

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA**

CARLA VALÉRIA DOS SANTOS PACHECO

SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS

FLORIANÓPOLIS - SC

2011

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA**

CARLA VALÉRIA DOS SANTOS PACHECO

SISTEMAS AUTÔNOMOS PLANOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC como requisito para obtenção do título de Especialista em Matemática

Orientador: Professor Dr. Márcio Rodolfo Fernandes

FLORIANÓPOLIS – SC

2011

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura 1</u> : possíveis trajetórias que caracterizam as soluções para $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ nas proximidades de um ponto crítico.....	23
<u>Figura 2</u> : caracterização da origem como ponto crítico <i>nó estável</i>	26
<u>Figura 3</u> : caracterização da origem como ponto crítico <i>nó instável</i>	26
<u>Figura 4</u> : caracterização da origem como ponto crítico <i>de sela</i>	27
<u>Figura 5</u> : caracterização da origem como ponto crítico <i>nó degenerado estável (a)</i> e ponto crítico <i>nó degenerado instável (b)</i>	28
<u>Figura 6</u> : caracterização da origem como ponto crítico <i>nó estável degenerado</i>	29
<u>Figura 7</u> : caracterização da origem como ponto crítico <i>centro</i>	31
<u>Figura 8</u> : caracterização da origem como ponto crítico <i>espiral estável (a)</i> e ponto crítico <i>espiral instável (b)</i>	32
<u>Figura 9</u> : caracterização da origem como ponto crítico do sistema autônomo plano (3) através do conhecimento de τ (o traço da matriz B) e Δ (seu determinante).....	33
<u>Figura 10</u> : caracterização de um ponto crítico do sistema autônomo plano não linear $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, através do conhecimento de τ (o traço da matriz jacobiana A) e Δ (seu determinante) ...	35
<u>Figura 11</u> :	40
<u>Figura 12</u>	44

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	5
2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	6
2.1	DEFINIÇÕES BÁSICAS	6
2.1.1	<i>CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PELO TIPO</i>	<i>8</i>
2.1.2	<i>CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PELA ORDEM</i>	<i>9</i>
2.1.3	<i>CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PELA LINEARIDADE</i>	<i>9</i>
3	SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES - 1ª ORDEM.....	11
3.1	FORMA CANÔNICA E SOLUÇÃO	11
3.1.1	<i>SISTEMAS HOMOGÊNEOS</i>	<i>13</i>
3.1.2	<i>SOLUÇÕES PARA SIST. HOMOGÊNEOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM 2</i>	<i>15</i>
3.1.3	<i>SISTEMAS NÃO-HOMOGÊNEOS</i>	<i>18</i>
4	SISTEMAS AUTÔNOMOS E ESTABILIDADE	21
4.1	SISTEMAS AUTÔNOMOS	21
4.2	ESTABILIDADE.....	22
4.3	SIST. AUTÔNOMOS PLANOS (NÃO-LINEARES)	33
4.4	MODELO PRESA-PREDADOR DE LOTKA-VOLTERRA	36
5	CONCLUSÃO	46
6	REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA.....	47

1 INTRODUÇÃO

Os homens desde os tempos mais remotos tem a necessidade de usar os conceitos e aplicações da matemática para desenvolver a civilização e garantir a sua sobrevivência. A matemática é uma ciência do qual inúmeras ciências dependem para se desenvolver e é claro que o “progresso da humanidade” está intimamente vinculado à produção matemática.

O desenvolvimento do cálculo, sem nenhuma dúvida, foi um dos grandes marcos da humanidade. O cálculo é amplamente utilizado como ferramenta na compreensão de diversas situações físicas. São inúmeros ramos das ciências e tecnologias que se desenvolveram fundamentados quase que exclusivamente no Cálculo. Uma revolução radical ocorreu no mundo quando áreas como biomatemática, economia, robótica e engenharia foram aprofundadas, tendo como base, sobretudo, em conhecimentos da matemática infinitesimal de Newton e Leibniz.

Uma das áreas provenientes do desenvolvimento do Cálculo, que será apresentada neste trabalho, é a de equações diferenciais. Não só será tratado tais equações como também pretende-se caracterizar sistemas de equações diferenciais e a teoria da estabilidade. Embora pareçam duas áreas díspares, o trabalho deixa claro o vínculo existente entre o conhecimento das equações diferenciais (ou melhor, o conhecimento dos sistemas de equações diferenciais) à Álgebra Linear. Esse trabalho mostra a aplicação simultânea de conhecimentos desenvolvidos em momentos e para fins diferentes.

