

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Antonio Luiz Schalata Pacheco

**TRANSFORMADA DE LAPLACE:
ALGUMAS APLICAÇÕES**

Monografia submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para
obtenção do grau de Especialista em Matemática

Orientador: Dr. Joel Santos Souza

Florianópolis, 04 de março de 2011.



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS**

Departamento de Matemática

Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor na modalidade a distância

"Transformada de Laplace: Algumas Aplicações"

Monografia submetida à Comissão de avaliação do Curso de Especialização em Matemática-Formação do professor em cumprimento parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 04/03/2011

Dr. Joel Santos Souza (Orientador)

Joel Santos Souza

Dr. Alcides Buss (Examinador)

Alcides Buss

Dr. Eliezer Batista (Examinador)

Eliezer Batista

Neri Terezinha Both Carvalho
Dra. Neri Terezinha Both Carvalho

Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática-Formação de Professor

Florianópolis, Santa Catarina, março de 2011.

Ofereço este trabalho a Deus;

a meus pais, Antônio e Luiza;

à minha esposa, Dirivete;

a meus filhos, Antonio Luiz, Alice e Luiz Felipe;

e a meus irmãos Ezequiel Felipe, Luiz Antonio e Maria Luiza.

Sem eles, o brilho de qualquer conquista estaria ofuscado.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	I
LISTA DE TABELAS.....	III
LISTA DE SÍMBOLOS.....	IV
RESUMO.....	VI
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. TRANSFORMADA DE LAPLACE.....	4
2.1. INTRODUÇÃO.....	4
2.2. RESUMO HISTÓRICO.....	4
2.3. DEFINIÇÃO.....	5
2.4. CONVERGÊNCIA E EXISTÊNCIA.....	6
2.5. LINEARIDADE.....	8
2.6. UNICIDADE.....	9
2.7. OPERADOR LINEAR INVERSO.....	9
2.8. PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE.....	11
2.8.1. Primeira propriedade de translação ou deslocamento.....	11
2.8.2. Segunda propriedade de translação ou deslocamento.....	11
2.8.3. Propriedade da mudança de escala.....	12
2.8.4. Transformada de Laplace da derivada de primeira ordem.....	12
2.8.5. Transformada de Laplace da derivada de ordem n	13
2.8.6. Derivada da Transformada de Laplace (multiplicação por t^n).....	14
2.8.7. Transformada de Laplace da integral.....	14
2.8.8. Integral da Transformada de Laplace (divisão por t).....	15
2.8.9. Funções periódicas.....	15
2.8.10. Convolução.....	17
2.9. ALGUMAS FUNÇÕES ESPECIAIS.....	18
2.9.1. A função degrau unitário.....	18
2.9.2. O delta de Dirac.....	20
2.9.3. A função gama.....	21
2.9.4. A função beta.....	23
2.9.5. Funções de Bessel.....	24
2.9.6. A função erro.....	25
2.9.7. A função erro complementar.....	25

2.9.8. A integral exponencial	26
2.9.9. As integrais seno e cosseno.....	26
2.9.10. As integrais seno e cosseno de Fresnel.....	26
2.9.11. Funções nulas	26
3. TABELAS DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE	28
4. APLICAÇÕES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE	32
4.1. INTRODUÇÃO	32
4.2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES.....	32
4.2.1. EDO linear homogênea de ordem 1	32
4.2.2. EDO linear homogênea de ordem 2	33
4.2.3. EDO linear homogênea de ordem superior	37
4.2.4. EDO linear não homogênea de ordem 1	38
4.2.5. EDO linear não homogênea de ordem 2	40
4.2.6. EDO linear não homogênea de ordem superior	45
4.3. OBTENÇÃO DE UMA FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA	47
4.4. APLICAÇÃO À CONVOLUÇÃO DE FUNÇÕES	49
4.5. EDO LINEARES SIMULTÂNEAS	53
4.6. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS	55
4.6.1. Condução de calor	56
4.6.2. Corda Vibrante	58
5. CONCLUSÃO.....	60
REFERÊNCIAS	61
APÊNDICE.....	63

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Resolvendo um PVI por Transformada de Laplace - adaptada de Kreyszig (2006).....	1
Figura 2 – Função $g(t)$ onde $f(t) = \cos(t)$	11
Figura 3 – Função onda dente de serra - adaptada de Spiegel (1965).....	16
Figura 4 – Região de integração - Plano $t\tau$	18
Figura 5 – Função degrau unitário.	19
Figura 6 – $u(t-\alpha)f(t)$ onde $f(t) = \cos(t)$	19
Figura 7 – Gráfico de $\delta_\epsilon(t-\alpha)$	20
Figura 8 – Circuito RL	38
Figura 9 – Formas de onda da fonte de alimentação $e(t)$ e da corrente $i(t)$ do circuito RL , obtidas a partir do Derive (a) e do Orcad (b), para $\alpha = 120\pi$, $V = 10$ V, $R = 10 \Omega$ e $L = 10$ mH.	40
Figura 10 – Circuito RLC	40
Figura 11 – Representação da alimentação do circuito RLC da figura 10.	41
Figura 12 – Formas de onda da corrente $i(t)$ do circuito RLC (fig. 10), obtidas por meio de (4.21), (4.22) e (4.23) e do uso do Derive, para $\alpha = 2$ s, $E = 100$ V, $R = 10 \Omega$ e $L = 500$ mH e $C = 40$ mF (Caso 1) – 20 mF (Caso 2) – 2 mF (Caso 3).....	44
Figura 13 – Formas de onda da corrente $i(t)$ do circuito RLC (fig. 10), obtidas do Orcad, para $\alpha = 2$ s, $E = 100$ V, $R = 10 \Omega$ e $L = 500$ mH e $C = 40$ mF (Caso 1) – 20 mF (Caso 2) – 2 mF (Caso 3).....	44
Figura 14 – Viga bi-engastada - adaptada de Spiegel (1965).....	45
Figura 15 – Circuito RLC	47
Figura 16 – Circuito RC	49
Figura 17 – Pulso $f(t)$	49
Figura 18 – Formas de onda da tensão $v_o(t)$ do circuito RC (fig. 16), obtidas por meio do Orcad.....	51
Figura 19 – Formas de onda da tensão $v_o(t)$ do circuito RC (fig. 16), obtidas por meio do Derive.	52
Figura 20 – Funções $f(-\lambda)$ (a) e $f(t - \lambda)$ (b).....	52
Figura 21 – Função $h(t)$ (a) e funções $h(\lambda)$ e $f(-\lambda)$ (b).....	53
Figura 22 – Funções $h(\lambda)$ e $f(t - \lambda)$ para $0 < t < 1$ (a) e para $t > 1$ (b).	53
Figura 23 – Malha elétrica - adaptada de Spiegel (1965).....	54

Figura 24 – Formas de onda das correntes do circuito da figura 23, obtidas a partir do Orcad (a) e da aplicação das equações (4.49), (4.50) e (4.51) no Derive (b).	55
Figura 25 – Corda vibrante infinitamente longa - adaptada de Spiegel (1965).	58
Figura 26 – Função onda triangular - adaptada de Spiegel (1965).	72
Figura 27 – Função onda quadrada - adaptada de Spiegel (1965).	72
Figura 28 – Função onda senoidal retificada - adaptada de Spiegel (1965).	72
Figura 29 – Função onda senoidal semi-retificada - adaptada de Spiegel (1965).	72
Figura 30 – Função onda dente de serra - adaptada de Spiegel (1965).	72
Figura 31 – Função pulso - adaptada de Spiegel (1965).	73
Figura 32 – Função escalonada - adaptada de Spiegel (1965).	73
Figura 33 – Função escalonada II - adaptada de Spiegel (1965).	73
Figura 34 – Função escalonada III - adaptada de Spiegel (1965).	73
Figura 35 – Função pulso senoidal - adaptada de Spiegel (1965).	73

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela de propriedades gerais de Transformadas de Laplace (SPIEGEL, 1965).	28
Tabela 2 – Tabela de Transformadas de Laplace especiais (SPIEGEL, 1965).	30
Tabela 3 – Tabela de Transformadas de Laplace adicionais (SPIEGEL, 1965).	63

LISTA DE SÍMBOLOS

EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
PVI	Problema de Valor Inicial
PA	Problema algébrico
f	Função
t	Variável tempo
$f(t)$	Função em t
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
$\mathcal{L}[f(t)]$	Transformada de Laplace de $f(t)$
s	Variável complexa
$F(s)$	Função em s
$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	Transformada inversa de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[f(t)]\}$	Transformada inversa de Laplace
$g(t)$	Função em t
$(f * g)(t)$	Convolução das funções f e g em t
$\mathcal{U}(t - \alpha)$	Função unitária de Heaviside
$\delta(t - \alpha)$	Delta de Dirac
$\Gamma(n)$	Função Gama
B	Função Beta
$J_n(t)$	Função de Bessel de ordem n em t
$\text{erf}(t)$	Função erro
$\text{erfc}(t)$	Função erro complementar
$\text{Ei}(t)$	Integral exponencial
$\text{Si}(t)$	Integral seno
$\text{Ci}(t)$	Integral cosseno

$S(t)$	Integral seno de Fresnel
$C(t)$	Integral cosseno de Fresnel
$\mathcal{N}(t)$	Função nula
R	Resistor
L	Indutor
C	Capacitor
$d. d. p.$	Diferença de potencial
$e(t)$	Tensão elétrica em t
$i(t)$	Corrente elétrica em t
$v_R(t)$	Queda de tensão no resistor R em t
$v_L(t)$	Queda de tensão no indutor L em t
$v_C(t)$	Queda de tensão no capacitor C em t
V	Unidade de tensão elétrica
A	Unidade de corrente elétrica
Ω	Unidade de resistência elétrica
H	Unidade de indutância
F	Unidade de capacitância
x	Variável comprimento
$y(x)$	Função em x
$m(x)$	Momento de flexão em x
$t(x)$	Força de cisalhamento em x
$q(x)$	Carga em x
$h(t)$	Função em t
$u(x, t)$	Temperatura em x e t

RESUMO

Equações que envolvem funções e suas derivadas são ditas diferenciais. Problemas decorrentes do movimento de fluidos, da velocidade de reações químicas, do fluxo de corrente elétrica em circuitos, da dissipação de calor em objetos sólidos, da propagação e detecção de ondas sísmicas, bem como da variação do tamanho de uma população, são alguns exemplos da abrangência do uso de equações diferenciais. Toda essa gama de utilização contribui para que elas representem um ramo da matemática que grande número de aplicações encontra nas ciências físicas. O aparecimento de tais equações está associado ao desenvolvimento da ciência durante o século XVIII, em particular, ao desenvolvimento da física e da astronomia. Desde então, encontrar métodos para a obtenção da solução de uma equação diferencial tem sido um problema que vem desafiando a comunidade científica, razão pela qual os métodos atuais trazem a contribuição de célebres colaboradores daquela época, como Laplace. Os métodos de resolução podem ser numéricos ou analíticos, resultando, respectivamente, em soluções aproximadas ou soluções exatas. O método da Transformada de Laplace é um procedimento analítico e vem se consolidando como uma importante ferramenta para a resolução de equações diferenciais, em particular, das equações lineares com coeficientes constantes e dos correspondentes problemas de valor inicial.

1. INTRODUÇÃO

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) e Equações Diferenciais Parciais (EDP's) descrevem o modo como certas grandezas variam com o tempo, tal como a corrente em um circuito elétrico, a oscilação de uma membrana vibrante ou o fluxo de calor através de um condutor isolado. Essas equações geralmente estão associadas às condições iniciais que descrevem o estado do sistema no instante de tempo inicial (SCHIFF, 1999), ou de maneira mais geral, às condições de contorno.

O método da Transformada de Laplace¹ é uma importante ferramenta para a resolução de equações diferenciais, em particular das EDO's lineares com coeficientes constantes e dos correspondentes problemas de valor inicial (PVI's), bem como dos sistemas de EDO's, que são bastante frequentes nas áreas das engenharias. Da mesma forma, a Transformada de Laplace pode ser empregada para a resolução das EDP's.

O procedimento para a obtenção da solução de um problema consiste, basicamente, em três passos (KREYSZIG, 2006) (figura 1):

Passo 1. Com o objetivo de diminuir o grau de dificuldade do problema e simplificá-lo, a EDO dada é transformada em uma equação algébrica (equação subsidiária);

Passo 2. A equação subsidiária é resolvida através de manipulação algébrica;

Passo 3. A solução obtida, através de manipulação, é transformada novamente, via operador inverso, para se obter a solução do problema.

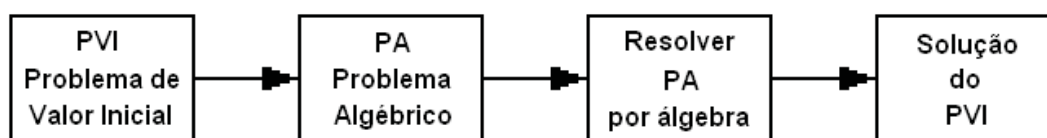


Figura 1 – Resolvendo um PVI por Transformada de Laplace - adaptada de Kreyszig (2006).

Nessas condições, resolver uma EDO é (além das transformações) reduzi-la a um problema algébrico. A primeira e terceira etapas são facilitadas com o uso de tabelas específicas de Transformadas de Laplace e a segunda etapa requer, apenas, alguma capacidade de manipulação algébrica.

¹ Pierre-Simon Laplace nasceu em 23 de março de 1749, na localidade de Beaumont-en-Auge, na Normandia (França). Laplace publicou várias obras sobre mecânica, álgebra, análise e geometria; entre elas: *Les lois du système planétaire* (1788), *Exposition du système du monde* (1796), *Traité de mécanique céleste* (1799-1825), *Théorie analytique des probabilités* (1812) e *Essai philosophique des probabilités* (1814). Além de ser um proeminente cientista, Laplace teve uma vida política ativa, a ponto de ter sido Ministro do Interior de Napoleão Bonaparte e nomeado Marquês e Par da França. Laplace faleceu em 5 de março de 1827, em Paris (GILLISPIE, 1997).

A operação de transformação de um problema do cálculo para a álgebra é chamada de “cálculo operacional”. A Transformada de Laplace é um importante método operacional para a engenharia. O método tem duas vantagens principais sobre os demais procedimentos usuais – Método da variação de parâmetros, Função de Green, Redução de ordem, Equação de Euler e Método dos coeficientes a determinar, entre outros:

A. A primeira é que os problemas são resolvidos mais diretamente. Os problemas de valor inicial são resolvidos sem que seja necessário determinar-se, inicialmente, uma solução geral. Adicionalmente, as EDO's não-homogêneas são resolvidas sem a necessidade de obterem-se as correspondentes EDO's homogêneas.

B. A segunda, e certamente mais importante vantagem, é devida ao uso da função unitária (função de Heaviside²) e do delta de Dirac³. Essas ferramentas tornam esse método particularmente poderoso para problemas nos quais os dados iniciais (forças motrizes mecânicas ou elétricas) têm descontinuidades, representam pequenos impulsos de grande amplitude, ou são funções periódicas mais elaboradas (não apenas senóides e cossenóides).

A literatura dispõe de muitas publicações sobre o método da Transformada de Laplace, dada a importância e potencialidade do método. De maneira geral, a disseminação dessas informações se dá através da apresentação de definições, propriedades e tabelas, além de exercícios práticos para a aplicação desta ferramenta.

O objetivo do presente trabalho é reunir exemplos de aplicações do método da Transformada de Laplace em problemas físicos, que sirvam de material didático para a consulta de estudantes de áreas das ciências correlacionadas. De igual forma, buscou-se compilar um número considerável de informações preliminares, visando-se uma abordagem do método dentro de um tratamento matemático uniforme e com certo rigor. Para tanto, o trabalho foi dividido em cinco capítulos.

No capítulo 2, apresentou-se a Transformada de Laplace, iniciando com um breve histórico da transformação integral, seguido da definição do operador de Laplace, depois discorrendo sobre algumas propriedades elementares da Transformada e, em seguida, introduzindo algumas funções especiais.

² Oliver Heaviside nasceu em 18 de maio de 1850 em Londres (Inglaterra) e faleceu em 3 de fevereiro de 1925 em Torquay. Heaviside foi um inovador engenheiro eletricitista, que também fez significativas contribuições à Teoria do Eletromagnetismo (NAHIN, 1987).

³ Paul Adrien Maurice Dirac nasceu em 8 de agosto de 1902 em Bristol (Inglaterra) e faleceu em 20 de outubro de 1984 em Tallahassee. Dirac foi matemático e físico teórico, domínio este da ciência que lhe rendeu o Nobel em 1933 (FARMELO, 2009).

No capítulo 3, construíram-se tabelas bastante elaboradas de funções especiais no domínio do tempo com suas correspondentes Transformadas de Laplace.

No capítulo 4, reuniram-se exemplos clássicos e bastante representativos de problemas que envolvem a aplicação do método da Transformada de Laplace.

Finalmente, no capítulo 5, apresentaram-se algumas considerações finais e conclusões.

2. TRANSFORMADA DE LAPLACE

2.1. Introdução

O método da Transformada de Laplace é, resumidamente, caracterizado pela aplicação de um operador de integração a uma função f , geralmente, no domínio temporal - $f(t)$. Por meio desse procedimento, a função $f(t)$ é conduzida ao domínio da frequência, onde as manipulações algébricas, normalmente, são mais simples. Como as soluções dos problemas propostos estão no domínio temporal, faz-se necessário retornar a ele através da utilização do operador inverso da Transformada de Laplace.

A apresentação do método, bem como as propriedades necessárias à sua aplicação, estão contemplados no presente capítulo.

2.2. Resumo histórico

Apesar de receber o nome de Transformada de Laplace, esse operador carrega a contribuição de célebres colaboradores desde o século XVIII. Os próximos parágrafos dessa seção foram dedicados a uma apresentação concisa sobre o desenvolvimento dessa ferramenta durante esse período, segundo as contribuições de Schiff (1999).

A data de surgimento da transformação integral remonta à obra de Léonhard Euler⁴ (1763 e 1769), que considerava, essencialmente, a forma da Transformada inversa de Laplace na resolução de EDO's lineares de segunda ordem. O próprio Laplace, em seu grande trabalho *Théorie analytique des probabilités* (1812), creditou a Euler a introdução da transformação integral.

Foi Spitzer (1878) quem associou o nome de Laplace à expressão

$$y = \int_a^b e^{sx} \phi(s) ds$$

empregada por Euler. Nessa forma, ela é aplicada na equação diferencial onde y passa a ser a função desconhecida na variável x .

No final do século XIX, a Transformada de Laplace foi estendida para sua forma complexa por Poincaré e Pincherle, redescoberta por Petzval, e estendida a duas variáveis por Picard, com outras investigações conduzidas por Abel e muitos outros.

⁴ Léonhard Paul Euler nasceu em 15 de abril de 1707, próximo a Basileia (Suíça), e faleceu em 18 de setembro de 1783, em São Petersburgo (Rússia). Euler foi matemático, astrônomo, químico, engenheiro e físico. O próprio Laplace dizia: *Leia Euler, leia Euler. Ele é o mestre de todos nós* (DUNHAM, 1999).

A primeira aplicação da moderna Transformada de Laplace ocorreu no trabalho de Bateman (1910), no qual se transformam equações decorrentes do trabalho de Rutherford em decaimento radioativo

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda_i P,$$

por meio de

$$p(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} P(t) dt,$$

e obtendo-se a equação transformada. Bernstein (1920) usou a expressão

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} \phi(u) du,$$

chamando-a de transformação de Laplace, em seu trabalho sobre a Função Theta. Um impulso à abordagem moderna foi dado por Doetsch, nas décadas de 20 e 30 (século XX); ele aplicou a Transformada de Laplace às equações diferenciais, integrais e íntegro-diferenciais. Esse trabalho culminou em seu texto base de 1937, *Theorie und Anwendungen der Laplace Transformation*.

