



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CASSIANO TECCHIO

DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIA
NUMÉRICA PARA OTIMIZAÇÃO DE MALHAS
DE BLOCOS MÚLTIPLOS PARA APLICAÇÕES
AEROESPACIAIS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
ENGENHARIA AEROESPACIAL

2014

CASSIANO TECCHIO

**DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIA
NUMÉRICA PARA OTIMIZAÇÃO DE MALHAS
DE BLOCOS MÚLTIPLOS PARA APLICAÇÕES
AEROESPACIAIS**

Prof. Dr. Fabiano G. Wolf
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Eng. Msc. Edson Basso
Coorientador
Instituto de Aeronáutica e Espaço

ENGENHARIA AEROESPACIAL

Joinville,
Universidade Federal de Santa Catarina,
14 de Julho de 2014.

CASSIANO TECCHIO

**DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIA NUMÉRICA PARA
OTIMIZAÇÃO DE MALHAS DE BLOCOS MÚLTIPLOS PARA
APLICAÇÕES AEROESPACIAIS**

Esta Monografia foi julgada adequada para obtenção do Título de Engenheiro Aeroespacial, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Graduação da Universidade Federal de Santa Catarina.

Joinville, 14 de Julho de 2014.

Prof. Dr. Juan Pablo de Lima Costa Salazar
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fabiano G. Wolf
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Eng. Msc. Edson Basso
Coorientador
Instituto de Aeronáutica e Espaço

Prof. Dr. João Luiz Filgueiras de Azevedo
Membro Externo
Instituto de Aeronáutica e Espaço

Este trabalho é dedicado aos meus pais, os
quais são os principais responsáveis por
torná-lo possível.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, Nelci Terezinha Zanetti Tecchio e Alcibides Luiz Tecchio, pelo apoio, incentivo e, sobretudo, pela educação que me concederam durante todos esses anos. Serei eternamente grato por me ensinarem o valor da vida.

Devo agradecer aos meus colegas da primeira turma do Centro de Engenharia da Mobilidade da Universidade Federal de Santa Catarina, os quais propiciaram maravilhosos momentos de estudo, descontração e de evolução como ser humano. Agradeço, em especial, aos colegas do curso de Engenharia Aeroespacial, principalmente ao Bruno Backes e ao Hermann L.L.

Gostaria de expressar os meus agradecimentos à todos os meus colegas do laboratório de CFD da ALA que sempre me receberam da melhor forma possível em São José dos Campos, especialmente ao Diogo, Carlos, Júnior, William W, Edson Basso e Prof. Azevedo.

Agradeço a todos os amigos de Joinville que de alguma maneira ou outra me deram suporte e me incentivaram a seguir sempre em frente, especialmente aos amigos da Wizard, UDESC, Univille e do futebol semanal. Muito obrigado pela amizade. Não importa onde estejam, sempre os levarei na memória.

Ao meu orientador da UFSC, Prof. Fabiano Wolf, pela paciência e dedicação ao longo de toda graduação.

A Professora Viviane L. Soethe que sempre esteve ao dispor como educadora, amiga e conselheira. Muito Obrigado.

Ao Prof. Kleber V. Paiva e todos amigos do Labtucal da UFSC de Florianópolis.

Ao Edson Basso, coorientador desse trabalho, pela paciência, atenção e ao conhecimento repassado durante a realização do mesmo.

Ao Prof. João Azevedo, que contribuiu de maneira incondicional para a realização desse trabalho.

Ao programa institucional de bolsas de iniciação científica PIBIC-IAE, por meio do CNPq, pelo suporte financeiro concedido através dos processos 136640/2011-7, 145119/2012-2 e 149765/2013-4.

"A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original."

ALBERT EINSTEIN

"Nunca se pode concordar em rastejar,
quando se sente ímpeto de voar"

HELEN KELLER

"Uma vida sem desafios
não vale a pena ser vivida"

SÓCRATES

Resumo

O projeto de pesquisa abordado neste trabalho se concentra no desenvolvimento de uma metodologia computacional para otimização de malhas de blocos múltiplos tridimensionais para uso em códigos de CFD em problemas envolvendo alijamento de cargas de aeronaves e separação de estágios de foguetes. Inicialmente, o método de suavização laplaciana foi implementado para tratar malhas computacionais triangulares não-estruturadas, no qual adotou-se um conjunto de três métricas de qualidade para elementos triangulares: razão de raios, ângulo mínimo e razão média. Um método de convergência baseado num comprimento característico médio foi implementado para a suavização laplaciana bidimensional. A fim de verificar a eficácia e efetividade do método de suavização, conduziu-se um experimento numérico por meio de uma malha triangular não-estruturada simplificada. Posteriormente, um método de otimização híbrido para malhas tetraédricas não-estruturadas de blocos múltiplos foi desenvolvido baseado em um acoplamento entre a suavização laplaciana tridimensional e uma otimização topológica local. As métricas de qualidade para tetraedros de razão de raios, ângulo sólido mínimo e razão média foram empregadas para aferir a qualidade da malha tetraédrica. Os elementos de conectividade entre os blocos foram monitorados a fim de verificar a efetividade da metodologia numérica de otimização proposta. Os resultados mostram que o método proposto é capaz de tratar elementos distorcidos presentes na malha inicial, eliminando-os e reconstruindo a malha por meio de um método de avanço de frente de geração adaptativo, permitindo uma suavização laplaciana tridimensional válida.

Abstract

The main purpose of this work is to develop a computational tool for unstructured three-dimensional mesh improvement for use on multiblock CFD codes to simulate store separation problems. Initially, the Laplacian smoothing method was used to treat unstructured triangular meshes using a blend of three metrics for triangles, namely radius ratio, mean ratio and minimum angle. A convergence criterion was used for two-dimensional Laplacian smoothing, which is based on an average characteristic length. In order to verify the success of the smoothing method, a numerical experiment was conducted over a simplified unstructured triangular mesh. Afterwards, a hybrid smoothing method was developed based on a coupling between Laplacian method and locally topological optimization for unstructured tetrahedral multiblock grids. A blend of three metrics, namely radius ratio, mean ratio and minimum solid angle was adopted. The connectivity region between the mesh blocks is monitored to verify the successful of the implementation. The results show that the method is capable of treating an initial distorted mesh, eliminating distorted elements and reconstructing them with an adaptive advanced front mesh generation process, allowing a valid three-dimensional Laplacian smoothing.

Lista de Figuras

1.1	Características topológicas tipicamente encontradas em malhas estruturada e não-estruturada.	4
1.2	Representação artística da imagem do monstro Chimera, em um prato cerâmico de 350-340 a.C. (Museu do Louvre, Paris).	5
1.3	Malhas de blocos múltiplos sobrepostas não-concatenadas.	6
1.4	a) Malha de fundo relativa ao perfil principal, malha do <i>slat</i> e malha de conectividade entre <i>slat</i> e perfil principal; b) Malha de fundo relativa ao perfil principal, malha do <i>flap</i> e malha de conectividade entre <i>flap</i> e perfil principal.	6
2.1	Triangulação de Delaunay bidimensional.	12
2.2	Elemento <i>sliver</i> formado pelos nós pqrs	13
2.3	Determinação da fronteira externa para geração da malha utilizando avanço de fronteira.	13
2.4	a) Avanço da fronteira em direção ao centro do domínio computacional b) Criação de novos elementos a e b com uso de nós existentes e inserindo novo nó, respectivamente.	14
2.5	Remoção de elementos de baixa qualidade pelo colapso de uma aresta.	15
3.1	Típico elemento triangular t	19
3.2	Métrica de forma para triângulo de <i>ângulo mínimo</i>	21
3.3	Métrica de forma para triângulo de <i>razão de raios</i>	21
3.4	Métrica de forma para triângulo de <i>razão média</i>	21
3.5	Métricas de forma para tetraedros.	23
3.6	Ilustração de ângulos opostos, α_j e β_j , à aresta compartilhada l_{ij} por dois triângulos.	26
3.7	Exemplo de aplicação de suavização laplaciana em uma malha bidimensional não-estruturada.	27
3.8	Realocação espacial do nó p para o centroide p^* da figura determinada pelos nós circundantes $v_1v_2v_3v_4v_5$	29
3.9	Intersecção entre face triangular $F_{123} = P_1P_2P_3$ e aresta $\overrightarrow{P_4P_5}$	31
3.10	Exemplo de malha bidimensional.	33

3.11	Listas conectadas, esup2 e esup1, para elemento circundante a um dado nó.	34
3.12	Esquema ilustrativo do funcionamento da tabela <i>hash</i> .	35
3.13	Exemplo de tetraedros compartilhando faces.	35
4.1	Diagrama de blocos do algoritmo híbrido baseado em acoplamento entre suavização laplaciana e alteração topológica local para malhas tetraédricas de blocos múltiplos não-estruturadas.	38
4.2	Tetraedro $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_4$ com vetores unitários normais \vec{n}_{134} a face $F_{134} = P_1P_3P_4$ e \vec{n}_{132} a face $F_{132} = P_1P_3P_2$, respectivamente.	41
4.3	Tetraedro $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_4$ <i>sliver</i> e elementos de sua vinhança, $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_5$, $\mathbf{T} = P_1P_3P_4P_5$, $\mathbf{T} = P_2P_4P_3P_6$ e $\mathbf{T} = P_1P_2P_4P_6$ que compartilham arestas relativas aos dois maiores ângulos de diedro de $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_4$.	42
4.4	Poliedro Γ formado pelas faces triangulares $F_{125} = P_1P_2P_5$, $F_{145} = P_1P_4P_5$, $F_{435} = P_4P_3P_5$, $F_{325} = P_3P_2P_5$, $F_{326} = P_3P_2P_6$, $F_{216} = P_2P_1P_6$, $F_{146} = P_1P_4P_6$ e $F_{436} = P_4P_3P_6$.	43
4.5	Construção do elemento $\mathbf{T} = P_1P_3P_4P_5$ a partir da face base $F_{145} = P_1P_4P_5$.	46
4.6	Construção do elemento $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_5$ a partir da face base $F_{125} = P_1P_2P_5$.	46
4.7	Construção do elemento $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_6$ a partir da face base $F_{126} = P_1P_2P_6$.	47
4.8	Construção do elemento $\mathbf{T} = P_1P_3P_4P_6$ a partir da face base $F_{146} = P_1P_4P_6$.	47
4.9	Poliedro Γ preenchido com os tetraedros $\mathbf{T} = P_1P_3P_4P_5$, $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_5$, $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_6$ e $\mathbf{T} = P_1P_3P_4P_6$.	47
5.1	Disposição dos nós em uma malha não-estruturada bidimensional.	49
5.2	Qualidade dos elementos da malha bidimensional não-estruturada mensurada pela métrica de razão de raios antes da aplicação da suavização laplaciana.	50
5.3	Qualidade dos elementos da malha bidimensional não-estruturada mensurada pela métrica de razão de raios após a aplicação da suavização laplaciana.	51
5.4	Número de elementos contidos em intervalos de qualidade de 0,1 antes da realocação nodal por suavização laplaciana bidimensional.	52
5.5	Número de elementos contidos em intervalos de qualidade de 0,1 após realocação nodal por suavização laplaciana bidimensional.	52
5.6	Malha tetraédrica não-estruturada de blocos múltiplos composta por um cubo e uma esfera.	53
5.7	Submalha tetraédrica em que os elementos em vermelho representam elementos de conectividade entre os blocos de malha e elementos em cinza possuem ao menos um nó associado à região de conectividade.	54
5.8	Porcentagem do número de elementos contidos em intervalos de qualidade de 0,1 para submalha inicial.	54

Lista de Tabelas

3.1	Estrutura da lista construída com a rotina computacional PREPROC. . . .	36
5.1	Valores de mínimo, máximo, média e desvio padrão para métricas de qualidade de triângulos $\sigma(\mathbf{t})$, $\rho(\mathbf{t})$ e $\mu(\mathbf{t})$ antes da realocação nodal por suavização laplaciana.	50
5.2	Valores de mínimo, máximo, média e desvio padrão para métricas de qualidade de triângulos $\sigma(\mathbf{t})$, $\rho(\mathbf{t})$ e $\mu(\mathbf{t})$ após a realocação nodal por suavização laplaciana.	51
5.3	Estatísticas relacionadas às métricas de forma para tetraedros para submalha inicial.	55
5.4	Distribuição dos elementos em intervalos de qualidade, mensurada pela métrica de forma de razão de raios, para submalha inicial e submalha após alteração topológica.	56
5.5	Estatísticas relacionadas às métricas de forma para tetraedros, após otimização baseada em alteração topológica e suavização laplaciana tridimensional.	56

Lista de Abreviaturas e Siglas

2-D:	Bidimensional;
3-D:	Tridimensional;
CFD:	<i>Computational Fluid Dynamics</i> ;
IAE:	Instituto de Aeronáutica e Espaço;
DCTA:	Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial;
ESUP:	<i>Element Surrounding Point</i> ;
PSUP:	<i>Point Surrounding Point</i> ;
PREPROC:	Pré-Processamento.

Lista de Símbolos

Alfabeto Latino

a :	Área do elemento triangular;
b_1, b_2, b_3 :	Produtos dos comprimentos das arestas opostas de um tetraedro;
c :	Constante elástica da mola;
DA :	Ângulo de diedro;
e :	Triângulo equilátero;
f_{i-x} :	Força resultante exercida pelas molas circundantes ao nó i na direção x ;
f_{i-y} :	Força resultante exercida pelas molas circundantes ao nó i na direção y ;
f_{i-z} :	Força resultante exercida pelas molas circundantes ao nó i na direção z ;
F_{ijk} :	Face triangular associada aos nós i, j e k ;
F_n :	n -ésima face triangular;
F_A :	Face triangular formada pelo conjunto de pontos A contidos no interior à região delimitada pelas arestas da face F ;
\bar{l} :	Comprimento característico médio;
l_{ij} :	Comprimento da aresta definida pelos nós ij de um elemento triangular;
L_{ij} :	Comprimento da aresta definida pelos nós ij de um elemento tetraédrico;
$L(X)$:	laplaciano de X ;
L_T :	Lista de elementos tetraédricos;
L_F :	Lista de faces triangulares;
L_P :	Lista de nós;
\mathcal{M} :	Malha tetraédrica;

M :	Matriz de transformação;
ns_i :	Número total de nós circundantes ao vértice i , para casos 2-D;
\mathcal{N} :	Malha triangular;
Ns_i :	Número total de nós circundantes ao vértice i , para casos 3-D;
P_j :	j -ésimo vértice do elemento tetraédrico;
\mathcal{Q}_{t_i} :	Métrica de qualidade arbitrária para triângulos;
\mathcal{Q}_{T_i} :	Métrica de qualidade arbitrária para tetraedros;
r_{in} :	Raio da circunferência inscrita ao triângulo;
r_{circ} :	Raio da circunferência circunscrita ao triângulo;
R_{in} :	Raio da esfera inscrita ao tetraedro;
R_{circ} :	Raio da esfera circunscrita ao tetraedro;
\mathbf{R} :	Tetraedro regular;
S_j :	j -ésima área da face do elemento tetraédrico;
t_i :	i -ésimo elemento triangular;
\mathbf{T}_j :	j -ésimo elemento tetraédrico;
v_i :	i -ésimo vértice do elemento triangular;
V :	Volume do elemento tetraédrico;
X :	Vértices de uma malha computacional arbitrária;
x, y, z :	Abscissa, ordenada e cota, respectivamente, no sistema cartesiano de coordenadas;

Alfabeto Grego

Ψ :	Domínio computacional bidimensional;
Ω :	Domínio computacional tridimensional;
α_i :	i -ésimo ângulo interno de um elemento triangular;
θ_i :	i -ésimo ângulo sólido de um elemento tetraédrico;
σ_{min} :	Métrica de forma de ângulo mínimo;
ρ :	Métrica de forma de razão de raios;

μ :	Métrica de forma de razão média;
ε :	Parâmetro de convergência de suavização laplaciana;
Δt :	Parâmetro de relaxação;
λ_i :	i -ésimo autovalor;
γ :	Parâmetro de controle da velocidade de suavização laplaciana;
Γ :	Poliedro de faces triangulares;

Teoria de Conjuntos

\mathfrak{R} :	Espaço vetorial de dimensão 1;
\mathfrak{R}^2 :	Espaço vetorial de dimensão 2;
\mathfrak{R}^3 :	Espaço vetorial de dimensão 3;
\subset :	Está contido;
\supset :	Contém;
\cap :	Intersecta com;
\in :	Pertence a;
\notin :	Não pertence a;
\forall :	Para todo e qualquer;
\rightarrow :	Implica;
\leftrightarrow :	Se e somente se;
\leq :	Menor ou igual a;
\geq :	Maior ou igual a;
\neq :	Diferente;
$>$:	Maior que;
$<$:	Menor que;
\emptyset :	Conjunto vazio;

Índices

A : Conjunto de pontos;

circ: Circunscrito;

in: Inscrito;

min: Mínimo;

s_i : Circundantes ao nó i ;

x, y, z : Indicativo das direções nos eixos da abscissa, ordenada e cota, respectivamente, no sistema de coordenadas cartesianas.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Importância do Processo de Geração de Malha	1
1.2	Malhas Chimera	5
1.3	Motivação	8
1.4	Objetivos	9
1.5	Metodologia	9
2	MÉTODOS DE GERAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE MALHAS	11
2.1	Geração de Malhas Não-Estruturadas	11
2.1.1	Triangulação de Delaunay	11
2.1.2	Avanço de Frente de Geração	12
2.2	Otimização de Malhas	14
2.2.1	Eliminação de Elementos de Baixa Qualidade	15
2.2.2	Função Objetivo de Otimização	15
2.2.3	Movimento Seletivo de Malha	16
2.2.4	Permutação de Diagonais	16
2.2.5	Suavização Laplaciana	17
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
3.1	Qualidade de Malhas	18
3.1.1	Métricas de Qualidade de Triângulos	19
3.1.2	Métricas de Qualidade de Tetraedros	21
3.2	Método de Suavização Laplaciana	23

3.2.1	Formulação Geral	23
3.2.2	Critério de Convergência	28
3.3	Critério de Validade	30
3.3.1	Teste de Volume	31
3.3.2	Teste de Intersecção	31
3.4	Estrutura de Dados	32
3.4.1	Considerações Iniciais	32
3.4.2	ESUP e PSUP	33
3.4.3	PREPROC	34
4	MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO PROPOSTO	37
4.1	Estrutura Geral do Algoritmo	37
4.2	Processo de Identificação, Seleção e Eliminação de Elementos	39
4.3	Processo de Reconstrução	43
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	48
5.1	Considerações Iniciais	48
5.2	Otimização de Malhas Bidimensionais: Caso Exemplo Acadêmico	49
5.3	Otimização de Malhas Tridimensionais: Caso Cubo e Esfera	53
6	CONCLUSÕES	57
6.1	Considerações Finais	57
6.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	58

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Importância do Processo de Geração de Malha

A utilização de ferramentas computacionais para análises aerodinâmicas, juntamente com ensaios em túneis de vento e testes em voo, formam os três pilares do projeto aerodinâmico de uma aeronave. Ensaios em túneis de vento e em voo demandam um investimento financeiro alto devido à necessidade de se utilizar uma infraestrutura complexa, o que encarece o produto final (PIO, 2010). Além disso, estes custos não são reduzidos significativamente com a introdução de novas técnicas e equipamentos de medição. Atualmente, há uma tendência mundial para desativar instalações de túneis de vento devido ao alto custo de manutenção e, também, concentrar recursos, em sua maioria governamentais, em algumas poucas instalações e centros de referência. Com isso, algumas indústrias e centros de pesquisa tiveram seus custos de ensaios elevados, devido ao aumento do custo em logística e transporte de modelos e pessoal para outras instalações, muitas vezes, fora de seu país de origem.