O trabalho tem como foco principal os sistemas de equações diferenciais autônomos planos. Deseja-se interpretar modelos para interação populacional desenvolvidos, a partir de contribuições da Álgebra Linear em sua resolução e por consequência a teoria da estabilidade. O modelo de interação presa-predador é um clássico na biologia, e encontra nas equações diferenciais uma peça fundamental para justificar matematicamente o esperado entre duas populações de espécies distintas que interagem num dado ambiente sendo uma espécie a presa e a outra a predadora.

A idéia deste trabalho é apresentar propostas matemáticas e biológicas que se contemplam numa clássica aplicação da ciência (as equações de Lotka-Volterra), tendo como importante ferramenta a estabilidade de sistemas autônomos planos.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2.1 Definições Básicas

Suponha o seguinte problema:

Uma partícula desloca-se sobre o eixo x .

Em cada instante t , a velocidade da partícula é numericamente o dobro de seu deslocamento. Como determinar uma equação que descreva o deslocamento desta partícula?

Considere $x(t)$ o deslocamento da partícula.

Pelo conhecimento de derivadas, temos que $x'(t)$ a velocidade da partícula.

Observamos, portanto, que $x'(t) = 2x(t)$, que também pode ser apresentada como $x' = 2x$, é uma equação que descreve o movimento proposto.

Note que a função $x(t) = e^{2t}$ é uma solução para equação proposta, pois, $x'(t) = 2e^{2t} = 2x(t)$. A equação $x'(t) = 2x(t)$, entretanto, caracteriza um exemplo de *equação diferencial*.

DEFINIÇÃO 1 De modo geral, uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de *equação diferencial*.

De forma mais clara: *equação diferencial* seria aquela que possui uma função desconhecida e uma ou mais de suas diferenciais em sua constituição.

Pela generalização, é possível obter diversos exemplos de equações que satisfaçam tal característica. Abaixo, alguns exemplos de equações diferenciais.

EXEMPLO 1

As expressões

$$y' = 2x$$

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

caracterizam exemplos de *equações diferenciais*.

- A equação $y' = 2x$ que também poderia ser apresentada como $dy/dx = 2x$ representa uma equação diferencial. Resolver esta equação, significa encontrar uma função $y(x)$, de forma que a derivada de primeira ordem de y em relação à variável x resulte $2x$. Neste caso, a função $y(x) = x^2$ sintetiza uma das soluções para equação proposta.
- A equação $F = md^2x/dt^2$, que caracteriza a Segunda Lei de Newton, também representa um exemplo de equação diferencial. Segundo tal princípio, a força exercida por um corpo num determinado momento equivale ao produto de sua massa com sua aceleração no tal instante considerado. Sendo F a força e m a massa do corpo (constante), observa-se que a aceleração é a derivada de segunda ordem da função x que caracteriza o deslocamento do corpo, em relação a variável t que caracteriza o tempo.
- Resolver a equação $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$, por sua vez, significa identificar duas funções, u e v , possivelmente de múltiplas variáveis, onde a diferencial de u em relação a variável y seja equivalente à multiplicação de -1 pela diferencial da função v em relação a variável x .

Ao observar os exemplos dados acima, levando-se também em consideração a definição tomada, resolver uma equação diferencial significa encontrar uma função f definida num determinado conjunto domínio, que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade. Tal função é chamada de *solução* para a equação proposta.

Uma equação diferencial pode apresentar uma família de soluções. Uma *solução particular de valor inicial* é encontrada quando existe uma outra condição envolvida a qual esta função deve satisfazer. Em geral, deseja-se saber antes de considerar um problema de valor inicial, se uma solução existe e ,quando existe , se é a única solução para o problema.

EXEMPLO 2

Problema: Seja a equação diferencial $y' = x^2$. Descubra a solução para esta equação, levando em consideração que $y(3) = 5$.

Solução: Busca-se $y(x)$, de forma que $y'(x) = x^2$ Daí,

$$y'(x) = x^2 \Rightarrow \int y'(x)dx = \int x^2 dx \Rightarrow y(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + K,$$

onde K é uma constante real. A função $y(x) = (x^3/3) + K$ é dita *solução geral* para a equação diferencial proposta.