A história da Transformada de Laplace estaria incompleta, se não fosse citado o trabalho de Oliver Heaviside, que produziu (principalmente no contexto da engenharia elétrica) um vasto trabalho do qual se deriva o “cálculo operacional”. Esse trabalho está distribuído em três volumes, *Electromagnetic Theory* (1894, 1899, 1912), e tem muitas semelhanças com o método da Transformada de Laplace. Embora o cálculo de Heaviside não tenha sido totalmente rigoroso, ele buscou auxiliar os engenheiros eletricitistas com uma técnica útil para a resolução de seus problemas. Pesquisas consideráveis tentaram tornar rigoroso o cálculo de Heaviside e conectá-lo à Transformada de Laplace. Um desses esforços foi o de Bromwich⁵, que, entre outros, descobriu a transformação inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ts} X(s) ds, \quad (2.1)$$

onde γ é um número real escolhido de forma que $s = \gamma$ esteja à direita de todas as singularidades da função $X(s)$.

2.3. Definição

A maioria dos problemas que possibilita a aplicação do operador de Laplace está no domínio do tempo, onde os valores da variável são todos não negativos, ou

⁵ Thomas John L'Anson Bromwich nasceu em 8 de fevereiro de 1875, em Wolverhampton, e faleceu (por suicídio) em 26 de agosto de 1929, em Nothampton (Inglaterra). Bromwich foi um dos mais proeminentes matemáticos ingleses.

seja, pertencem ao intervalo $[0, +\infty)$. Consequentemente, as funções que possuem Transformada de Laplace são definidas nesse domínio.

Definição 2.1. Seja uma função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. A Transformada de Laplace de f , denotada usualmente por $\mathcal{L}[f(t)]$ ou $\mathcal{L}(f)$, é uma função $F(s)$ definida por

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (2.2)$$

desde que essa integral convirja. A variável s é complexa e é dada por $s = \alpha + i\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ou ainda, como a integral representada em (2.2) é imprópria, pode-se caracterizar a Transformada de Laplace de f como sendo uma função $F(s)$ definida pelo limite

$$F(s) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t) dt, \quad (2.3)$$

desde que esse limite exista e seja finito.

Algumas funções não possuem as condições suficientes à convergência da integral.

Exemplo 2.1. Considere-se a função $f(t) = e^{t^2}$. Pode-se observar que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} e^{t^2} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{t^2 - st} dt = \infty \quad (\text{SCHIFF, 1999}).$$

Tal comportamento é de certa forma esperado, pois, em geral, é grande a possibilidade de não ser finito o resultado de uma integral que se estende até o infinito. Para verificar a viabilidade da utilização do operador, existem critérios que permitem observar se a integral converge ou não, os quais serão apresentados a seguir.

2.4. Convergência e existência

O integrando em (2.2) é o produto de $f(t)$ por uma função que declina a partir de um s fixado, $s > 0$, ou seja, e^{-st} caminha assintoticamente para zero quando t tende ao infinito. Quando e^{-st} é suficiente para fazer com que o integrando

corresponda a uma função exponencial com expoente negativo, então (2.2) deve convergir.

Definição 2.2. Diz-se que $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é de ordem exponencial, se existem M e γ , com $M > 0$, tais que

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t}, \text{ para todo } t > 0. \quad (2.4)$$

Considerando-se a desigualdade em (2.4), observa-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\gamma-s)t} = 0, \text{ para todo } t \geq 0,$$

somente se $s > \gamma$. Neste caso, as funções de ordem exponencial admitem Transformada de Laplace para $s > \gamma$, sendo γ denominada abscissa de convergência.

Exemplo 2.2. A função $f(t) = t^n$ ($n \geq 1$) é de ordem exponencial, pois $t^n < n!e^t$, para todo $t > 0$. ($M = n!$ e a abscissa de convergência é 1).

A desigualdade $t^n < n!e^t$ provém da série de Maclaurin de e^t :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots, \text{ logo } \frac{t^n}{n!} < e^t.$$

Exemplo 2.3. A função $f(t) = e^{t^2}$ não é de ordem exponencial, pois se existissem γ e M tais que $e^{t^2} \leq Me^{\gamma t}$, para todo $t > 0$, existiria $e^{t^2 - \gamma t} \leq M$, o que é um absurdo, pois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t^2 - \gamma t} = +\infty, \text{ para todo } \gamma \text{ fixado.}$$

Como já foi citado introdutoriamente, o operador de Laplace é aplicável a problemas em que $f(t)$ não seja uma função contínua. Entretanto, admitir-se-á que $f(t)$ seja seccionalmente contínua em cada intervalo finito em $[0, +\infty)$.

Definição 2.3. Uma função $f(t)$ é seccionalmente contínua em um intervalo finito $a \leq t \leq b$, se $f(t)$ é definida nesse intervalo e tal que o intervalo possa ser subdividido em um número finito de intervalos, em cada um dos quais $f(t)$ é contínua e tem limites finitos quando t tende para qualquer ponto extremo do intervalo de subdivisão a partir do interior.

Reunidas as condições que garantem a existência das Transformadas de Laplace de uma função, quais sejam, ser de ordem exponencial e seccionalmente contínua, pode-se enunciá-las através do Teorema 2.1. As funções que atendem a tais condições são ditas satisfazerem as condições de Dirichlet.

Teorema 2.1. Seja uma função seccionalmente contínua sobre qualquer intervalo finito em $t \geq 0$, satisfazendo a condição (2.4), para todo $t \geq 0$, para algum γ e M . Então a Transformada de Laplace existe para todo $s > \gamma$ (KREYSZIG, 1986).

Observação: A condição da função é mais forte que ser simplesmente seccionalmente contínua.

Demonstração: Da definição em (2.2), por $f(t)$ ser contínua em intervalos, e $e^{-st}f(t)$ ser integrável sobre qualquer intervalo finito sobre o eixo t , tem-se

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f(t)]| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-st} M e^{\gamma t} dt = \\ &= M \int_0^{\infty} e^{-(s-\gamma)t} dt = \frac{M}{s-\gamma}, (s > \gamma) \quad (\text{KREYSZIG, 1986}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.5. Linearidade

Uma das propriedades mais importantes do operador de Laplace é a linearidade. Como ferramenta, ela ajuda a obter pares de transformadas sem a utilização direta da equação (2.2).

Teorema 2.2. Se $\mathcal{L}[f_1(t)]$ e $\mathcal{L}[f_2(t)]$ são, respectivamente, as Transformadas de Laplace de $f_1(t)$ e $f_2(t)$, então

$$\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[f_2(t)], \quad (2.5)$$

com α_1 e α_2 constantes.

Demonstração: Segue, direto da definição (2.2), que

$$\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} [\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] dt =$$

$$= \alpha_1 \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + \alpha_2 \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt = \alpha_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[f_2(t)]. \quad \blacksquare$$

2.6. Unicidade

O exemplo 2.4, a seguir, deve servir de motivação para o Teorema 2.3.

Exemplo 2.4. Sejam $f(t) = 1$ e $g(t) = \begin{cases} 1 & t \neq k \\ 0 & t = k \end{cases}$, onde $k = \{1, 2, 3\}$.

Para $s > \alpha$ e $\alpha > 0$, obtêm-se as Transformadas de Laplace de $f(t)$ e $g(t)$, $F(s)$ e $G(s)$ respectivamente, como:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\tau} \right) = \frac{1}{s};$$

$$G(s) = \int_0^1 e^{-st} \cdot 1 dt + \int_1^2 e^{-st} \cdot 1 dt + \int_2^3 e^{-st} \cdot 1 dt + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_3^{\tau} e^{-st} \cdot 1 dt = \frac{1}{s}.$$

Observa-se que, apesar de $f(t)$ e $g(t)$ serem funções distintas, elas têm a mesma Transformada de Laplace. No entanto, pode-se observar que os pontos que as diferenciam são aqueles nos quais $g(t)$ é descontínua.

Teorema 2.3. Se $f(t)$ e $g(t)$ têm a mesma Transformada de Laplace, então $f(t) = g(t)$ nos pontos em que f e g são contínuas.

Este resultado, assumido sem demonstração, permitir-nos-á considerar a existência do operador inverso.

Observação: Note-se que, de fato, não se tem a unicidade da Transformada de Laplace, logo não se pode definir um operador inverso. No entanto, corrige-se esse fato através das classes de equivalência de funções que são iguais quase sempre, ou seja, funções que são iguais a menos de um conjunto de medida nula. Assim, pode-se definir o operador inverso, pois passou-se a ter a unicidade da Transformada de Laplace sobre tais classes de equivalência.

2.7. Operador linear inverso

Uma vez encontrada a solução $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ de um problema, faz-se necessário retornar-se a solução da equação diferencial no domínio do tempo. O

operador que realiza tal operação é a Transformada inversa de Laplace, denotada por $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ ou $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[f(t)]\}$ de forma que $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[f(t)]\}$.

Como duas funções contínuas que têm a mesma Transformada de Laplace são iguais, então $F(s)$ só tem uma transformada inversa contínua para todo t . A transformada inversa pode ser obtida com auxílio de tabelas, semelhantes às apresentadas no capítulo 3, e pequenos artifícios matemáticos. A fórmula de Bromwich (2.1) permite obtê-la de forma analítica, no entanto, para tal faz-se necessário o uso de integração complexa, procedimento que não será explorado no presente trabalho.

O leitor interessado no uso da fórmula de integração complexa pode buscar informações em MARSDEN e HOFFMAN (1999). De maneira geral, pode-se representar o operador e seu inverso, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}: f(t) &\mapsto F(s) & \mathcal{L}^{-1}: F(s) &\mapsto f(t) \\ \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) & \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ts} F(s) ds = f(t) \end{aligned}$$

O teorema a seguir garante a linearidade do operador inverso.

Teorema 2.4. Se $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$ e $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$, então

$$\mathcal{L}^{-1}[\beta_1 F_1(s) + \beta_2 F_2(s)] = \beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t), \quad (2.6)$$

sendo β_1 e β_2 constantes.

Demonstração: Segue direto das definições do operador e do seu inverso e, também, do Teorema 2.3 que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[\beta_1 F_1(s) + \beta_2 F_2(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\int_0^{\infty} e^{-st} (\beta_1 f_1(t)) dt + \int_0^{\infty} e^{-st} (\beta_2 f_2(t)) dt\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[\beta_1 f_1(t)] + \mathcal{L}[\beta_2 f_2(t)]] = \beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Em Spiegel (1965), estão disponíveis propriedades importantes da Transformada inversa de Laplace, no entanto, nos limitaremos a apresentar somente as propriedades relativas à $\mathcal{L}[f(t)]$.

2.8. Propriedades da Transformada de Laplace

Com o que foi visto até então, já seria possível encontrar a Transformada de Laplace de um número considerável de funções. Entretanto, com aplicação das propriedades que se seguem, torna-se possível estender essa ferramenta para a obtenção de um universo muito maior de transformadas.

Observação: Nas propriedades abordadas daqui em diante, admitir-se-á que as funções consideradas satisfazem às condições de Dirichlet.

2.8.1. Primeira propriedade de translação ou deslocamento

O teorema a seguir é conhecido como teorema do deslocamento em frequência ou teorema da translação na frequência.

Teorema 2.5. Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então para toda constante α , tem-se:

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha). \quad (2.7)$$

Demonstração: Seja $s > \gamma$, sendo γ a abscissa de convergência de f , então

$$F(s - \alpha) = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{\alpha t} f(t)) dt = \mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)]. \quad \blacksquare$$

2.8.2. Segunda propriedade de translação ou deslocamento

O próximo teorema está associado ao deslocamento ou translação no tempo. Ele estabelece uma relação entre a transformada de $f(t)$ e a da sua translação $g(t)$, ilustrada pela figura 2.

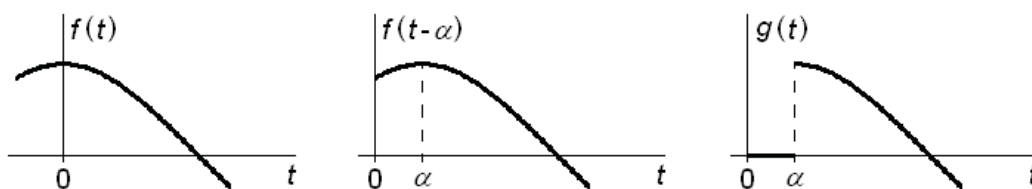


Figura 2 – Função $g(t)$ onde $f(t) = \cos(t)$.

Teorema 2.6. Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ e $g(t) = \begin{cases} f(t-\alpha) & t > \alpha \\ 0 & t < \alpha \end{cases}$, então, para todo $\alpha > 0$, tem-se

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-\alpha s} F(s) \quad (\text{SPIEGEL, 1965}). \quad (2.8)$$

Demonstração: Seja $s > \gamma$, sendo γ a abscissa de convergência de f , então

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{\alpha} e^{-st} (0) dt + \int_{\alpha}^{\infty} e^{-st} f(t - \alpha) dt = \int_{\alpha}^{\infty} e^{-st} f(t - \alpha) dt.$$

Fazendo-se $\tau = t - \alpha$, obtém-se

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau + \alpha)} f(\tau) d\tau = e^{-\alpha s} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = e^{-\alpha s} F(s). \quad \blacksquare$$

Observação: Note-se que $g(t) = u(t - \alpha)f(t - \alpha)$, sendo $u(t - \alpha)$ a função de Heaviside (a ser) definida em 2.9.1.

2.8.3. Propriedade da mudança de escala

O teorema seguinte está relacionado ao reescalonamento de uma função no tempo. Ele é também conhecido como teorema da similaridade.

Teorema 2.7. Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então

$$\mathcal{L}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0 \quad (2.9)$$

Demonstração: Seja $s > \gamma$, sendo γ a abscissa de convergência de f . Assumindo $\tau = \alpha t$, pode-se escrever

$$\mathcal{L}[f(\alpha t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(\alpha t) dt = \int_0^{\infty} e^{-s\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)} f(\tau) \frac{d\tau}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{s}{\alpha}\right)\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right). \quad \blacksquare$$

2.8.4. Transformada de Laplace da derivada de primeira ordem

O teorema 2.8 também é conhecido como sendo da diferenciação no tempo.

Teorema 2.8. Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \quad (2.10)$$

se $f(t)$ é contínua para $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial para $t > N$, enquanto $f'(t)$ é seccionalmente contínua para $0 \leq t \leq N$.

Demonstração: Seja $s > \gamma$, sendo γ a abscissa de convergência de f . Por meio da integração por partes, onde $u = e^{-st}$ e $dv = f'(t)dt$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow \infty}} \int_{\delta}^{\tau} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow \infty}} \left[e^{-st} f(t) \Big|_{\delta}^{\tau} + s \int_{\delta}^{\tau} e^{-st} f(t) dt \right] = \\ &= \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow \infty}} \left[e^{-s\tau} f(\tau) - e^{-s\delta} f(\delta) + s \int_{\delta}^{\tau} e^{-st} f(t) dt \right] = -f(0^+) + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0^+). \end{aligned}$$

Mas, como f é contínua em $t = 0$, segue que $f(0) = f(0^+)$; conseqüentemente

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \quad (\text{SCHIFF, 1999}). \quad \blacksquare$$

2.8.5. Transformada de Laplace da derivada de ordem n

Este teorema estende o resultado anterior para $\mathcal{L}[f^n(t)]$.

Teorema 2.9. Sejam $f(t)$ e suas derivadas $f'(t), f''(t), \dots, f^{n-1}(t)$ funções contínuas para $t \geq 0$, que satisfazem (2.4), para certos valores de γ e M , e seja a derivada $f^n(t)$ parcialmente contínua sobre qualquer intervalo finito da faixa $t \geq 0$. Então, a Transformada de Laplace de $f^n(t)$ existe quando $s > \gamma$, e é dada por

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - s^0 f^{(n-1)}(0). \quad (2.11)$$

Demonstração: A partir do resultado anterior (teorema 2.8), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] &= \mathcal{L}\left\{ \left[f^{(n-1)}(t) \right]' \right\} = s \mathcal{L}\left[f^{(n-1)}(t) \right] - f^{(n-1)}(0) = s \mathcal{L}\left\{ \left[f^{(n-2)}(t) \right]' \right\} - f^{(n-1)}(0) = \\ &= s \left\{ s \mathcal{L}\left[f^{(n-2)}(t) \right] - f^{(n-2)}(0) \right\} - f^{(n-1)}(0) = s^2 \mathcal{L}\left[f^{(n-2)}(t) \right] - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Continuando o processo até que se trabalhem as derivadas de menor ordem:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^n(t)] &= s^{n-2} \left\{ \mathcal{L}\left[f'(t) \right]' \right\} - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) = \\ &= s^{n-2} \left\{ s \mathcal{L}\left[f'(t) \right] - f'(0) \right\} - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s^{n-1} \mathcal{L}[f'(t)] - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) = \\
&= s^{n-1} (sF(s) - f(0)) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) = \\
&= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.8.6. Derivada da Transformada de Laplace (multiplicação por t^n)

O teorema 2.10 também é conhecido como sendo da diferenciação em frequência.

Teorema 2.10. Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então

$$\mathcal{L}[-tf(t)] = F'(s). \quad (2.12)$$

Demonstração: Deve-se assumir que é possível derivar sob o sinal de integração:

$$F'(s) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} [e^{-st} f(t)] dt = \int_0^{\infty} (-t) e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}[-tf(t)]. \quad \blacksquare$$

Repetindo-se a operação, obtém-se

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = F''(s), \quad (2.13)$$

e de maneira mais geral

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial s^n} \mathcal{L}[f(t)]. \quad (2.14)$$

2.8.7. Transformada de Laplace da integral

O resultado que segue é conhecido como teorema da integração no domínio do tempo.

Teorema 2.11. Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (2.15)$$

Demonstração: De $g(t) = \int_0^t f(u) du$, obtém-se $g'(t) = f(t)$ e $g(0) = 0$. Assim

$\mathcal{L}[g'(t)] = \mathcal{L}[f(t)]$, logo $s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) = F(s)$ e $s\mathcal{L}[g(t)] = F(s)$. Portanto

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{F(s)}{s} \text{ e } \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{F(s)}{s}. \quad \blacksquare$$

2.8.8. Integral da Transformada de Laplace (divisão por t)

O teorema 2.12 também é conhecido como sendo da integração em frequência.

Teorema 2.12. Se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u) du, \quad (s > \gamma) \quad (2.16)$$

desde que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ exista.

Demonstração: Decorre da definição e da possibilidade de inversão da ordem de integração, que

$$\begin{aligned} \int_s^\infty F(u) du &= \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt \right] du = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-ut} f(t) du \right] dt = \int_0^\infty f(t) \left[\int_s^\infty e^{-ut} du \right] dt = \\ &= \int_0^\infty f(t) \left[\frac{e^{-st}}{t} \right] dt = \int_0^\infty e^{-st} \left[\frac{f(t)}{t} \right] dt = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] \quad (\text{KREYSZIG, 1986}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.8.9. Funções periódicas

As funções periódicas constituem uma classe de aplicações que aparece com frequência como força externa em sistemas mecânicos ou elétricos.

Definição 2.4. Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período $T > 0$ se $f(t+T) = f(t)$ para todo t . O menor período positivo é chamado de período fundamental.

Teorema 2.13. Se f é uma função contínua por partes, de ordem exponencial e periódica de período T , então a Transformada de Laplace de f existe para $s > 0$ e é dada por

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt, \quad (s > \gamma) \quad (\text{SPIEGEL e WREDE, 2002}). \quad (2.17)$$

Demonstração: Vem da definição que

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = t - T$, na última integral, obtém-se

$$\int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+T)} f(\tau+T) d\tau = e^{-sT} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = e^{-sT} F(s)$$

pela periodicidade de f . Portanto,

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} F(s),$$

logo,

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \quad (\text{SCHIFF, 1999}). \quad \blacksquare$$

Exemplo 2.5: Considere-se o problema de obter a Transformada de Laplace da função de onda dente de serra,

$$f(t) = \frac{t}{\alpha} \text{ se } 0 \leq t < \alpha \text{ e } f(t + \alpha) = f(t), \text{ para todo } t > 0,$$

ilustrada pela figura 3.

