autor.

6 CONCLUSÃO

As medições realizadas nos testes experimentais de tuning mostram, claramente, a influência que os parâmetros de rigidez e atrito interno do disco de torção têm sobre a resposta do powertrain quando excitado dinamicamente pelas flutuações de torque e velocidade do motor. Também foi possível constatar que uma única medição, com uma amostra sem atrito, é suficiente para identificar a frequência natural do powertrain.

Foi possível atingir o objetivo, obtendo um modelo numérico, ajustá-lo com a medição experimental e constatar sua representatividade com uma segunda medição, também com uma amostra sem atrito. Mostrou-se, também, que o modelo de 3 graus de liberdade, adotado neste estudo, consegue representar de forma satisfatório o comportamento vibratório do powertrain, em função dos parâmetros físicos da embreagem, do veículo popular de passeio analisado, sendo que o erro encontrado é relacionado a taxa amostral adotada nas medições experimentais.

A resposta temporal também é representativa, apesar do erro associado ao regime transiente do integrador, que excita e soma frequências que não são excitadas experimentalmente à resposta do sistema.

Portanto, o modelo pode ser empregado para prever qual é a frequência natural do powertrain para qualquer rigidez de disco de embreagem, quando conhecidos os parâmetros conhecidos neste estudo, ajudando a engenharia no desenvolvimento do produto.

Em trabalhos futuros, uma maior precisão poderá ser atingida se aumentar a frequência amostral das medições das acelerações angulares em função da rotação, tornando o modelo numérico ainda mais preciso para toda faixa de rotação do motor. Além disso, para a resposta temporal, a eliminação do erro associado a parte transiente da simulação do modelo poderá gerar um resultado mais preciso.

REFERÊNCIAS

BRANCATI, R.; ROCCA, E.; RUSSO, R. An analysis of automotive driveline dynamic behavior focusing on the influence of the oil squeeze effect on the idle rattle phenomenon. *Journal of Sound and Vibration*, v.303, p. 858-872, mar. 2007.

CHEN, Z. G.; SHAO, Y. M.; LIM, T.C. Non-linear dynamic simulation of gear response under the idling condition. *International Journal of Automotive Technology*, v.13, n.4, p. 541-552, 2012.

KADMIRI et al. Experimental and numerical analysis of automotive gearbox. *Journal of Sound and Vibration*, v.331, p. 3144-3157, mar. 2012.

OTTEWILL, J. R.; NEILD, S. A.; WILSON, R. E. An investigation into the effect of tooth profile errors on gear rattle. *Journal of Sound and Vibration*, v.329, p. 3495-3506, abr. 2010.

ROCCA, E.; RUSSO, R. Theoretical and experimental investigation into the influence of the periodic backlash fluctuations on the gear rattle. *Journal of Sound and Vibration*, v.330, p. 4738-4752, mai. 2011.

SINDIPEÇAS. Relatório da Frota Circulante de 2014. Disponível em: <<http://www.sindipecas.org.br>>. Acesso em: 13 mai. 2014.

SINGH, R.; XIE, H.; COMPARIN, R. J. Analysis of automotive neutral gear rattle. *Journal of Sound and Vibration*, v.131, p. 177-196, 1989.

STEINEL, K. Clutch Tuning to Optimize Noise and Vibration Behavior in Trucks and Buses. In: IX CONGRESSO E EXPOSIÇÃO INTERNACIONAIS DE TECNOLOGIA DA MOBILIDADE, 1., 2000, São Paulo.

THEODOSSIADIS, S.; TANGASAWI, O.; RAHNEJAT, H. Gear teeth impacts in hydrodynamic conjunctions promoting idle gear rattle. *Journal of Sound and Vibration*, v.303, p. 632-658, abr. 2007.

ANEXO A – CÓDIGO PRINCIPAL DO MATLAB

```

clear all
close all
clc
ti = 0:0.001:30; % Vetor de tempo com amostragem
contante
y0 = [0 % Condições iniciais de deslocamento
0
0
0 % Condições iniciais de velocidade
0
0];

%% Matriz e variáveis das inércias do sistema
I1 = 0.0609;      % [Kgm²] INERCIA DO VOLANTE
I2 = 0.00314045; % [Kgm²] INERCIA DA TRANSMISSÃO
I3 = 1.257477;   % [Kgm²] INERCIA DO VEÍCULO REFLETIDA
AO VOLANTE

M = [I1 0 0
0 I2 0
0 0 I3];

%% Matriz e variáveis dos amortecimentos do sistema
c12 = 0;
c23 = 0;

C = [ c12 -c12 0
-c12 c12+c23 -c23
0 -c23 c23];

%% Matriz e variáveis de Rigidez do sistema
k12 = 504,20;%721,90;%; % [Nm/rad] RIGIDEZ DO
PACOTE TORCIONAL DO DISCO
k23 = 93,20; % [Nm/rad] RIGIDEZ DO SEMI-EIXO
REFLETIDA AO VOLANTE

K = [ k12 -k12 0
-k12 k12+k23 -k23
0 -k23 k23];