Sabemos ainda que $y(3) = 5$. Assim,

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + K \Rightarrow y(3) = \frac{3^3}{3} + K \Rightarrow 5 = 9 + K \Rightarrow K = -4.$$

Portanto, $y(x) = (x^3/3) - 4$ é a função que satisfaz as condições da dada equação diferencial.

Uma *equação separável* é uma equação diferencial que pode ser representada colocada na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

O nome separável se deve ao fato que dy/dx é equivalente a uma expressão que pode ser fatorada (ou seja, separada) como uma função de x multiplicada a uma função de y . Sendo $g(y) \neq 0$, observamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{h(y)}$$

onde, $h(y) = 1/g(y)$. Daí,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{h(y)} \Rightarrow h(y)dy = f(x)dx \Rightarrow \int h(y)dy = \int f(x)dx.$$

Em geral, buscar soluções para uma equação não separável é mais trabalhoso do que encontrar soluções para uma equação separável, justamente pela propriedade verificada.

A maior parte das equações diferenciais existentes, entretanto, não pode ser resolvida encontrando-se uma solução explícita para esta. Muitos métodos foram desenvolvidos para resolver ou aproximar soluções de equações do gênero. Apesar disso, não há uma estratégia que solucione todas as equações de maneira geral. Para resolver a equações devemos separá-las em grupos com determinadas características, pois, existem métodos que se aplicam a um determinado grupo de equações, e que não são aplicáveis a outros grupos de equações.

As equações diferenciais são classificadas de acordo com o *tipo*, a *ordem* e a *linearidade*.

2.1.1 Classificação das equações diferenciais pelo tipo

Uma equação que contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes com relação a uma única variável independente, é chamada de *equação diferencial ordinária*. Assim,

$$\frac{dx}{dt} - 2x = 3$$

$$(u - v)dv + 3vdu = 0$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = t$$

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = 0$$

são exemplos de equações diferenciais ordinárias.

Já uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes com relação a duas ou mais variáveis independentes é chamada de *equação diferencial parcial*. As equações

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$t \frac{\partial y}{\partial t} + x \frac{\partial y}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{5}$$

são exemplos de equações diferenciais parciais.

2.1.2 Classificação das equações diferenciais pela ordem

A *ordem da equação* é a ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial. Assim,

- $(dx/dt) - 2x = 3$ é um exemplo de equação diferencial ordinária de primeira ordem, pois x é derivado em relação a t uma única vez.
- $y''(x) - y'(x) + y(x) = 0$ é um exemplo de equação diferencial ordinária de segunda ordem, pois, em uma das parcelas y é derivado duas vezes e em outra parcela y é derivado uma vez, considerando-se portanto o maior..
- $(d^2y/dt^2) + 5(dy/dt)^3 - 4y = e^t$ é também um exemplo de equação diferencial ordinária de segunda ordem, pois, y é derivado duas vezes (derivada de maior ordem).
- $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{5}$ representa um exemplo de equação diferencial parcial de terceira ordem. Como $\partial^3 v / \partial x^3$ é derivada parcial de terceira ordem, $\partial^2 v / \partial t^2$ é derivada parcial de segunda ordem e $\frac{\partial v}{\partial t}$ é derivada parcial de primeira ordem, segue que a terceira ordem permanece como discriminante desta equação.

2.1.3 Classificação das equações diferenciais pela linearidade

Uma equação diferencial é chamada de *linear* quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

As equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

- A variável dependente y e todas as suas derivadas são elevadas a primeira potência (de primeiro grau);
- Todos os coeficientes são funções de x somente, ou seja dependem apenas da variável x .

As equações

$$y'' - 2y' + y = x/2$$

$$dy + ydx = 0$$

$$t^3 \frac{d^3 x}{dt^3} - t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2t \frac{dx}{dt} + 5x + 1 = e^t + 5$$

são exemplos de equações diferenciais lineares.

Uma equação ordinária que não é linear é dita *não-linear*.

Observado a equação $yy'' - 2y' = t$ podemos determinar que é uma equação ordinária não-linear, pois o coeficiente vinculado a y'' é y , que é um caso não característico aos princípios definidos para linearidade da equação.

Da mesma forma, $(d^3x/dt^3) + x^2 = 1$ é equação diferencial não linear. Ocasionado pelo fato de x estar sendo elevado ao quadrado numa das parcelas, contrariando a definição proposta para linearidade.

3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES - 1ª ORDEM

3.1 Forma canônica e solução

O sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}$$

conforme estas configurações, está apresentado na forma canônica, onde a_{ij} e f_i são funções contínuas em um intervalo comum I.