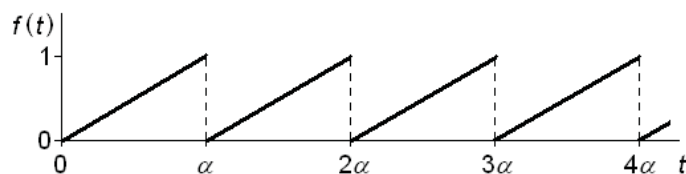


Figura 3 – Função onda dente de serra - adaptada de Spiegel (1965).

Neste caso, $T = \alpha$. Usando-se (2.17), obtém-se

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha s}} \int_0^{\alpha} e^{-st} \frac{t}{\alpha} dt = \frac{1}{\alpha(1 - e^{-\alpha s})} \int_0^{\alpha} e^{-st} t dt.$$

Por meio de integração por partes, onde $u = t$ e $dv = e^{-st} dt$, obtém-se

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{\alpha(1-e^{-\alpha s})} \left(-\frac{te^{-st}}{s} \Big|_0^\alpha - \int_0^\alpha -\frac{e^{-st}}{s} dt \right) = \frac{1}{\alpha(1-e^{-\alpha s})} \left(-\frac{\alpha e^{-\alpha s}}{s} + \frac{1}{s} \int_0^\alpha e^{-st} dt \right) = \\
&= \frac{1}{\alpha(1-e^{-\alpha s})} \left[-\frac{\alpha e^{-\alpha s}}{s} + \frac{1}{s} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^\alpha \right) \right] = \frac{1}{\alpha(1-e^{-\alpha s})} \left(-\frac{\alpha e^{-\alpha s}}{s} + \frac{1-e^{-\alpha s}}{s^2} \right),
\end{aligned}$$

logo,

$$F(s) = \frac{1}{\alpha s^2} - \frac{e^{-\alpha s}}{s(1-e^{-\alpha s})}.$$

2.8.10. Convolução

A convolução é uma operação que permite relacionar algumas funções com a transformada inversa do produto das suas transformações.

Definição 2.5. Sejam f e g funções contínuas por partes. A convolução das funções f e g é denotada e definida para $t \geq 0$ por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (\text{SILVA, 2005}). \quad (2.18)$$

Propriedades da convolução. Com a aplicação da definição, podem-se mostrar algumas propriedades decorrentes da convolução. Fazendo-se a mudança de variável $x = t - \tau$ em (2.18), obtém-se

$$(f * g)(t) = \int_t^0 f(t-x)g(x)(-dx) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t),$$

que é a propriedade comutativa. Da mesma forma:

1. $(f * (g_1 + g_2))(t) = (f * g_1)(t) + (f * g_2)(t)$ (propriedade distributiva)
2. $((f * g) * v)(t) = (f * (g * v))(t)$ (propriedade associativa)
3. $(f * 0)(t) = (0 * f)(t) = 0$ (propriedade do elemento neutro)

Teorema 2.14. Se f e g são funções contínuas por partes e de ordem exponencial, então a transformada da convolução $(f * g)(t)$ existe para $s > \gamma$ e é dada por

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] = F(s)G(s) \quad (\text{SILVA, 2005}). \quad (2.19)$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = (f * g)(t). \quad (2.20)$$

Demonstração: Vem da definição que

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] dt = \int_0^{\infty} \int_0^t e^{-st} f(\tau)g(t-\tau) d\tau dt.$$

Essa integração ocorre no plano $t\tau$, representado pela figura 4.

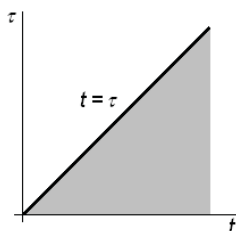


Figura 4 – Região de integração - Plano $t\tau$.

Logo,

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \int_0^{\infty} \int_0^t e^{-st} f(\tau)g(t-\tau) d\tau dt = \int_0^{\infty} f(\tau) \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} g(t-\tau) dt d\tau.$$

Fazendo a mudança de variável $u = t - \tau$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(f * g)(t)] &= \int_0^{\infty} f(\tau) \int_0^{\infty} e^{-s(u+\tau)} g(u) du d\tau = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-su} g(u) du = \\ &= \mathcal{L}[f(t)] \mathcal{L}[g(t)] = F(s)G(s) \quad (\text{SILVA, 2005}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.9. Algumas funções especiais

As funções que seguem contribuem para que a Transformada de Laplace seja a mais importante ferramenta para o tratamento de problemas físicos.

2.9.1. A função degrau unitário

Em problemas físicos é muito comum encontrar funções que representem dualidades, como a presença ou a ausência de uma força motriz, elétrica ou mecânica. A função definida a seguir, ajuda a descrever matematicamente essa situação (figura 5).

Definição 2.6. Define-se a função degrau unitário, também chamada de função unitária de Heaviside ou função escalão unitário, por

$$u(t-\alpha) = \begin{cases} 0 & t < \alpha \\ 1 & t \geq \alpha \end{cases}, \alpha \geq 0. \quad (2.21)$$

Observação: Também é comum usar as notações $u_\alpha(t)$ e $H_\alpha(t)$.

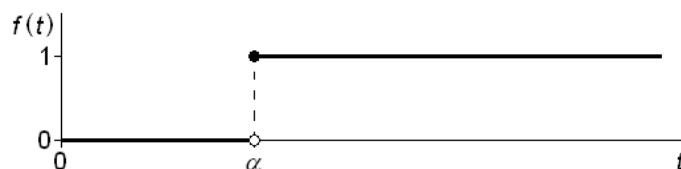


Figura 5 – Função degrau unitário.

Da mesma forma, se f é uma função definida para $t \geq 0$, então

$$u(t-\alpha)f(t) = u_\alpha(t)f(t) = \begin{cases} 0 & t < \alpha \\ f(t) & t \geq \alpha \end{cases}, \quad (2.22)$$

conforme ilustra a figura 6.

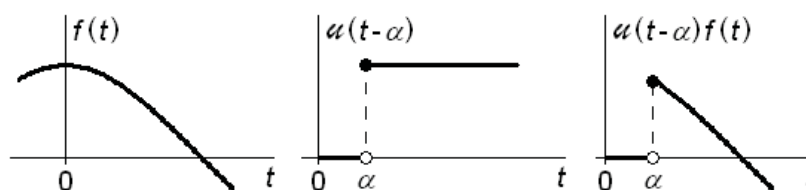


Figura 6 – $u(t-\alpha)f(t)$ onde $f(t) = \cos(t)$.

A translação de uma função f , definida para $t \geq 0$, em α unidades para a direita, também pode ser obtida com o auxílio da função degrau unitário, basta tomar

$$g(t) = u(t-\alpha)f(t-\alpha) = u_\alpha(t)f(t-\alpha) = \begin{cases} 0 & t < \alpha \\ f(t-\alpha) & t \geq \alpha \end{cases}, \quad (2.23)$$

procedimento semelhante ao apresentado em 2.8.2 e ilustrado pela figura 2. Por esse motivo, é comum encontrar na literatura o Teorema 2.6 redigido como segue.

Teorema 2.15 (segunda versão do Teorema 2.6). Se a Transformada de Laplace $F(s)$ existe para todo $s > \alpha \geq 0$ e se β é uma constante real positiva, então

$$\mathcal{L}[u(t-\beta)f(t-\beta)] = e^{-\beta s}F(s). \quad (2.24)$$

Como esse resultado já foi apresentado, o Teorema 2.15 não será demonstrado.

Observação: Decorre diretamente da definição em (2.2) que

$$\mathcal{L}[u_\alpha(t)] = \int_0^\infty e^{-st} u_\alpha(t) dt = \int_0^\alpha e^{-st} 0 dt + \int_\alpha^\infty e^{-st} 1 dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_\alpha^\infty = \frac{e^{-\alpha t}}{s} \quad (\text{SPIEGEL, 1965}).$$

2.9.2. O delta de Dirac

Circuitos elétricos ou sistemas mecânicos estão sujeitos a ação de forças impulsivas, ou seja, forças que agem em um curto espaço de tempo e possuem grandes amplitudes.

A função $\delta_\varepsilon(t - \alpha)$ descrita por

$$\delta_\varepsilon(t - \alpha) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon) & \alpha - \varepsilon < t < \alpha + \varepsilon \\ 0 & t \leq \alpha - \varepsilon \text{ ou } t \geq \alpha + \varepsilon \end{cases} \quad (2.25)$$

pode servir de modelo matemático para tais forças, ilustradas pela figura 7.

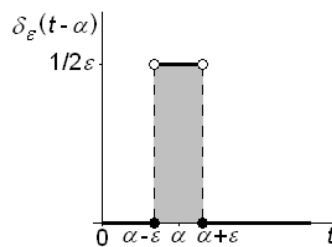


Figura 7 – Gráfico de $\delta_\varepsilon(t - \alpha)$.

Adicionalmente, observa-se que

$$\int_0^\infty \delta_\varepsilon(t - \alpha) dt = 1, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (2.26)$$

Essa idéia levou alguns engenheiros e físicos a pensarem uma “função” limite denotada por $\delta(t - \alpha)$, que fosse aproximada por $\delta_\varepsilon(t - \alpha)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Definição 2.7. Define-se o delta de Dirac como

$$\delta(t - \alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t - \alpha). \quad (2.27)$$

Não existe aplicação que satisfaça as duas propriedades que caracterizam o delta de Dirac, $\delta(t - \alpha) = 0$ se $t \neq \alpha$ e $\int_0^{\infty} \delta(t - \alpha) dt = 1$ se $t = \alpha$, logo ele não é uma função.

Uma propriedade adicional do delta de Dirac é que para qualquer função contínua $g(t)$ e para qualquer $\alpha \geq 0$ vale

$$\int_0^{\infty} \delta(t - \alpha) g(t) dt = g(\alpha). \quad (2.28)$$

Observação: A integral de (2.28), é por vezes, chamada de *propriedade da filtragem da "função" delta*. O $\delta(t - \alpha)$ atua como um filtro, selecionando entre todos os valores possíveis o seu valor no ponto $t = \alpha$ (BUTKOV, 1978). Assim,

$$\langle \delta(t - \alpha), \varphi(t) \rangle = \varphi(\alpha).$$

Em particular

$$\langle \delta(t - 0), \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle = \varphi(0), \varphi \in C^{\infty}(0, \infty).$$

Dessa forma

$$\mathcal{L}[\delta(t - \alpha)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t - \alpha) dt = e^{-st} \Big|_{t=\alpha} = e^{-\alpha s}.$$

Particularmente

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1.$$

2.9.3. A função gama

Muitas funções importantes no domínio das ciências aplicadas são definidas através de integrais impróprias. A função gama é um dos exemplos mais importantes.

Definição 2.8. Se $n > 0$, define-se a função gama por

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-u} du. \quad (2.29)$$

Seguem algumas propriedades da função gama.

$$1. \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad n > 0$$

Assim como $\Gamma(1) = 1$, tem-se $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2!$, $\Gamma(4) = 3!$ e, de um modo mais geral, $\Gamma(n+1) = n!$, se n é inteiro positivo. Por essa razão a função é algumas vezes chamada função fatorial (SPIEGEL, 1965).

$$2. \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$3. \quad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\text{sen}(p\pi)}, \quad 0 < p < 1$$

$$4. \quad \Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

Aqui \sim significa “aproximadamente igual a para n grande” (SPIEGEL, 1965).

$$5. \quad \mathcal{L}(t^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, \text{ se } n > -1, s > 0.$$

Demonstração:

$$\mathcal{L}(t^n) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt.$$

Fazendo-se $st = u$, supondo $s > 0$, obtém-se

$$\mathcal{L}(t^n) = \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^n du = \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1), \quad n > -1, n \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Corolário:

$$\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0.$$

Demonstração: Vem da propriedade 6, que

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

Para $n = -\frac{1}{2}$ vem

$$\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}.$$

Usando-se a propriedade 2, obtém-se

$$\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}. \quad \blacksquare$$

Observação: A função $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ não satisfaz as condições descritas em 2.4 (Condições de Dirichlet), porém a sua transformada existe.

Suponha-se que $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ não é limitado, então existe $\mathcal{L}[f(t)]$, se:

- i) $f(t)$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $a \leq t \leq b$, onde $a > 0$;
- ii) $\lim_{t \rightarrow 0} t^n f(t) = 0$, para alguma constante n , tal que $0 < n < 1$;
- iii) $f(t)$ é de ordem exponencial γ para $t > t_0$, $t_0 > 0$.

Continuar-se-á elencando algumas funções especiais adicionais, a título de completamento da tabela de Transformadas de Laplace.

2.9.4. A função beta

Definição 2.9. Define-se a função beta por

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx, \quad (2.30)$$

que é convergente para $m > 0$ e $n > 0$.

A função beta é uma função estreitamente relacionada com a função gama. A equação que estabelece as relações entre as funções beta e gama (SPIEGEL e WREDE, 2002) é

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}. \quad (2.31)$$

Demonstração: Considere-se

$$f(t) = \int_0^t \underbrace{x^{m-1}}_{g(x)} \underbrace{(t-x)^{n-1}}_{h(t-x)} dx = t^{m-1} * t^{n-1} = (g * h)(t),$$

onde $g(t) = t^{m-1}$ e $h(t) = t^{n-1}$.

Então, pelo teorema da convolução, temos

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}(t^{m-1})\mathcal{L}(t^{n-1}).$$

Pela propriedade 6 em 2.9.3, vem que

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\Gamma(m)}{s^m} \frac{\Gamma(n)}{s^n} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{s^{m+n}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{s^{m+n}}\right] = \Gamma(m)\Gamma(n)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{m+n}}\right) = \\ &= \Gamma(m)\Gamma(n)\frac{t^{m+n-1}}{\Gamma(m+n)} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}t^{m+n-1}. \end{aligned}$$

Fazendo $t = 1$, obtém-se o resultado requerido

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx. \quad \blacksquare$$

2.9.5. Funções de Bessel

As funções de Bessel são as soluções canônicas da equação

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - n^2)y(t) = 0. \quad (2.32)$$

Tais soluções podem ser obtidas por meio da aplicação do método de Frobenius⁶, ao se substituir uma série da forma

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{m+\gamma}, \quad (c_0 \neq 0),$$

com coeficientes indeterminados e suas derivadas, na equação diferencial (2.32) (KREYSZIG, 2006).

Definição 2.10. Define-se a função de Bessel de ordem n por

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left[1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right]. \quad (2.33)$$

⁶ O método de Frobenius é um procedimento para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis (KREYSZIG, 2006).

Na sequência, seguem algumas propriedades importantes da função de Bessel (SPIEGEL, 1965).

1. $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$, se n é inteiro positivo
2. $J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t)$
3. $\frac{d}{dt} [t^n J_n(t)] = t^n J_{n-1}(t)$; se $n = 0$, tem-se $J_0'(t) = -J_1(t)$
4. $e^{\frac{1}{2}t\left(u - \frac{1}{u}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) u^n$.

É conveniente definir $J_n(it) = i^{-n} I_n(t)$, onde $I_n(t)$ é chamada de função de Bessel modificada, de ordem n (SPIEGEL, 1965).

2.9.6. A função erro

A função erro foi criada para poder calcular a integral da curva de distribuição normal. Ela também é chamada de função erro de Gauss.

Definição 2.11. Define-se a função erro por

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du. \quad (2.34)$$

2.9.7. A função erro complementar

A função erro complementar está definida a partir da função erro.

Definição 2.12. Define-se a função erro complementar por

$$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du. \quad (2.35)$$

Sabendo-se que $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, obtém-se

$$\operatorname{erfc}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (2.36)$$

2.9.8. A integral exponencial

Definição 2.13. Define-se a integral exponencial por

$$\text{Ei}(t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du. \quad (2.37)$$

2.9.9. As integrais seno e cosseno

Definição 2.14. Definem-se as integrais seno e cosseno, respectivamente, por

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\text{sen}(u)}{u} du \quad (2.38)$$

$$\text{Ci}(t) = \int_t^{\infty} \frac{\text{cos}(u)}{u} du. \quad (2.39)$$

2.9.10. As integrais seno e cosseno de Fresnel

Definição 2.15. Definem-se as integrais seno e cosseno de Fresnel, respectivamente, por

$$S(t) = \int_0^t \text{sen}(u^2) du \quad (2.40)$$

$$C(t) = \int_0^t \text{cos}(u^2) du. \quad (2.41)$$

2.9.11. Funções nulas

Definição 2.16. Se $\mathcal{N}(t)$ é uma função de t tal que, para todo $t > 0$

$$\int_0^{\infty} \mathcal{N}(u) du = 0 \quad (2.42)$$

chamamos $\mathcal{N}(t)$ de função nula.

Observação: Basta que a função seja nula a menos de um conjunto finito de pontos. Em outras palavras, uma tal função não precisa ser nula, para todo $t \in [0, +\infty)$, basta apenas que seja nula a partir de um conjunto enumerável de pontos.

Exemplo 2.6: $\mathcal{N}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, +\infty) \setminus \mathbb{N} \\ 1, & t \in \mathbb{N} \end{cases}$.

3. TABELAS DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Existem diversos métodos para determinar Transformadas de Laplace (SPIEGEL, 1965): método direto (uso direto da definição); método das séries (quando f tem expansão em séries de potências); método das equações diferenciais (que envolve encontrar uma equação diferencial satisfeita por f); diferenciação em relação a um parâmetro (usando a regra de Leibniz) e o uso de tabelas (que são decorrentes das propriedades e/ou da utilização da definição).

No capítulo 4 serão apresentadas algumas aplicações do operador de Laplace. Na medida do possível, a determinação das transformadas ocorrerá por conta da utilização de tabelas. Para tanto, buscou-se reunir no presente capítulo um número considerável de funções no domínio do tempo e suas correspondentes Transformadas de Laplace.

A tabela 1 trata de propriedades gerais, registrando, entre outras, aquelas apresentadas na sessão 2.8.

Tabela 1 – Tabela de propriedades gerais de Transformadas de Laplace (SPIEGEL, 1965).

$f(t)$	$F(s)$	
$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$	(3.1)
$\alpha f(\alpha t)$	$F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$	(3.2)
$e^{\alpha t} f(t)$	$F(s - \alpha)$	(3.3)
$u(t - \alpha) = \begin{cases} f(t - \alpha) & t > \alpha \\ 0 & t < \alpha \end{cases}$	$e^{-\alpha s} F(s)$	(3.4)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(3.5)
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$	(3.6)
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	(3.7)
$-tf(t)$	$F'(s)$	(3.8)
$t^2 f(t)$	$F''(s)$	(3.9)

$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	(3.10)
$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(s)}{s}$	(3.11)
$\int_0^t \dots \int_0^t f(u) du^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u) du$	$\frac{F(s)}{s^n}$	(3.12)
$\int_0^t f(u) g(t-u) du$	$F(s)G(s)$	(3.13)
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u) du$	(3.14)
$f(t) = f(t+T)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-su} F(u) du$	(3.15)
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{4t}} f(u) du$	$\frac{F(\sqrt{s})}{s}$	(3.16)
$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut}) f(u) du$	$\frac{1}{s} F\left(\frac{1}{s}\right)$	(3.17)
$t^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty u^{-\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{ut}) f(u) du$	$\frac{1}{s^{n+1}} F\left(\frac{1}{s}\right)$	(3.18)
$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{u(t-u)}) f(u) du$	$\frac{F\left(s + \frac{1}{s}\right)}{s^2 + 1}$	(3.19)
$f(t^2)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{s^2}{4u}} F(u) du$	(3.20)
$\int_0^\infty \frac{t^n f(t)}{\Gamma(u+1)} du$	$\frac{F(\ln s)}{s \ln s}$	(3.21)
$\sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$	$\frac{P(s)}{Q(s)}$ $P(s)$ = polinômio de grau menor que n $Q(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots (s - \alpha_n)$ onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são todos distintos.	(3.22)

A tabela 2 registra Transformadas de Laplace especiais. Nesse caso, os resultados apresentados são decorrentes da aplicação direta de (2.2) à $f(t)$.

Tabela 2 – Tabela de Transformadas de Laplace especiais (SPIEGEL, 1965).