Por outro lado, com as reduções de preços sucessivas e significativas devido aos avanços tecnológicos na área de eletrônica digital, a aquisição de equipamentos computacionais está cada vez mais acessível. Devido a isto, estudos aerodinâmicos baseados em simulações numéricas vêm conquistando cada vez mais espaço na área de projetos, em fases onde a acurácia destes resultados é aceitável, substituindo paulatinamente alguns ensaios, dada a crescente complexidade que se pode introduzir com a aquisição de computadores

mais potentes. Com base nesse contexto, a simulação numérica em mecânica dos fluidos e transferência de calor, conhecida como CFD (do inglês “Computational Fluid Dynamics”) tem provado ser uma ferramenta importante para muitas aplicações científicas e industriais, principalmente devido ao crescimento associado a capacidade computacional de processamento e ao desenvolvimento de novos algoritmos e metodologias numéricas (HIRSCH, 2007).

Embora existam técnicas de CFD nas quais não há necessidade de uma malha computacional, este trabalho se relaciona aos métodos onde se faz necessária a geração de malhas computacionais para a discretização dos domínios. Métodos que dispensam ou contornam essa necessidade de discretização não despertam, atualmente, muito interesse da indústria e centros de pesquisa. Desta forma, colocando-se ênfase nos métodos mais difundidos, pode-se dizer, de uma maneira geral, que análises numéricas englobam, ao menos, três fases:

1. Decomposição espacial do espaço contínuo em uma união simples de elementos geométricos, pelo uso de rotinas numéricas específicas (FREITAG *et al.*, 1995);
2. Solução das equações matemáticas relacionadas aos fenômenos físicos associados. Para esta fase da análise é necessária a discretização destas equações, no espaço e no tempo, e seu uso em um código computacional, em conjunto com as malhas geradas;
3. Análise dos resultados obtidos.

Nos métodos mais difundidos atualmente para soluções aproximadas, tais como o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos volumes finitos (MVF), as equações que descrevem os fenômenos físicos são discretizadas em um domínio computacional de cálculo por meio de subdomínios simples, denominados de elementos (MEF) ou volumes de controle (MVF). O conjunto formado pela união desses elementos, os quais compartilham nós e arestas (e faces, em 3-D) (BATISTA, 2005), define o domínio computacional, comumente denominado de malha computacional.

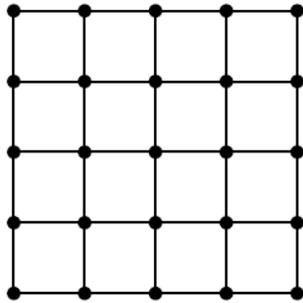
A discretização do domínio computacional de cálculo, realizada na primeira etapa da análise numérica, pode ser alcançada utilizando ferramentas automáticas de geração de malhas. No entanto, malhas geradas dessa forma podem conter elementos distorcidos ou de baixa qualidade, que resultarão em dificuldades numéricas evidentes durante o processo de convergência da solução (FREITAG e GOOCH, 1997). Por outro lado, malhas construídas utilizando-se *softwares* comerciais, ou por meio da implementação do próprio método de discretização espacial, necessitam de uma grande interação entre o usuário e as variadas ferramentas para construção da malha, sendo que a qualidade geométrica da malha final deve ser tão alta quanto possível a fim de que erros provenientes de uma má discretização espacial sejam minimizados (PIO, 2010). Portanto, o usuário é sempre induzido a buscar uma representação discreta de alta qualidade do domínio de cálculo. Em adicional, casos em que a geometria é complexa, o tempo requerido para geração de malha pode se tornar a maior parcela temporal de toda a análise numérica (FREITAG *et al.*, 1995). Dessa forma, a qualidade dos elementos da malha computacional e o tempo consumido para sua geração são as duas maiores dificuldades durante a primeira fase de uma análise numérica. Por hora, entende-se por qualidade dos elementos da malha qualquer conjunto de parâmetros que possa ter grande influência nas etapas subsequentes à geração da malha de uma análise numérica.

Atualmente, as malhas mais difundidas são classificadas em dois grupos: estruturadas e não-estruturadas. A topologia associada aos elementos que compõem a malha computacional é a maneira mais comum de diferenciá-las (BATISTA, 2005). Dessa forma, malhas estruturadas são caracterizadas por possuírem uma estrutura intrínseca de conectividade entre os seus elementos. Por outro lado, malhas não-estruturadas necessitam de uma conectividade explícita, muitas vezes fornecida pelo próprio processo de geração da malha. Esta conectividade é comumente explicitada na forma do que é chamado na literatura pertinente de uma tabela de conectividade dos elementos (LOHNER, 2008). A Fig. 1.1 evidencia a diferença topológica dos elementos para malha estruturada e não-estruturada. Embora a representação para distinção entre malhas estruturadas e não-estruturadas seja a apresentada na Fig. 1.1, alerta-se o leitor que a Fig. 1.1a pode se tratar tanto de uma

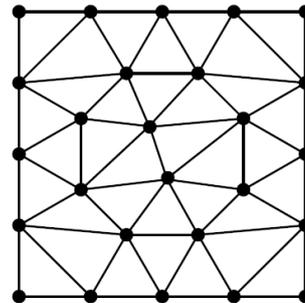
malha estruturada quanto de uma malha não-estruturada.

Figura 1.1: Características topológicas tipicamente encontradas em malhas estruturada e não-estruturada.

(a) Estruturada ou Não-Estruturada.



(b) Não-Estruturada.



Fonte: BATISTA (2005).

Embora malhas estruturadas e não-estruturadas possam se conformar ao contorno de configurações complexas, malhas não-estruturadas, tais como a apresentada na Fig. 1.1b, são recomendadas para geometrias arbitrárias, principalmente, devido ao maior esforço requerido para conformar uma malha estruturada no entorno de uma geometria de estudo complexa. Os tipos de células mais comuns em malhas não-estruturadas 2-D são triângulos e em 3-D são tetraedros. Apesar da possibilidade da utilização de outros elementos, a predominância de triângulos e tetraedros em malhas não-estruturadas é justificada, essencialmente, pelo fato do padrão de interpretação de células que um computador utiliza para a discretização espacial do domínio computacional de cálculo.

Embora o emprego de malhas não-estruturadas facilite o estudo com geometrias complexas, simulações numéricas não-estacionárias com movimento relativo entre corpos, tais como alijamento de cargas de aeronaves, ainda são computacionalmente custosas devido ao tempo associado ao processo de geração de malha e reconstrução da mesma ao longo da simulação. De forma a prover uma ferramenta eficiente de simulação de problemas envolvendo movimento relativo de corpos, malhas Chimera têm sido estudadas (PIO, 2010). A seguir, discorre-se sobre as malhas Chimera, abordando suas principais características.

1.2 Malhas Chimera

Em problemas de engenharia com movimento relativo entre corpos, como em separação de cargas, uma malha Chimera pode ser usada a fim de reduzir o tempo consumido para geração de malha nas etapas de pré-processamento e processamento (TECCHIO *et al.*, 2014). Chimera é um termo relativo à mitologia grega, e seu significado é associado à figura de um monstro cujo corpo é formado por diferentes partes de diversos animais, assim como mostra a Fig. 1.2 (PIO, 2010; TECCHIO *et al.*, 2014).

Figura 1.2: Representação artística da imagem do monstro Chimera, em um prato cerâmico de 350-340 a.C. (Museu do Louvre, Paris).



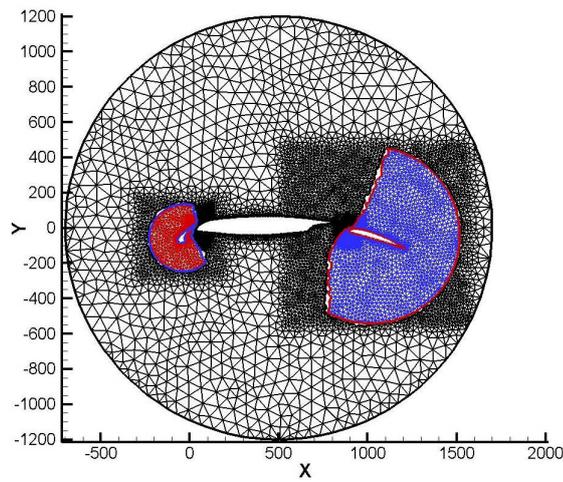
Fonte: PIO (2010).

Em CFD, o conceito de malha Chimera se relaciona à geração de uma malha independente em torno de cada componente da configuração geométrica, ou parte do domínio. Inicialmente, a geometria de estudo é dividida em seus constituintes mais básicos, de forma que a discretização espacial é realizada em torno de cada componente de maneira isolada e independente. Cada malha criada no entorno de um componente é também designada de bloco. Posteriormente, realiza-se a concatenação dos blocos múltiplos de tal maneira que uma malha única seja representativa do domínio computacional na circunvizinhança de toda geometria de estudo (TECCHIO *et al.*, 2014).

O Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE), por meio do seu Laboratório de Aerodinâmica Computacional, vinculado ao Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial (DCTA), possui um histórico de desenvolvimento de ferramentas numéricas em malhas Chimera. De acordo com PIO (2010), em 2000 deu-se início as pesquisas relacionadas a escoamentos de fluidos com o uso de malhas sobrepostas com ANTUNES (2000). Mais

tarde, PIO (2010) desenvolveu um código computacional capaz de integralizar de maneira eficaz malhas no entorno de geometrias complexas em 2-D, realizando experimentos numéricos em casos do conjunto *flap*, *slat* e perfil principal, veículo lançador e alijamento de carga de asa. As Figs 1.3 e 1.4 mostram três blocos de malhas sobrepostos relativo ao caso estudado por PIO (2010).

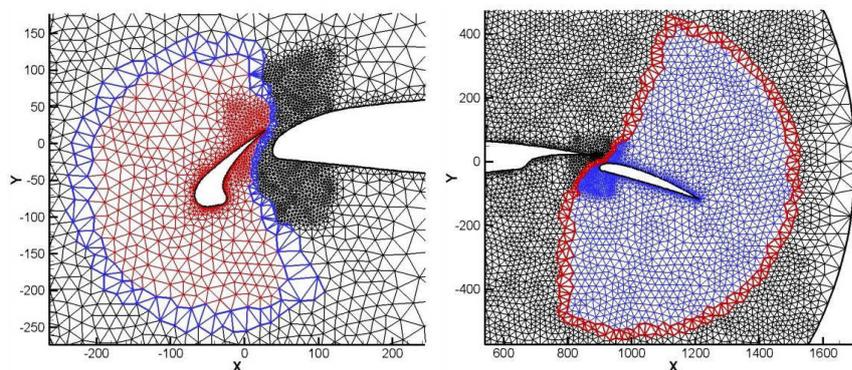
Figura 1.3: Malhas de blocos múltiplos sobrepostas não-concatenadas.



Fonte: PIO (2010).

Figura 1.4: a) Malha de fundo relativa ao perfil principal, malha do *slat* e malha de conectividade entre *slat* e perfil principal; b) Malha de fundo relativa ao perfil principal, malha do *flap* e malha de conectividade entre *flap* e perfil principal.

(a) Malha de *Slat* e perfil principal. (b) Malha de *Flap* e perfil principal.



Fonte: PIO (2010).

A Fig. 1.3 mostra uma malha para um perfil principal, com arestas em cor preta, e as malhas do *flap* e do *slat*, em cores azul e vermelha, respectivamente. Observe que a malha do perfil principal foi usada também como malha de fundo, ou seja, esta malha engloba

todos os demais blocos de malha. Não é necessário que se tenha sempre uma malha de fundo, mas em casos de aerodinâmica externa a sua presença é conveniente. As malhas do *slat* e do *flap* estão sobrepostas na malha de fundo.

Pode-se notar com este caso simples como a técnica de malhas Chimera pode melhorar o desempenho do processo de geração de malhas, por permitir a separação da geometria em partes mais simples, tanto quanto seja necessário para que cada bloco de malha possa ser gerado com um mínimo de esforço. Alguns cuidados devem ser tomados quanto à este processo, pois como cada bloco de malha é gerado separadamente, pode ocorrer de blocos de malhas que se sobrepõe terem tamanhos de células muito díspares, ocasionando uma quebra de continuidade no refinamento de malha quando da passagem de um bloco para outro. Isto pode ser visto claramente na malha do perfil principal, onde existem regiões com um adensamento de elementos justamente nas regiões onde se sobrepõem as malhas do *flap* e *slat*, pois como os elementos destas duas últimas malhas são menores é necessário criar uma região de sobreposição mais equilibrada. Observa-se claramente duas regiões de forma quadrangular na Fig. 1.3, nos bordos de ataque e fuga do perfil principal, onde foram aplicados os refinamentos de malha.

A técnica de malhas Chimera não-estruturadas apresentada em PIO (2010) utiliza estas malhas geradas individualmente em um processo denominado de *holecutting*, onde vários elementos das malhas sobrepostas são apagados, dando origem a uma região sem malha entre os blocos. Posteriormente uma malha é gerada para cada uma destas regiões contínuas, a fim de se estabelecer a conexão entre os vários blocos de malha originais, resultando assim em uma malha única sobre todo o domínio de cálculo. Esta malha final, com os vários blocos concatenados, pode então ser resolvida por qualquer código de CFD para malhas não-estruturadas. De fato, o processo de *holecutting* empregado em malhas Chimera não-estruturadas, utilizadas nesse trabalho, não se trata do processo usual de *holecutting*. Comumente, este processo, quando empregado em malhas estruturadas, delimita uma região de sobreposição de elementos entre dois blocos de malha, de forma que há um algoritmo de interpolação das propriedades de interesse na região de sobreposição. Neste caso, o domínio computacional é representado por blocos de malhas. Por outro

lado, em malhas não-estruturadas, o processo de *holecutting* cria uma região sem elementos entre dois blocos de malha, de tal forma que há a necessidade da criação de uma malha de conectividade entre os blocos a fim de completar a discretização espacial, criando ao final uma malha que é única para representação do domínio de cálculo.

O trabalho realizado por PIO (2010), sob um contexto bidimensional, foi possível obter um processo totalmente automático, a partir do recebimento dos blocos de malha, o qual revelou que esta técnica é uma ferramenta muito atraente, com grande potencial para redução no tempo de preparo das malhas. PIO (2010) propõe em seu algoritmo uma triangulação de Delaunay a fim de criar elementos de conectividade entre os blocos. As Figs 1.4a e 1.4b evidenciam os elementos de conectividade em azul e vermelho, respectivamente. Uma explicação sobre triangulação de Delaunay é abordada na seção 2.1.1. Já no final do trabalho de PIO (2010), foi possível constatar pontos críticos do processo, os quais mereceriam atenção durante a continuação da pesquisa em direção à uma ferramenta, em 3-D, para tratar de separação de corpos de aeronaves em voo, e separação de estágios de foguetes, foco principal do desenvolvimento desta linha de desenvolvimento em pesquisa, pelo grupo de aerodinâmica computacional do IAE.

Um dos pontos críticos mais relevantes é a questão da qualidade da malha gerada entre os blocos, após o processo de *holecutting*. Como esta geração de malha deve ser totalmente automática para permitir uma integração futura da ferramenta com o código de CFD, deve-se procurar por um procedimento, também automático, que não só verifique adequadamente a qualidade da malha em questão, como também promova ajustes pertinentes, no sentido de aumentar esta qualidade, se constatado um nível inadequado. Portanto, o foco do presente trabalho está em pesquisar, implementar e testar algoritmos e métodos de verificação de qualidade e suavização de malhas, para sua integração com a ferramenta em desenvolvimento.

1.3 Motivação

Problemas de alijamento de cargas de aeronaves e de separação de estágios de foguetes são de grande interesse para o IAE. Em sua maioria, são problemas de engenharia essen-

cialmente tridimensionais e não-estacionários, além de envolverem geometrias complexas. Por conseguinte, a motivação desse trabalho de pesquisa é impulsionada pela necessidade de processos de cálculo que forneçam, simultaneamente, análises aerodinâmicas e aeroelásticas de geometrias tridimensionais complexas em tempo viável e resultados de simulação numérica confiáveis, minimizando os erros associados àquelas análises.

1.4 Objetivos

O objetivo geral do trabalho de conclusão de curso concentra-se no desenvolvimento de uma metodologia numérica capazes de realocar nós de elementos distorcidos a fim de que erros no cálculo do escoamento sejam minimizados e análises de corpos com movimentos relativos sejam realizadas de maneira rápida, postergando a necessidade de reconstrução da malha computacional pelo monitoramento da qualidade dos elementos da malha integradora em um contexto de malhas dinâmicas. Como objetivo específico, deseja-se apresentar em detalhes a metodologia proposta que permite a suavização laplaciana tridimensional de forma válida em um contexto de malhas não-estruturadas de blocos múltiplos, buscando a efetividade e eficácia.

1.5 Metodologia

A metodologia adotada baseia-se na utilização da linguagem de programação FORTRAN 90 para desenvolvimento e implementação das rotinas numéricas de otimização de malhas não-estruturadas de blocos múltiplos. O método de suavização laplaciana e o método de otimização topológica são implementados em um código, em desenvolvimento, que utiliza a técnica de malhas Chimera em um contexto de malhas não-estruturadas tridimensionais, do Instituto de Aeronáutica e Espaço, em São José dos Campos – SP, no Laboratório de Aerodinâmica Computacional.

Inicialmente, estudar-se-á um caso bidimensional de uma malha triangular única para a qual se avaliará a capacidade do método de suavização laplaciana bidimensional. Métricas de qualidade de triângulos serão implementadas computacionalmente a fim de avaliar a

efetividade do método. Um critério de convergência é também implementado com o intuito de avaliar a eficácia da suavização laplaciana 2-D. Posteriormente, um caso tridimensional de malha não-estruturada tetraédrica será utilizado, cuja região de interesse se dá pela malha integradora entre um cubo e uma esfera.

Capítulo 2

MÉTODOS DE GERAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DE MALHAS

2.1 Geração de Malhas Não-Estruturadas

Os algoritmos para geração de malhas não-estruturadas para problemas de dinâmica dos fluidos computacional têm evoluído rapidamente ao longo das últimas décadas (MAVRIPPLIS, 1995), principalmente devido à capacidade de adequação a domínios arbitrários (BATISTA, 2005). Muitos dos algoritmos para geração de malhas não-estruturadas tiveram origem no campo da geometria computacional (MAVRIPPLIS, 1995). Os dois métodos mais empregados e conhecidos até o momento são: triangulação de Delaunay e avanço de frente de geração.