Um sistema é dito homogêneo quando $f_i(t) = 0$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Caso contrário, este é chamado *não-homogêneo*.

Os sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem são bastante válidos quando apresentados em sua forma canônica, uma vez que, segundo a proposição, qualquer equação diferencial linear de ordem n pode ser apresentada conforme a estrutura de um sistema canônico

PROPOSIÇÃO 1 Seja

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

um exemplo de equação diferencial linear de ordem n . Podemos escrever esta equação, segundo a forma canônica, através de um sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem.

Um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem da forma

$$\begin{aligned}P_{11}(t)x_1' + P_{12}(t)x_2' + \cdots + P_{1n}(t)x_n' &= b_1(t) \\ P_{21}(t)x_1' + P_{22}(t)x_2' + \cdots + P_{2n}(t)x_n' &= b_2(t) \\ \vdots & \\ P_{n1}(t)x_1' + P_{n2}(t)x_2' + \cdots + P_{nn}(t)x_n' &= b_n(t),\end{aligned}$$

onde P_{ij} é um polinômio coerente ao intervalo I, pode em geral, ser apresentado conforme a

estrutura de um sistema de n equações diferenciais lineares na forma canônica.

Aqueles sistemas que não podem ser apresentados conforme as configurações canônicas chamam-se *degenerados*.

Considere as matrizes:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

O sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned}$$

pode ser representado como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

e também podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t). \quad (1)$$

Considere $t_0 \in I$, I um intervalo,

$$\mathbf{X}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

onde γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são constantes. Resolver

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$$

sujeito a $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$ é solucionar um *problema de valor inicial* no intervalo I .

TEOREMA 1 Sejam os elementos das matrizes $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{F}(t)$ funções contínuas em um intervalo I que contenha t_0 . Então existe uma única solução para o problema de valor inicial, acima descrito, no intervalo dado.

3.1.1 Sistemas homogêneos

Matricialmente, pode-se verificar que o sistema

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t),$$

caracterizado formalmente em (1), é homogêneo quando $\mathbf{F}(t)$ é um vetor nulo. Neste caso, portanto,

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}. \quad (2)$$

Em relação a resolução de sistemas lineares homogêneos, a álgebra linear, nos fornece informações bastante válidas. Observe:

TEOREMA 2 Seja $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k$ um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo (2) em um intervalo I . Então, a combinação linear

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \dots + c_k\mathbf{X}_k,$$

onde os $c_i, i = 1, 2, \dots, k$ são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.

DEFINIÇÃO 2 Seja $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k$ um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo (2) em um intervalo I . Dizemos que o conjunto é *linearmente dependente* no intervalo se existem constantes c_1, c_2, \dots, c_k , não simultaneamente nulas, tais que

$$c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \dots + c_k\mathbf{X}_k = \mathbf{0}$$

para todo t no intervalo. Se o conjunto não for linearmente dependente no intervalo, dizemos que é *linearmente independente*.

DEFINIÇÃO 3 Qualquer conjunto $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ de n vetores linearmente independentes do sistema homogêneo (2) em um intervalo I é chamado um *conjunto fundamental de soluções* no intervalo.

TEOREMA 3 Existe um conjunto fundamental de soluções para o sistema homogêneo (2) no intervalo I.

DEFINIÇÃO 4 Seja $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k$ um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo (2) em um intervalo I. Define-se a *solução geral* do sistema no intervalo como

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + \dots + c_k \mathbf{X}_k,$$

onde os $c_i, i = 1, 2, \dots, k$, são constantes arbitrárias.

DEFINIÇÃO 5 Seja \mathbf{A} uma matriz $n \times n$. Diz-se que um número λ é um *autovalor* de \mathbf{A} se existe um vetor solução não-nulo \mathbf{K} do sistema linear

$$\mathbf{A}\mathbf{K} = \lambda\mathbf{K}.$$

O vetor \mathbf{K} é chamado *autovetor* correspondente ao autovalor λ .

TEOREMA 4 $\mathbf{X} = \mathbf{K}e^{\lambda t}$ é solução do sistema de equações diferenciais $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, se e somente se, λ for um autovalor de \mathbf{A} e \mathbf{K} um autovetor correspondente a λ .