$f(t)$	$F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	(3.23)
t	$\frac{1}{s^2}$	(3.24)
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, 0! = 1$	$\frac{1}{s^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$	(3.25)
$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{s^n} \quad n > 0$	(3.26)
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$	(3.27)
$\frac{t^{n-1} e^{\alpha t}}{(n-1)!}, 0! = 1$	$\frac{1}{(s - \alpha)^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$	(3.28)
$\frac{t^{n-1} e^{\alpha t}}{\Gamma(n)}$	$\frac{1}{(s - \alpha)^n} \quad n > 0$	(3.29)
$\delta(t - \alpha)$	$e^{-\alpha s}$	(3.30)
$\frac{\text{sen}(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{s^2 + \alpha^2}$	(3.31)
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$	(3.32)
$\frac{e^{\beta t} \text{sen}(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{(s - \beta)^2 + \alpha^2}$	(3.33)
$e^{\beta t} \cos(\alpha t)$	$\frac{s - \beta}{(s - \beta)^2 + \alpha^2}$	(3.34)
$\frac{\text{senh}(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{s^2 - \alpha^2}$	(3.35)

$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$	(3.36)
$\frac{e^{\beta t} \sinh(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{(s - \beta)^2 - \alpha^2}$	(3.37)
$e^{\beta t} \cosh(\alpha t)$	$\frac{s - \beta}{(s - \beta)^2 - \alpha^2}$	(3.38)
$\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$	$\frac{1}{(s - \alpha)(s - \beta)} \quad \alpha \neq \beta$	(3.39)
$\frac{\beta e^{\beta t} - \alpha e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$	$\frac{s}{(s - \alpha)(s - \beta)} \quad \alpha \neq \beta$	(3.40)
$\frac{\sin(\alpha t) - \alpha t \cos(\alpha t)}{2\alpha^3}$	$\frac{1}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	(3.41)
$\frac{t \sin(\alpha t)}{2\alpha}$	$\frac{s}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	(3.42)
$\frac{\sin(\alpha t) + \alpha t \cos(\alpha t)}{2\alpha}$	$\frac{s^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	(3.43)
$\cos(\alpha t) - \frac{\alpha t}{2} \sin(\alpha t)$	$\frac{s^3}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	(3.44)

A tabela 3, apresentada no Apêndice, resgata adicionalmente um número considerável de Transformadas de Laplace especiais, dando continuidade à tabela 2.

4. APLICAÇÕES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

4.1. Introdução

Uma EDO linear de ordem n é uma equação da forma

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t) \quad (4.1)$$

onde as funções $g(t)$ e $a_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) são funções conhecidas, sendo $a_n(t)$ não identicamente nula e todas as funções dependem unicamente da variável t . A função incógnita desconhecida é $y(t)$. Definir métodos para encontrar $y(t)$ é um problema que vem desafiando a humanidade desde muito tempo. Particularmente, as transformações integrais vêm sendo investigadas desde o século XVIII (vide 2.2). Nessa linha, o método da Transformada de Laplace vem se consolidando como uma importante ferramenta para a resolução de equações diferenciais, em particular aquelas com coeficientes constantes e os correspondentes PVI's. Na presente seção, serão apresentados vários resultados de aplicação da Transformada de Laplace, com especial interesse para aqueles associados a problemas de natureza física. Adicionalmente, serão mostrados dois exemplos de aplicação da Transformada de Laplace na resolução de problemas de valores no contorno.

4.2. Equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes

Uma EDO linear de ordem n com coeficientes constantes é uma equação da forma

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t) \quad (4.2)$$

onde os coeficientes a_i ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) são números reais quaisquer e a_n é um real não nulo. Quando $g(t)$ é uma função identicamente nula, ou seja, $g(t) = 0$ para todo t , a EDO é dita homogênea; caso contrário, ela é dita não homogênea.

4.2.1. EDO linear homogênea de ordem 1

Uma EDO linear homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes é uma restrição da equação (4.1), onde $n = 1$ e a_1 é um número real não nulo. Adicionalmente, $g(t) = 0$ e a_0 é um real qualquer. Logo, pode-se representá-la por meio de

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0, \quad (4.3)$$

com condição inicial

$$y(0) = y_0 = C.$$

Buscar uma função $y(t)$ que satisfaça (4.3), por meio da Transformada de Laplace, é um procedimento bastante simples. Aplicando-se esse operador a ambos os lados da igualdade, obtém-se

$$\mathcal{L}[a_1 y'(t) + a_0 y(t)] = \mathcal{L}[0].$$

Aplicando-se a propriedade da linearidade (2.5), vem

$$a_1 \mathcal{L}[y'(t)] + a_0 \mathcal{L}[y(t)] = 0,$$

que resulta, por meio de (3.5) e (3.23), em

$$a_1 [sY(s) - y(0)] + a_0 Y(s) = 0.$$

Evidenciando-se $Y(s)$, pode-se escrever

$$Y(s) = \frac{a_1 y_0}{a_1 s + a_0}.$$

Como o coeficiente a_1 é diferente de 0, segue que

$$Y(s) = \frac{y_0}{s + \frac{a_0}{a_1}} = y_0 \frac{1}{s - \left(-\frac{a_0}{a_1}\right)}.$$

Aplicando-se a transformada inversa, com uso de (3.27), obtém-se a $y(t)$ procurada

$$y(t) = Ce^{-\frac{a_0}{a_1} t}. \quad (4.4)$$

4.2.2. EDO linear homogênea de ordem 2

Uma EDO homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes é uma restrição da equação (4.1), onde $n = 2$ e a_2 é um número real não nulo. Adicionalmente, $g(t) = 0$ e a_0 e a_1 são números reais quaisquer. Logo, pode-se representá-la por meio de

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0, \quad (4.5)$$

com condições iniciais

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}.$$

Resolver uma equação desse tipo, através da Transformada de Laplace, consiste, inicialmente, da aplicação do operador a ambos os lados da igualdade

$$\mathcal{L}[a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t)] = \mathcal{L}[0].$$

Usando-se a propriedade da linearidade (2.5), obtém-se

$$a_2 \mathcal{L}[y''(t)] + a_1 \mathcal{L}[y'(t)] + a_0 \mathcal{L}[y(t)] = 0.$$

Utilizando-se os resultados de (3.5), (3.6) e (3.23), vem

$$a_2 [s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + a_1 [sY(s) - y(0)] + a_0 Y(s) = 0.$$

Evidenciando-se $Y(s)$, pode-se escrever

$$Y(s) = \frac{a_2 sy_0 + a_2 y_1 + a_1 y_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Como a_2 é diferente de 0, segue que

$$Y(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \frac{a_1}{a_2} y_0}{s^2 + \frac{a_1}{a_2} s + \frac{a_0}{a_2}}. \quad (4.6)$$

Desenvolvendo-se o completamento do quadrado do denominador de (4.6), obtém-se

$$\begin{aligned} s^2 + \frac{a_1}{a_2} s + \frac{a_0}{a_2} &= s^2 + 2s \left(\frac{a_1}{2a_2} \right) + \left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 + \frac{a_0}{a_2} = \\ &= s^2 - 2s \left(-\frac{a_1}{2a_2} \right) + \left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \left[\left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2} \right] = \\ &= s^2 - 2s \left(-\frac{a_1}{2a_2} \right) + \left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2}} \right]^2 = \\ &= \left[s - \left(-\frac{a_1}{2a_2} \right) \right]^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2}} \right]^2. \end{aligned}$$

Pela diferença de dois quadrados, segue que

$$\begin{aligned} s^2 + \frac{a_1}{a_2} s + \frac{a_0}{a_2} &= \left[s - \left(-\frac{a_1}{2a_2} \right) - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2}} \right] \left[s - \left(-\frac{a_1}{2a_2} \right) + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2}} \right] = \\ &= \left[s - \left(-\frac{a_1}{2a_2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}} \right) \right] \left[s - \left(-\frac{a_1}{2a_2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Assim, após ter-se fatorado o denominador de (4.6), obtém-se

$$Y(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \frac{a_1}{a_2}y_0}{\left[s - \left(-\frac{a_1}{2a_2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}} \right) \right] \left[s - \left(-\frac{a_1}{2a_2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}} \right) \right]}.$$

Fazendo-se $\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}$ e $\beta = \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}}$, pode-se reescrever $Y(s)$ como

$$Y(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \frac{a_1}{a_2}y_0}{[s - (\alpha - \beta)][s - (\alpha + \beta)]} \quad (4.7)$$

Agora se faz necessário trabalhar três situações distintas, associadas ao valor do radicando em β , caso 1: $\frac{a_1^2}{4a_2^2} > \frac{a_0}{a_2}$, caso 2: $\frac{a_1^2}{4a_2^2} = \frac{a_0}{a_2}$ e caso 3: $\frac{a_1^2}{4a_2^2} < \frac{a_0}{a_2}$.

Caso 1. Nessa condição, a equação polinomial em s , $s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2} = 0$, tem duas raízes reais e distintas $(\alpha - \beta)$ e $(\alpha + \beta)$. Assim, reescrevendo-se (4.7) convenientemente, vem

$$Y(s) = y_0 \frac{s}{[s - (\alpha - \beta)][s - (\alpha + \beta)]} + \left[y_1 + \frac{a_1}{a_2}y_0 \right] \frac{1}{[s - (\alpha - \beta)][s - (\alpha + \beta)]}.$$

Aplicando-se a transformada inversa, (3.39) e (3.40), obtém-se

$$y(t) = y_0 \frac{e^{(\alpha+\beta)t} - e^{(\alpha-\beta)t}}{(\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)} + \left[y_1 + \frac{a_1}{a_2}y_0 \right] \frac{(\alpha+\beta)e^{(\alpha+\beta)t} - (\alpha-\beta)e^{(\alpha-\beta)t}}{(\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)},$$

que pode ser reescrita como

$$y(t) = \underbrace{\frac{y_1 + y_0 \left[\frac{a_1}{a_2} + (\alpha + \beta) \right]}{2\beta}}_{C_1} e^{(\alpha+\beta)t} + \underbrace{\frac{y_1 + y_0 \left[\frac{a_1}{a_2} + (\alpha - \beta) \right]}{2\beta}}_{C_2} e^{(\alpha-\beta)t}.$$

Quando não vem acompanhado das condições iniciais, a solução de um problema associada ao caso 1 é

$$y(t) = C_1 e^{(\alpha+\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-\beta)t}. \quad (4.8)$$

No entanto, dados os valores de $y(0)$ e $y'(0)$, pode-se obter os valores de C_1 e C_2 diretamente, sem a necessidade de calcular as derivadas de (4.8) e resolver os eventuais sistemas de equações associados.

Caso 2. Nessa condição, $s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2} = 0$ tem duas raízes reais iguais α . Logo, pode-se escrever (4.7) como

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{sy_0 + y_1 + \frac{a_1}{a_2}y_0}{(s-\alpha)^2} = \frac{sy_0 - \alpha y_0 + \alpha y_0 + y_1 + \frac{a_1}{a_2}y_0}{(s-\alpha)^2} = \\ &= \frac{sy_0 - \alpha y_0}{(s-\alpha)^2} + \frac{\alpha y_0 + y_1 + \frac{a_1}{a_2}y_0}{(s-\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Que reescrito de maneira conveniente resulta em

$$Y(s) = y_0 \frac{1}{(s-\alpha)} + \left[y_1 + y_0 \left(\alpha + \frac{a_1}{a_2} \right) \right] \frac{1}{(s-\alpha)^2}.$$

Aplicando-se os resultados apresentados em (3.27) e (3.28), obtém-se a função $y(t)$ procurada

$$y(t) = \underbrace{y_0}_{C_1} e^{\alpha t} + \underbrace{\left[y_1 + y_0 \left(\alpha + \frac{a_1}{a_2} \right) \right]}_{C_2} t e^{\alpha t}.$$

Assim, como no caso anterior, sem as condições iniciais, a solução associada ao problema no caso 2 é dada por

$$y(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}. \quad (4.9)$$

Da mesma forma, dados os valores de $y(0)$ e $y'(0)$, pode-se obter os valores de C_1 e C_2 diretamente.

Caso 3. Nessa condição, $(\alpha - \beta i)$ e $(\alpha + \beta i)$ são as raízes complexas distintas de $s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2} = 0$. Assim, a equação (4.7) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{sy_0 + y_1 + \frac{a_1}{a_2}y_0}{[s - (\alpha - \beta i)][s - (\alpha + \beta i)]} = \frac{sy_0 + y_1 + \frac{a_1}{a_2}y_0}{s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2} = \\ &= \frac{sy_0 + y_1 + \frac{a_1}{a_2}y_0}{(s^2 - \alpha^2) + \beta^2} = \frac{sy_0 - \alpha y_0 + \alpha y_0 + y_1 + \frac{a_1}{a_2}y_0}{(s^2 - \alpha^2) + \beta^2}. \end{aligned}$$

$$Y(s) = \left[y_1 + y_0 \left(\alpha + \frac{a_1}{a_2} \right) \right] \frac{1}{(s^2 - \alpha^2) + \beta^2} + y_0 \frac{s - \alpha}{(s^2 - \alpha^2) + \beta^2}.$$

Aplicando-se a transformada inversa, (3.33) e (3.34), obtém-se

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[y_1 + y_0 \left(\alpha + \frac{a_1}{a_2} \right) \right] \frac{e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t)}{\beta} + y_0 e^{\alpha t} \cos(\beta t) = \\ &= \underbrace{\frac{y_1 + y_0 \left(\alpha + \frac{a_1}{a_2} \right)}{\beta}}_{C_1} \frac{e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t)}{\beta} + \underbrace{y_0}_{C_2} e^{\alpha t} \cos(\beta t). \end{aligned}$$

Como nos casos anteriores, sem as condições iniciais, a solução associada ao problema no caso 3 é dada por

$$y(t) = C_1 e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \cos(\beta t). \quad (4.10)$$

4.2.3. EDO linear homogênea de ordem superior

O procedimento aplicado às EDO de primeira e segunda ordem pode ser estendido para a obtenção de soluções de equações de ordens superiores, ou seja, onde $n \geq 3$. Na sequência será apresentada a resolução de um problema sugerido em Tang (2007), onde se pretende buscar a solução geral da equação diferencial

$$y'''(t) + 8y''(t) + 16 = 0 \quad (4.11)$$

com as condições iniciais

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ y''(0) = y_2 \\ y'''(0) = y_3 \end{cases}.$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace, (3.6) e (3.7), resulta que

$$s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) + 8[s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)] + 16 Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^4 + 8s^2 + 16) = s^3 \underbrace{y_0}_{c_1} + s^2 \underbrace{y_1}_{c_2} + s \left[\underbrace{8y_0 + y_2}_{c_3} \right] + \underbrace{8y_1 + y_3}_{c_4}$$

$$Y(s) = \frac{c_1 s^3 + c_2 s^2 + c_3 s + c_4}{(s^2 + 4)^2} = c_1 \frac{s^3}{(s^2 + 4)^2} + c_2 \frac{s^2}{(s^2 + 4)^2} + c_3 \frac{s}{(s^2 + 4)^2} + c_4 \frac{1}{(s^2 + 4)^2}.$$

Por meio dos resultados (3.41), (3.42), (3.43) e (3.44), que caracterizam a aplicação da transformação inversa, obtém-se

$$y(t) = c_1 [\cos(2t) - t \operatorname{sen}(2t)] + c_2 \left[\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} + \frac{t \cos(2t)}{2} \right] + c_3 \frac{t \operatorname{sen}(2t)}{4} + c_4 \left[\frac{\operatorname{sen}(2t)}{16} - \frac{t \cos(2t)}{8} \right].$$

$$y(t) = \underbrace{c_1}_A \cos(2t) + \underbrace{\left(\frac{c_2}{4} + \frac{c_4}{16} \right)}_B \operatorname{sen}(2t) + \underbrace{\left(\frac{c_2}{2} - \frac{c_4}{8} \right)}_C t \cos(2t) + \underbrace{\left(\frac{c_3}{4} - c_1 \right)}_D t \operatorname{sen}(2t).$$

4.2.4. EDO linear não homogênea de ordem 1

No circuito RL , representado pela figura 8, um indutor de H henrys está disposto em série com um resistor de R ohm e com uma fonte de alimentação senoidal, cuja forma de onda é descrita pela equação $e(t) = V \operatorname{sen}(\omega t)$. Considere-se o problema de obter a corrente para qualquer instante de tempo, $i(t)$, sabendo que a mesma é nula no instante inicial.

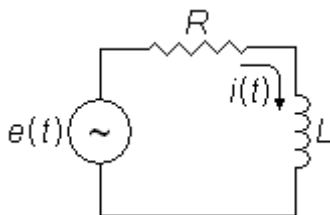


Figura 8 – Circuito RL .

Pela segunda Lei de Kirchhoff (Lei das Tensões ou Lei das Malhas), a soma algébrica da diferença de potencial elétrico (d.d.p.) em um circuito fechado é nula, logo,

$$e(t) = v_R(t) + v_L(t), \quad (4.12)$$

onde $v_R(t)$ é a queda de tensão no resistor R e $v_L(t)$ é a queda de tensão no indutor L .

A queda de tensão no resistor R é diretamente proporcional a corrente que circula pelo mesmo, então

$$v_R(t) = Ri(t). \quad (4.13)$$

Por outro lado, para qualquer instante de tempo, a queda de tensão num indutor é proporcional à razão da variação da corrente com relação ao tempo,

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (4.14)$$

Assim, de (4.13) e (4.14) em (4.12), vem

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = e(t) = V \operatorname{sen}(\alpha t),$$

que pode ser reescrita ainda como

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = \alpha V \left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha t)}{\alpha} \right).$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace termo a termo, (3.5) e (3.31), obtém-se

$$Rl(s) + L[sI(s) + i(0)] = \alpha V \frac{1}{s^2 + \alpha^2}.$$

Como $i(0) = 0$ e $L \neq 0$, segue que

$$\frac{R}{L}I(s) + sI(s) = \frac{\alpha V}{L} \frac{1}{s^2 + \alpha^2}.$$

Conseqüentemente,

$$I(s) = \frac{\alpha V}{L} \frac{1}{(s^2 + \alpha^2)} \frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right)},$$

que, decompondo-se em frações parciais, pode ser reescrita como

$$I(s) = \frac{\alpha V}{L} \left(\frac{A}{s^2 + \alpha^2} + \frac{Bs}{s^2 + \alpha^2} + \frac{C}{s + \frac{R}{L}} \right),$$

de onde se obtém

$$A = \frac{RL}{R^2 + \alpha^2 L^2}, \quad B = -\frac{L^2}{R^2 + \alpha^2 L^2} \quad \text{e} \quad C = \frac{L^2}{R^2 + \alpha^2 L^2}.$$

Portanto,

$$I(s) = \frac{\alpha V}{R^2 + \alpha^2 L^2} \left(R \frac{1}{s^2 + \alpha^2} - L \frac{s}{s^2 + \alpha^2} + L \frac{1}{s - \left(-\frac{R}{L}\right)} \right).$$

Aplicando-se a transformada inversa e os resultados da tabela 2, (3.27), (3.31) e (3.32), obtém-se a função $i(t)$, que representa a corrente do circuito para um instante de tempo qualquer,

$$i(t) = \frac{\alpha V}{R^2 + \alpha^2 L^2} \left\{ \frac{R}{\alpha} \operatorname{sen}(\alpha t) + L \left[e^{-\frac{R}{L}t} - \cos(\alpha t) \right] \right\}. \quad (4.15)$$

A figura 9 permite fazer uma comparação entre a forma de onda obtida a partir da solução (4.15), com uso de software de computação algébrica – Derive (TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED, 2003), e as curvas resultantes da simulação do circuito com o uso de software específico para a área da Engenharia Elétrica – Orcad (CADENCE, 2010). Para tanto, foram usados os seguintes valores: $\alpha = 120\pi$, $V = 10$ V, $R = 10$ Ω e $L = 10$ mH.