```

```

h = waitbar(0, 'Processando...');
%% FUNÇÃO DE INTEGRAÇÃO ODE45
[T,Y] = ode45(@matrizes,ti,y0,[],inv(M),C,K);

%% CÁLCULO DOS AUTAVOLORES.
V = eig(K,M); % frequencias w^2 onde w [rad/s]

VHz = (sqrt(V))/(2*pi)
%%
%% ACELERAÇÃO SIMULADA DAS MASSAS
CalcSpeed = -0.0319*T.^3 + 7.4902*T.^2 + 22.362*T +
394.64; % velocidade em função de T
Tam = size(T)-1;
Td = diff(T);
DY1 = diff(Y(:,4));
DY2 = diff(Y(:,5));
DY3 = diff(Y(:,6));
[AC2]= DY2./Td;
figure('numbertitle','off','color','w','name','VIBR
ACAO DA TRANSMISSAO')
plot(T(1:Tam),AC2)
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('ACELERAÇÃO ANGULAR [rad/s^2]')
title('VIBRAÇÃO DA TRANSMISSÃO EM SEGUNDA MARCHA')

%% LEITURA E PLOTAGEM DOS DADOS DO ROTEC
(FLUTUACOES DA ACELERAÇÃO)
[Aamostra01] = xlsread('AMOSTRA01_ACELERACAO');
[Aamostra02] = xlsread('AMOSTRA02_ACELERACAO');
[Aamostra03] = xlsread('AMOSTRA03_ACELERACAO');
[Aamostra04] = xlsread('AMOSTRA04_ACELERACAO');

figure('numbertitle','off','color','w','name','FLUT
UAÇÕES DE ACELERAÇÃO')
subplot(2,2,1) %%
AMOSTRA01
plot(Aamostra01(:,1),Aamostra01(:,2),'b')
hold on
plot(Aamostra01(:,1),Aamostra01(:,3),'k')
xlabel('ROTAÇÃO DO MOTOR [rpm]')
ylabel('ACELERAÇÃO ANGULAR [rad/s^2]')
xlim([1000 6500])
ylim([0 10000])

```

```
title('AMOSTRA01')
legend('VOLANTE', 'INPUTSHAFT')
hold off

subplot(2,2,2)
%%AMOSTRA02
plot(Aamostra02(:,1),Aamostra02(:,2),'b')
hold on
plot(Aamostra02(:,1),Aamostra02(:,3),'k')
xlabel('ROTAÇÃO DO MOTOR [rpm]')
ylabel('ACELERAÇÃO ANGULAR [rad/s2]')
xlim([1000 6500])
ylim([0 10000])
title('AMOSTRA02')
legend('VOLANTE', 'INPUTSHAFT')
hold off

subplot(2,2,3)
%%AMOSTRA03
plot(Aamostra03(:,1),Aamostra03(:,2),'b')
hold on
plot(Aamostra03(:,1),Aamostra03(:,3),'k')
xlabel('ROTAÇÃO DO MOTOR [rpm]')
ylabel('ACELERAÇÃO ANGULAR [rad/s2]')
xlim([1000 6500])
ylim([0 10000])
title('AMOSTRA03')
legend('VOLANTE', 'INPUTSHAFT')
hold off

subplot(2,2,4)
%%AMOSTRA04
plot(Aamostra04(:,1),Aamostra04(:,2),'b')
hold on
plot(Aamostra04(:,1),Aamostra04(:,3),'k')
xlabel('ROTAÇÃO DO MOTOR [rpm]')
ylabel('ACELERAÇÃO ANGULAR [rad/s2]')
xlim([1000 6500])
ylim([0 10000])
title('AMOSTRA04')
legend('VOLANTE', 'INPUTSHAFT')
hold off
```

```

%% LEITURA E PLOTAGEM DOS DADOS DO ROTEC
(FLUTUACOES DA VELOCIDADE)
[Vamostra01] = xlsread('AMOSTRA01_FLUTUACAO');
[Vamostra02] = xlsread('AMOSTRA02_FLUTUACAO');
[Vamostra03] = xlsread('AMOSTRA03_FLUTUACAO');
[Vamostra04] = xlsread('AMOSTRA04_FLUTUACAO');

figure('numbertitle','off','color','w','name','FLUT
UAÇÕES DE VELOCIDADE')
subplot(2,2,1) %%%
AMOSTRA01
plot(Vamostra01(:,1),Vamostra01(:,2),'b')
hold on
plot(Vamostra01(:,1),Vamostra01(:,3),'k')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('VELOCIDADE [rpm]')
xlim([0 50])
ylim([0 7000])
title('AMOSTRA01')
legend('VOLANTE','INPUTSHAFT')
hold off

subplot(2,2,2)
%%AMOSTRA02
plot(Vamostra02(:,1),Vamostra02(:,2),'b')
hold on
plot(Vamostra02(:,1),Vamostra02(:,3),'k')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('VELOCIDADE [rpm]')
xlim([0 50])
ylim([0 7000])
title('AMOSTRA02')
legend('VOLANTE','INPUTSHAFT')
hold off

subplot(2,2,3)
%%AMOSTRA03
plot(Vamostra03(:,1),Vamostra03(:,2),'b')
hold on
plot(Vamostra03(:,1),Vamostra03(:,3),'k')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('VELOCIDADE [rpm]')
xlim([0 50])