Além disso, observa-se:

TEOREMA 5 Seja a matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$. Quando \mathbf{A} possui n autovalores reais distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, então sempre se pode achar um conjunto de n autovetores linearmente independentes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_n$ e

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{X}_2 = \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \mathbf{X}_n = \mathbf{K}_n e^{\lambda_n t}$$

é um conjunto fundamental de soluções de (2) em $(-\infty, \infty)$.

TEOREMA 6 Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, n autovalores reais distintos da matriz de coeficientes \mathbf{A} do sistema (2), e sejam $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_n$ os autovetores correspondentes. Então a *solução geral* de (2) no intervalo $(-\infty, \infty)$ é dada por

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \mathbf{K}_n e^{\lambda_n t},$$

onde $c_i, i = 1, 2, \dots, n$, são constantes arbitrárias.

3.1.2 Soluções para sistemas homogêneos de equações diferenciais lineares de ordem 2

Para aprofundar *estabilidade de sistemas autônomos planos*, nos ateremos à resolução de sistemas do gênero $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, canônico, onde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \text{ e } t \text{ real.}$$

É visto que \mathbf{A} , nestas circunstâncias, possui no máximo dois autovalores.

Conforme as configurações dos autovalores, entretanto, verificaremos a seguir diferenças nas soluções gerais a serem apresentadas para os possíveis sistemas propostos.

CASO 1 - Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores de \mathbf{A} . Considere, neste caso, que ambos os autovalores sejam números reais e diferentes.

Pelo Teorema 5, existem \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 autovetores linearmente independentes, associados a λ_1 e λ_2 respectivamente.

Pelo Teorema 6, dados c_1 e c_2 constantes quaisquer, a solução geral para o sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ proposto é $\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t}$, para qualquer t número real.

CASO 2 - Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores de \mathbf{A} . Considere, neste caso, que ambos os autovalores sejam números reais iguais.

O Teorema 5 garante a existência \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 , autovetores linearmente independentes, associados a λ_1 e λ_2 respectivamente, caso haja a desigualdade destes autovalores.

Nesse caso, entretanto, devemos considerar duas circunstâncias possíveis:

- Dado λ_1 autovalor, existem dois autovetores linearmente independente \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 , associados a λ_1 .
- Dado λ_1 autovalor, existe um único autovetor linearmente independente \mathbf{K} associado a si.

Consideraremos a seguir, portanto, a verificação para solução geral dos dois casos mencionados.

CASO 2.A - Seja λ_1 autovalor real, de modo que, \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 sejam autovetores linearmente independentes associados a λ_1 .

O Teorema 4 garante que $\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t}$ é solução para o sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ proposto.

Pelo mesmo motivo, $\mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}$ também é solução para o sistema.

Como $\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t}$ e $\mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}$ formam um conjunto fundamental, a solução geral para o sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ é dada por $\mathbf{X} = c_1 \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}$, onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer e t é valor real.

CASO 2.B - λ_1 autovalor real, e \mathbf{K} único autovetor associado a λ_1 .

Evidentemente, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{K} e^{\lambda_1 t}$ é solução para o sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

Afirmção 1: $\mathbf{X}_2 = \mathbf{K} t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P} e^{\lambda_1 t}$ também soluciona $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

Justificativa: Como $\mathbf{X}_2 = \mathbf{K} t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P} e^{\lambda_1 t}$, é verdade que $\mathbf{X}_2' = \mathbf{K}(e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 t e^{\lambda_1 t}) + \lambda_1 \mathbf{P} e^{\lambda_1 t}$. Daí,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2' &= \mathbf{A}\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{K}(e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 t e^{\lambda_1 t}) + \lambda_1 \mathbf{P} e^{\lambda_1 t} &= \mathbf{A}(\mathbf{K} t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P} e^{\lambda_1 t}) \\ \mathbf{K} e^{\lambda_1 t} + \mathbf{K} \lambda_1 t e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \mathbf{P} e^{\lambda_1 t} &= \mathbf{A} \mathbf{K} t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{A} \mathbf{P} e^{\lambda_1 t} \\ \mathbf{A} \mathbf{P} e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 \mathbf{P} e^{\lambda_1 t} - \mathbf{K} e^{\lambda_1 t} + \mathbf{A} \mathbf{K} t e^{\lambda_1 t} - \mathbf{K} \lambda_1 t e^{\lambda_1 t} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} \mathbf{P} - \lambda_1 \mathbf{P} - \mathbf{K}) e^{\lambda_1 t} + (\mathbf{A} \mathbf{K} - \lambda_1 \mathbf{K}) t e^{\lambda_1 t} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Como essa equação deve ser válida para qualquer t , devemos verificar:

$$\mathbf{A} \mathbf{K} - \lambda_1 \mathbf{K} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_2) \mathbf{K} = \mathbf{0} \text{ e}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{P} - \lambda_1 \mathbf{P} - \mathbf{K} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{P} - \lambda_1 \mathbf{P} = \mathbf{K} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_2) \mathbf{P} = \mathbf{K}.$$