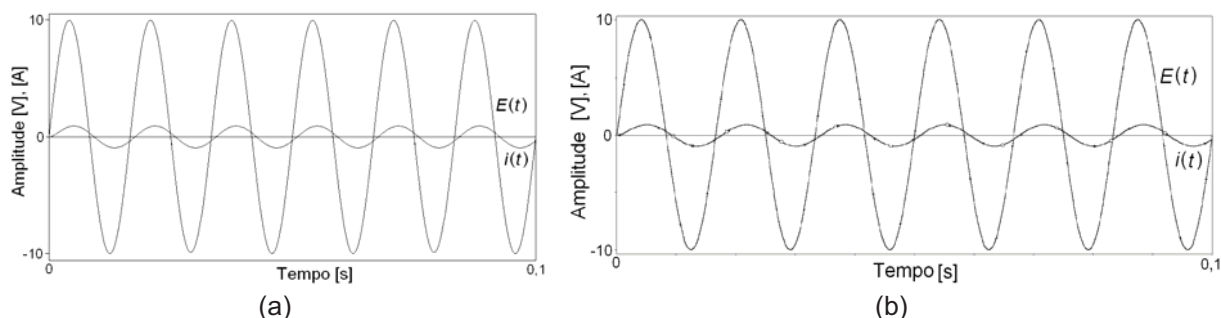


Figura 9 – Formas de onda da fonte de alimentação $e(t)$ e da corrente $i(t)$ do circuito RL , obtidas a partir do Derive (a) e do Orcad (b), para $\alpha = 120\pi$, $V = 10$ V, $R = 10$ Ω e $L = 10$ mH.

4.2.5. EDO linear não homogênea de ordem 2

Considere o circuito RLC da figura 10 e uma bateria que forneça E Volts. No instante inicial a corrente $i(t)$ é nula e o capacitor está descarregado. Adicionalmente, nesse instante a chave S_1 é fechada e a chave S_2 permanece aberta. Num instante $t = \alpha$ a chave S_1 é aberta e a chave S_2 é fechada, caracterizando $E = 0$ V. Considere-se o problema de caracterizar $i(t)$.

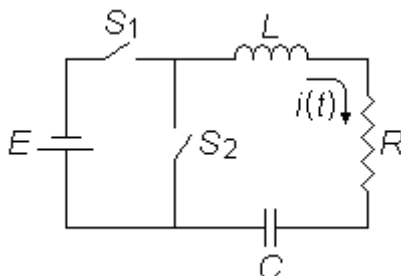


Figura 10 – Circuito RLC .

Nessas condições, a alimentação do circuito pode ser representada por meio de

$$E - E\alpha(t - \alpha), \quad (4.16)$$

em que a função $\alpha(t - \alpha)$ é uma função degrau unitária (função de truncamento à esquerda), conforme pode ser observado na figura 11.

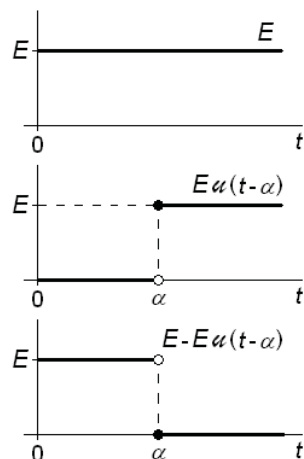


Figura 11 – Representação da alimentação do circuito RLC da figura 10.

Aplicando-se a segunda Lei de Kirchhoff ao circuito, obtém-se

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = E - E u(t - \alpha). \quad (4.17)$$

Sabe-se que

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C} \quad (4.18)$$

e que

$$q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (4.19)$$

Assim, por meio de (4.13), (4.14), (4.18) e (4.19), pode-se reescrever a expressão (4.17) como

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E - E u(t - \alpha).$$

Observadas as propriedades da linearidade no uso da Transformada de Laplace, obtém-se

$$L\mathcal{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right] + R\mathcal{L}[i(t)] + \frac{1}{C}\mathcal{L}\left[\int_0^t i(\tau) d\tau\right] = E\mathcal{L}(1) - E\mathcal{L}[u(t - \alpha)].$$

Assim, de (3.4), (3.5), (3.11) e (3.23), vem que

$$L[sI(s) - i(0)] + RI(s) + \frac{I(s)}{sC} = \frac{E}{s} - \frac{Ee^{-\alpha s}}{s},$$

e uma vez que a corrente inicial é nula, $i(0) = 0$, tem-se que

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{I(s)}{sC} = \frac{E(1 - e^{-\alpha s})}{s}.$$

Como $L \neq 0$, pode-se multiplicar ambos os lados da igualdade por $\frac{s}{L}$, o que resulta em

$$s^2 I(s) + \frac{R}{L} s I(s) + \frac{1}{LC} I(s) = \frac{E}{L} (1 - e^{-\alpha s}),$$

ou ainda,

$$I(s) = \frac{E}{L} \frac{1 - e^{-\alpha s}}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}}.$$

Fatorando-se o denominador, obtém-se

$$I(s) = \frac{E}{L} \frac{1 - e^{-\alpha s}}{\left[s - \left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \right) \right] \left[s - \left(-\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \right) \right]}.$$

Fazendo-se $\gamma = -\frac{R}{2L}$ e $\beta = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$, pode-se reescrevê-la como

$$I(s) = \frac{E}{L} \left\{ \frac{1}{\left[s - (\gamma - \beta) \right] \left[s - (\gamma + \beta) \right]} - e^{-\alpha s} \frac{1}{\left[s - (\gamma - \beta) \right] \left[s - (\gamma + \beta) \right]} \right\}. \quad (4.20)$$

Agora se faz necessário investigar os três diferentes possíveis casos: caso 1, superamortecido⁷, onde $\beta^2 > 0$; caso 2, criticamente amortecido, onde $\beta^2 = 0$ e caso 3, sub-amortecido, onde $\beta^2 < 0$.

Caso 1. Através do método das frações parciais, pode-se reescrever (4.20) como

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{E}{L} \left\{ \frac{-\frac{1}{2\beta}}{s - (\gamma - \beta)} + \frac{\frac{1}{2\beta}}{s - (\gamma + \beta)} - e^{-\alpha s} \left[\frac{-\frac{1}{2\beta}}{s - (\gamma - \beta)} + \frac{\frac{1}{2\beta}}{s - (\gamma + \beta)} \right] \right\} = \\ &= \frac{E}{2\beta L} \left\{ \frac{1}{s - (\gamma + \beta)} - \frac{1}{s - (\gamma - \beta)} - e^{-\alpha s} \left[\frac{1}{s - (\gamma + \beta)} - \frac{1}{s - (\gamma - \beta)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando-se a transformada inversa, (3.4) e (3.27), obtém-se que

$$i(t) = \frac{E}{2\beta L} \left\{ e^{(\gamma + \beta)t} - e^{(\gamma - \beta)t} - \mathcal{U}(t - \alpha) \left[e^{(\gamma + \beta)(t - \alpha)} - e^{(\gamma - \beta)(t - \alpha)} \right] \right\}.$$

⁷ A nomenclatura (superamortecido, criticamente amortecido e sub-amortecido) está baseada em (AKISHINO e FERNANDES, 2006).

Como $e^{(\gamma+\beta)(t-\alpha)} - e^{(\gamma-\beta)(t-\alpha)} = e^{(\gamma+\beta)t} e^{-\alpha(\gamma+\beta)} - e^{(\gamma-\beta)t} e^{-\alpha(\gamma-\beta)}$, segue que

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E}{2\beta L} [e^{(\gamma+\beta)t} - e^{(\gamma-\beta)t}], & t < \alpha \\ \frac{E}{2\beta L} \left\{ e^{(\gamma+\beta)t} [1 - e^{-\alpha(\gamma+\beta)}] - e^{(\gamma-\beta)t} [1 - e^{-\alpha(\gamma-\beta)}] \right\}, & t \geq \alpha \end{cases}. \quad (4.21)$$

Caso 2. Para $\beta = 0$, pode-se escrever a equação (4.20) como

$$I(s) = \frac{E}{L} \frac{1 - e^{-\alpha s}}{(s - \gamma)^2} = \frac{E}{L} \left[\frac{1}{(s - \gamma)^2} - e^{-\alpha s} \frac{1}{(s - \gamma)^2} \right].$$

Usando-se (3.4) e (3.28), obtém-se

$$i(t) = \frac{E}{L} \left\{ t e^{\gamma t} - \mathcal{U}(t - \alpha) [(t - \alpha) e^{\gamma(t-\alpha)}] \right\}.$$

Entretanto, como $(t - \alpha) e^{\gamma(t-\alpha)} = t e^{\gamma t} e^{-\gamma\alpha} - \alpha e^{\gamma t} e^{-\gamma\alpha}$, segue-se que

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E}{L} e^{\gamma t} t, & t < \alpha \\ \frac{E}{L} e^{\gamma t} [(1 - e^{-\gamma\alpha}) t + \alpha e^{-\gamma\alpha}], & t \geq \alpha \end{cases}. \quad (4.22)$$

Caso 3. Para β real, pode-se reescrever (4.20) como

$$I(s) = \frac{E}{L} \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha s}}{[s - (\gamma - i\beta)][s - (\gamma + i\beta)]} \right\} = \frac{E}{L} \frac{1 - e^{-\alpha s}}{(s - \gamma)^2 + \beta^2}$$

$$I(s) = \frac{E}{L} \left[\frac{1}{(s - \gamma)^2 + \beta^2} - e^{-\alpha s} \frac{1}{(s - \gamma)^2 + \beta^2} \right].$$

Usando a transformação inversa, (3.4) e (3.33), obtém-se

$$i(t) = \frac{E}{\beta L} \left\{ e^{\gamma t} \text{sen}(\beta t) - \mathcal{U}(t - \alpha) [e^{\gamma(t-\alpha)} \text{sen}(\beta(t-\alpha))] \right\}.$$

Agora, como

$$\begin{aligned} e^{\gamma(t-\alpha)} \text{sen}[\beta(t-\alpha)] &= e^{\gamma t} e^{-\gamma\alpha} \text{sen}(\beta t - \beta\alpha) = \\ &= e^{\gamma t} e^{-\gamma\alpha} [\text{sen}(\beta t) \cos(\beta\alpha) - \cos(\beta t) \text{sen}(\beta\alpha)], \end{aligned}$$

segue-se que

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E}{\beta L} e^{\gamma t} \text{sen}(\beta t), & t < \alpha \\ \frac{E}{\beta L} e^{\gamma t} \left\{ [1 - e^{-\gamma \alpha} \cos(\beta \alpha)] \text{sen}(\beta t) + e^{-\gamma \alpha} \text{sen}(\beta \alpha) \cos(\beta t) \right\}, & t \geq \alpha \end{cases} \quad (4.23)$$

Na figura 12, obtida com uso do Derive, pode-se observar o comportamento da corrente $i(t)$ do circuito RLC (fig. 10) para cada um dos casos investigados. Para tanto, usaram-se os resultados de (4.21), (4.22) e (4.23) onde $\alpha = 2$ s, $E = 100$ V, $R = 10 \Omega$, $L = 500$ mH e $C = 40$ mF (Caso 1) – 20 mF (Caso 2) – 2 mF (Caso 3). A figura 13 é o resultado da simulação do referido circuito, no Orcad, para as condições aqui especificadas.

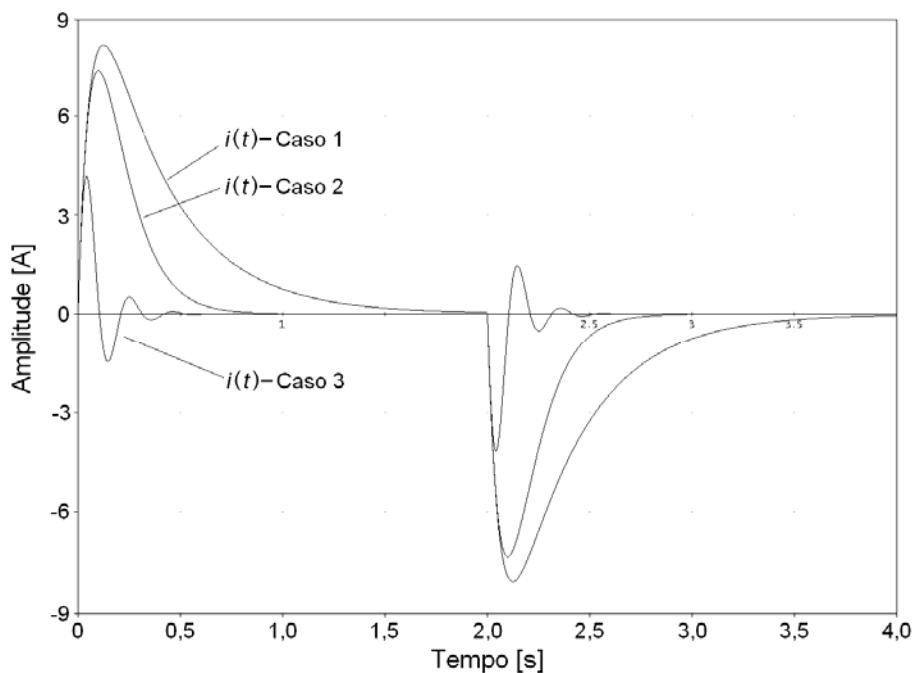


Figura 12 – Formas de onda da corrente $i(t)$ do circuito RLC (fig. 10), obtidas por meio de (4.21), (4.22), (4.23) e do uso do Derive, para $\alpha = 2$ s, $E = 100$ V, $R = 10 \Omega$ e $L = 500$ mH e $C = 40$ mF (Caso 1) – 20 mF (Caso 2) – 2 mF (Caso 3).

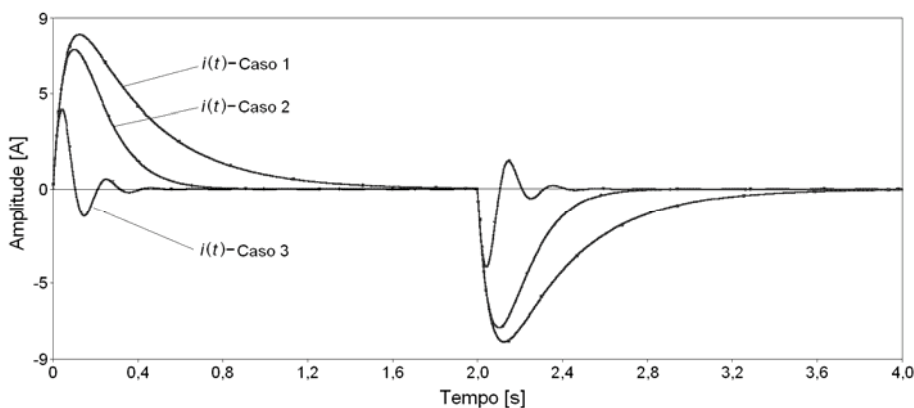


Figura 13 – Formas de onda da corrente $i(t)$ do circuito RLC (fig. 10), obtidas do Orcad, para $\alpha = 2$ s, $E = 100$ V, $R = 10 \Omega$ e $L = 500$ mH e $C = 40$ mF (Caso 1) – 20 mF (Caso 2) – 2 mF (Caso 3).

Observação: Nota-se que a Transformada de Laplace possibilita lidar com dados iniciais fracos, ou seja, descontínuos, como no caso da função de Heaviside, o que traria (algumas) dificuldades com os outros métodos aplicados à resolução de EDO's.

4.2.6. EDO linear não homogênea de ordem superior

Assim como no caso das homogêneas, a Transformada de Laplace pode ser empregada para resolver EDO não homogêneas de ordem superior. O problema que segue é adaptado de Spiegel (1965), onde são apresentados outros resultados associados à aplicação a vigas.

O objetivo consiste em encontrar a deflexão resultante da atuação de uma carga concentrada P_0 , que age verticalmente para baixo no ponto médio de uma viga que tem suas extremidades engastadas em $x = 0$ e $x = \alpha$, conforme a figura 14.

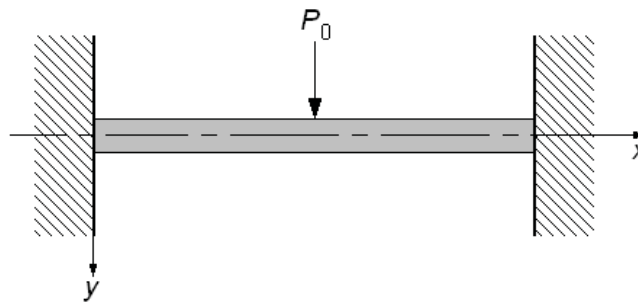


Figura 14 – Viga bi-engastada - adaptada de Spiegel (1965).

De acordo com o sistema de coordenadas mostrado na figura 14, são válidas as equações diferenciais que seguem (SALVADORI e SCHWARTZ apud BUTKOV, 1978):

$$a) \quad \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{1}{EI} m(x) \quad (4.24)$$

em que $y(x)$ é a deflexão da viga no ponto x e $m(x)$ é o momento de flexão.

$$b) \quad \frac{dm(x)}{dx} = t(x), \quad (4.25)$$

onde $t(x)$ é a força de cisalhamento.

$$c) \quad \frac{dt(x)}{dx} = -q(x), \quad (4.26)$$

onde $q(x)$ é a carga por unidade de comprimento no ponto x .

Das relações (4.24), (4.25) e (4.26) segue que

$$EI \frac{d^4 y(x)}{dx^4} = q(x). \quad (4.27)$$

Como a carga está concentrada no ponto médio, podemos representá-la por

$$q(x) = P_0 \delta\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)$$

onde δ é o delta de Dirac, descrito em 2.9.2. Adicionalmente, estando a viga bi-engastada, pode-se considerar as seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = y_2 \\ y'''(0) = y_3 \\ y(\alpha) = 0 \\ y'(\alpha) = 0 \end{cases}.$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace, (3.7) e (3.30), à equação (4.27), obtém-se

$$s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) = \frac{P_0}{EI} e^{-s \frac{\alpha}{2}}.$$

Como $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, segue-se que

$$Y(s) = \frac{y_2}{s^3} + \frac{y_3}{s^4} + \frac{P_0}{EI} \frac{e^{-s \frac{\alpha}{2}}}{s^4}.$$

Aplicando-se a transformada inversa, (3.4) e (3.25), vem que

$$y(x) = \frac{y_2}{2} x^2 + \frac{y_3}{6} x^3 + \frac{P_0}{6EI} \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^3 \mathcal{U}\left(x - \frac{\alpha}{2}\right),$$

ou ainda,

$$y(x) = \begin{cases} \frac{y_2}{2} x^2 + \frac{y_3}{6} x^3, & 0 < x < \frac{\alpha}{2} \\ \frac{y_2}{2} x^2 + \frac{y_3}{6} x^3 + \frac{P_0}{6EI} \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^3, & \frac{\alpha}{2} < x < \alpha \end{cases} \quad (4.28)$$

Sabendo que $y(\alpha) = 0$ e $y'(\alpha) = 0$, pode-se obter os valores de y_2 e y_3 , basta para tanto que se apliquem as condições de contorno em α ao segundo membro de (4.28) e à sua derivada no ponto $x = \alpha$. Do que resulta o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{y_2}{2} \alpha^2 + \frac{y_3}{6} \alpha^3 + \frac{\alpha^3 P_0}{48 EI} = 0 \\ y_2 \alpha + \frac{y_3}{2} \alpha^2 + \frac{\alpha^2 P_0}{8 EI} = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo-se o sistema, obtém-se

$$y_2 = \frac{\alpha P_0}{8 EI} \text{ e } y_3 = -\frac{1 P_0}{2 EI}.$$

Conseqüentemente, a deflexão apresentada em (4.28) pode ser reescrita como

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\alpha P_0}{16 EI} x^2 - \frac{1 P_0}{12 EI} x^3, & 0 < x < \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha P_0}{16 EI} x^2 - \frac{1 P_0}{12 EI} x^3 + \frac{P_0}{6 EI} \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^3, & \frac{\alpha}{2} < x < \alpha \end{cases}.$$

Observação: De maneira geral, a deflexão resultante da atuação de uma carga concentrada P_0 , que age verticalmente para baixo em um ponto x_0 de uma viga que tem suas extremidades engastadas em $x = 0$ e $x = \alpha$, pode ser dada por (SPIEGEL, 1965)

$$y(x) = \begin{cases} \frac{P_0 x^2 (\alpha - x_0)^2}{6 EI \alpha^3} [3x_0 \alpha - (2x_0 + \alpha)x], & 0 < x < x_0 \\ \frac{P_0 x^2 (\alpha - x_0)^2}{6 EI \alpha^3} [3x_0 \alpha - (2x_0 + \alpha)x] + \frac{P_0 (x - x_0)^3}{6 EI}, & x_0 < x < \alpha \end{cases}.$$

4.3. Obtenção de uma função transferência

A função de transferência de um sistema linear invariante no tempo é definida como sendo a razão da Transformada de Laplace da resposta do sistema pela Transformada de Laplace da excitação do sistema, considerando-se nulas todas as condições iniciais (OGATA, 1982).