```

```

ylim([0 7000])
title('AMOSTRA03')
legend('VOLANTE', 'INPUTSHAFT')
hold off

subplot(2,2,4)
%%AMOSTRA04
plot(Vamostra04(:,1),Vamostra04(:,2),'b')
hold on
plot(Vamostra04(:,1),Vamostra04(:,3),'k')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('VELOCIDADE [rpm]')
xlim([0 50])
ylim([0 7000])
title('AMOSTRA04')
legend('VOLANTE', 'INPUTSHAFT')
hold off

%% GRÁFICOS DAS SIMULAÇÕES
figure('numbertitle','off','color','w','name','resu
ltados gl1')
subplot(2,1,1)
plot(T,Y(:,1))
xlabel('tempo [s]')
ylabel('deslocamento [m]')
title('deslocamento gl1')
subplot(2,1,2)
plot(T,Y(:,4))
xlabel('tempo [s]')
ylabel('velocidade [m/s]')
title('velocidade gl1')
figure('numbertitle','off','color','w','name','resu
ltados gl2')
subplot(2,1,1)
plot(T,Y(:,2))
xlabel('tempo [s]')
ylabel('deslocamento [m]')
title('deslocamento gl2')
subplot(2,1,2)
plot(T,Y(:,5))
xlabel('tempo [s]')
ylabel('velocidade [m/s]')

```

```
title('velocidade gl2')
figure('numbertitle','off','color','w','name','resultados gl3')
subplot(2,1,1)
plot(T,Y(:,3))
xlabel('tempo [s]')
ylabel('deslocamento [m]')
title('deslocamento gl3')
subplot(2,1,2)
plot(T,Y(:,6))
xlabel('tempo [s]')
ylabel('velocidade [m/s]')
title('velocidade gl3')

close(h);
```

ANEXO B – FUNÇÃO MATRIZES DO MATLAB

```
function dy = matrizes(t,y,invM,C,K)
% Matrizes auxiliares para integração:
I = eye(size(invM)); % Identidade n x n
Z = zeros(size(invM)); % Matriz nula n x n
Zv = zeros(size(invM,1),1); % Vetor nulo n x 1
% Forma de estados necessaria para ODE:
A = [ Z I
      -invM*K -invM*C];
F = [Zv
      invM*excit(t,y)];
dy = A*y+F;
```

ANEXO C – FUNÇÃO EXCIT DO MATLAB

```

function s = excit(t,y)
%% FORÇA EXCITADORA DEVIDO ÀS ACELERAÇÕES DO MOTOR
AM = 1703; % AMPLITUDE MÉDIA DE ACELERAÇÕES NA
FAIXA TOTAL DO MOTOR
Iv = 0.0609; %INÉRCIA VOLANTE PLATO
f = 2*pi; % frequencia das flutuações;
z = 10; % amplitude das flutuações
%% Forças dinâmicas de atrito no instante
ForcaAtrito = 0;
if y(4)>= y(5)
    FA = ForcaAtrito;
end
if y(4)<y(5)
    FA = - ForcaAtrito;
end
%% Vetor de excitação
s = [AM*Iv*z*sin(70.66*f*t) % inericia do volante *
Média das acelerações do motor % Acceleration(t)%
INÉRCIA DO VOLANTE MULTIPLICADA PELA ACELERAÇÃO
CALCULADAsin(20*t)%_____ + força atrito
0 %- força atrito
0];

```

ANEXO D – HELP ODE45 MATLAB

ode45 Solve non-stiff differential equations, medium order method.