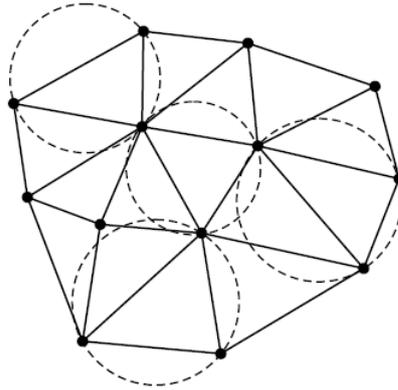
2.1.1 Triangulação de Delaunay

Métodos baseados em triangulação de Delaunay usufruem de sólido embasamento matemático garantindo a discretização. Porém, a qualidade da malha não é assegurada (BATISTA, 2005), muito embora, entre os demais métodos de triangulação, seja o que fornece triângulos de melhor qualidade para discretização bidimensional (PIO, 2010), maximizando o menor ângulo interno de um elemento triangular.

A triangulação de Delaunay decompõe poliedros convexos gerados por conjuntos de

pontos de modo único satisfazendo ao critério do "círculo vazio", em 2-D, e da "esfera vazia" em 3-D. Esse critério assegura que o círculo circunscrito a qualquer triângulo pertencente à triangulação não contenha pontos em seu interior, para o caso 2-D (BATISTA, 2005). A Fig. 2.1 mostra um exemplo de triangulação de Delaunay bidimensional.

Figura 2.1: Triangulação de Delaunay bidimensional.



Fonte: BATISTA (2005).

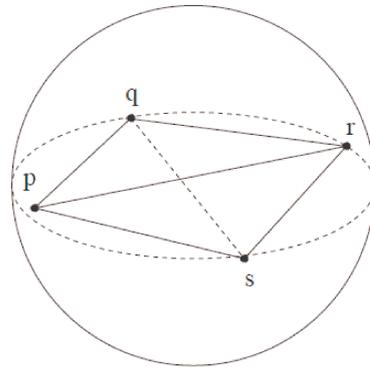
Em linhas gerais, para casos bidimensionais, a triangulação de Delaunay é baseada na verificação de nós no interior de circunferências. Dada uma nuvem de pontos, tomam-se três pontos nos quais uma circunferência é circunscrita. Caso nenhum dos pontos da nuvem esteja contido no interior da circunferência, o elemento formado pela união simples entre os três pontos tomados é um elemento da malha. Em casos tridimensionais, estende-se o conceito bidimensional com esferas circunscritas.

Os principais problemas presentes no método de triangulação de Delaunay são arredondamentos no teste de "círculo vazio", em 2-D, e "esfera vazia" em 3-D, além do surgimento de elementos do tipo *slivers*. De acordo com CHENG *et al.* (2000) e LIU e SUN (2006), *slivers* são elementos tetraédricos de baixa qualidade que possuem seus quatro vértices aproximadamente no mesmo plano e a projeção neste gera um quadrilátero. A Fig. 2.2 mostra um exemplo de elemento do tipo *sliver*.

2.1.2 Avanço de Frente de Geração

Os métodos de geração de malhas baseados em avanço de frente de geração envolvem simultaneamente a geração de pontos e a conectividade entre eles. A ideia básica associada

Figura 2.2: Elemento *sliver* formado pelos nós **pqrs**.

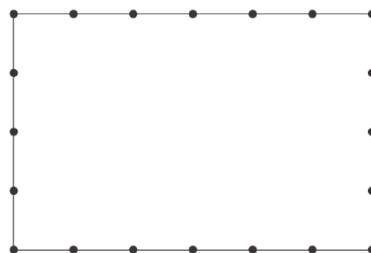


Fonte: LI e TENG (2003).

ao avanço de frente de geração é a construção de elemento por elemento com base nas células criadas anteriormente (MAVRIPLIS, 1995). Comumente, em casos bidimensionais, o código computacional inicia a construção da malha inserindo pontos na fronteira externa e conectando-os por meio de arestas simples. Em casos tridimensionais, faces triangulares delimitam a fronteira externa para uma malha tetraédrica.

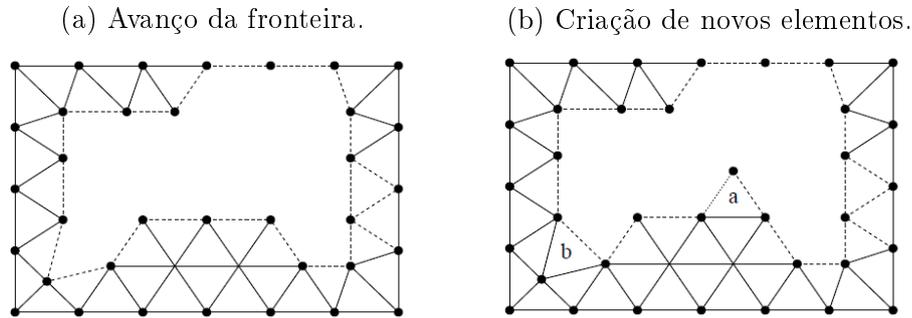
Com a delimitação da fronteira externa, a discretização espacial avança ao interior do domínio computacional, iniciando pelas menores arestas da fronteira externa, utilizando nós candidatos de tal forma que os elementos criados com a inserção de um novo nó sejam os de maior qualidade possível. Frequentemente, associa-se algum tipo de verificação de intersecção entre arestas, uma vez que os nós inseridos podem estar localizados no interior de elementos previamente criados. A Fig. 2.3 mostra a delimitação da fronteira externa pela conexão simples entre os nós criados. As Figs 2.4a e 2.4b mostram o avanço da fronteira com a criação de novos elementos em direção ao centro do domínio de cálculo.

Figura 2.3: Determinação da fronteira externa para geração da malha utilizando avanço de fronteira.



Fonte: MAVRIPLIS (1995).

Figura 2.4: a) Avanço da fronteira em direção ao centro do domínio computacional b) Criação de novos elementos **a** e **b** com uso de nós existentes e inserindo novo nó, respectivamente.



Fonte: MAVRIPLIS (1995).

2.2 Otimização de Malhas

Malhas contendo variações abruptas do tamanho ou forma dos seus elementos constituintes podem comprometer o processo de convergência, tornando a solução numérica mais difícil de ser calculada e aumentando a imprecisão associada aos resultados (LOHNER, 2008; FREITAG *et al.*, 1995). Com base nisso, diversas metodologias e algoritmos têm sido desenvolvidos e empregados no sentido de maximizar a qualidade de malhas geradas a partir de métodos tradicionais e, dessa forma, reduzir os erros e acelerar a convergência da solução.

Para malhas não-estruturadas, os algoritmos podem ser agrupados da seguinte forma:

1. Alteração topológica pela criação ou remoção de pontos para refinar a malha ou para melhorar a escala de comprimento local da malha (FREITAG e GOOCH, 1997; AMENTA *et al.*, 1999);
2. Alteração topológica para remover elementos da malha e substituí-la por um novo conjunto de elementos ocupando o mesmo espaço inicial (KLINGNER e SHEWCHUK, 2008);
3. Realocação espacial dos nós da malha a fim de elevar a qualidade da malha sem alteração topológica (FREITAG e GOOCH, 1997).

As técnicas mais comuns empregadas para otimização de malhas são, portanto: eliminação

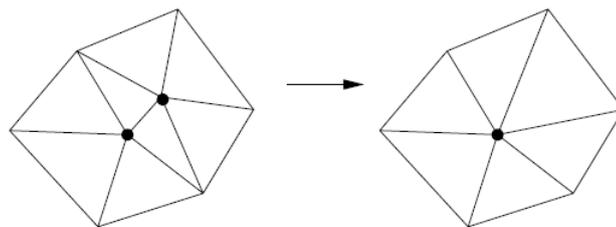
de elementos de baixa qualidade; otimização global por meio do máximo ou mínimo global de uma função objetivo; movimento seletivo de malha; permutação de diagonais e suavização laplaciana.

2.2.1 Eliminação de Elementos de Baixa Qualidade

A eliminação de elementos de baixa qualidade da malha se trata de uma alteração topológica local que pode ocorrer de duas formas distintas: pelo colapso de arestas em um ponto ou pela remoção dos elementos sem alteração na disposição do nós.

Para malhas tetraédricas, a remoção de elementos pelo colapso de arestas é simples, pois não existe a criação de um novo tipo de elemento na malha no entorno da aresta eliminada. Por outro lado, a remoção de elementos sem mudança na disposição espacial dos nós exige um algoritmo de reconstrução da malha (LOHNER, 2008). A Fig. 2.5 mostra a eliminação de elementos de uma malha 2-D simplificada pelo colapso de uma aresta. Apesar da relativa facilidade associada à implementação dessa técnica de otimização, o aumento da qualidade da malha é restrito e, portanto, seu uso é indicado em estágios de pré-otimização ou pré-suavização de malhas (LOHNER, 2008) .

Figura 2.5: Remoção de elementos de baixa qualidade pelo colapso de uma aresta.



Fonte: LOHNER (2008).

2.2.2 Função Objetivo de Otimização

A técnica de otimização de malhas por função objetivo se trata da forma mais sofisticada de otimização de malhas. Em linhas gerais, essa técnica consiste em buscar um mínimo ou máximo de uma função objetivo que se relaciona com a qualidade dos elementos da malha. Por se tratar de uma técnica de otimização global e, dessa forma,

buscar uma otimização da malha como um todo, ela é custosa na maioria das aplicações computacionais.

FREITAG e KNUPP (2002) mostram o desenvolvimento e aplicações de funções objetivo para otimização de malhas tetraédricas, de forma que os autores propõem duas funções objetivo. A primeira se relaciona com a qualidade média da malha e a outra se preocupa com elementos específicos da malha que estão distorcidos e, por conseguinte, apresentam baixa qualidade.

2.2.3 Movimento Seletivo de Malha

O movimento seletivo de malha se trata de um método de otimização local no qual os nós da malha são movidos em determinadas direções. Preferencialmente, adota-se um movimento direcional ao longo das arestas circundantes ao ponto que será movimentado. Caso o movimento resulte em um aumento da qualidade da malha, a nova posição nodal é mantida. Caso contrário, a posição nodal anterior é restabelecida.

Nesse método, a qualidade dos elementos circundantes deve ser verificada após cada movimento nodal. Somado às diversas alternativas de movimento espacial em malhas 3-D, esse método é computacionalmente custoso para malhas tetraédricas. No entanto, apresenta efetividade no tratamento de elementos com qualidade bastante prejudicada.

2.2.4 Permutação de Diagonais

O método de permutação de diagonais consiste em buscar um aumento da qualidade da malha por meio de um mecanismo de alteração de conectividade local no qual as arestas dos elementos são permutadas (LOHNER, 2008). A troca ocorre de forma a manter a disposição nodal inicial, no entanto, a quantidade de elementos pode ser alterada. FREITAG e GOOCH (1997) apresentam um estudo baseado em otimização de malhas tetraédricas utilizando permutação de diagonais e suavização, que fornece diversas recomendações para aumento da qualidade de malhas tetraédricas.

2.2.5 Suavização Laplaciana

Suavização é um método de modificação da malha que pode ser utilizado de diversas formas para otimização de malhas (SIROIS *et al.*, 2006). Esse tipo de otimização pode ser separado em duas categorias: métodos que otimizam a distribuição de tamanho e métodos que otimizam a forma do elemento. Na categoria dos métodos que otimizam a distribuição de tamanho, a técnica mais comumente utilizada é a suavização laplaciana.

Este método realoca um conjunto específico de nós da malha, um por vez, para aumentar a qualidade dos elementos presentes na vizinhança do nó realocado. (AMENTA *et al.*, 1999; FREITAG e KNUPP, 2002). Suavização laplaciana não é um método computacionalmente custoso (FREITAG e KNUPP, 2002), mas sua aplicação pode acarretar em elementos invertidos ou negativos. Um elemento negativo, ou invertido, é interpretado como um elemento geometricamente inválido para representação do domínio computacional. A presença de até mesmo um único elemento negativo, ou inválido, tornará o esquema de solução das equações incoerente matematicamente e deve, por conseguinte, ser evitado na malha (LOHNER, 2008).

O método de suavização laplaciana não possui nenhum tipo de mecanismo que garanta um elemento com qualidade superior após sua aplicação (FREITAG e GOOCH, 1996). No entanto, usualmente se observa uma qualidade média superior para a malha com sua implementação (TECCHIO *et al.*, 2014).

Capítulo 3

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentar-se-ão os conceitos fundamentais relacionados à otimização de malhas. Inicialmente, os conceitos abordados se relacionam com as métricas de qualidade para triângulos e tetraedros. Posteriormente, o método de suavização laplaciana é abordado, apresentando sua derivação. Por fim, discorre-se acerca da estrutura de dados implementada neste trabalho.

3.1 Qualidade de Malhas

A fim de mensurar a qualidade de uma malha, muitas equações e diversas abordagens têm sido desenvolvidas. De fato, a qualidade de uma malha não é apenas mensurada com uma simples equação, mas usando um conjunto de informações obtidas da topologia e geometria associada à malha (DOMPIERRE *et al.*, 1998). Um dos mais importantes dados de qualidade da malha é a qualidade associada aos seus elementos (BATISTA, 2005). Dados estatísticos dos elementos da malha, como o valor mínimo, máximo e médio e o desvio padrão de escalares como volume do tetraedro, comprimento de arestas e métricas de forma, também são utilizados na aferição da qualidade global da malha. Em particular, neste trabalho serão abordadas métricas de qualidade de elementos triangulares e tetraédricos.

Seja Ψ um domínio computacional, $\Psi \subset \mathbb{R}^2$, de uma malha triangular \mathcal{N}_Ψ e seja Ω um domínio computacional, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, de uma malha tetraédrica \mathcal{M}_Ω . Define-se como uma

métrica de qualidade de um elemento triangular \mathbf{t}_i , $\mathbf{t}_i \in \mathcal{N}_\Psi$ e de um elemento tetraédrico \mathbf{T}_j , $\mathbf{T}_j \in \mathcal{M}_\Omega$, de acordo com a seguinte definição:

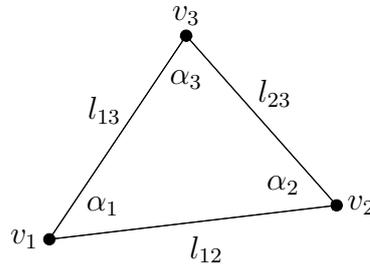
Definição 1. Uma *métrica de qualidade de forma* de \mathbf{t}_i e \mathbf{T}_j , é uma função escalar contínua $(\mathcal{Q}_{\mathbf{t}_i} : \mathbb{R}^2, \mathcal{Q}_{\mathbf{T}_j} : \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ a qual mensura a forma \mathbf{t}_i e \mathbf{T}_j , respectivamente, satisfazendo as seguintes condições:

- C1.** As métricas $\mathcal{Q}_{\mathbf{t}_i}$ e $\mathcal{Q}_{\mathbf{T}_j}$ são invariantes sob translação, rotação, reflexão e mudança de escala uniforme de \mathbf{t}_i e \mathbf{T}_j , respectivamente;
- C2.** $0 \leq \mathcal{Q}_{\mathbf{t}_i} \leq 1$, $\forall \mathbf{t}_i \in \mathcal{N}_\Psi$; e $0 \leq \mathcal{Q}_{\mathbf{T}_j} \leq 1$, $\forall \mathbf{T}_j \in \mathcal{M}_\Omega$;
- C3.** $\mathcal{Q}_{\mathbf{t}_i} = 1 \leftrightarrow \mathbf{t}_i$ é um triângulo equilátero; e $\mathcal{Q}_{\mathbf{T}_j} = 1 \leftrightarrow \mathbf{T}_j$ é um tetraedro regular;
- C4.** $\mathcal{Q}_{\mathbf{t}_i} = 0 \leftrightarrow \mathbf{t}_i$ é um triângulo degenerado; e $\mathcal{Q}_{\mathbf{T}_j} = 0 \leftrightarrow \mathbf{T}_j$ é um tetraedro degenerado.

3.1.1 Métricas de Qualidade de Triângulos

Seja \mathbf{t} um elemento triangular com vértices v_1 , v_2 e v_3 , assim como o mostrado pela Fig. 3.1. Denota-se por a a área de \mathbf{t} e $l_{ij} = |v_j - v_i|$, $1 \leq i < j \leq 3$, denota-se como sendo os comprimentos das arestas de \mathbf{t} . Designa-se por α_i o ângulo interior ao vértice v_i .

Figura 3.1: Típico elemento triangular \mathbf{t} .



Fonte: Autoria Própria.

A métrica de forma $\sigma_{min}(\mathbf{t})$ é definida como sendo o valor mínimo de σ_i , $i = 1, 2, 3$, de forma que $\sigma_i = \sin^2(\alpha_i)$. Essa métrica de forma pode se calculada usando as seguintes relações:

$$\sin(\alpha_1) = 2a/(l_{12}l_{13}) , \quad (3.1)$$

$$\sin(\alpha_2) = 2a/(l_{23}l_{12}) , \quad (3.2)$$

$$\sin(\alpha_3) = 2a/(l_{23}l_{13}) . \quad (3.3)$$

De forma a atender à definição 1, a métrica de forma $\sigma(\mathbf{t})$ é usada e pode ser determinada por meio da relação $\sigma(\mathbf{t}) = (4/3)\sigma_{min}(\mathbf{t})$, onde $\sigma_{min}(\mathbf{t})$ é obtido por

$$\sigma_{min}(\mathbf{t}) = \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) . \quad (3.4)$$

A métrica de forma $\rho(\mathbf{t})$ é definida como sendo a razão entre duas vezes o raio da circunferência inscrita, $2r_{in}$, e um raio da circunferência circunscrita, r_{circ} , ao elemento triangular \mathbf{t} , respectivamente, sendo comumente designada por *razão de raios* (PÉBAY e BAKER, 2003). Sem perda de generalidade, sabe-se que as relações para r_{in} e r_{circ} são dadas, respectivamente, por:

$$r_{in} = \frac{2a}{l_{12} + l_{13} + l_{23}} , \quad (3.5)$$

$$r_{circ} = \frac{l_{12}l_{13}l_{23}}{4a} . \quad (3.6)$$

Com base nas Eqs. 3.5 e 3.6, segue que:

$$\rho(\mathbf{t}) = \frac{2r_{in}}{r_{circ}} = \frac{16a^2}{l_{12}l_{13}l_{23}(l_{12} + l_{13} + l_{23})} . \quad (3.7)$$

A métrica de forma $\mu(\mathbf{t})$, designada por *razão média*, é definida como sendo

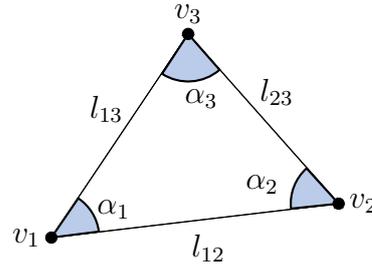
$$\mu(\mathbf{t}) = \frac{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} , \quad (3.8)$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores da matriz $M^T M$, onde M é uma matriz envolvida em uma transformação afim de \mathbf{e} para \mathbf{t} onde \mathbf{e} é um triângulo equilátero contendo a mesma área de \mathbf{t} (JOE, 2008). Em termos de área e comprimentos das arestas de \mathbf{t} , a Eq. 3.8 pode ser escrita como:

$$\mu(\mathbf{t}) = \frac{4\sqrt{3}a}{l_{12}^2 + l_{13}^2 + l_{23}^2} . \quad (3.9)$$

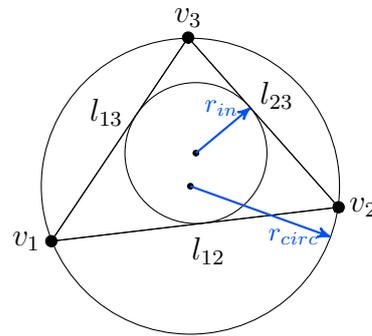
Todas as métricas para elementos triangulares apresentadas acima, $\sigma(\mathbf{t})$, $\rho(\mathbf{t})$ e $\mu(\mathbf{t})$, seguem a definição 1 em um domínio Ψ . As interpretações geométricas relacionadas as métricas de forma de triângulos são apresentadas nas Figs 3.2, 3.3 e 3.4.