Considere-se o problema de obter a função de transferência do sistema representado pelo circuito *RLC* da figura 15, com as características adicionais de que $i(0) = 0$ e $v_C(0) = 0$.

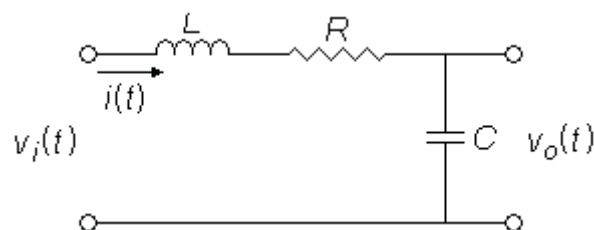


Figura 15 – Circuito *RLC*.

A aplicação da segunda Lei de Kirchhoff ao circuito representado pela figura 15 pode ser traduzida por

$$v_i(t) = v_L(t) + v_R(t) + v_C(t). \quad (4.29)$$

Por meio dos resultados apresentados em (4.13) e (4.14), pode-se reescrever a equação (4.29) como

$$v_i(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_C(t). \quad (4.30)$$

Derivando-se as equações (4.18) e (4.19) em função do tempo, obtém-se

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{dq(t)}{dt} \quad (4.31)$$

e

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t). \quad (4.32)$$

Conseqüentemente, de (4.31) e (4.32) vem

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = i(t). \quad (4.33)$$

Com a aplicação da equação (4.33) em (4.13), pode-se escrever

$$v_R(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt}. \quad (4.34)$$

A equação (4.35) é obtida derivando a equação (4.33) em função do tempo

$$C \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} = \frac{di(t)}{dt}. \quad (4.35)$$

Aplicando-se (4.35) em (4.14), vem

$$v_L(t) = LC \frac{d^2v_C(t)}{dt^2}. \quad (4.36)$$

Por conseqüência, dos resultados obtidos em (4.34) e (4.36), pode-se reescrever a equação (4.30) como

$$v_i(t) = LC \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t). \quad (4.37)$$

Agora, aplicando-se a Transformada de Laplace, (3.5) e (3.6), obtém-se que

$$V_i(s) = LC [s^2V_C(s) - sV_C(0) - v'_C(0)] + RC [sV_C(s) - v'_C(0)] + V_C(s)$$

$$V_i(s) = V_C(s)(s^2LC + sRC + 1) - sLCv_C(0) - LCv'_C(0) + RCv_C(0), \quad (4.38)$$

e uma vez que a corrente inicial é nula, segue de (4.33) que

$$v'_c(0) = \frac{dv_c(t=0)}{dt} = \frac{i(0)}{C} = 0,$$

o que, associado à condição inicial $v_c(0) = 0$, faz com que (4.38) resulte em

$$V_i(s) = V_c(s)(s^2LC + sRC + 1).$$

A tensão sobre o capacitor C , $v_c(t)$, é igual a $v_o(t)$, logo, $V_c(s) = V_o(s)$. Assim,

$$V_i(s) = V_o(s)(s^2LC + sRC + 1).$$

Seja agora $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$, a função de transferência do sistema representado pela figura 15. Portanto,

$$H(s) = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}.$$

Através das raízes da equação polinomial $LCs^2 + RCs + 1 = 0$, torna-se possível a identificação dos pólos do sistema.

4.4. Aplicação à convolução de funções

Considere-se o problema de obter a resposta $g(t)$ do sistema - tensão $v_o(t)$, representado pela figura 16, ao pulso $f(t)$, ilustrado pela figura 17, sabendo-se que a tensão no capacitor é inicialmente nula - $v_c(0) = 0$.

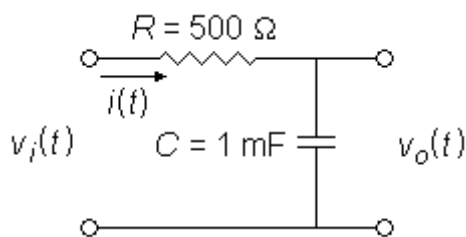


Figura 16 – Circuito RC.

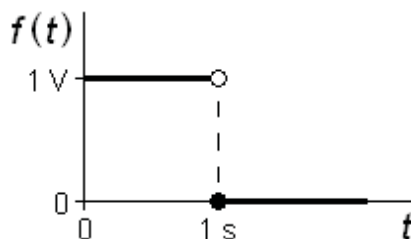


Figura 17 – Pulso $f(t)$.

Inicialmente, deve-se obter a função de transferência $H(s)$ do sistema.

Por meio da aplicação da segunda Lei de Kirchhoff, obtém-se

$$v_i(t) = v_R(t) + v_C(t). \quad (4.39)$$

Com a utilização do resultado (4.34), obtido em 4.3, pode-se reescrever a equação (4.39) como

$$v_i(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t).$$

Aplicando-se a transformação de Laplace e (3.5), vem que

$$V_i(s) = RC[sV_C(s) - v_C(0)] + V_C(s).$$

E, como $v_C(0) = 0$, segue que

$$V_i(s) = RCsV_C(s) + V_C(s).$$

A tensão sobre o capacitor C , $v_C(t)$, é igual a $v_o(t)$, logo, $V_C(s) = V_o(s)$. Assim,

$$V_i(s) = V_o(s)(1 + RCs)$$

Seja a função de transferência dada, no domínio de s , por

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)},$$

logo

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s - \left(-\frac{1}{RC}\right)} \quad (4.40)$$

Como são dados os valores de R e C na figura 16, então a equação (4.40) pode ser reescrita como

$$H(s) = \frac{2}{s + 2}. \quad (4.41)$$

A função pulso $f(t)$ pode ser representada por meio de

$$f(t) = 1 - u(t - 1),$$

onde $u(t - \alpha)$ é uma função degrau unitário (ver procedimento ilustrado em 4.2.5).

A Transformada de Laplace de $f(t)$ é

$$F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}.$$

Agora, como consequência do Teorema 2.4,

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)H(s)] = (f * h)(t) = g(t).$$

Conseqüentemente,

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{2}{s+2}\right)\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2-2e^{-s}}{s(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s+2)} - e^{-s}\frac{2}{s(s+2)}\right].$$

Utilizando-se o método das Frações Parciais,

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2},$$

obtem-se $A = 1$ e $B = -1$, logo

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s-(-2)} - e^{-s}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-(-2)}\right]\right\}.$$

Com o auxílio de (3.23), (3.27) e do Teorema 15, obtém-se

$$g(t) = 1 - e^{-2t} - \mathcal{U}(t-1)[1 - e^{-2(t-1)}],$$

que pode ser representada, para t pertencente ao intervalo $[0, +\infty)$, por

$$g(t) = v_o(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-2t}(e^2 - 1), & t > 1 \end{cases}. \quad (4.42)$$

A figura 18 ilustra a forma de onda da tensão $v_o(t)$, resultante da simulação (com uso do Orcad) do circuito da figura 16, excitado pela função $f(t)$ da figura 17. A figura 19, por outro lado, ilustra o resultado da aplicação de (4.42), com uso do Derive.

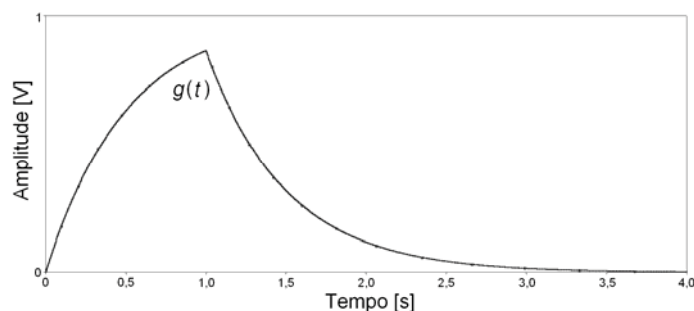


Figura 18 – Formas de onda da tensão $v_o(t)$ do circuito RC (fig. 16), obtidas por meio do Orcad.

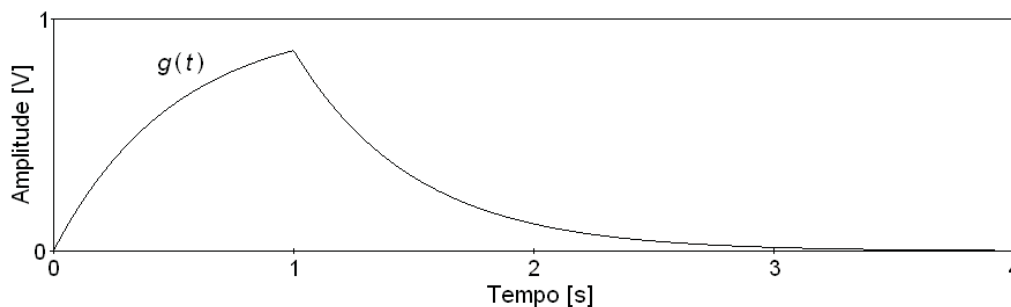


Figura 19 – Formas de onda da tensão $v_o(t)$ do circuito RC (fig. 16), obtidas por meio do Derive.

Como em outros casos já apresentados, as figuras 18 e 19 permitem estabelecer um comparativo entre a simulação do circuito e os resultados da aplicação da Transformada de Laplace. No caso da convolução de funções, torna-se interessante, também, estabelecer um comparativo entre o método exibido e o procedimento gráfico – domínio do tempo.

A convolução de dois sinais no domínio do tempo consiste em girar convenientemente (espelhar em relação ao eixo das ordenadas) um deles e multiplicá-lo ponto a ponto pelo segundo sinal, com a respectiva integração do produto assim obtido.

O primeiro passo é girar a função da figura 17 em relação ao eixo das ordenadas, obtendo-se $f(-\lambda)$, onde λ é uma variável muda - figura 20(a). Em seguida, desloca-se $f(-\lambda)$ em t unidades, obtendo-se $f(t - \lambda)$ - figura 20(b).

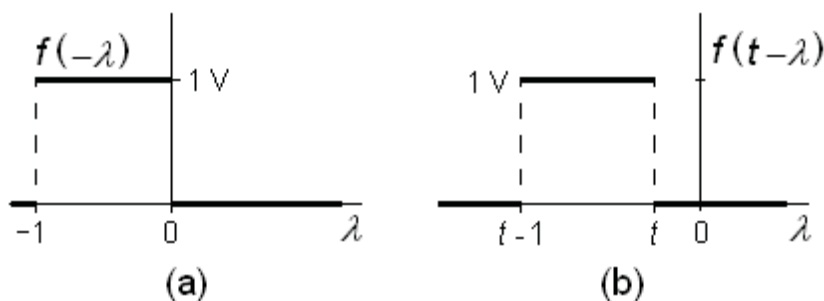


Figura 20 – Funções $f(-\lambda)$ (a) e $f(t - \lambda)$ (b).

Deve-se conhecer a função resposta do sistema $h(t)$, que nesse caso, pode ser obtida por meio da aplicação da transformada inversa em (4.41). Procedimento que resulta em

$$h(t) = 2e^{-2t}, \quad (4.43)$$

com forma de onda ilustrada pela figura 21(a). A função h na variável λ , $h(\lambda)$, não se sobrepõe à função $f(-\lambda)$, conforme se pode observar na figura 21(b), a seguir.

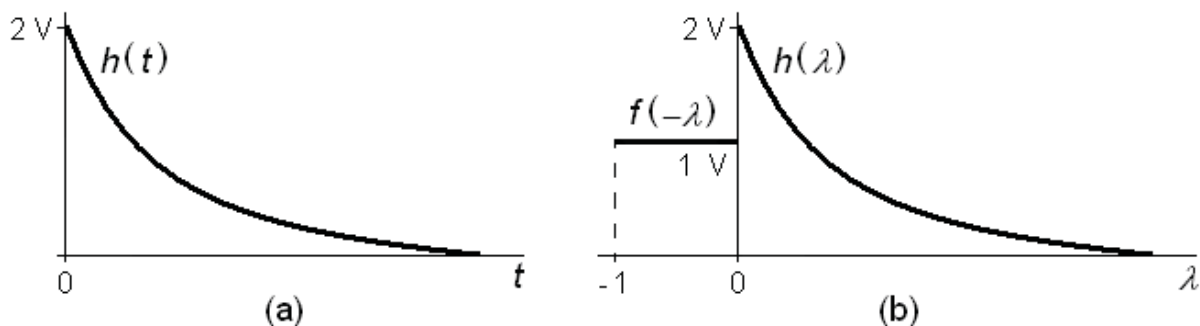


Figura 21 – Função $h(t)$ (a) e funções $h(\lambda)$ e $f(-\lambda)$ (b).

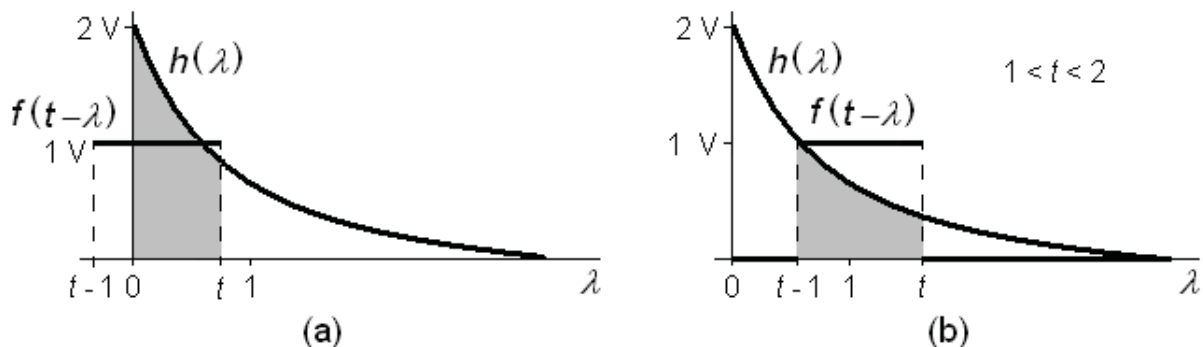


Figura 22 – Funções $h(\lambda)$ e $f(t - \lambda)$ para $0 < t < 1$ (a) e para $t > 1$ (b).

Na figura 22, as regiões sombreadas representam as áreas abaixo da curva do gráfico de $h(\lambda)f(t - \lambda)$, que corresponde ao valor da convolução em t .

Para $0 \leq t \leq 1$, as funções $f(t - \lambda)$ e $h(\lambda)$ se sobrepõem de 0 a t , como está representado na figura 22(a). Consequentemente,

$$g(t) = \int_0^t (1)(2e^{-2\lambda}) d\lambda = 2 \int_0^t e^{-2\lambda} d\lambda = 2 \left(-\frac{e^{-2\lambda}}{2} \Big|_0^t \right) = -e^{-2t} + e^0 = 1 - e^{-2t}.$$

Para $t > 1$, as funções $f(t - \lambda)$ e $h(\lambda)$ se sobrepõem de $t - 1$ a t , como ilustra a figura 22(b). Portanto,

$$g(t) = \int_{t-1}^t (1)(2e^{-2\lambda}) d\lambda = 2 \int_{t-1}^t e^{-2\lambda} d\lambda = 2 \left(-\frac{e^{-2\lambda}}{2} \Big|_{t-1}^t \right) = -e^{-2t} + e^{-2(t-1)} = e^{-2t} (e^2 - 1).$$

Como se pode observar, o resultado é o mesmo apresentado em (4.42). Para sinais contínuos, a vantagem de um procedimento sobre outro repousa, fundamentalmente, sobre o quão complicado pode se tornar o produto das transformadas $F(s)H(s)$.

4.5. EDO lineares simultâneas

A Transformada de Laplace também pode ser usada para resolver duas ou mais equações diferenciais simultâneas. Na sequência será exibido um exemplo apresentado em Spiegel (1965).

Considere-se o problema de determinar as correntes nos vários ramos do circuito da figura 23, a seguir, dado que as mesmas são inicialmente nulas.

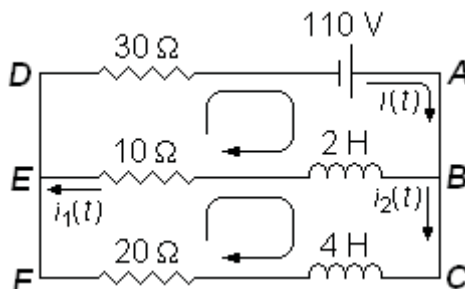


Figura 23 – Malha elétrica - adaptada de Spiegel (1965).

A segunda lei de Kirchhoff afirma que a soma das quedas de tensão ao longo de um laço fechado é zero. Percorrendo os laços no sentido horário, serão consideradas positivas as quedas de tensão que estiverem nesse sentido. Uma elevação de tensão será considerada como a negativa de uma queda de tensão.

Seja $i(t)$ a corrente elétrica em $EDAB$. Essa corrente se divide, no entroncamento B , em $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Pela primeira lei de Kirchhoff, $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.

Aplicando-se a segunda lei aos laços $BCFEB$ e $ABEDA$, considerando-se os resultados de (4.13) e (4.14), obtêm-se, respectivamente, as equações

$$4 \frac{di_2(t)}{dt} + 20i_2(t) - 10i_1(t) - 2 \frac{di_1(t)}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad (4.44)$$

$$2 \frac{di_1(t)}{dt} + 10i_1(t) + 30[i_1(t) + i_2(t)] - 110 = 0. \quad (4.45)$$

Manipulando-se (4.44) e (4.45), obtêm-se o sistema de equações

$$\begin{cases} 5i_1(t) + \frac{di_1(t)}{dt} - 10i_2(t) - 2 \frac{di_2(t)}{dt} = 0 \\ 20i_1(t) + \frac{di_1(t)}{dt} + 15i_2(t) = 55 \end{cases}. \quad (4.46)$$

sujeitas às condições $i_1(0) = i_2(0) = 0$.

Tomando-se a Transformada de Laplace do sistema (4.46), vem

$$5I_1(s) + [sI_1(s) - i_1(0)] - 10I_2(s) - 2[sI_2(s) - i_2(0)] = 0 \quad \text{e}$$

$$20I_1(s) + [I_1(s) - i_1(0)] + 15I_2(s) = \frac{55}{s}.$$

Ou ainda,

$$(s+5)I_1(s) = 2(s+5)I_2(s) \quad \text{e} \quad (4.47)$$

$$(s+20)I_1(s) + 15I_2(s) = \frac{55}{s}. \quad (4.48)$$

De (4.47) vem que $I_1(s) = 2I_2(s)$, de modo que a segunda equação conduz a

$$(2s + 55)I_2(s) = \frac{55}{s} \text{ ou } I_2(s) = \frac{55}{s(2s + 55)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s + 55} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s - \left(-\frac{55}{2}\right)}.$$

Invertendo-se – resultados de (3.23) e (3.27), obtém-se

$$i_2(t) = 1 - e^{-\frac{55}{2}t}, \quad (4.49)$$

$$i_1(t) = 2i_2(t) = 2 - 2e^{-\frac{55}{2}t} \text{ e} \quad (4.50)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 3 - 3e^{-\frac{55}{2}t}. \quad (4.51)$$

A figura 24(a) ilustra as formas de onda resultantes da simulação do circuito da figura 23, com uso do Orcad, e a figura 24(b) mostra o resultado da aplicação das equações obtidas por meio da Transformada de Laplace.