$[TOUT, YOUT] = \text{ode45}(\text{ODEFUN}, \text{TSPAN}, Y0)$ with $\text{TSPAN} = [T0 \text{ TFINAL}]$ integrates

the system of differential equations $y' = f(t, y)$ from time $T0$ to TFINAL with initial conditions $Y0$. ODEFUN is a function handle. For a scalar T and a vector Y , $\text{ODEFUN}(T, Y)$ must return a column vector corresponding to $f(t, y)$. Each row in the solution array $YOUT$ corresponds to a time returned in the column vector $TOUT$. To obtain solutions at specific times $T0, T1, \dots, \text{TFINAL}$ (all increasing or all decreasing), use $\text{TSPAN} = [T0 \ T1 \ \dots \ \text{TFINAL}]$.

$[TOUT, YOUT] = \text{ode45}(\text{ODEFUN}, \text{TSPAN}, Y0, \text{OPTIONS})$ solves as above with default

integration properties replaced by values in OPTIONS , an argument created with the ODESET function. See ODESET for details. Commonly used options are scalar relative error tolerance 'RelTol' ($1e-3$ by default) and vector of absolute error tolerances 'AbsTol' (all components $1e-6$ by default). If certain components of the solution must be non-negative, use ODESET to set the 'NonNegative' property to the indices of these components.

ode45 can solve problems $M(t, y) * y' = f(t, y)$ with mass matrix M that is nonsingular. Use ODESET to set the 'Mass' property to a function handle MASS if $\text{MASS}(T, Y)$ returns the value of the mass matrix. If the mass matrix is constant, the matrix can be used as the value of the 'Mass' option. If the mass matrix does not depend on the state variable Y and the function MASS is to be called with one input argument T , set 'MStateDependence' to 'none'. ODE15S and ODE23T can solve problems with singular mass matrices.

$[TOUT, YOUT, TE, YE, IE] = \text{ode45}(\text{ODEFUN}, \text{TSPAN}, Y0, \text{OPTIONS})$ with the 'Events'

property in OPTIONS set to a function handle EVENTS , solves as above while also finding where functions of (T, Y) , called event functions, are zero. For each function you specify whether the integration is to terminate at a zero and whether the direction of the zero crossing matters. These are the three column vectors returned by EVENTS :

$[VALUE, ISTERMINAL, DIRECTION] = \text{EVENTS}(T, Y)$. For the I -th event function:

$\text{VALUE}(I)$ is the value of the function, $\text{ISTERMINAL}(I) = 1$ if the integration is to terminate at a zero of this event function and 0 otherwise.

$\text{DIRECTION}(I) = 0$ if all zeros are to be computed (the default), $+1$ if only zeros where the event function is increasing, and -1 if only zeros where

the event function is decreasing. Output TE is a column vector of times at which events occur. Rows of YE are the corresponding solutions, and indices in vector IE specify which event occurred.

SOL = ode45(ODEFUN,[T0 TFINAL],Y0...) returns a structure that can be used with DEVAL to evaluate the solution or its first derivative at any point between T0 and TFINAL. The steps chosen by ode45 are returned in a row vector SOL.x. For each I, the column SOL.y(:,I) contains the solution at SOL.x(I). If events were detected, SOL.xe is a row vector of points at which events occurred. Columns of SOL.ye are the corresponding solutions, and indices in vector SOL.ie specify which event occurred.

Example

```
[t,y]=ode45(@vdp1,[0 20],[2 0]);
plot(t,y(:,1));
```

solves the system $y' = \text{vdp1}(t,y)$, using the default relative error tolerance $1e-3$ and the default absolute tolerance of $1e-6$ for each component, and plots the first component of the solution.

Class support for inputs TSPAN, Y0, and the result of ODEFUN(T,Y):
float: double, single

ANEXO E – HELP EIG MATLAB

eig Eigenvalues and eigenvectors.

$E = \text{eig}(X)$ is a vector containing the eigenvalues of a square matrix X .

$[V,D] = \text{eig}(X)$ produces a diagonal matrix D of eigenvalues and a full matrix V whose columns are the corresponding eigenvectors so that $X*V = V*D$.

$[V,D] = \text{eig}(X,'nobalance')$ performs the computation with balancing disabled, which sometimes gives more accurate results for certain problems with unusual scaling. If X is symmetric, $\text{eig}(X,'nobalance')$ is ignored since X is already balanced.

$E = \text{eig}(A,B)$ is a vector containing the generalized eigenvalues of square matrices A and B .

$[V,D] = \text{eig}(A,B)$ produces a diagonal matrix D of generalized eigenvalues and a full matrix V whose columns are the corresponding eigenvectors so that $A*V = B*V*D$.

$\text{eig}(A,B,'chol')$ is the same as $\text{eig}(A,B)$ for symmetric A and symmetric positive definite B . It computes the generalized eigenvalues of A and B using the Cholesky factorization of B .

$\text{eig}(A,B,'qz')$ ignores the symmetry of A and B and uses the QZ algorithm. In general, the two algorithms return the same result, however using the QZ algorithm may be more stable for certain problems. The flag is ignored when A and B are not symmetric.