Figura 3.2: Métrica de forma para triângulo de *ângulo mínimo*.



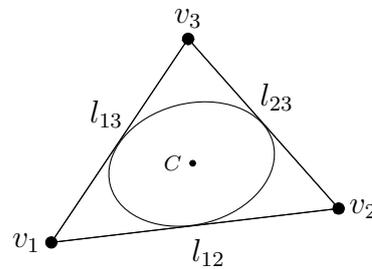
Fonte: Autoria Própria.

Figura 3.3: Métrica de forma para triângulo de *razão de raios*.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 3.4: Métrica de forma para triângulo de *razão média*.



Fonte: Autoria Própria.

3.1.2 Métricas de Qualidade de Tetraedros

Seja \mathbf{T} um tetraedro com vértices P_1, P_2, P_3 e P_4 . Denota-se por V o seu volume, $S_1 = \text{area}(\Delta P_1 P_2 P_3)$, $S_2 = \text{area}(\Delta P_1 P_3 P_4)$, $S_3 = \text{area}(\Delta P_1 P_2 P_4)$, $S_4 = \text{area}(\Delta P_2 P_3 P_4)$, denotam as áreas das faces triangulares e $L_{ij} = |P_j - P_i|$, $1 \leq i < j \leq 4$ denotam os comprimentos das arestas de \mathbf{T} (JOE, 2008).

A métrica de forma $\sigma_{\min}(\mathbf{T})$ é definida como sendo o valor mínimo de σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, onde $\sigma_i = \sin(\theta_i/2)$ e θ_i é o ângulo sólido associado ao vértice P_i . Essa métrica é uma simples função trigonométrica do *ângulo sólido mínimo*, θ_{\min} . O valor de σ_1 pode ser

calculado utilizando a seguinte relação:

$$\sin(\theta_1/2) = \frac{12V}{\sqrt{\prod_{2 \leq i < j \leq 4} (L_{1i} + L_{1j} + L_{ij})(L_{1i} + L_{1j} - L_{ij})}} . \quad (3.10)$$

Fórmulas para θ_2 , θ_3 and θ_4 são similares à Eq. 3.10. Dessa forma, a métrica de forma $\sigma_{min} = \sin(\theta_{min}/2)$ pode ser determinada utilizando a seguinte igualdade:

$$\sigma_{min}(\mathbf{T}) = \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) . \quad (3.11)$$

De forma a atender à definição 1, a métrica de forma $\sigma(\mathbf{T})$ é usada e pode ser determinada por meio da relação $\sigma(\mathbf{T}) = (9/\sqrt{6})\sigma_{min}(\mathbf{T})$.

A métrica de forma $\rho(\mathbf{T})$, denotada como *razão de raios*, é definida como sendo a razão entre três vezes o raio da esfera inscrita, $3R_{in}$, e um raio da esfera circunscrita, R_{circ} , ao tetraedro \mathbf{T} , respectivamente. Pode-se determiná-la utilizando a seguinte igualdade:

$$\rho(\mathbf{T}) = \frac{216V^2}{\sum_{i=1}^4 S_i} [(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 - b_3)(b_3 + b_1 - b_2)(b_2 + b_3 - b_1)]^{-1/2} , \quad (3.12)$$

onde b_1 , b_2 e b_3 são os produtos dos comprimentos das arestas opostas de \mathbf{T} , ou seja, $b_1 = L_{12}L_{34}$, $b_2 = L_{23}L_{14}$ e $b_3 = L_{31}L_{24}$.

A métrica de forma $\mu(\mathbf{T})$, designada por *razão média*, é definida como sendo

$$\mu(\mathbf{T}) = \frac{3\sqrt[3]{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} , \quad (3.13)$$

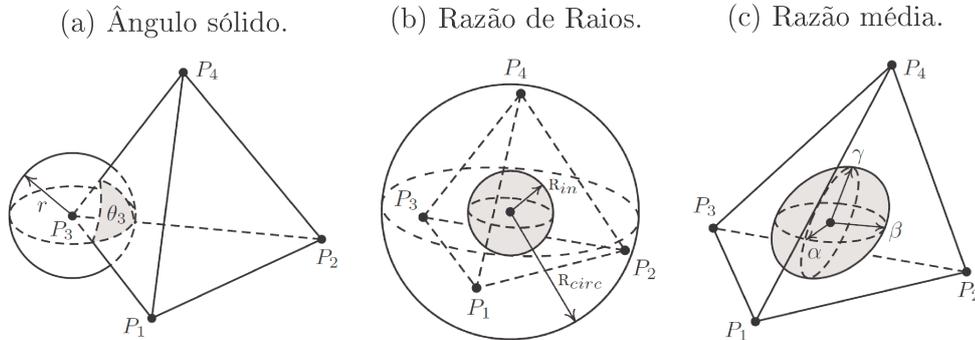
onde λ_1 , λ_2 e λ_3 são os autovalores da matriz $M^T M$, onde M é uma matriz envolvida em uma transformação afim de \mathbf{R} para \mathbf{T} onde \mathbf{R} é um tetraedro regular contendo o mesmo volume de \mathbf{T} (JOE, 2008). Em termos de volume e comprimento de arestas, a Eq. 3.13 é escrita da seguinte maneira:

$$\mu(\mathbf{T}) = \frac{12(3V)^{2/3}}{\sum_{1 \leq i < j \leq 4} L_{ij}^2} . \quad (3.14)$$

Em termos geométricos, a métrica de razão média representa a taxa de deformação de uma esfera inscrita a um tetraedro regular com mesmo volume de \mathbf{T} , quando transformada em um elipsóide inscrito à \mathbf{T} .

Todas as métricas para tetraedros apresentadas acima, $\sigma(\mathbf{T})$, $\rho(\mathbf{T})$ e $\mu(\mathbf{T})$ seguem a definição 1 sob um domínio Ω . A Fig. 3.5 ilustra o conceito geométrico associado as três métricas com base em um tetraedro $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_4$.

Figura 3.5: Métricas de forma para tetraedros.



Fonte: BATISTA (2005).

3.2 Método de Suavização Laplaciana

3.2.1 Formulação Geral

Diversos métodos e algoritmos têm sido desenvolvidos para aumentar a qualidade da malha utilizando técnicas de suavização (FREITAG *et al.*, 1995). Algoritmos de otimização de malhas podem ser separados em dois grupos principais: métodos globais e locais. Algoritmos de suavização local de malhas são comumente utilizados para uma otimização simplicial (FREITAG e KNUPP, 2002). Esses métodos realocam um conjunto específico de nós da malha, um por vez, para aumentar a qualidade dos elementos presentes na vizinhança do nó.

A técnica de suavização local mais conhecida é a suavização laplaciana. Sua designação está associada ao fato de que nesse método os nós da malha são incrementalmente movidos em direção ao laplaciano (BRAY, 2004). Esse método é computacionalmente barato, no entanto, não possui nenhum mecanismo que garante um aumento na qualidade dos elementos (FREITAG e KNUPP, 2002). Embora a aplicação da suavização laplaciana não garanta um aumento na qualidade dos elementos da malha, uma melhora na qualidade global da malha é usualmente verificada para malhas bidimensionais (AMENTA *et al.*, 1999).

A equação diferencial parcial que governa o processo de suavização pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \gamma L(X) , \quad (3.15)$$

onde X representa os vértices de uma malha arbitrária, L é o laplaciano e γ é o escalar que controla a velocidade do processo de suavização. Utilizando uma aproximação de diferenças progressivas, obtida a partir de uma expansão em série de Taylor, pode-se escrever que:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{X(n+1) - X(n)}{\Delta t} , \quad (3.16)$$

onde Δt é o parâmetro de relaxação e n representa a iteração numérica. Dessa forma, combinando as Eqs 3.16 e 3.15, tem-se:

$$X(n+1) = X(n) + \gamma L(X) \Delta t. \quad (3.17)$$

O operador laplaciano aplicado à X_i , $L(X_i)$, pode ser aproximado linearmente da seguinte forma:

$$L(X_i) = \sum_{j \in i^*} [w_{ij}(X_j - X_i)] , \quad (3.18)$$

onde i^* é o conjunto dos vértices circundantes ao vértice X_i e w_{ij} é o fator ponderante para a soma. Aplicando a Eq. 3.17 para um vértice i específico e substituindo a Eq. 3.18 na Eq. 3.17, tem-se:

$$X_i(n+1) = X_i(n) + \gamma \Delta t \sum_{j \in i^*} \{w_{ij} [X_j(n) - X_i(n)]\} . \quad (3.19)$$

A Eq. 3.19 é a forma geral da equação de suavização laplaciana aplicada a um dado vértice i da malha. DESBRUN *et al.* (1999) apresentam três formas distintas de discretizar o operador laplaciano. A diferença entre os operadores é como o fator ponderante w_{ij} é calculado.

Uma aproximação simples para o laplaciano utiliza fatores ponderantes iguais, o qual pode ser escrito como:

$$w_{ij} = \frac{1}{ns_i} , \quad (3.20)$$

onde ns_i é o número total de vértices circundantes ao nó i . Para essa aproximação, dá-se o nome de *laplaciano simples*. De fato, nesse esquema move-se cada nó especificado para o centroide da figura determinada pelo seus nós circundantes. A vantagem associada ao uso de fatores ponderantes iguais se dá pela dependência exclusiva da topologia da malha, ou seja, somente do conhecimento de ns_i , e não da posição dos vértices. Adicionalmente, para um vértice específico, não há alteração do fator ponderante durante o processo de suavização e, portanto, não há necessidade de ser recalculado para cada nova iteração. O operador apresenta, portanto, característica linear e vai ao encontro da suposição inicial adotada acerca da Eq. 3.18. Por outro lado, sua grande desvantagem está associada com a presença de elementos invertidos ou negativos quando aplicado a malhas com a presença de elementos de baixa qualidade. Essa formulação para o operador laplaciano fornece o conhecido *umbrella operator* (DESBRUN *et al.*, 1999).

Outra aproximação para o laplaciano, utilizando uma dependência de escala, faz uso de um fator ponderante inversamente proporcional à distância entre os vértices. Este fator ponderante é também conhecido como fator ponderante de Fujiwara (DESBRUN *et al.*, 1999) e pode ser expresso por

$$w_{ij} = \frac{1}{l_{ij}} , \quad (3.21)$$

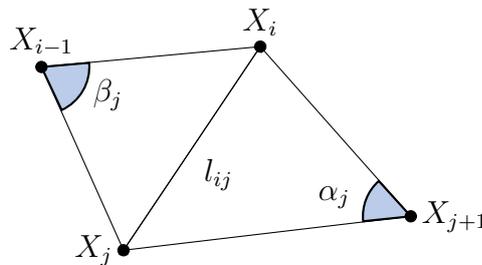
onde l_{ij} denota o comprimento das arestas conectadas ao vértice i . Essa formulação é denominada como *scale-dependent umbrella operator* (DESBRUN *et al.*, 1999). Embora a presença de elementos invertidos ainda seja um problema, a criação de tais elementos é menos evidente com relação a formulação anterior. Sua principal desvantagem está associada com a necessidade de recalculá-lo o fator ponderante. Adicionalmente, esta formulação faz com que o operador laplaciano deixe de ser linear.

A terceira formulação para o operador laplaciano, proposta por DESBRUN *et al.* (1999), é uma tentativa de evitar o aparecimento de elementos invertidos ou negativos, excluindo a componente tangencial do laplaciano. O fator ponderante pode ser expresso por:

$$w_{ij} = \cot \alpha_j + \cot \beta_j , \quad (3.22)$$

onde α_j e β_j são os ângulos opostos à aresta compartilhada por dois triângulos. A Fig. 3.6 ilustra os ângulos opostos à aresta compartilhada por dois triângulos. Nessa formulação, o operador laplaciano é denominado de *curvature normal operator* (DESBRUN *et al.*, 1999). Novamente, trata-se de um operador não-linear e necessita ser recalculado com a realocação do vértice. A principal desvantagem se relaciona com a natureza dos ângulos α_j e β_j . Caso um dos ângulos for obtuso, o esquema é falho, uma vez que w_{ij} pode se tornar negativo.

Figura 3.6: Ilustração de ângulos opostos, α_j e β_j , à aresta compartilhada l_{ij} por dois triângulos.



Fonte: Autoria Própria.

Neste trabalho, utilizar-se-á como operador laplaciano o *laplaciano simples*, cujo fator ponderante é dado pela Eq. 3.20. Entende-se, para as seções subsequentes, que suavização laplaciana reporta ao uso do operador *laplaciano simples*. Dessa forma, substituindo a Eq. 3.20 na Eq. 3.19, tem-se:

$$X_i(n+1) = X_i(n) + \gamma \Delta t \left[\sum_{j \in i^*} \frac{1}{ns_i} X_j(n) - \sum_{j \in i^*} \frac{1}{ns_i} X_i(n) \right] , \quad (3.23)$$

ou também

$$X_i(n+1) = X_i(n) + \gamma \Delta t \frac{1}{ns_i} \left\{ \sum_{j \in i^*} [X_j(n) - X_i(n)] \right\} . \quad (3.24)$$

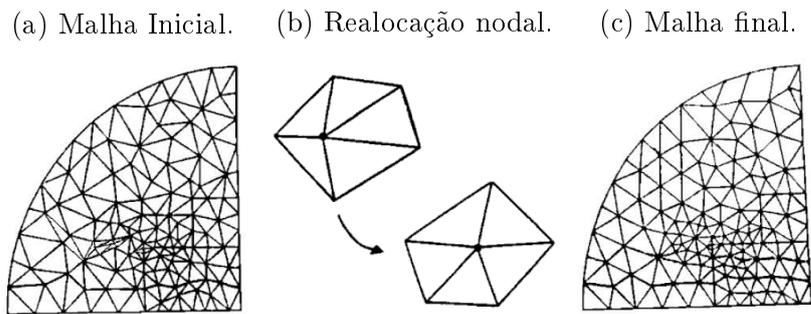
Para malhas 2-D o parâmetro de relaxação, Δt , e a constante que controla a velocidade de suavização, γ , serão utilizados como sendo unitários, de modo que a Eq. 3.24 pode ser rearranjada de forma a escrever, em termos de coordenadas espaciais, que

$$x_i(n+1) = \frac{1}{ns_i} \sum_{j=0}^{ns_i} x_j(n) , \quad (3.25)$$

$$y_i(n+1) = \frac{1}{ns_i} \sum_{j=0}^{ns_i} y_j(n) , \quad (3.26)$$

onde ns_i é o número total de nós circundantes ao vértice i e x e y são as coordenadas espaciais. A Fig. 3.7 apresenta um exemplo de suavização laplaciana em malha não-estruturada bidimensional, cujo resultado após aplicação do processo de otimização por suavização laplaciana evidencia uma distribuição de pontos mais homogênea do que a da malha inicial.

Figura 3.7: Exemplo de aplicação de suavização laplaciana em uma malha bidimensional não-estruturada.



Fonte: MOL (2004).

Para malhas tridimensionais, a Eq. 3.24 é mantida com valores de Δt e γ distintos da unidade. Dessa maneira, pode-se interpretar a Eq. 3.24 por meio de uma analogia das arestas dos elementos com molas. As arestas dos tetraedros funcionam como molas e são relaxadas no tempo usando um esquema de passo no tempo explícito, até um equilíbrio de forças ser estabelecido. Um aumento da qualidade da malha pode ser alcançado muito rapidamente devido às forças de não-equilíbrio serem em sua maioria de origem local. A força exercida por cada mola é proporcional ao comprimento da aresta e ao longo de sua direção (LOHNER, 2008). Portanto, a soma de todas as forças exercidas por todas as molas para cada direção espacial no entorno de um ponto pode ser escrita como:

$$f_{i-x} = c \sum_{j=1}^{Ns_i} (x_j - x_i) , \quad (3.27)$$

$$f_{i-y} = c \sum_{j=1}^{Ns_i} (y_j - y_i) , \quad (3.28)$$

$$f_{i-z} = c \sum_{j=1}^{Ns_i} (z_j - z_i) , \quad (3.29)$$

onde c denota a constante elástica da mola e é equivalente a γ , x_i , y_i e z_i são as coordenadas espaciais do ponto a realocar, sendo que a soma é estendida para todos os pontos j 's ao redor do ponto i . O avanço no tempo para as coordenadas é realizado como segue:

$$\Delta x_i = \Delta t \frac{1}{Ns_i} f_{i-x} , \quad (3.30)$$

$$\Delta y_i = \Delta t \frac{1}{Ns_i} f_{i-y} , \quad (3.31)$$

$$\Delta z_i = \Delta t \frac{1}{Ns_i} f_{i-z} , \quad (3.32)$$

onde Ns_i representa o total de pontos ao redor do nó i , Δt é o parâmetro de relaxação, Δx_i , Δy_i e Δz_i são a variação da posição do nó i entre dois passos de tempo consecutivos na abscissa, ordenada e cota do sistema de coordenadas espacial, respectivamente. Usualmente, o parâmetro temporal é escolhido como sendo $\Delta t = 0,8$, de forma que cinco a seis iterações fornecem uma malha final aceitável (LOHNER, 2008).

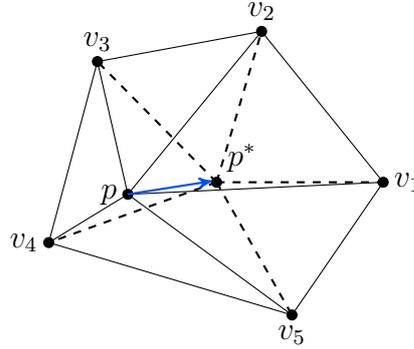
3.2.2 Critério de Convergência

Considere uma malha computacional bidimensional formada pelos elementos pv_2v_3 , pv_3v_4 , pv_4v_5 , pv_5v_1 e pv_1v_2 , conforme é mostrada na Fig. 3.8. As posições espaciais do nó p e p^* , antes e depois da aplicação da suavização laplaciana, respectivamente, podem ser relacionadas com base no deslocamento ao qual o mesmo é submetido. Dessa forma, escreve-se que:

$$p_x^* = p_x + \overrightarrow{\Delta p_x} , \quad (3.33)$$

$$p_y^* = p_y + \overrightarrow{\Delta p_y} . \quad (3.34)$$

Figura 3.8: Realocação espacial do nó p para o centroide p^* da figura determinada pelos nós circundantes $v_1v_2v_3v_4v_5$.



Fonte: Autoria Própria.