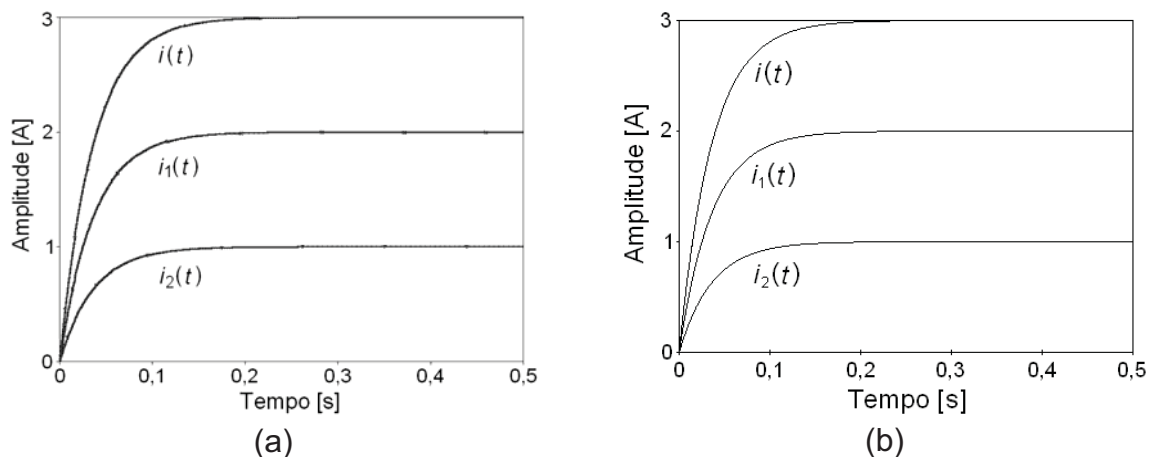


Figura 24 – Formas de onda das correntes do circuito da figura 23, obtidas a partir do Orcad (a) e da aplicação das equações (4.49), (4.50) e (4.51) no Derive (b).

4.6. Equações diferenciais parciais

Muitos são os problemas das ciências físicas que, quando formulados matematicamente, conduzem a equações diferenciais parciais (EDP's) envolvendo uma ou mais funções incógnitas, associadas às condições de contorno. O problema de encontrar soluções das equações que satisfaçam as condições de contorno é chamado problema de valor de contorno (SPIEGEL, 1965). A Transformada de Laplace também pode ser empregada para resolver problemas de valores de contorno.

Os exemplos que seguem são elaborados a partir de Spiegel (1965), onde são apresentados diversos outros resultados de problemas de condução de calor e corda vibrante, além de vibração de vigas e linhas de transmissão. Em alguns

daqueles casos, o procedimento requer o uso de outras técnicas, como a aplicação da Transformada de Fourier, o que ocorre em problemas definidos em toda a reta.

4.6.1. Condução de calor

Considere-se o problema de obter a temperatura $u(x, t)$, para $t > 0$, num sólido limitado pelas faces planas infinitas $x = 0$ e $x = 1$, sabendo que são nulas as temperaturas em $x = 0$ e $x = 1$, para todo t , enquanto $u(x, 0) = 3\text{sen}(2\pi x)$ representa a temperatura inicial em toda parte de $0 < x < 1$ e que $k = 1$ é a constante de difusão do material do sólido.

A equação da condução de calor nesse sólido é dada por

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \quad (4.52)$$

Pelo fato das temperaturas serem nulas em $x = 0$ e $x = 1$, pode-se estabelecer as condições de contorno $u(0, t) = 0$ e $u(1, t) = 0$ onde $0 < x < 1$, $t > 0$. Adicionalmente, $u(x, 0) = 3\text{sen}(2\pi x)$. Assim, temos o problema misto, problema de valor de fronteira e problema de valor inicial;

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0 \\ u(x,0) = 3\text{sen}(2x), 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Seja $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}[U(x,s)]$. Aplicando-se a Transformada de Laplace em (4.52), vem que

$$\underbrace{\mathcal{L}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]}_{(a)} = \underbrace{\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]}_{(b)} \quad (4.53)$$

Resolvendo-se o termo (a) de (4.53) (SPIEGEL, 1965):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-st} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[e^{-st} u(x,t) \Big|_0^\tau + s \int_0^\tau e^{-st} u(x,t) dt \right] = \\ &= s \int_0^\infty e^{-st} u(x,t) dt - u(x,0) = sU(x,s) - u(x,0). \end{aligned}$$

Resolvendo-se o termo (b) de (4.53) (SCHIFF, 1999):

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty e^{-st} u(x,t) dt = \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2}.$$

Assim, dos resultados de (a) e (b) em (4.53), vem

$$sU(x,s) - u(x,0) = \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - sU(x,s) = -3\text{sen}(2\pi x)$$

que também pode ser representada por meio de

$$U''(x,s) - sU(x,s) = -3\text{sen}(2\pi x) \quad (4.54)$$

A solução da EDO linear completa de segunda ordem a coeficientes constantes (4.54), na variável x , para s fixado, obtida pelo Método de Descartes, Método dos Coeficientes a Determinar, é dada por

$$U(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{3}{s + 4\pi^2} \text{sen}(2\pi x). \quad (4.55)$$

Tomando-se a transformação de Laplace das condições de contorno que envolvem t , obtém-se

$$\mathcal{L}[u(0,t)] = U(0,s) = 0 \quad (4.56)$$

e

$$\mathcal{L}[u(1,t)] = U(1,s) = 0. \quad (4.57)$$

De (4.56) em (4.55), vem

$$c_1 + c_2 = 0. \quad (4.58)$$

De (4.57) em (4.55), resulta

$$c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0. \quad (4.59)$$

Resolvendo o sistema formado por (4.58) e (4.59) vem $c_1 = c_2 = 0$. Logo,

$$U(x,s) = \frac{3}{s + 4\pi^2} \text{sen}(2\pi x). \quad (4.60)$$

Por fim, tomando-se a transformada inversa em (4.60), obtém-se a solução $u(x,t)$ procurada,

$$u(x,t) = 3e^{-4\pi^2 t} \text{sen}(2\pi x).$$

4.6.2. Corda Vibrante

Uma corda infinitamente longa, com uma extremidade em $x=0$, está inicialmente em repouso sobre o eixo dos x . A extremidade $x=0$ é submetida a um deslocamento transversal dado por $A_0 \text{sen}(\omega t)$, $t > 0$ (figura 25).

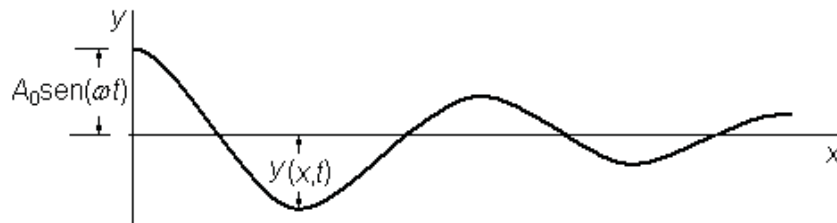


Figura 25 – Corda vibrante infinitamente longa - adaptada de Spiegel (1965).

Considere-se o problema de encontrar o deslocamento $y(x,t)$ de um ponto x qualquer da corda em um tempo t qualquer.

Sendo $y(x,t)$ o deslocamento transversal da corda em um ponto x qualquer de um instante de tempo t qualquer, então o problema de valor no contorno é

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \quad x > 0, t > 0, \quad (4.61)$$

$$y(x,0) = y_t(x,0) = 0, \quad (4.62)$$

$$y(0,t) = A_0 \text{sen}(\omega t), \quad |y(x,t)| < M, \quad (4.63)$$

onde a última condição especifica que o deslocamento é limitado.

Seja $Y(x,s) = \mathcal{L}[y(x,t)]$. Aplicando-se a Transformada de Laplace em (4.61), vem que

$$s^2 Y(x,s) - sy(x,0) - y_t(x,0) = \alpha^2 \frac{\partial^2 Y(x,s)}{\partial x^2}. \quad (4.64)$$

Considerando-se as condições de contorno de (4.62), pode-se reescrever (4.64) como

$$s^2 Y(x,s) = \alpha^2 \frac{\partial^2 Y(x,s)}{\partial x^2},$$

ou

$$\frac{\partial^2 Y(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s^2}{\alpha^2} Y(x,s) = 0,$$

ou ainda,

$$Y''(x,s) - \frac{s^2}{\alpha^2} Y(x,s) = 0. \quad (4.65)$$

Tomando-se a Transformada de Laplace da condição de contorno que envolve t , (4.63), obtém-se

$$Y(0,t) = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2}; \quad (4.66)$$

adicionalmente, $Y(x,s)$ é limitado.

A solução geral da EDO linear homogênea de 2ª ordem a coeficientes constantes (4.65), na variável x , para s fixado, que pode ser obtida a partir do caso 1 de 4.2.2, é dada por

$$Y(x,s) = C_1 e^{\frac{s}{\alpha} x} + C_2 e^{-\frac{s}{\alpha} x}.$$

Devido à condição da limitação, deve-se ter $C_1 = 0$. Assim,

$$Y(x,s) = C_2 e^{-\frac{s}{\alpha} x}. \quad (4.67)$$

Segue de (4.66), que $C_2 = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$. Então,

$$Y(x,s) = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2} e^{-\frac{s}{\alpha} x}. \quad (4.68)$$

Por fim, tomando-se a transformada inversa em (4.68), obtém-se a solução $y(x,t)$ procurada,

$$y(x,t) = \begin{cases} A_0 \text{sen} \left[\omega \left(t - \frac{x}{\alpha} \right) \right], & t > \frac{x}{\alpha} \\ 0, & t < \frac{x}{\alpha} \end{cases}.$$

Isso significa que um ponto x da corda permanece em repouso até o tempo $t = \frac{x}{\alpha}$. Daí por diante ele efetua um movimento idêntico ao da extremidade em $x = 0$, mas retardado pela quantidade $\frac{x}{\alpha}$. A constante α é a velocidade com a qual a onda viaja.

5. CONCLUSÃO

A literatura é de fato bastante rica em se tratando do tema Transformada de Laplace, o que torna difícil a inovação em termos de apresentação de resultados. Optou-se por ter-se um contato inicial com o método dentro de uma mesma abordagem munida com algum rigor teórico. Por outro lado, compilaram-se tabelas bastante completas de Transformadas de Laplace, o que, certamente, tornará o trabalho uma boa fonte de consulta. Procurou-se, ainda, executar os exemplos de maneira bastante genérica, usando-se, sempre que possível, recursos de simulação (em particular de engenharia elétrica) e de computação algébrica para a verificação dos resultados obtidos.

O estudo do método aqui realizado é limitado ao conjunto dos números reais. Tal estudo poderia ser entendido ao conjunto dos números complexos com a aplicação de integração de funções a valores complexos, em particular, do Teorema dos Resíduos para o cálculo da Transformada inversa de Laplace.

Segundo se pode constatar em Spiegel (1965), a Transformada de Laplace pode ser usada para resolver algumas equações diferenciais ordinárias com coeficientes variáveis. Uma equação particular para a qual o método se mostra útil é aquela em que seus termos com coeficientes variáveis têm a forma

$$t_m y^n(t),$$

cuja transformada é dada por

$$\mathcal{L}[t_m y^n(t)] = (-1)^m \frac{d^m \mathcal{L}[y^n(t)]}{ds^m}.$$

A literatura mostra também que o operador de Laplace é útil para resolver Equações Íntegro-diferenciais. Adicionalmente, pode ser utilizado em alguns problemas de valores de contorno, onde sua aplicação “quebra” derivadas, ou seja, transforma equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias, que, via de regra, são solúveis com muito menos esforço.

Todavia, toda a investigação que corroborou com a execução deste trabalho, permitiu confirmar que, efetivamente, a grande utilidade da Transformada de Laplace está em resolver EDO's lineares com coeficientes constantes, ou sistemas dessas equações, e seus correspondentes problemas de valor inicial. Certamente, o poder conferido a esse método está associado ao uso de algumas outras entidades, como a função de Heaviside e a “função generalizada” delta de Dirac. Como foi mostrado em diversos exercícios, essas ferramentas são cruciais em problemas em que os dados iniciais têm descontinuidades, representam pequenos impulsos de grande amplitude, ou são funções periódicas mais elaboradas.

REFERÊNCIAS

- AKISHINO, A. S.; FERNANDES, T. S. P. **Manual didático: Introdução a circuitos elétricos**. UFPR. Curitiba. 2006.
- BUTKOV, E. **Física matemática**. Editora Guanabara Dois S. A. Rio de Janeiro. 1978.
- CADENCE. **Orcad capture** (catálogo do fabricante). Disponível em http://www.cadence.com/products/orcad/orcad_capture/index.aspx. Acesso em outubro: 2010.
- DUNHAM, W. **Euler the master of uss all**. Editora The Mathematical Association of America. Washington. 1999.
- FARMELO, G. **The strangest man: the hidden live of Paul Dirac, mystic of the atom**. Editora Basic Books. New York. 2009.
- GILLISPIE, C. C. **Pierre-Simon Laplace, 1749-1827: a life in exact science**. Editora Princeton University Press. 9ª edição. New Jersey. 1997.
- KREYSZIG, E. **Advanced engineering mathematics**. Editora John Wiley & Sons. 9ª edição. Singapura. 2006.
- KREYSZIG, E. **Matemática superior 1**. Editora Livros Técnicos e Científicos. 2ª edição. Rio de Janeiro. 1986.
- MARSDEN, J. E.; HOFFMAN, M. J. **Basic complex analysis**. Editora W. H. Freeman. 3ª edição. New York. 1999.
- NAHIN, P. J. **Oliver Heaviside: the life, work, and times of as electrical genius of the Victorian age**. Editora IEEE Press. New York. 1987.
- OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. Editora Prentice-Hall do Brasil. Rio de Janeiro. 1982.
- SALVADORI, M. G.; SCHWARTZ, R. J. **Equations in engineering problems**. Editora Prentice-Hall. 1954.
- SCHIFF, J. L. **The Laplace transform: theory and applications**. Editora Springer. 1ª edição. New York. 1999.
- SILVA, P. N. **Equações diferenciais ordinárias**. Editora da UFRJ. Rio de Janeiro. 2005.
- SPIEGEL, M. R. **Transformadas de Laplace**. Editora McGraw-Hill. New York. 1965.

SPIEGEL, M. R.; WREDE, R. C. **Theory and problems of advanced calculus**. Editora McGraw-Hill. 2ª edição. New York. 2002.

TANG, K. T. **Mathematical methods for engineers and scientists 2: vector analysis, ordinary differential equations and Laplace Transforms**. Editora Springer. Berlin. 2007.

TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED. **Derive TM 6 – The mathematical assistant for your PC**. 2003.

APÊNDICE

Tabela 3 – Tabela de Transformadas de Laplace adicionais (SPIEGEL, 1965).

$t \cos(\alpha t)$	$\frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	(1)
$\frac{\alpha t \cosh(\alpha t) - \sinh(\alpha t)}{2\alpha^3}$	$\frac{1}{(s^2 - \alpha^2)^2}$	(2)
$\frac{t \sinh(\alpha t)}{2\alpha}$	$\frac{s}{(s^2 - \alpha^2)^2}$	(3)
$\frac{\sinh(\alpha t) + \alpha t \cosh(\alpha t)}{2\alpha}$	$\frac{s^2}{(s^2 - \alpha^2)^2}$	(4)
$\cosh(\alpha t) + \frac{\alpha t}{2} \sinh(\alpha t)$	$\frac{s^3}{(s^2 - \alpha^2)^2}$	(5)
$t \cosh(\alpha t)$	$\frac{s^2 + \alpha^2}{(s^2 - \alpha^2)^2}$	(6)
$\frac{(3 - \alpha^2 t^2) \sin(\alpha t) + 3\alpha t \cos(\alpha t)}{8\alpha^5}$	$\frac{1}{(s^2 + \alpha^2)^3}$	(7)
$\frac{t \sin(\alpha t) - \alpha t^2 \cos(\alpha t)}{8\alpha^3}$	$\frac{s}{(s^2 + \alpha^2)^3}$	(8)
$\frac{(1 + \alpha^2 t^2) \sin(\alpha t) - \alpha t \cos(\alpha t)}{8\alpha^3}$	$\frac{s^2}{(s^2 + \alpha^2)^3}$	(9)
$\frac{3t \sin(\alpha t) + \alpha t^2 \cos(\alpha t)}{8\alpha}$	$\frac{s^3}{(s^2 + \alpha^2)^3}$	(10)
$\frac{(3 - \alpha^2 t^2) \sin(\alpha t) + 5\alpha t \cos(\alpha t)}{8\alpha}$	$\frac{s^4}{(s^2 + \alpha^2)^3}$	(11)

$\frac{(8 - \alpha^2 t^2) \cos(\alpha t) - 7 \alpha t \sin(\alpha t)}{8}$	$\frac{s^5}{(s^2 + \alpha^2)^3}$	(12)
$\frac{t^2 \sin(\alpha t)}{2\alpha}$	$\frac{3s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^3}$	(13)
$\frac{t^2}{2} \cos(\alpha t)$	$\frac{s^3 - 3\alpha^2 s}{(s^2 + \alpha^2)^3}$	(14)
$\frac{t^3}{6} \cos(\alpha t)$	$\frac{s^4 - 6\alpha^2 s^2 + \alpha^4}{(s^2 + \alpha^2)^4}$	(15)
$\frac{t^3 \sin(\alpha t)}{24\alpha}$	$\frac{s^3 - \alpha^2 s}{(s^2 + \alpha^2)^4}$	(16)
$\frac{(3 + \alpha^2 t^2) \sinh(\alpha t) - 3 \alpha t \cosh(\alpha t)}{8\alpha^5}$	$\frac{1}{(s^2 - \alpha^2)^3}$	(17)
$\frac{\alpha t^2 \cosh(\alpha t) - t \sinh(\alpha t)}{8\alpha^3}$	$\frac{s}{(s^2 - \alpha^2)^3}$	(18)
$\frac{\alpha t \cosh(\alpha t) + (\alpha^2 t^2 - 1) \sinh(\alpha t)}{8\alpha^3}$	$\frac{s^2}{(s^2 - \alpha^2)^3}$	(19)
$\frac{3t \sinh(\alpha t) + \alpha t^2 \cosh(\alpha t)}{8\alpha}$	$\frac{s^3}{(s^2 - \alpha^2)^3}$	(20)
$\frac{(3 + \alpha^2 t^2) \sinh(\alpha t) + 5 \alpha t \cosh(\alpha t)}{8\alpha}$	$\frac{s^4}{(s^2 - \alpha^2)^3}$	(21)
$\frac{(8 + \alpha^2 t^2) \cosh(\alpha t) + 7 \alpha t \sinh(\alpha t)}{8}$	$\frac{s^5}{(s^2 - \alpha^2)^3}$	(22)
$\frac{t^2 \sinh(\alpha t)}{2\alpha}$	$\frac{3s^2 + \alpha^2}{(s^2 - \alpha^2)^3}$	(23)