O algoritmo de critério de convergência adotado neste trabalho é apresentado por CABELLO (2000), o qual baseia-se em uma análise adimensional entre um comprimento característico médio \bar{l} e o módulo do deslocamento no qual o nó será submetido, $|\overrightarrow{\Delta p}|$, de modo que o nó não é mais realocado se a seguinte relação for satisfeita:

$$\frac{|\overrightarrow{\Delta p}|}{\bar{l}} < \varepsilon, \quad (3.35)$$

onde ε é um parâmetro determinado pelo usuário e \bar{l} pode ser calculado com a seguinte expressão:

$$\bar{l} = \frac{1}{ns} \sum_{j=1}^{ns} |\overrightarrow{pv_j}|, \quad (3.36)$$

onde ns é o número total de nós circundantes ao nó sendo realocado e $|\overrightarrow{pv_j}|$ representa o comprimento do segmento $\overrightarrow{pv_j}$ conectado ao nó p .

O critério de convergência determinado pela Eq. 3.35 pode ser interpretado como uma medida do deslocamento do nó realocado em relação ao comprimento característico médio das arestas conectadas ao nó. Caso o deslocamento $|\overrightarrow{\Delta p}|$ a qual o nó é submetido seja suficientemente pequeno com respeito ao comprimento característico \bar{l} , de modo a atender a desigualdade 3.35, a posição inicial p do nó é mantida e, portanto, o nó não sofre realocação espacial. Caso contrário, realoca-se o nó de acordo com as Eqs 3.25 e 3.26.

Vale ressaltar que a implementação computacional desse método é baseada em uma lista de nós a realocar. Inicialmente, todos os nós que se deseja realocar pertencem a

lista. O nó somente é excluído da lista se a desigualdade 3.35 se verificar. Por outro lado, quando um nó é realocado, todos os nós vizinhos devem pertencer a lista de nós a realocar na próxima iteração. Usualmente, adota-se um valor máximo de iterações de suavização laplaciana, caso o critério não convirja por questões topológicas da malha.

3.3 Critério de Validade

Em CFD, um elemento tetraédrico \mathbf{T} é dito como válido para representação do domínio computacional se, e somente se, além deste possuir volume estreitamente positivo, este não interceptar qualquer outra face dos demais elementos da malha \mathcal{M}_Ω (BATISTA, 2005).

Conforme mencionado na seção 2.2.5, a aplicação do método de suavização laplaciana pode acarretar em elementos invertidos ou negativos. A fim de garantir a consistência geométrica na aplicação da suavização laplaciana e no processo de alteração topológica do método proposto no capítulo 4, um critério de validade para elementos tetraédricos deve ser estabelecido. Define-se tal critério da seguinte forma:

Definição 2. Critério de Validade. Seja um domínio computacional Ω , $\Omega \in \mathbb{R}^3$, de uma malha computacional \mathcal{M}_Ω . Diz-se que um elemento tetraédrico \mathbf{T}_j , $\mathbf{T}_j \in \mathcal{M}_\Omega$, onde $\mathbf{T}_j = P_1P_2P_3P_4$ é válido se, e somente se, as seguintes condições forem verificadas:

C1. $V_{\mathbf{T}_j} > 0$ e;

C2. Se $(L_{ij} = P_j - P_i) \cap F_A = \emptyset$, $\forall F_A \in \mathcal{M}_\Omega$ e $1 \leq i < j \leq 4$.

onde $V_{\mathbf{T}_j}$ é o volume de \mathbf{T}_j , L_{ij} denota as arestas de \mathbf{T}_j e F_A denota a face F formada pelo conjunto A de todos os pontos internos a região delimitada pelas arestas da face F .

A condição C1 da definição 2 requer que todos os elementos da malha computacional tenham volume positivo, de forma a assegurar a validade local do elemento. Por outro lado, a condição C2 garante a validade do elemento com relação a sua vizinhança, de forma que nenhuma aresta de \mathbf{T}_j pode interseccionar um ponto interior de uma face pertencente a malha \mathcal{M}_Ω . A seguir, os testes associados as condições C1 e C2, expostas na definição 2, são apresentados.

3.3.1 Teste de Volume

A condição C1, relativa a definição 2, é realizada por meio da análise da positividade do volume $V_{\mathbf{T}_j}$ associado ao tetraedro \mathbf{T}_j . Dessa forma, seja o tetraedro $\mathbf{T}_j = P_1P_2P_3P_4$ e $P_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3, 4$, o volume de \mathbf{T}_j é dado por:

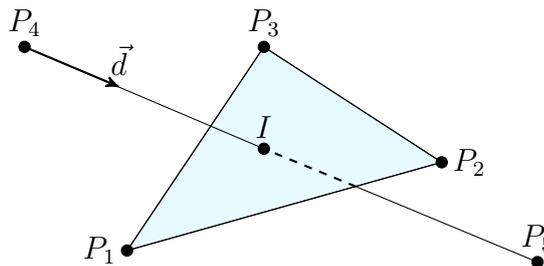
$$V_{\mathbf{T}_j} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \quad (3.37)$$

onde $||$ denota o determinante da matriz. Caso $V_{\mathbf{T}_j} > 0$, o tetraedro atende ao critério C1 da definição 2. Se $V_{\mathbf{T}_j} = 0$, então os quatro vértices de \mathbf{T}_j estão contidos no mesmo plano e, portanto, o teste de volume não é satisfeito. Por outro lado, se $V_{\mathbf{T}_j} < 0$, o tetraedro está invertido.

3.3.2 Teste de Intersecção

A condição C2, relativa a definição 2, é realizada por meio de uma adaptação do pseudocódigo apresentado por SCHNEIDER e EBERLY (2003), no qual verifica-se a intersecção de uma semi-reta e uma face triangular. A Fig. 3.9 ilustra a intersecção entre face triangular e aresta.

Figura 3.9: Intersecção entre face triangular $F_{123} = P_1P_2P_3$ e aresta $\overrightarrow{P_4P_5}$.



Fonte: Autoria Própria.

Com respeito a Fig. 3.9, suponha que o alongamento do vetor \vec{d} ao longo da aresta $\overrightarrow{P_4P_5}$ intercepte a face $F_{123} = P_1P_2P_3$ em I , onde I é um ponto da região planar delimitada por $F_{123} = P_1P_2P_3$. Embora exista a intersecção da semi-reta caracterizada pelo ponto P_4 e direção \vec{d} com a face $F_{123} = P_1P_2P_3$, faz-se necessário saber se o vértice P_5 se encontra no sentido positivo ou negativo do vetor normal a face $F_{123} = P_1P_2P_3$, cujo sentido é dado pela regra da mão direita, ou seja, o vetor normal a face $F_{123} = P_1P_2P_3$ apontado

no sentido de I para P_4 é positivo e o vetor normal apontado no sentido de I para P_5 é negativo. Caso P_5 se encontre no sentido negativo do vetor normal a face $F_{123} = P_1P_2P_3$, existirá a intersecção e a triangulação é inválida, assim como ilustrado pela Fig. 3.9. Por outro lado, caso P_5 se encontre no sentido positivo da normal, a colisão não existirá. A verificação da localização do vértice P_5 é realizada por meio de teste do volume apresentado na seção 3.3.1. Caso o sinal associado ao volume do tetraedro $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_4$ for o oposto do sinal do volume do tetraedro $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_5$, a intersecção existirá. Caso os sinais forem iguais, significa que P_5 e P_4 se encontram do mesmo lado do semi-plano delimitado por $F_{123} = P_1P_2P_3$ e, portanto, não existe intersecção.

3.4 Estrutura de Dados

3.4.1 Considerações Iniciais

A estrutura de dados adotada em problemas numéricos desempenha um papel fundamental no processamento de informações, podendo contribuir para uma redução significativa de tempo de processamento computacional, principalmente em casos com malhas não-estruturadas (LOHNER, 2008).

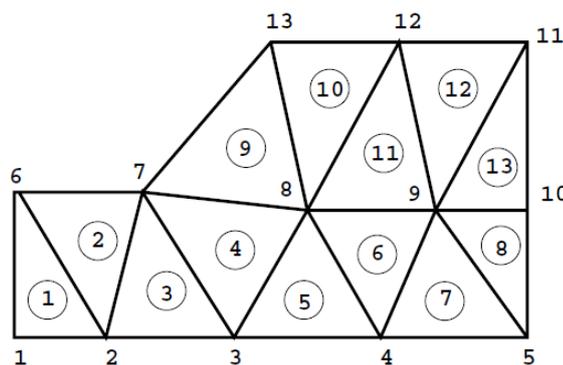
Conforme apresentado na seção 3.2, o método de suavização laplaciana necessita, para cada passo de realocação nodal, a informação dos nós conectados ao nó realocado. Por exemplo, tomando o nó número 8 na malha da Fig. 3.10, para realocá-lo de acordo com o método de suavização laplaciana, necessita-se da informação das coordenadas espaciais dos nós 3, 4, 9, 12, 13 e 7. A forma mais simples de estrutura de dados para prover a informação de nós circundantes e, também, de elementos circundantes a um dado nó da malha seria a construção de duas listas. A primeira lista, em forma de matriz, armazenaria em suas linhas os nós da malha e em suas colunas os respectivos nós circundantes a cada um dos nós. De maneira análoga, a informação de elemento circundante ao um dado nó seria armazenada nas colunas de uma lista. No entanto, o número de elementos circundantes a um nó em malhas tetraédricas tipicamente varia de 1 a 64, e caso as estruturas acima sejam empregadas, alocar-se-ia um grande espaço em memória sem ser utilizado. A fim de oferecer uma forma mais eficiente em termos de estrutura de dados, LOHNER (2008) apresenta algoritmos baseados em listas encadeadas, conhecidas como ESUP, do inglês *Element Surrounding Point*, e PSUP, do inglês *Point Surrounding Point*.

Em adicional, no cálculo do escoamento de fluidos por meio de técnicas de volumes finitos, as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e conservação da energia devem ser satisfeitas para cada elemento da malha. Os cálculos de fluxos convectivo e dissipativo através das faces de cada elemento da malha podem ser otimizados se uma estrutura de dados forneça a conectividade associada a face cujo fluxo é calculado. Dessa forma, foi desenvolvido no Laboratório de Aerodinâmica Computacional do IAE uma rotina para construir uma estrutura de dados, baseada em faces, para otimização do processo de cálculo. A seguir, as estruturas de dados ESUP, PSUP e PREPROC serão apresentadas e brevemente discutidas.

3.4.2 ESUP e PSUP

Considere uma malha bidimensional não-estruturada constituída de 13 elementos e 13 nós, conforme mostrada na Fig. 3.10. As estruturas de dados ESUP e PSUP fornecem os elementos circundantes e os nós circundantes a um dado nó da malha, respectivamente. Ambas as estruturas são baseadas em listas encadeadas, nas quais duas listas para cada uma das estruturas são criadas. A primeira lista armazena a informação de interesse e a segunda lista contém o local de início e fim, na primeira lista, da informação de interesse. A Fig. 3.11 ilustra o funcionamento das listas encadeadas para estrutura de dados ESUP.

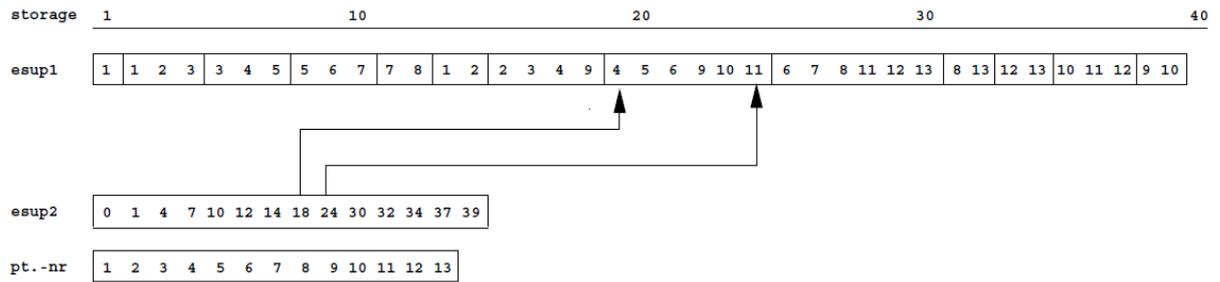
Figura 3.10: Exemplo de malha bidimensional.



Fonte: LOHNER (2008).

Com a construção das estruturas ESUP e PSUP, pode-se obter as informações de quais elementos circundam um nó e quais nós circundam um nó, respectivamente. Como apresentado na Fig. 3.11, primeiramente o nó de interesse é acessado, por exemplo, nó $n = 8$ da malha mostrada na Fig. 3.10. Posteriormente, obtém-se a posição n e $n + 1$ da

Figura 3.11: Listas conectadas, esup2 e esup1, para elemento circundante a um dado nó.



Fonte: LOHNER (2008).

lista esup2, posições da lista nas quais são armazenadas as informações de início, $a = 18$, e fim, $b = 24$, da informação de interesse, de modo que no caso ilustrado são os elementos circundantes ao nó número 8. Finalmente, as informações de início e fim são repassadas a lista esup1 como índices da lista, cujos elementos que circundam o nó n se encontram entre as posições $a + 1$ e b . A forma de obtenção da informação para a estrutura PSUP é similar a apresentada para ESUP.

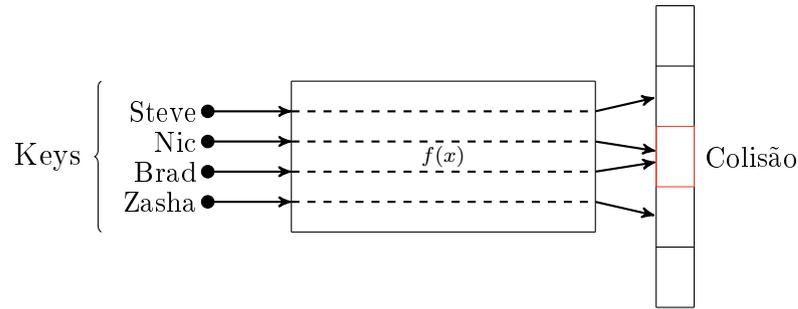
3.4.3 PREPROC

A estrutura de dados criada pela rotina numérica designada de PREPROC visa a redução do tempo computacional associado aos cálculos de fluxos entre as faces dos elementos da malha com a construção de uma lista de faces. O algoritmo desenvolvido faz uma busca de faces utilizando o conceito de tabela *hash* para construção da lista. De maneira geral, tabelas *hash* utilizam uma função *hash*, designada por $f(x)$, para associar um índice de uma lista com base em uma determinada chave de entrada.

A Fig. 3.12 apresenta um exemplo ilustrativo do funcionamento de uma tabela *hash*, cujas chaves de entrada são representadas por substantivos próprios e a lista vertical apresentada à direita da Fig. 3.12 poderia, por exemplo, conter a informação dos seus contatos telefônicos. A função *hash* é a responsável por informar o índice da lista onde a informação relacionada à chave de entrada está armazenada. No entanto, a função *hash* pode informar o mesmo índice para chaves de entrada diferentes, causando assim uma colisão. As colisões podem ser tratadas de diversas formas, porém, a escolha de uma função *hash* apropriada e suficientemente refinada comumente evita colisões.

A estrutura final criada pela PREPROC é uma lista em forma de matriz na qual cada linha corresponde a uma face da malha e as colunas contém as informações dos nós que

Figura 3.12: Esquema ilustrativo do funcionamento da tabela *hash*.

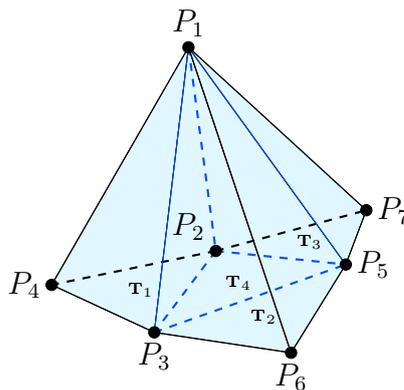


Fonte: Autoria própria.

compõem cada face e quais os elementos que compartilham de uma mesma face. Como o código de CFD em desenvolvimento no IAE é capaz de trabalhar com malhas contendo até quatro tipos de volumes de controle diferentes, a saber tetraedros, prismas de base triangular, pirâmides de base quadrangular e hexaedros, esta estrutura de dados também é bastante eficiente em termos de alocação de memória quando utilizada por este código.

Considere os elementos tetraédricos \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 , \mathbf{T}_3 e \mathbf{T}_4 mostrados na Fig. 3.13. A Tab. 3.1 evidencia a estrutura da lista criada pela rotina PREPROC, cujas três faces internas são descritas em termos da composição de seus nós e a conectividade com os elementos adjacentes. A lista se estende para todas as n faces contidas na malha.

Figura 3.13: Exemplo de tetraedros compartilhando faces.



Fonte: Autoria Própria.

Tabela 3.1: Estrutura da lista construída com a rotina computacional PREPROC.

Face	Nó1	Nó2	Nó3	Nó4	Elem1	Elem2
1	P_2	P_3	P_1	-	\mathbf{T}_1	\mathbf{T}_4
2	P_3	P_1	P_5	-	\mathbf{T}_2	\mathbf{T}_4
3	P_1	P_2	P_5	-	\mathbf{T}_3	\mathbf{T}_4
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
n						

Fonte: Autoria Própria.

Capítulo 4

MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO PROPOSTO

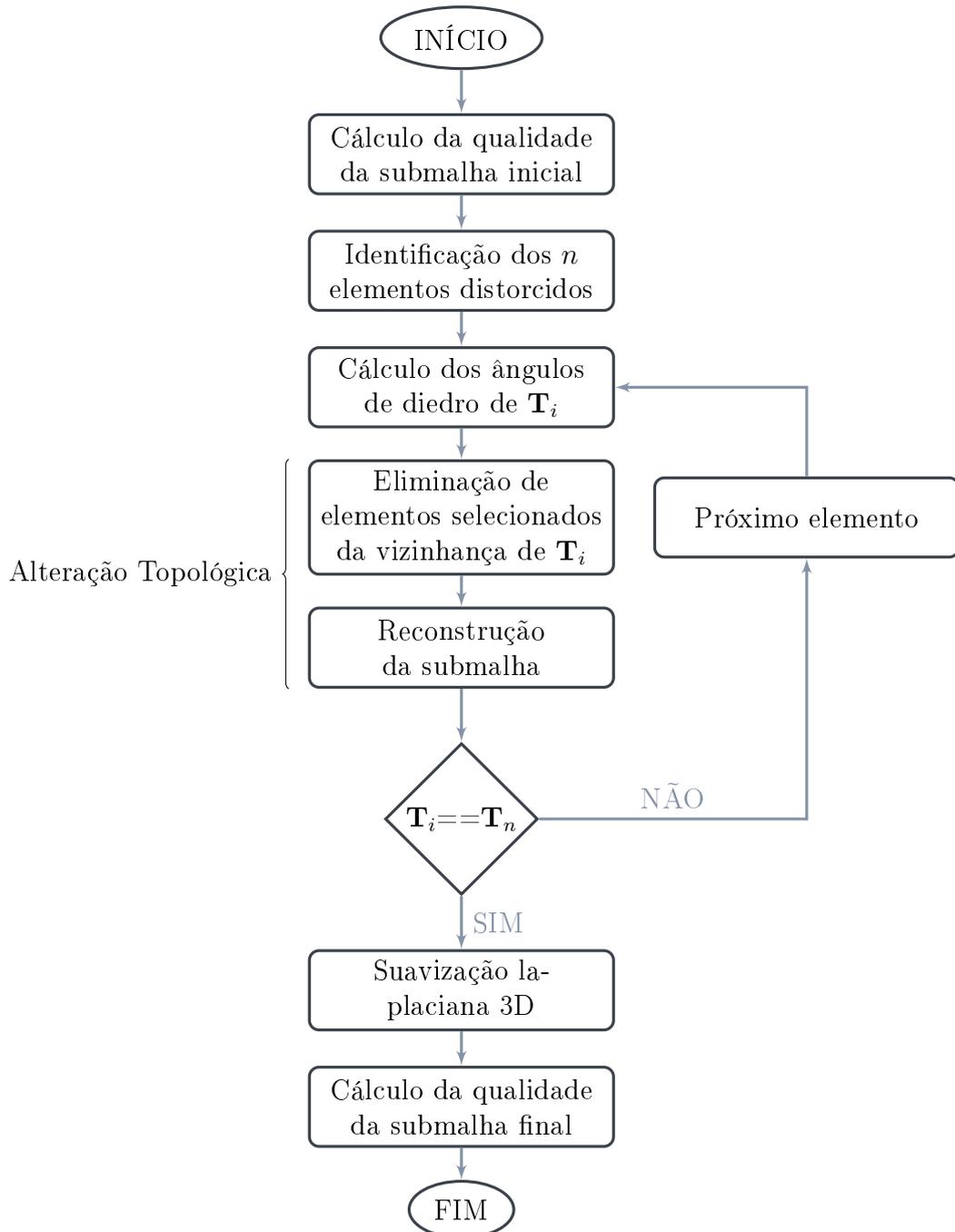
Esse capítulo objetiva apresentar a metodologia numérica proposta para otimização de malhas tetraédricas de blocos múltiplos, a qual se baseia em um acoplamento entre uma otimização topológica local e a suavização laplaciana tridimensional. Inicialmente a estrutura geral da metodologia híbrida é apresentada e, posteriormente, os principais algoritmos desenvolvidos e implementados são apresentados e discutidos.

4.1 Estrutura Geral do Algoritmo

A presença de elementos distorcidos ou de baixa qualidade em malhas computacionais para simulações de CFD torna o problema de elemento geometricamente inválido em processos de otimização de malhas mais severo, principalmente, em malhas tetraédricas devido ao fato de que tetraedros possuem um maior número de modos de distorção do que triângulos. Dessa forma, comparada com malhas triangulares, malhas tetraédricas tendem a possuir uma maior quantidade de elementos distorcidos e de baixa qualidade (FREITAG e GOOCH, 1997).

A fim de evitar a criação de elemento inválido em aplicações de otimização de malhas envolvendo suavização laplaciana, um algoritmo híbrido baseado em um acoplamento entre alteração topológica local e suavização laplaciana é apresentado neste trabalho. A estrutura geral do funcionamento do procedimento utilizado é ilustrado pela Fig. 4.1 em forma de diagrama de blocos.

Figura 4.1: Diagrama de blocos do algoritmo híbrido baseado em acoplamento entre suavização laplaciana e alteração topológica local para malhas tetraédricas de blocos múltiplos não-estruturadas.



Fonte: Autoria Própria.

Conforme mostrado pela Fig. 4.1, inicialmente o algoritmo calcula a qualidade da submalha inicial de acordo com as métricas de qualidade de forma para elementos tetraédricos apresentadas na seção 3.1.2. A saber, define-se uma submalha como sendo um conjunto de elementos tetraédricos nos quais ao menos um vértice está associado com a região de conectividade entre dois blocos distintos de malha. A próxima etapa do algoritmo está

relacionada com a identificação dos elementos distorcidos. Como um elemento padrão, adota-se que um elemento com qualidade inferior à 0,3, mensurada por meio da métrica de razão de raios, é classificado como sendo distorcido. Dessa forma, o algoritmo encontra n elementos distorcidos presentes na submalha em análise e os armazena em uma lista. A terceira etapa contempla o cálculo dos seis ângulos de diedro do elemento \mathbf{T}_i da lista. Os ângulos de diedro são aqueles formados entre duas faces quaisquer de um tetraedro, ou seja, a cada aresta do tetraedro, associa-se um ângulo de diedro. Discorre-se sobre ângulos de diedro na seção subsequente 4.2, atentando para a Eq. 4.1 e para a Fig. 4.2.

Com o conhecimento dos ângulos de diedro associados à \mathbf{T}_i , o algoritmo exclui da submalha alguns elementos selecionados da vizinhança de \mathbf{T}_i , incluindo o elemento \mathbf{T}_i e criando assim um poliedro Γ no interior da malha, o qual representa uma região do domínio computacional sem elemento. Posteriormente, a região do poliedro Γ no interior da malha é preenchida com elementos tetraédricos utilizando um algoritmo de reconstrução baseado em uma adaptação do método de avanço de fronteira. Após a reconstrução, verifica-se se o elemento em análise, \mathbf{T}_i , é o último da lista. Caso não seja, o algoritmo busca o próximo elemento da lista, \mathbf{T}_{i+1} , e refaz o processo a partir do cálculo de ângulo de diedro. Por outro lado, caso o elemento em análise seja o último da lista, $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_n$, o código segue para a suavização laplaciana tridimensional e, por fim, realiza o cálculo da qualidade da submalha final.

A seguir, os detalhes do código apresentado na Fig. 4.1 serão abordados e discutidos.

4.2 Processo de Identificação, Seleção e Eliminação de Elementos

Com o cálculo da qualidade dos elementos associados a submalha por meio das métricas de qualidade para tetraedros apresentadas na seção 3.1.2, posteriormente o código realiza as etapas de identificação dos n elementos distorcidos, cálculo dos ângulos de diedro de \mathbf{T}_i e eliminação de elementos selecionados da vizinhança de \mathbf{T}_i , os quais correspondem a identificação, seleção e eliminação de elementos da malha, respectivamente. O algoritmo a seguir ilustra os processos de identificação, seleção e eliminação.

Algoritmo 1. Identificação, Seleção e Eliminação de Elementos.

Informação de Entrada: Qualidade dos elementos da submalha com respeito à métrica de razão de raios.

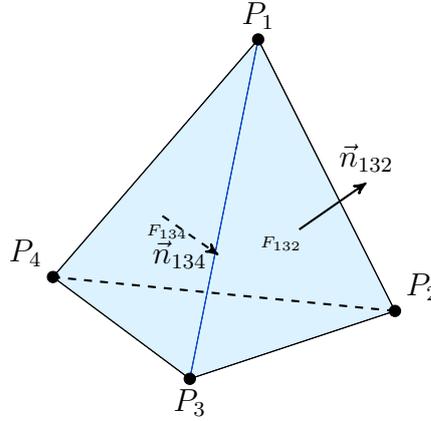
Informação de Saída: Nova submalha sem a presença de \mathbf{T}_i .

1. Obtenha os n elementos da submalha com qualidade inferior a 0,3 mensurada pela métrica de forma de razão de raios e os armazene na lista \mathbf{L}_T ;
2. Se $\mathbf{L}_T == \emptyset$ então:
3. Realize suavização laplaciana tridimensional.
4. Senão:
5. Enquanto $\mathbf{L}_T \neq \emptyset$:
6. Obtenha o elemento \mathbf{T}_i da lista \mathbf{L}_T ;
7. Calcule os ângulos de diedro associados à \mathbf{T}_i ;
8. Associe os dois maiores ângulos de diedro de \mathbf{T}_i as suas respectivas arestas, denotadas por L_{01} e L_{02} ;
9. Elimine da submalha todo e qualquer elemento que compartilhe as arestas L_{01} e L_{02} , incluindo o elemento \mathbf{T}_i ;
10. Reconstrua a submalha local;
11. Atualize a lista \mathbf{L}_T .
12. Fim Enquanto.
13. Fim Se.

Conforme já mencionado, o ângulo formado entre um par de faces é denotado como ângulo de diedro. Tetraedros com ângulo de diedro próximos de 0° ou maiores do que 90° são geralmente indesejáveis em aplicações gráficas, de engenharia e computacionais (BURKARDT, 2010), os quais representam potenciais elementos caracterizados previamente como distorcidos ou *slivers*.

Considere o tetraedro $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_4$, mostrado na Fig. 4.2. O ângulo de diedro formado entre as faces $F_{132} = P_1P_3P_2$ e $F_{134} = P_1P_3P_4$ do tetraedro $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_4$, o qual se relaciona com a aresta $\overrightarrow{P_1P_3}$, é denotado como sendo $DA.P_1P_3$ e pode ser calculado da seguinte forma:

Figura 4.2: Tetraedro $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_4$ com vetores unitários normais \vec{n}_{134} a face $F_{134} = P_1P_3P_4$ e \vec{n}_{132} a face $F_{132} = P_1P_3P_2$, respectivamente.



Fonte: Autoria Própria.

$$DA.P_1P_3 = \arccos(\vec{n}_{132} \cdot \vec{n}_{134}) \quad (4.1)$$

onde \vec{n}_{132} e \vec{n}_{134} são os vetores normais unitários relacionados com as faces $F_{132} = P_1P_3P_2$ e $F_{134} = P_1P_3P_4$, respectivamente.

Os vetores normais unitários \vec{n}_{132} e \vec{n}_{134} são calculados por:

$$\vec{n}_{132} = \frac{\vec{N}_{132}}{|\vec{N}_{132}|} \quad (4.2)$$

$$\vec{n}_{134} = \frac{\vec{N}_{134}}{|\vec{N}_{134}|} \quad (4.3)$$

onde $|\vec{N}_{132}|$ e $|\vec{N}_{134}|$ representam os módulos associados as quantidades vetoriais \vec{N}_{132} e \vec{N}_{134} , as quais são calculadas, respectivamente, por:

$$\vec{N}_{132} = (\overrightarrow{P_1P_3}) \times (\overrightarrow{P_1P_2}) \quad (4.4)$$

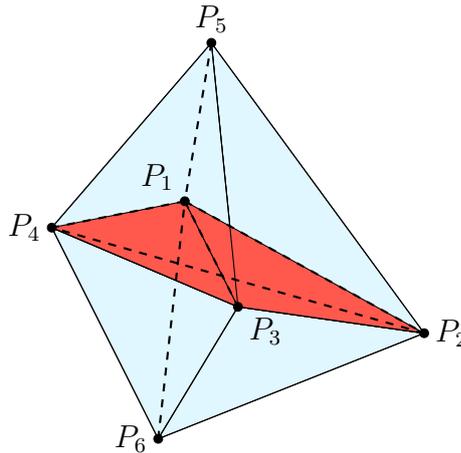
$$\vec{N}_{134} = (\overrightarrow{P_1P_3}) \times (\overrightarrow{P_1P_4}) \quad (4.5)$$

O cálculo dos ângulos de diedro das demais faces é realizado de maneira análoga a apresentada acima. Após o cálculo dos seis ângulos de diedro de \mathbf{T}_i , o algoritmo obtém os dois maiores ângulos de diedro e os associa com suas respectivas arestas. A Fig. 4.3 mostra o processo de identificação por meio dos dois maiores ângulos de diedro de um

tetraedro distorcido $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_4$.

Conforme é apresentado na Fig. 4.3, os dois maiores ângulos de diedro associados ao tetraedro $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_4$ estão relacionados com as arestas $\overrightarrow{P_1P_3}$ e $\overrightarrow{P_2P_4}$. Dessa forma, o algoritmo seleciona todos os elementos da malha que compartilham as arestas $\overrightarrow{P_1P_3}$ e $\overrightarrow{P_2P_4}$. Os elementos da malha que compartilham tais arestas estão mostrados na Fig. 4.3, sendo representados pelos tetraedros $P_1P_2P_3P_5$, $P_1P_3P_4P_5$, $P_2P_4P_3P_6$ e $P_1P_2P_4P_6$. Posteriormente, todos os elementos previamente selecionados, incluindo o tetraedro distorcido $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_4$, são excluídos do domínio computacional, criando assim um poliedro Γ formado por faces triangulares, o qual é mostrado pela Fig. 4.4. Por conseguinte, tem-se uma nova submalha sem a presença de \mathbf{T}_i .

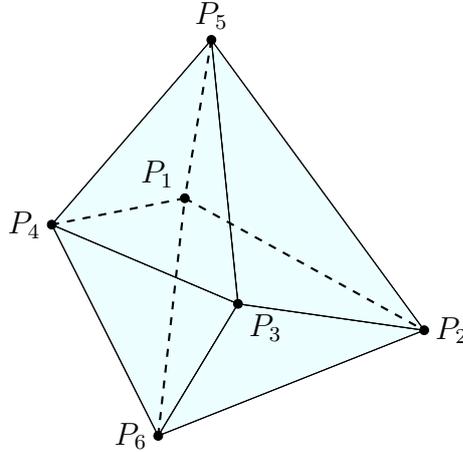
Figura 4.3: Tetraedro $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_4$ *sliver* e elementos de sua vinhança, $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_5$, $\mathbf{T} = P_1P_3P_4P_5$, $\mathbf{T} = P_2P_4P_3P_6$ e $\mathbf{T} = P_1P_2P_4P_6$ que compartilham arestas relativas aos dois maiores ângulos de diedro de $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_4$.



Fonte: Autoria Própria.

O principal conceito associado com a eliminação de elementos da malha é impactar o mínimo possível na topologia da malha, de modo que o processo de otimização por meio de alteração topológica seja eficaz. De fato, elementos do tipo distorcidos ou *slivers* tendem a possuir elementos vizinhos de face que compartilham faces entre si, como mostrado na Fig. 4.3, cujos elementos $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_5$ e $\mathbf{T} = P_1P_3P_4P_5$ compartilham a face $F_{135} = P_1P_3P_5$ e os elementos $\mathbf{T} = P_2P_3P_4P_6$ e $\mathbf{T} = P_1P_2P_4P_6$ compartilham a face $F_{246} = P_2P_4P_6$. Dessa forma, eliminar da malha elementos tetraédricos que compartilham as arestas associados aos dois maiores ângulos de diedro de um elemento \mathbf{T} tipo *sliver* impacta de maneira suave na vizinhança de \mathbf{T} , facilitando a próxima etapa do algoritmo. É importante ressaltar que não existe inclusão ou exclusão de nós da malha no processo apresentado acima.

Figura 4.4: Poliedro Γ formado pelas faces triangulares $F_{125} = P_1P_2P_5$, $F_{145} = P_1P_4P_5$, $F_{435} = P_4P_3P_5$, $F_{325} = P_3P_2P_5$, $F_{326} = P_3P_2P_6$, $F_{216} = P_2P_1P_6$, $F_{146} = P_1P_4P_6$ e $F_{436} = P_4P_3P_6$.



Fonte: Autoria Própria.

4.3 Processo de Reconstrução

Com a delimitação do poliedro Γ por meio de faces triangulares, faz-se necessário preencher a região em seu interior com novos elementos tetraédricos. As informações de entrada são as m faces, F_1, F_2, \dots, F_m , que delimitam o poliedro Γ . O algoritmo de reconstrução é baseado na técnica de construção de malhas por avanço de frente de geração, no entanto, não há criação ou eliminação de nós da malha. O algoritmo a seguir mostra em detalhes os passos associados a implementação computacional do processo de reconstrução.

Algoritmo 2. Reconstrução da região delimitada pelo Poliedro Γ .

Informação de Entrada: Poliedro Γ delimitado por m faces triangulares, F_1, F_2, \dots, F_m , e n nós, P_1, P_2, \dots, P_n .

Informação de Saída: Poliedro Γ preenchido com elementos tetraédricos.

1. Armazene as m faces do poliedro Γ em uma lista de faces base de triangulação \mathbf{L}_F onde $\mathbf{L}_F \supset F_1, F_2, \dots, F_m$;
2. Armazene os n vértices do poliedro Γ em uma lista de nós candidatos à triangulação \mathbf{L}_P , onde $\mathbf{L}_P \supset P_1, P_2, \dots, P_n$;
3. Enquanto $(\mathbf{L}_F \neq \emptyset)$, faça:

4. Obtenha a face base de triangulação F_i , onde $F_i \in \mathbf{L}_F$;
5. Obtenha o nó candidato P_i , onde $P_i \in \mathbf{L}_P$;
6. Se $P_i \in F_i$, então:
 7. Obtenha o nó P_{i+1} ;
 8. Volte ao passo 6.
9. Senão:
 10. Se a direção de reconstrução não é válida, então:
 11. Obtenha o nó P_{i+1} ;
 12. Volte ao passo 6.
 13. Senão:
 14. Realize a triangulação entre F_i e P_i , criando o elemento \mathbf{T}_j ;
 15. Se $(L_{ij} = P_j - P_i) \cap F_A \neq \emptyset, \forall F_A \in \mathcal{M}_\Omega$ e $1 \leq i < j \leq 4$, então:
 16. Obtenha o nó P_{i+1} ;
 17. Volte ao passo 6;
 18. Senão:
 19. Calcule $\rho(\mathbf{T}_j)$;
 20. Se $\rho(\mathbf{T}_j) < 0, 3$, então:
 21. Armazene $\rho(\mathbf{T}_j)$ na lista $\mathbf{L}_\mathbf{T}$, onde $\mathbf{L}_\mathbf{T} \supset \rho(\mathbf{T}_j)$.
 22. Se $F_i == F_m$, então:
 23. Obtenha $\mathbf{T}_j = \max(\mathbf{L}_\mathbf{T})$;
 24. Vá ao passo 29;
 25. Fim Se
 26. Obtenha o nó P_{i+1} ;
 27. Volte ao passo 6.
 28. Senão:
 29. Atualize a PREPROC;
 30. Atualize \mathbf{L}_F .
 31. Fim Se.
 32. Fim Se.
 33. Fim Se.
 34. Fim Se.
 35. Fim Enquanto.

Conforme apresentado pelo algoritmo 3.2, inicialmente as m faces do poliedro Γ são armazenadas em uma lista de faces base de triangulação \mathbf{L}_F e os n vértices do mesmo poliedro são armazenadas em uma lista de nós candidatos \mathbf{L}_P , de forma que $\mathbf{L}_F \supset F_1, F_2, \dots, F_m$ e $\mathbf{L}_P \supset P_1, P_2, \dots, P_n$. Posteriormente, enquanto a lista de faces base de triangulação apresentar faces para triangular, ou seja ($\mathbf{L}_F \neq \emptyset$), o algoritmo selecionará uma face base F_i e um nó candidato P_i , onde $F_i \in \mathbf{L}_F$ e $P_i \in \mathbf{L}_P$. Caso $P_i \in F_i$, não será possível realizar uma triangulação e, dessa maneira, o algoritmo recorre ao nó subsequente P_{i+1} , onde $P_{i+1} \in \mathbf{L}_P$ e retorna ao passo 6. Por outro lado, caso $P_i \notin F_i$, o algoritmo verifica se a direção de triangulação é válida.