$\frac{t^2}{2} \cosh(\alpha t)$	$\frac{s^3 + 3\alpha^2 s}{(s^2 - \alpha^2)^3}$	(24)
$\frac{t^3}{6} \cosh(\alpha t)$	$\frac{s^4 + 6\alpha^2 s^2 + \alpha^4}{(s^2 - \alpha^2)^4}$	(25)
$\frac{t^3 \sinh(\alpha t)}{24\alpha}$	$\frac{s^3 + \alpha^2 s}{(s^2 - \alpha^2)^4}$	(26)
$\frac{e^{\frac{\alpha t}{2}}}{3\alpha^2} \left(\sqrt{3} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2} \right) - \cos \left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2} \right) + e^{-\frac{3\alpha t}{2}} \right)$	$\frac{1}{s^3 + \alpha^3}$	(27)
$\frac{e^{\frac{\alpha t}{2}}}{3\alpha} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2} \right) + \sqrt{3} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2} \right) - e^{-\frac{3\alpha t}{2}} \right)$	$\frac{s}{s^3 + \alpha^3}$	(28)
$\frac{1}{3} \left(e^{-\alpha t} + 2e^{\frac{\alpha t}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2} \right) \right)$	$\frac{s^2}{s^3 + \alpha^3}$	(29)
$\frac{e^{\frac{\alpha t}{2}}}{3\alpha^2} \left(e^{\frac{3\alpha t}{2}} - \cos \left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2} \right) - \sqrt{3} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2} \right) \right)$	$\frac{1}{s^3 - \alpha^3}$	(30)
$\frac{e^{\frac{\alpha t}{2}}}{3\alpha} \left(\sqrt{3} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2} \right) - \cos \left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2} \right) + e^{\frac{3\alpha t}{2}} \right)$	$\frac{s}{s^3 - \alpha^3}$	(31)
$\frac{1}{3} \left(e^{\alpha t} + 2e^{-\frac{\alpha t}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}\alpha t}{2} \right) \right)$	$\frac{s^2}{s^3 - \alpha^3}$	(32)
$\frac{1}{4\alpha^3} (\operatorname{sen}(\alpha t) \cosh(\alpha t) - \cos(\alpha t) \sinh(\alpha t))$	$\frac{1}{s^4 + 4\alpha^4}$	(33)
$\frac{\operatorname{sen}(\alpha t) \sinh(\alpha t)}{2\alpha^2}$	$\frac{s}{s^4 + 4\alpha^4}$	(34)
$\frac{1}{2\alpha} (\operatorname{sen}(\alpha t) \cosh(\alpha t) + \cos(\alpha t) \sinh(\alpha t))$	$\frac{s^2}{s^4 + 4\alpha^4}$	(35)
$\cos(\alpha t) \cosh(\alpha t)$	$\frac{s^3}{s^4 + 4\alpha^4}$	(36)

$\frac{1}{2\alpha^3}(\sinh(\alpha t) - \sin(\alpha t))$	$\frac{1}{s^4 - \alpha^4}$	(37)
$\frac{1}{2\alpha^2}(\cosh(\alpha t) - \cos(\alpha t))$	$\frac{s}{s^4 - \alpha^4}$	(38)
$\frac{1}{2\alpha}(\sinh(\alpha t) + \sin(\alpha t))$	$\frac{s^2}{s^4 - \alpha^4}$	(39)
$\frac{1}{2}(\cosh(\alpha t) + \cos(\alpha t))$	$\frac{s^3}{s^4 - \alpha^4}$	(40)
$\frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{2(\beta - \alpha)\sqrt{\pi t^3}}$	$\frac{1}{\sqrt{s + \alpha} + \sqrt{s + \beta}}$	(41)
$\frac{\operatorname{erf}\sqrt{\alpha t}}{\sqrt{\alpha}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s + \alpha}}$	(42)
$\frac{e^{\alpha t}\operatorname{erf}\sqrt{\alpha t}}{\sqrt{\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}(s - \alpha)}$	(43)
$e^{\alpha t}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \beta e^{\beta^2 t}\operatorname{erfc}(\beta\sqrt{t})\right)$	$\frac{1}{\sqrt{s - \alpha} + \beta}$	(44)
$J_0(\alpha t)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}}$	(45)
$I_0(\alpha t)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2 - \alpha^2}}$	(46)
$\alpha^n J_n(\alpha t)$	$\frac{(\sqrt{s^2 + \alpha^2} - s)^n}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}} \quad n > -1$	(47)
$\alpha^n I_n(\alpha t)$	$\frac{(s - \sqrt{s^2 - \alpha^2})^n}{\sqrt{s^2 - \alpha^2}} \quad n > -1$	(48)
$J_0(\alpha\sqrt{t(t + 2\beta)})$	$\frac{e^{\beta(s - \sqrt{s^2 - \alpha^2})}}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}}$	(49)

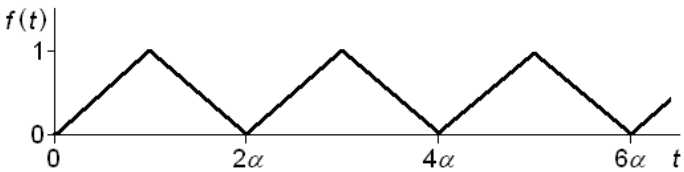
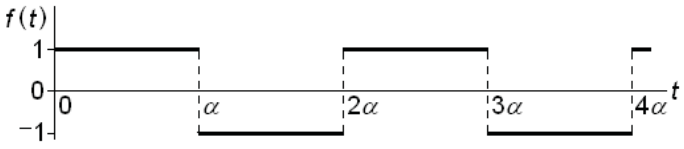

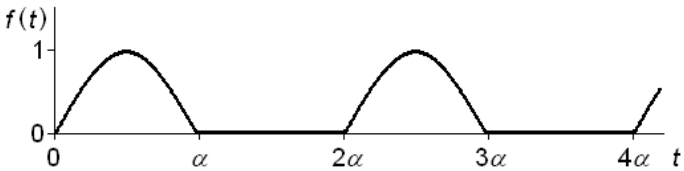
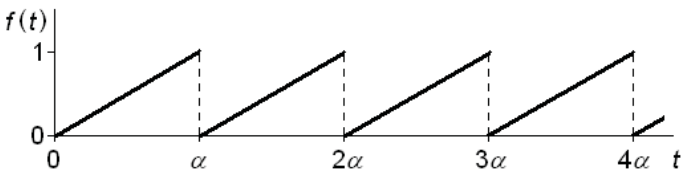
$\begin{cases} J_0(\alpha\sqrt{t^2 - \beta^2}) & t > \beta \\ 0 & t < \beta \end{cases}$	$\frac{e^{-\beta\sqrt{s^2 - \alpha^2}}}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}}$	(50)
$\frac{tJ_1(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{(s^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$	(51)
$tJ_0(\alpha t)$	$\frac{s}{(s^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$	(52)
$J_0(\alpha t) - \alpha t J_1(\alpha t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$	(53)
$\frac{tl_1(\alpha t)}{\alpha}$	$\frac{1}{(s^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$	(54)
$tl_0(\alpha t)$	$\frac{s}{(s^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$	(55)
$l_0(\alpha t) - \alpha tl_1(\alpha t)$	$\frac{s^2}{(s^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$	(56)
$f(t) = n, \quad n \leq t \leq n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{s(e^s - 1)} = \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})}$ ver também (119)	(57)
$f(t) = \sum_{k=1}^{[t]} r^k$ onde $[t]$ = maior inteiro $\leq t$	$\frac{1}{s(e^s - r)} = \frac{e^{-s}}{s(1 - re^{-s})}$	(58)
$f(t) = r^n, \quad n \leq t \leq n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{e^s - 1}{s(e^s - r)} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - re^{-s})}$ ver também (121)	(59)
$\frac{\cos(2\sqrt{\alpha t})}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{-\frac{\alpha}{s}}}{\sqrt{s}}$	(60)

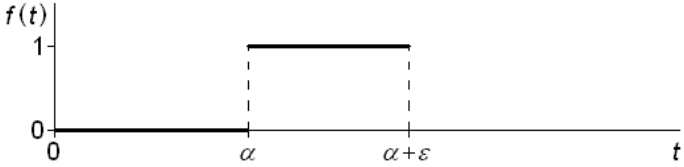
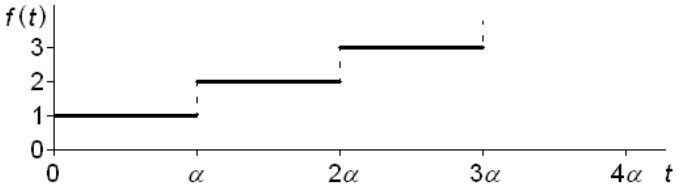
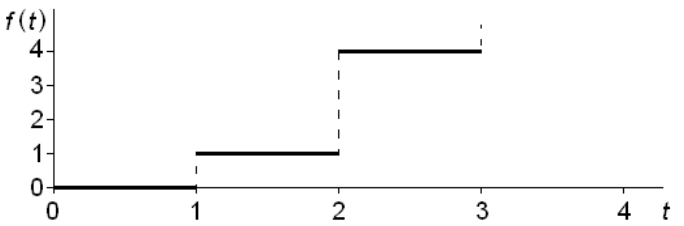
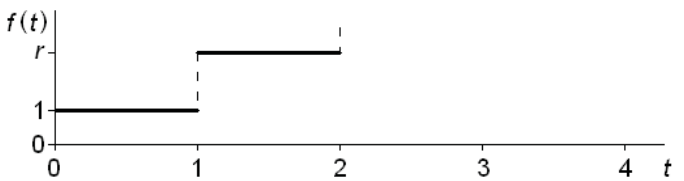
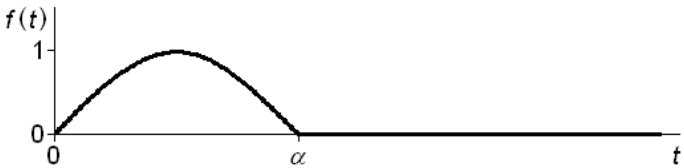
$\frac{\text{sen}(2\sqrt{\alpha t})}{\sqrt{\pi\alpha}}$	$\frac{e^{-\frac{\alpha}{s}}}{s^{\frac{3}{2}}}$	(61)
$\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{\alpha t})$	$\frac{e^{-\frac{\alpha}{s}}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	(62)
$\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	(63)
$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$	$e^{-\alpha\sqrt{s}}$	(64)
$\text{erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1 - e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s}$	(65)
$\text{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{s}$	(66)
$e^{\beta(\beta t + \alpha)} \text{erfc}\left(\beta\sqrt{t} + \frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + \beta)}$	(67)
$\frac{1}{\sqrt{\pi t} \alpha^{2n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-\frac{u^2}{4\alpha^2 t}} J_{2n}(2\sqrt{u}) du$	$\frac{e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{s}}}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	(68)
$\frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{t}$	$\ln\left(\frac{s + \alpha}{s + \beta}\right)$	(69)
$\text{Ci}(\alpha t)$	$\frac{\ln\left(\frac{(s^2 + \alpha^2)}{\alpha^2}\right)}{2s}$	(70)
$\text{Ei}(\alpha t)$	$\frac{\ln\left(\frac{(s + \alpha)}{\alpha}\right)}{s}$	(71)
$\ln(t)$	$-\frac{(\gamma + \ln(s))}{s}$ $\gamma = \text{constante de Euler} = 0,5772156\dots$	(72)

$\frac{2(\cos(\alpha t) - \cos(\beta t))}{t}$	$\ln\left(\frac{s^2 + \alpha^2}{s^2 + \beta^2}\right)$	(73)
$\ln^2(t)$	$\frac{\pi^2}{6} + \frac{(\gamma + \ln(s))^2}{s}$ $\gamma = \text{constante de Euler} = 0,5772156\dots$	(74)
$-(\ln(t + \gamma))$ $\gamma = \text{constante de Euler} = 0,5772156\dots$	$\frac{\ln s}{s}$	(75)
$(\ln(t + \gamma))^2 - \frac{\pi^2}{6}$ $\gamma = \text{constante de Euler} = 0,5772156\dots$	$\frac{\ln^2 s}{s}$	(76)
$t^n \ln(t)$	$\frac{\Gamma'(n+1) - \Gamma(n+1)\ln(s)}{s^{n+1}} \quad n > -1$	(77)
$\frac{\text{sen}(\alpha t)}{t}$	$\text{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{s}\right)$	(78)
$\text{Si}(\alpha t)$	$\frac{\text{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{s}\right)}{s}$	(79)
$\frac{e^{-2\sqrt{\alpha t}}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{\frac{\alpha}{s}}}{\sqrt{s}} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{s}}\right)$	(80)
$\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 t^2}$	$e^{\frac{s^2}{4\alpha^2}} \text{erfc}\left(\frac{s}{2\alpha}\right)$	(81)
$\text{erf}(\alpha t)$	$\frac{e^{\frac{s^2}{4\alpha^2}} \text{erfc}\left(\frac{s}{2\alpha}\right)}{s}$	(82)
$\frac{1}{\sqrt{\pi(t + \alpha)}}$	$\frac{e^{\alpha s} \text{erfc}(\sqrt{\alpha s})}{\sqrt{s}}$	(83)
$\frac{1}{t + \alpha}$	$e^{\alpha s} \text{Ei}(\alpha s)$	(84)

$\frac{1}{t^2 + \alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha} \left(\cos(\alpha s) \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(\alpha s) \right) - \text{sen}(\alpha s) \text{Ci}(\alpha s) \right)$	(85)
$\frac{t}{t^2 + \alpha^2}$	$\text{sen}(\alpha s) \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(\alpha s) \right) + \cos(\alpha s) \text{Ci}(\alpha s)$	(86)
$\text{tg}^{-1} \left(\frac{t}{\alpha} \right)$	$\frac{\cos(\alpha s) \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(\alpha s) \right) - \text{sen}(\alpha s) \text{Ci}(\alpha s)}{s}$	(87)
$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{t^2 + \alpha^2}{\alpha^2} \right)$	$\frac{\text{sen}(\alpha s) \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(\alpha s) \right) + \cos(\alpha s) \text{Ci}(\alpha s)}{s}$	(88)
$\frac{1}{t} \ln \left(\frac{t^2 + \alpha^2}{\alpha^2} \right)$	$\left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(\alpha s) \right)^2 + \text{Ci}^2(\alpha s)$	(89)
$\mathcal{M}(t)$	0	(90)
$\delta(t)$	1	(91)
$\delta(t - \alpha)$	$e^{-\alpha s}$	(92)
$\alpha(t - \alpha)$	$\frac{e^{-\alpha s}}{s}$	(93)
$\frac{x}{\alpha} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{\alpha} \right) \cos \left(\frac{n\pi t}{\alpha} \right)$	$\frac{\text{senh}(sx)}{s \text{senh}(s\alpha)}$	(94)
$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \text{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\alpha} \right) \text{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi t}{2\alpha} \right)$	$\frac{\text{senh}(sx)}{s \cosh(s\alpha)}$	(95)
$\frac{t}{\alpha} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos \left(\frac{n\pi x}{\alpha} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi t}{\alpha} \right)$	$\frac{\cosh(sx)}{s \text{senh}(s\alpha)}$	(96)
$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\alpha} \right) \cos \left(\frac{(2n-1)\pi t}{2\alpha} \right)$	$\frac{\cosh(sx)}{s \cosh(s\alpha)}$	(97)
$\frac{xt}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{\alpha} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi t}{\alpha} \right)$	$\frac{\text{senh}(sx)}{s^2 \text{senh}(s\alpha)}$	(98)

$x + \frac{8\alpha}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\alpha} \right) \cos \left(\frac{(2n-1)\pi t}{2\alpha} \right)$	$\frac{\operatorname{senh}(sx)}{s^2 \cosh(s\alpha)}$	(99)
$\frac{t^2}{2\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left(\frac{n\pi x}{\alpha} \right) \left(1 - \cos \left(\frac{n\pi t}{\alpha} \right) \right)$	$\frac{\cosh(sx)}{s^2 \operatorname{senh}(s\alpha)}$	(100)
$t + \frac{8\alpha}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\alpha} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi t}{2\alpha} \right)$	$\frac{\cosh(sx)}{s^2 \cosh(s\alpha)}$	(101)
$\frac{(t^2 + x^2 - \alpha^2)}{2} - \frac{16\alpha^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\alpha} \right) \cos \left(\frac{(2n-1)\pi t}{2\alpha} \right)$	$\frac{\cosh(sx)}{s^3 \cosh(s\alpha)}$	(102)
$\frac{2\pi}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{\alpha^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{\alpha} \right)$	$\frac{\operatorname{senh}(x\sqrt{s})}{\operatorname{senh}(\alpha\sqrt{s})}$	(103)
$\frac{\pi}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4\alpha^2}} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\alpha} \right)$	$\frac{\cosh(x\sqrt{s})}{\cosh(\alpha\sqrt{s})}$	(104)
$\frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4\alpha^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\alpha} \right)$	$\frac{\operatorname{senh}(x\sqrt{s})}{\sqrt{s} \cosh(\alpha\sqrt{s})}$	(105)
$\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{\alpha^2}} \cos \left(\frac{n\pi x}{\alpha} \right)$	$\frac{\cosh(x\sqrt{s})}{\sqrt{s} \operatorname{senh}(\alpha\sqrt{s})}$	(106)
$\frac{x}{\alpha} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{\alpha^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{\alpha} \right)$	$\frac{\operatorname{senh}(x\sqrt{s})}{s \operatorname{senh}(\alpha\sqrt{s})}$	(107)
$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4\alpha^2}} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\alpha} \right)$	$\frac{\cosh(x\sqrt{s})}{s \cosh(\alpha\sqrt{s})}$	(108)
$\frac{xt}{\alpha} + \frac{2\alpha^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left(1 - e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{\alpha^2}} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{\alpha} \right)$	$\frac{\operatorname{senh}(x\sqrt{s})}{s^2 \operatorname{senh}(\alpha\sqrt{s})}$	(109)
$\frac{(x^2 - \alpha^2)}{2} + t - \frac{16\alpha^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4\alpha^2}} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\alpha} \right)$	$\frac{\cosh(x\sqrt{s})}{s^2 \cosh(\alpha\sqrt{s})}$	(110)

$1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_n^2 t}{\alpha^2}} J_0\left(\frac{\lambda_n x}{\alpha}\right)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ <p>onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ são raízes positivas de $J_0(\lambda)=0$.</p>	$\frac{J_0(ix\sqrt{s})}{sJ_0(i\alpha\sqrt{s})}$	(111)
$\frac{1}{4}(x^2 - \alpha^2) + t + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_n^2 t}{\alpha^2}} J_0\left(\frac{\lambda_n x}{\alpha}\right)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ <p>onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ são raízes positivas de $J_0(\lambda)=0$.</p>	$\frac{J_0(ix\sqrt{s})}{s^2 J_0(i\alpha\sqrt{s})}$	(112)
 <p>Figura 26 – Função onda triangular - adaptada de Spiegel (1965).</p>	$\frac{1}{\alpha s^2} \operatorname{tgh}\left(\frac{\alpha s}{2}\right)$	(113)
 <p>Figura 27 – Função onda quadrada - adaptada de Spiegel (1965).</p>	$\frac{1}{s} \operatorname{tgh}\left(\frac{\alpha s}{2}\right)$	(114)
 <p>Figura 28 – Função onda senoidal retificada - adaptada de Spiegel (1965).</p>	$\frac{\pi \alpha}{\alpha^2 s^2 + \pi^2} \operatorname{cotgh}\left(\frac{\alpha s}{2}\right)$	(115)
 <p>Figura 29 – Função onda senoidal semi-retificada - adaptada de Spiegel (1965).</p>	$\frac{\pi \alpha}{(\alpha^2 s^2 + \pi^2)(1 - e^{-\alpha s})}$	(116)
 <p>Figura 30 – Função onda dente de serra - adaptada de Spiegel (1965).</p>	$\frac{1}{\alpha s^2} - \frac{e^{-\alpha s}}{s(1 - e^{-\alpha s})}$	(117)

 <p>Figura 31 – Função pulso - adaptada de Spiegel (1965).</p>	$\frac{e^{-\alpha s} (1 - e^{-\epsilon s})}{s}$	(118)
 <p>Figura 32 – Função escalonada - adaptada de Spiegel (1965).</p>	$\frac{1}{s(1 - e^{-\alpha s})}$ <p>ver também (57)</p>	(119)
<p>$f(t) = n^2, n \leq t < n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$</p>  <p>Figura 33 – Função escalonada II - adaptada de Spiegel (1965).</p>	$\frac{e^{-s} + e^{-2s}}{s(1 - e^{-s})^2}$	(120)
<p>$f(t) = r^n, n \leq t < n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$</p>  <p>Figura 34 – Função escalonada III - adaptada de Spiegel (1965).</p>	$\frac{1 - e^{-s}}{s(1 - re^{-s})}$ <p>ver também (59)</p>	(121)
<p>$f(t) = \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{\pi}{\alpha} t\right) & 0 \leq t \leq \alpha \\ 0 & t > \alpha \end{cases}$</p>  <p>Figura 35 – Função pulso senoidal - adaptada de Spiegel (1965).</p>	$\frac{\pi \alpha (1 + e^{-\alpha s})}{\alpha^2 s^2 + \pi^2}$	(122)