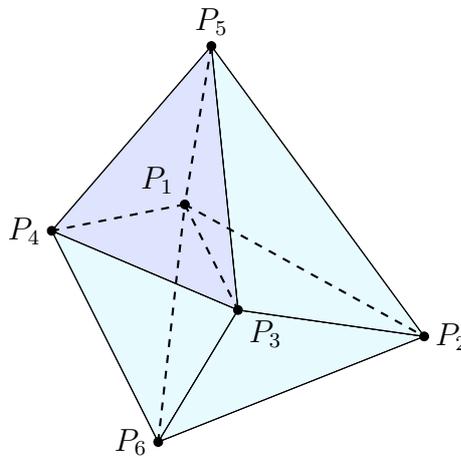
A direção da triangulação da face base F_i com o nó candidato P_i deve se dar ao interior do poliedro Γ , de forma que a coerência geométrica seja mantida. Caso o teste de direção de triangulação não seja verificado, o algoritmo recorre ao próximo nó, P_{i+1} , da lista \mathbf{L}_P . No entanto, caso exista coerência direcional de triangulação, posteriormente o algoritmo verifica se as arestas criadas pela triangulação da face base F_i com o nó candidato P_i não interseccionam faces da malha \mathcal{M}_Ω . A verificação de intersecção entre aresta e face é baseada na adaptação de um pseudocódigo mostrado por SCHNEIDER e EBERLY (2003) e apresentado na seção 3.3.2. Caso alguma aresta $L_{ij} = P_j - P_i, 1 \leq i < j \leq 4$, interceptar a região interior F_A de uma face triangular da malha \mathcal{M}_Ω haverá intersecção entre aresta e face e, de acordo com o critério de validade apresentado na seção 3.3, o elemento sendo criado é inválido para representação do domínio computacional. Dessa forma, o algoritmo busca o nó subsequente P_{i+1} da lista \mathbf{L}_P para triangulação e retorna ao passo 6. Por outro lado, caso $(L_{ij} = P_j - P_i, 1 \leq i < j \leq 4) \cap F_A = \emptyset$, o elemento respeita a condição C2 da definição relacionada ao critério de validade e, portanto, \mathbf{T}_j é um tetraedro geometricamente válido. A condição C1 da definição 2 é inerentemente satisfeita nesse caso.

O passo 19 do algoritmo 2 diz respeito à qualidade mínima almejada no processo de reconstrução. Em geral, busca-se um elemento \mathbf{T}_j com $\rho(\mathbf{T}_j) > 0,3$, a fim de evitar a presença de elementos distorcidos ou *slivers* na nova submalha. Caso $\rho(\mathbf{T}_j) < 0,3$, o algoritmo armazena a respectiva qualidade de \mathbf{T}_j em uma lista \mathbf{L}_T , de forma que $\mathbf{L}_T \supset \rho(\mathbf{T}_j)$. Posteriormente, o algoritmo verifica se a face base F_i é a última da lista \mathbf{L}_F , ou seja, $F_i == F_m$. Caso a face base F_i seja a última da lista, o algoritmo utiliza o tetraedro associado com a maior qualidade na lista \mathbf{L}_T e realiza as etapas 29 e 30. No entanto, caso

$F_i \neq F_m$, o código obtém o nó subsequente P_{i+1} e retorna ao passo 6.

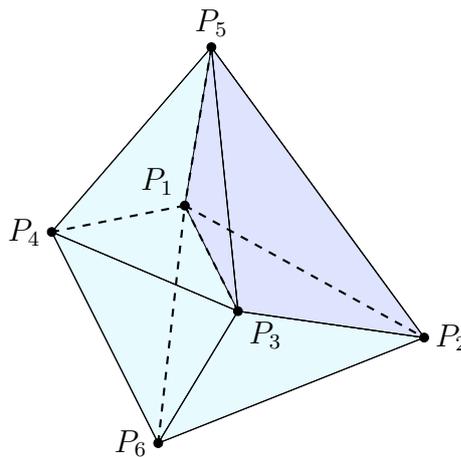
As Figs 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 mostram os elementos tetraédricos $\mathbf{T} = P_1P_3P_4P_5$, $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_5$, $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_6$ e $\mathbf{T} = P_1P_3P_4P_6$, respectivamente, criados pelo processo de reconstrução apresentado no algoritmo 2 do poliedro Γ mostrado na Fig. 4.4. Observe que o poliedro Γ é completamente preenchido com elementos tetraédricos, sendo essa região representada pelos quatro tetraedros citados anteriormente e mostrados na reconstrução total da Fig. 4.9.

Figura 4.5: Construção do elemento $\mathbf{T} = P_1P_3P_4P_5$ a partir da face base $F_{145} = P_1P_4P_5$.



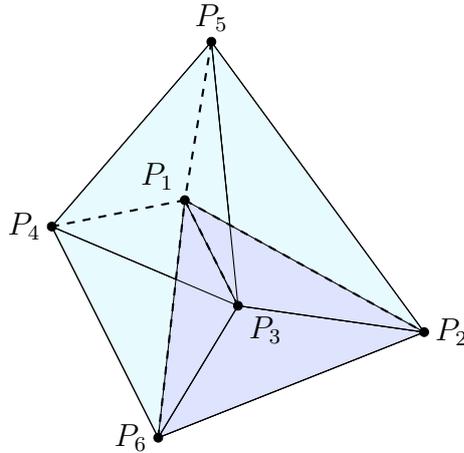
Fonte: Autoria Própria.

Figura 4.6: Construção do elemento $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_5$ a partir da face base $F_{125} = P_1P_2P_5$.



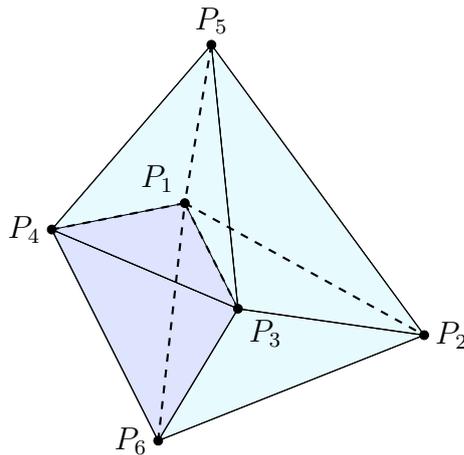
Fonte: Autoria Própria.

Figura 4.7: Construção do elemento $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_6$ a partir da face base $F_{126} = P_1P_2P_6$.



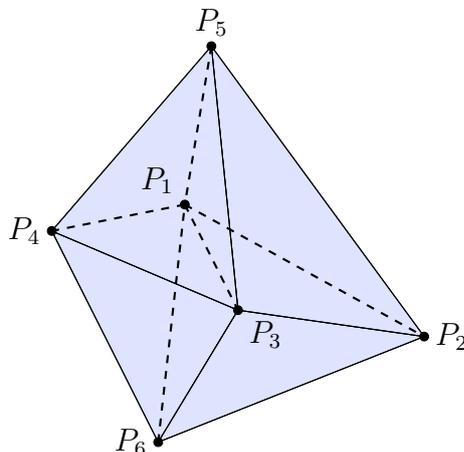
Fonte: Autoria Própria.

Figura 4.8: Construção do elemento $\mathbf{T} = P_1P_3P_4P_6$ a partir da face base $F_{146} = P_1P_4P_6$.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 4.9: Poliedro Γ preenchido com os tetraedros $\mathbf{T} = P_1P_3P_4P_5$, $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_5$, $\mathbf{T} = P_1P_2P_3P_6$ e $\mathbf{T} = P_1P_3P_4P_6$.



Fonte: Autoria Própria.

Capítulo 5

RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 Considerações Iniciais

Os resultados apresentados neste capítulo buscam investigar a efetividade e eficácia do método de suavização laplaciana como uma ferramenta de otimização de malhas de blocos múltiplos não-estruturadas para aplicações aeroespaciais, especialmente àquelas envolvendo movimento relativo entre corpos. Inicialmente, apresenta-se um caso de estudo abordando uma malha bidimensional não-estruturada, na qual busca-se obter um entendimento do método de suavização laplaciana quanto sua capacidade de elevar a qualidade média dos elementos que compõem a malha, bem como observar a influência de sua aplicação sobre a qualidade de cada elemento individualmente. Por sua vez, o critério de convergência exposto na seção 3.2.2 avalia o esforço computacional associado com a aplicação do método.

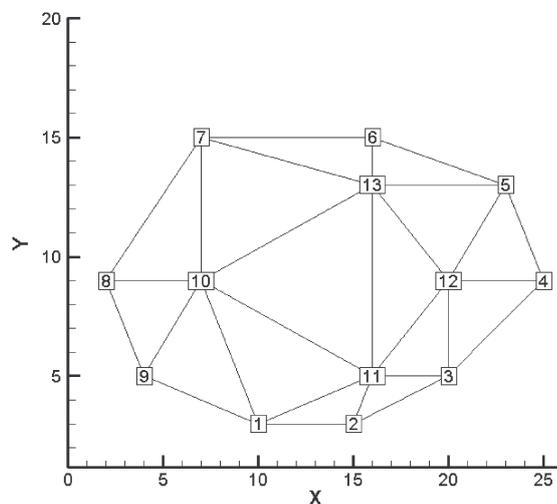
Posteriormente, o método de otimização proposto para malhas de blocos múltiplos não-estruturadas tetraédricas, baseado em um acoplamento entre a suavização laplaciana e alteração topológica e apresentado no capítulo 4, é investigado observando sua capacidade de suavização em uma malha com a presença de elementos distorcidos ou, também, *slivers*. Cada caso exposto é discutido avaliando as métricas de qualidade $\sigma(\mathbf{t})$, $\rho(\mathbf{t})$ e $\mu(\mathbf{t})$ para malhas triangulares e $\sigma(\mathbf{T})$, $\rho(\mathbf{T})$ e $\mu(\mathbf{T})$ para malhas tetraédricas, bem como os dados estatísticos associados, tais como média, desvio padrão, máximos e mínimos. As malhas utilizadas são criadas usando o *software* comercial ICEM ANSYS, de forma que um código desenvolvido pelo Laboratório de Aerodinâmica Computacional do IAE realiza a concatenação dos blocos múltiplos a fim de constituir uma única malha final.

A linguagem de programação adotada foi FORTRAN. O compilador utilizado foi o INTEL FORTRAN e o Microsoft Visual Studio Versão 2008 foi empregado como plataforma de desenvolvimento. Os *softwares* de visualização científica utilizados foram o Tecplot 2009 e o OriginPro 8.1. Todos os resultados apresentados neste capítulo foram gerados em um computador Intel Core i7 3,20 GHz, 8,00 GB de memória RAM com sistema operacional 64-bits Windows 7.

5.2 Otimização de Malhas Bidimensionais: Caso Exemplo Acadêmico

A malha triangular não-estruturada mostrada nas Figs 5.1, 5.2 e 5.3 é formada por 15 elementos e 13 nós. Somente seus 4 nós internos, nós 10, 11, 12 e 13, são realocados de acordo com o método de suavização laplaciana apresentado na seção 3.2, enquanto que os nós da fronteira são mantidos fixos.

Figura 5.1: Disposição dos nós em uma malha não-estruturada bidimensional.

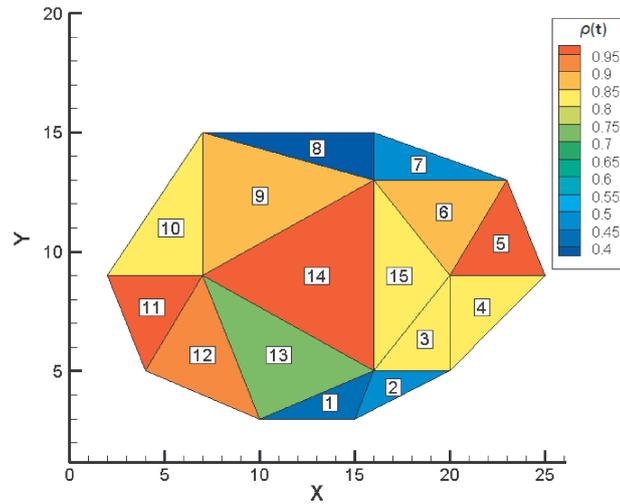


Fonte: Autoria Própria.

A qualidade inicial dos elementos da malha, mensurada pela métrica de razão de raios, é mostrada na Fig. 5.2, na qual é possível observar uma heterogeneidade com relação a qualidade de seus elementos, tendo em vista que elementos como os de número 1 e 8 apresentam qualidade próximas de 0,4, enquanto que elementos como os de número 5 e 14 mostram qualidade próximas de um triângulo equilátero.

A Fig. 5.3 mostra a qualidade dos elementos mensurada pela métrica de razão de raios

Figura 5.2: Qualidade dos elementos da malha bidimensional não-estruturada mensurada pela métrica de razão de raios antes da aplicação da suavização laplaciana.



Fonte: Autoria Própria.

Tabela 5.1: Valores de mínimo, máximo, média e desvio padrão para métricas de qualidade de triângulos $\sigma(\mathbf{t})$, $\rho(\mathbf{t})$ e $\mu(\mathbf{t})$ antes da realocação nodal por suavização laplaciana.

Métrica de forma	Mín	Máx	Média	Desvio Padrão
Ângulo Mínimo, $\sigma(\mathbf{t})$	0,06275	0,85333	0,51105	0,26779
Razão de Raios, $\rho(\mathbf{t})$	0,38624	0,98885	0,75938	0,21618
Razão Média, $\mu(\mathbf{t})$	0,36679	0,98974	0,78438	0,20798

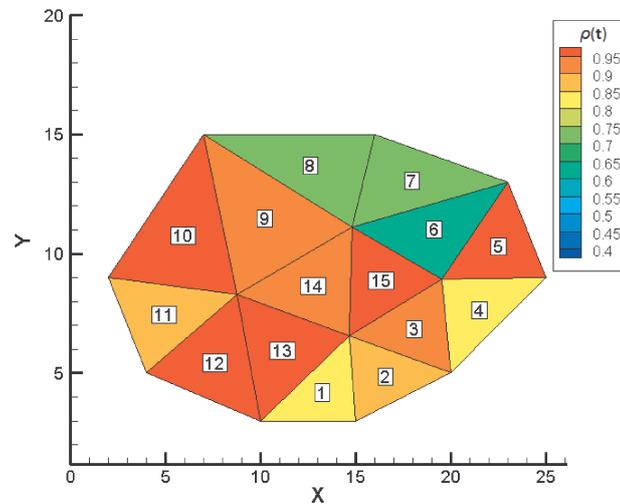
Fonte: Autoria Própria.

após a aplicação da suavização laplaciana bidimensional, na qual seis iterações foram realizadas até a convergência do método. O valor adotado de ε foi de 5×10^{-4} .

A aplicação da suavização laplaciana na malha bidimensional mostrada na Fig. 5.1 resulta em alguns elementos com qualidade inferior a suas respectivas qualidades iniciais, tais como os elementos 11 e 14 mostrados nas Figs 5.2 e 5.3. Apesar da diminuição das qualidades associadas aos elementos citados, os mesmos sofrem pouca variação de forma e, dessa maneira, ainda apresentam valores elevados de qualidade. Por outro lado, comparando os valores de qualidade média apresentados nas Tabelas 5.1 e 5.2, pode-se afirmar que um aumento da qualidade global da malha foi alcançado com a aplicação do método de suavização laplaciana.

Por meio das Tabelas 5.1 e 5.2, nota-se que os valores associados aos desvios padrões das três métricas adotadas diminuíram com a realocação nodal por suavização laplaciana e, por conseguinte, pode-se inferir que a aplicação de tal método de otimização fornece uma malha final mais homogênea com relação à respectiva malha inicial, tornando a dis-

Figura 5.3: Qualidade dos elementos da malha bidimensional não-estruturada mensurada pela métrica de razão de raios após a aplicação da suavização laplaciana.



Fonte: Autoria Própria.

Tabela 5.2: Valores de mínimo, máximo, média e desvio padrão para métricas de qualidade de triângulos $\sigma(\mathbf{t})$, $\rho(\mathbf{t})$ e $\mu(\mathbf{t})$ após a realocação nodal por suavização laplaciana.

Métrica de forma	Mín	Máx	Média	Desvio Padrão
Ângulo Mínimo, $\sigma(\mathbf{t})$	0,26229	0,88162	0,61483	0,1979
Razão de Raios, $\rho(\mathbf{t})$	0,64743	0,98778	0,87648	0,11063
Razão Média, $\mu(\mathbf{t})$	0,69541	0,98903	0,88866	0,098

Fonte: Autoria Própria.

cretização espacial mais precisa. A Tabela 5.2 também mostra que o elemento com menor valor de qualidade obteve um significativo aumento da qualidade de forma, evidenciando que o método de suavização laplaciana é capaz de atuar em elementos triangulares de baixa qualidade de tal forma a elevar seus valores de qualidade significativamente.

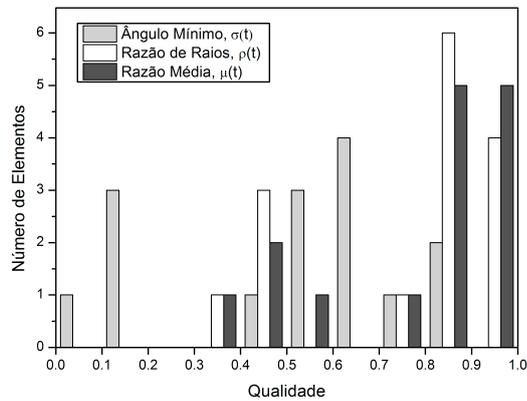
As Figs 5.4 e 5.5 mostram o número de elementos contidos em intervalos de qualidade de 0,1 para as métricas de ângulo mínimo, razão de raios e razão média antes e após a aplicação da suavização laplaciana, respectivamente. De fato, observa-se uma substancial diferença entre as métricas de forma adotadas, principalmente com relação à métrica de ângulo mínimo, $\sigma(\mathbf{t})$. Esse fato se explica devido à maneira pela qual é realizado o cálculo da qualidade dos elementos, cujo valor da qualidade é atribuído com respeito ao menor ângulo do triângulo, fazendo com que os valores de qualidade associados à métrica de ângulo mínimo tendam a ser menores em relação aos obtidos com as demais métricas. Por outro lado, as métricas de razão de raios e razão média apresentam resultados semelhantes.

A Fig. 5.5 mostra que após a realocação nodal por suavização laplaciana, todos os

elementos da malha obtiveram qualidades superiores a 0,6 quando mensurados pelas métrica de razão de raios e razão média e acima de 0,2 quando mensurados pela métrica de forma de ângulo mínimo.

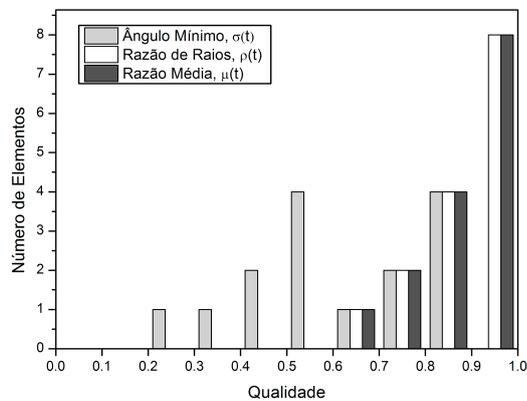
Por fim, pode-se inferir que a suavização laplaciana bidimensional empregada é um método de otimização de malhas triangulares não-estruturadas efetivo e eficaz, sendo que com apenas seis iterações o método forneceu uma malha final mais homogênea, atuou de forma a aumentar a qualidade dos elementos de baixa qualidade da malha e proveu um aumento da qualidade global da malha.

Figura 5.4: Número de elementos contidos em intervalos de qualidade de 0,1 antes da realocação nodal por suavização laplaciana bidimensional.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 5.5: Número de elementos contidos em intervalos de qualidade de 0,1 após realocação nodal por suavização laplaciana bidimensional.



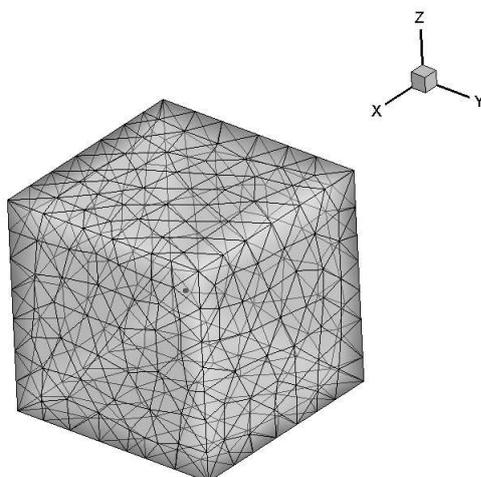
Fonte: Autoria Própria.

5.3 Otimização de Malhas Tridimensionais: Caso Cubo e Esfera

Nesta seção apresentar-se-á o caso de aplicação de otimização híbrida baseada em um acoplamento entre alteração topológica e suavização laplaciana tridimensional em um malha tetraédrica de blocos múltiplos não-estruturada. O caso de estudo discutido aborda uma malha constituída de um cubo e uma esfera. A malha do cubo e da esfera, construídas separadamente, foram submetidas ao processo de *holecutting* e concatenadas por meio de uma malha integradora, a qual é alvo do processo de otimização.

A malha não-estruturada de blocos múltiplos mostrada na Fig. 5.6 é composta por dois blocos de malhas: um bloco gerado no interior de um cubo e outro bloco gerado ao redor de uma esfera. Existem 15963 elementos e 2918 nós na malha de blocos múltiplos. Na Fig. 5.6, o bloco de malha referente a esfera está contido no interior do bloco de malha referente ao cubo. A Fig. 5.7 mostra um corte na malha final, resultado do processo de concatenação, cujos elementos evidenciados em vermelho representam os elementos de conectividade entre os dois blocos de malha e os elementos evidenciados em cinza representam aqueles elementos nos quais ao menos um nó está associado com a região de conectividade. Existem 2214 elementos e 353 nós na submalha mostrada na Fig. 5.7, na qual 208 nós compõem a região de conectividade.

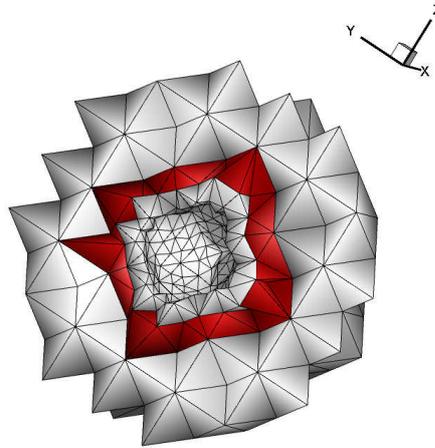
Figura 5.6: Malha tetraédrica não-estruturada de blocos múltiplos composta por um cubo e uma esfera.



Fonte: Autoria Própria.

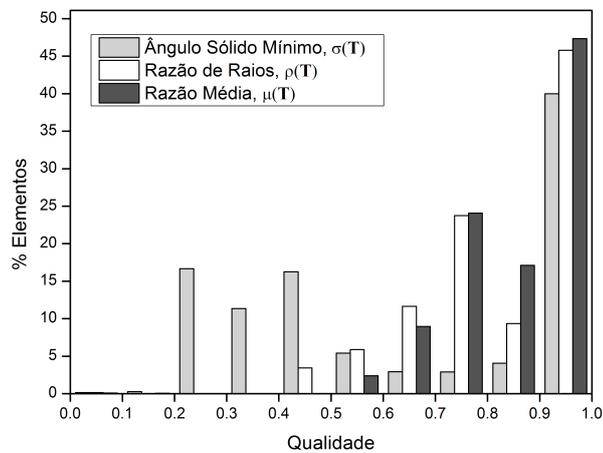
Os resultados de qualidade inicial referentes aos elementos contidos na submalha mos-

Figura 5.7: Submalha tetraédrica em que os elementos em vermelho representam elementos de conectividade entre os blocos de malha e elementos em cinza possuem ao menos um nó associado à região de conectividade.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 5.8: Porcentagem do número de elementos contidos em intervalos de qualidade de 0,1 para submalha inicial.



Fonte: Autoria Própria.

trada na Fig. 5.7, mensurados pelas métricas de forma de ângulo sólido mínimo, razão de raios e razão média, são mostrados na Fig. 5.8. As métricas de razão de raios e razão média apresentam resultados similares para qualidade de elementos tetraédricos, enquanto que a métrica de ângulo sólido mínimo mostra uma maior quantidade de elementos com qualidade inferior a 0,5. Este fato ocorre devido ao cálculo da qualidade do elemento tetraédrico pela métrica de ângulo sólido mínimo estar associado ao menor ângulo sólido do tetraedro.

Como pode ser observado pela Fig. 5.8, as três métricas adotadas mostram que apro-

ximadamente 45 % dos elementos da submalha inicial possuem qualidade entre 0,9 e 1, indicando uma submalha de alta qualidade de forma, cujos valores de qualidade média são de 0,81331, mensurada por razão de raios e 0,84625 pela métrica de razão média, conforme dados estatísticos apresentados na Tab. 5.3.

Tabela 5.3: Estatísticas relacionadas às métricas de forma para tetraedros para submalha inicial.

Métrica de forma	Mín	Máx	Média	Desvio Padrão
Ângulo Sólido Mínimo, $\sigma(\mathbf{T})$	1,17E-05	0,95096	0,64162	0,28583
Razão de Raios, $\rho(\mathbf{T})$	4,40E-06	0,98037	0,81331	0,14944
Razão Média, $\mu(\mathbf{T})$	6,17E-04	0,98174	0,84625	0,1172

Fonte: Autoria Própria.

Por outro lado, a Tab. 5.3 mostra, por meio dos valores associados a qualidade mínima, a existência de ao menos um elemento altamente distorcido na submalha inicial. A Tab. 5.4 evidencia a distribuição dos elementos quanto à sua qualidade mensurada pela métrica de razão de raios em intervalos de qualidade de 0,1, na qual observa-se a presença de três elementos altamente distorcidos com valores de qualidade mensurados pela métrica de razão de raios entre 0 e 0,1 na submalha inicial. Os três elementos com qualidade entre 0 e 0,1 são caracterizados como elementos potenciais de se tornarem invertidos quando da aplicação da realocação nodal por suavização laplaciana. Os demais elementos contidos na submalha inicial apresentam qualidade de forma acima de 0,4 pela métrica de razão de raios e, portanto, não são caracterizados como elementos potenciais de inversão quanto à aplicação da suavização laplaciana tridimensional.

Com a aplicação do algoritmo de alteração topológica proposto nas seções 4.2 e 4.3, a nova distribuição dos elementos em intervalos de qualidade mensurada pela métrica de forma de razão de raios é mostrada na Tab. 5.4. Conforme observado na Tab. 5.4, a submalha após tratamento topológico não contém elementos distorcidos e, além disso, todos elementos presentes na submalha apresentam valores de qualidade, mensurados pela métrica de razão de raios, acima de 0,4. Adicionalmente, observa-se que as distribuições de elementos, apresentada na Tab. 5.4, antes e depois da alteração topológica manteve-se a mesma, exceto para os elementos excluídos da malha. Esse fato mostra que o método de alteração topológica atua de forma a minimizar os efeitos sobre a qualidade dos elementos circundantes aos elementos distorcidos, mantendo assim a característica topológica local e global da malha.

A Tab. 5.5 mostra dados estatísticos relacionados às métricas de forma empregadas para mensurar a qualidade de elementos tetraédricos após otimização híbrida baseada em alteração topológica e suavização laplaciana tridimensional. Após cinco iterações com parâmetro de relaxação $\Delta t = 0,8$ e constante de mola $c = 0,2$, nenhum elemento invertido ou geometricamente inválido foi encontrado e, conforme mostrado pela Tab. 5.5, não há elementos distorcidos na submalha final após emprego de otimização híbrida proposta. Adicionalmente, todos os valores associados ao desvio padrão foram diminuídos, indicando uma malha final mais homogênea em relação à malha inicial. A qualidade média relativa à submalha final também obteve um aumento. No entanto, devido ao fato da alta qualidade inicial da submalha e da manutenção da característica topológica local, mesmo com o emprego da reconstrução local, a qualidade média final é aproximadamente a mesma daquela observada inicialmente.

Tabela 5.4: Distribuição dos elementos em intervalos de qualidade, mensurada pela métrica de forma de razão de raios, para submalha inicial e submalha após alteração topológica.

Intervalo de $\rho(\mathbf{T})$	0-0,1	0,1-0,4	0,4-0,5	0,5-0,6	0,6-0,7	0,7-0,8	0,8-0,9	0,9-1
Submalha Inicial	3	0	76	130	258	526	207	1014
Submalha após alteração topológica	0	0	76	130	258	526	207	1014

Fonte: Autoria Própria.

Tabela 5.5: Estatísticas relacionadas às métricas de forma para tetraedros, após otimização baseada em alteração topológica e suavização laplaciana tridimensional.

Métrica de forma	Mín	Máx	Média	Desvio Padrão
Ângulo Sólido Mínimo, $\sigma(\mathbf{T})$	0,129	0,9506	0,6295	0,2412
Razão de Raios, $\rho(\mathbf{T})$	0,3593	0,9891	0,8234	0,1321
Razão Média, $\mu(\mathbf{T})$	0,4765	0,9909	0,8581	0,101

Fonte: Autoria Própria.

Capítulo 6

CONCLUSÕES

6.1 Considerações Finais

Uma metodologia computacional para otimização de malhas de blocos múltiplos não-estruturadas foi proposto como uma ferramenta computacional para uso em análise de CFD, a fim de reduzir os erros devidos a má discretização espacial, e buscar uma redução do esforço computacional associado à simulações de problemas envolvendo alijamento de cargas de aeronaves e separação de estágios de foguetes.

Inicialmente, o método de suavização laplaciana foi implementado e testado em uma malha bidimensional a fim de avaliar sua eficácia e efetividade em realocar nós para aumento da qualidade geral de uma malha triangular não-estruturada. Constatou-se que, embora alguns elementos tenham suas qualidades individuais diminuídas, o método de suavização laplaciana é capaz de elevar a qualidade média geral de uma malha triangular não-estruturada bidimensional. O desvio padrão associado às métricas implementadas mostra que o método provê uma malha final de transição suave, na forma de seus elementos, em comparação com a malha inicial. O elemento de menor qualidade também obteve aumento de sua qualidade após aplicação do método. Verifica-se, por fim, a efetividade e eficácia do método de suavização laplaciana bidimensional para malhas triangulares não-estruturadas, uma vez que a qualidade média geral é aumentada com convergência numérica utilizando apenas seis iterações para um caso simples.

Posteriormente, apresentou-se um algoritmo híbrido de otimização de malhas não-estruturadas de blocos múltiplos tridimensionais baseado em um acoplamento entre a suavização laplaciana e uma alteração topológica local. Buscou-se avaliar a sua efeti-

vidade e eficácia por meio de um caso teste de uma malha constituída de dois blocos: uma esfera e um cubo. Observou-se que o método age de maneira eficaz na seleção dos elementos distorcidos presentes na submalha, eliminando-os e reconstruindo a malha de forma a respeitar os critérios de validade geométrica. Ressalta-se a eficácia do método de eliminação proposto, uma vez que o impacto proporcionado pela eliminação de elementos da vizinhança de um elemento distorcido é pequeno, mantendo a topologia no entorno de um elemento distorcido mesmo com outro conjunto de elementos. O método atua, de maneira simultânea, eliminando da malha elementos considerados distorcidos, fornecendo assim um malha final sem a presença de elementos que promovam um aumento do erro da solução numérica devido a má discretização espacial.

Por conseguinte, constata-se a efetividade do algoritmo híbrido de otimização proposto, o qual permite a aplicação da suavização laplaciana tridimensional de forma geometricamente válida. Apesar da alta qualidade inicial associada à malha utilizada, a suavização laplaciana 3-D se mostrou eficaz e eficiente, uma vez que houve uma redução significativa do desvio padrão para as métricas de qualidade de razão de raios e razão média com apenas cinco iterações numéricas, no caso estudado. Por fim, ressalta-se o sucesso obtido na integração da ferramenta numérica de otimização de malhas de blocos múltiplos proposta com o código em desenvolvimento no IAE.

6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

O método de otimização proposto para tratar malhas de blocos múltiplos não estruturadas tridimensionais se mostrou eficaz para o caso estudado. No entanto, tratando-se de desenvolvimento de uma ferramenta computacional, recomenda-se inicialmente testes em malhas de blocos múltiplos mais realistas, de forma que possíveis problemas, não previstos na implementação inicial do código, se tornem evidentes e sejam solucionados.

Ressalta-se, novamente, a efetividade e eficácia encontrada no processo de otimização topológica local proposto, o qual foi alcançado após diversas tentativas utilizando um código de reconstrução baseado em triangulação de Delaunay. Dessa forma, recomenda-se fortemente evitar o uso de rotinas numéricas de reconstrução de malhas baseadas em triangulação de Delaunay, principalmente devido ao não atendimento dos critérios geométricos observados nas tentativas realizadas ao longo do desenvolvimento do código.

A utilização de uma estrutura de dados que favoreça o acesso às informações de interesse torna os problemas associados à implementação numérica menos evidentes e corroboram para uma redução do esforço computacional. Dessa forma, sugere-se a implementação das estruturas ESUP e PSUP, apresentadas neste trabalho para todo e qualquer problema onde a suavização laplaciana for utilizada.

Atualmente, o maior esforço computacional está associado com a atualização da estrutura de dados ESUP e PSUP. Dessa forma, quanto maior é o número de elementos distorcidos na malha, maior é o tempo empregado para realizar a otimização topológica local proposta. Portanto, recomenda-se estudar uma forma mais eficiente de realizar essa atualização de dados de modo a reduzir o tempo computacional de análise.

Referências Bibliográficas

- AMENTA, N., BERN, M. e EPPSTEIN, D., 1999. “Optimal Point Placement for Mesh Smoothing”. *Journal of Algorithms*, Vol. 30, p. 302–322.
- ANTUNES, A.P., 2000. “Simulação de Escoamentos Aerodinâmicos Utilizando Malhas de Múltiplos Blocos Sobrepostos”. Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.
- BATISTA, V.H.F., 2005. “Geração de Malhas Não-Estruturadas Utilizando um Método de Avanço de Fronteira”. Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, RJ.
- BRAY, N., 2004. private communication, Notes on Mesh Smoothing, Laboratório Jacques-Louis Lions, França.
- BURKARDT, J., 2010. “Computational Geometry Lab: Tetrahedrons”. Technical report, Information Technology Department, Virginia Tech.
- CABELLO, J., 2000. “Quick Kernel Ball Region Approximation for Improved Laplace Smoothing”. Technical report, Siemens Meshing Abstraction Group, Eastman Dr., Milford, Ohio 45244 USA.
- CHENG, S.W., DEY, T.K. e EDELSBRUNNER, H., 2000. “Sliver Exudation”. Em *Journal of the ACM*. Vol. 47, p. 883–904.
- DESBRUN, M., SCHRDER, M.M.P. e BARR, A., 1999. “Implicit Fairing of Arbitrary Meshes Using Diffusion and Curvature Flow”. Em *SIGGRAPH*. p. 317–324.
- DOMPIERRE, J., LABBÉ, P., GUIBAULT, F. e CAMERERO, R., 1998. “Proposal of Benchmarks for 3d Unstructured Tetrahedral Mesh Optimization”. Em *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*. Williamsburg, USA, p. 459–478.

- FREITAG, L.A. e GOOCH, C.A., 1997. “Tetrahedral Mesh Improvement Using Swapping and Smoothing”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, p. 3979–4002.
- FREITAG, L.A. e GOOCH, C.O., 1996. “A Comparison of Tetrahedral Mesh Improvement Techniques”. Em *Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable*. p. 87–106.
- FREITAG, L.A., JONES, M. e PLASSMANN, P., 1995. “An Efficient Parallel Algorithm for Mesh Smoothing”. Em *Proceedings of the Fourth International Meshing Roundtable*. p. 47–58.
- FREITAG, L.A. e KNUPP, P.M., 2002. “Tetrahedral Mesh Improvement via Optimization of the Element Condition Number”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, p. 1377–1391.
- HIRSCH, C., 2007. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Ed. John Wiley & Sons, USA, 2nd edition. 656 p.
- JOE, B., 2008. Technical report, Zhou Computing Services Inc, Abbotsford, BC, Canada.
- KLINGNER, B.M. e SHEWCHUK, J.R., 2008. “Aggressive Tetrahedral Mesh Improvement”. Em *Proceedings of the 16th International Meshing Roundtable*. Springer Berlin Heidelberg, Berkeley, USA, Vol. 1A, p. 3–23.
- LI, X.Y. e TENG, S.H., 2003. “Generating Well-Shaped Delaunay Meshes in 3d”. *Theoretical Computer Science - Computing and combinatorics*, Vol. 296, No. 4, p. 145–165.
- LIU, J. e SUN, S., 2006. “Small Polyhedron Reconnection: A New Way to Eliminate Poorly-Shaped Tetrahedra”. Em *Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable*. Springer-Verlag, Alabama, USA, p. 241–258.
- LOHNER, R., 2008. *Applied Computational Fluid Dynamics: An Introduction Based on Finite Element Methods*. Ed. John Wiley & Sons, Virginia, USA. 519 p.
- MAVRIPLIS, D.J., 1995. Technical report, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, NASA Langley Research Center, USA.

- MOL, C.L.L., 2004. “Ajuste da Malha Triangulada Resultante das Operações Booleanas de um Modelador de Sólidos”. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais - MG.
- PÉBAY, P.P. e BAKER, T.J., 2003. “Analysis of Triangle Quality Measures”. *Math. Comput.*, Vol. 72, No. 244, p. 1817–1839.
- PIO, D.M., 2010. “Desenvolvimento de Código de CFD Para Malhas de Múltiplos Blocos para Aplicações Aeroespaciais”. Trabalho de conclusão de curso, Universidade do Vale do Paraíba, São José dos Campos.
- SCHNEIDER, P.J. e EBERLY, D.H., 2003. *Geometric Tools for Computer Graphics*. Elsevier Science, San Francisco, USA. 1009 p.
- SIROIS, Y., DOMPIERRE, J., VALLET, M.G. e GUIBAULT, F., 2006. “Mesh Smoothing Based on Riemannian Metric Non-Conformity Minimization”. Em *Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable*. Springer-Verlag, Alabama, USA, p. 271–288.
- TECCHIO, C., BASSO, E., PIO, D.M. e AZEVEDO, J.L.F., 2014. “Mesh Improvement for Multiblock Grids in Store Separation Problems”. Em *VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM 2014*. Uberlândia-MG.