A equação $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_2) \mathbf{K} = \mathbf{0}$ reafirma que \mathbf{K} deve ser um autovetor de \mathbf{A} associado ao autovalor λ_1 . Desta forma, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{K} e^{\lambda_1 t}$ é novamente verificado como solução de $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. A Afirmção 1, entretanto, será justificada se garantimos que $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_2) \mathbf{P} = \mathbf{K}$. ■

A solução geral para o sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, neste caso, é definida por $\mathbf{X} = c_1 \mathbf{K} e^{\lambda_1 t} + c_2 (\mathbf{K} t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P} e^{\lambda_1 t})$, onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer e t número real. O Teorema 2 garante que \mathbf{X} definida desta forma é uma maneira conveniente para solucionar o sistema.

CASO 3 - Seja λ_1 um autovalor complexo da matriz \mathbf{A} .

Portanto, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, onde α e β são números reais e $i^2 = -1$.

É verificável que λ_2 , conjugado de λ_1 , é outro autovalor de \mathbf{A} (pois, estamos

considerando \mathbf{A} de ordem 2×2). Portanto, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.

Suponha \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 , autovetores de \mathbf{A} , associados respectivamente a λ_1 e λ_2 . É de se esperar também que os elementos em \mathbf{K}_2 sejam conjugados dos elementos complexos em \mathbf{K}_1 . Portanto, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ e $\mathbf{K}_2 = \bar{\mathbf{K}}_1$. Tal comentário embasa o Teorema 7.

TEOREMA 7 Seja \mathbf{A} a matriz de coeficientes, com elementos reais, do sistema homogêneo $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Seja \mathbf{K}_1 um autovetor correspondente ao autovalor complexo $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, com α e β sendo números reais. Então, $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t}$ e $\mathbf{Y}_2 = \bar{\mathbf{K}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}$ são soluções para o sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

Considere

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} = \mathbf{K}_1 e^{(\alpha + \beta i)t} = \mathbf{K}_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} = \mathbf{K}_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \bar{\mathbf{K}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} = \bar{\mathbf{K}}_1 e^{(\alpha - \beta i)t} = \bar{\mathbf{K}}_1 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = \bar{\mathbf{K}}_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t).$$

Note que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{\mathbf{K}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \bar{\mathbf{K}}_1) e^{\alpha t} \cos \beta t - \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \bar{\mathbf{K}}_1) e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \\ \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{\mathbf{K}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}) &= \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \bar{\mathbf{K}}_1) e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \bar{\mathbf{K}}_1) e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t. \end{aligned}$$

Além disso, para qualquer número complexo $z = a + ib$, notamos que

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = a \text{ e } \frac{i}{2}(-z + \bar{z}) = b$$

são números reais. Portanto, os elementos dos vetores coluna

$$\frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \bar{\mathbf{K}}_1) \text{ e } \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \bar{\mathbf{K}}_1)$$

são números reais.

Com base nestes argumentos, o seguinte teorema é proposto:

TEOREMA 8 Seja $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ um autovalor complexo da matriz \mathbf{A} de coeficientes no sistema homogêneo $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Defina

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \bar{\mathbf{K}}_1) \text{ e } \mathbf{B}_2 = \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \bar{\mathbf{K}}_1)$$

onde \mathbf{K}_1 é autovetor de \mathbf{A} associado ao autovalor λ_1 . Então, $\mathbf{X}_1 = (\mathbf{B}_1 \cos \beta t - \mathbf{B}_2 \sin \beta t)e^{\alpha t}$ e $\mathbf{X}_2 = (\mathbf{B}_2 \cos \beta t + \mathbf{B}_1 \sin \beta t)e^{\alpha t}$ são soluções linearmente independentes de $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Além disso, é possível afirmar que $\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2$ é a solução geral do dado sistema, onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer.

Note que, nas circunstâncias acima apresentadas, $\mathbf{B}_1 = \text{Re}(\mathbf{K}_1)$ e $\mathbf{B}_2 = \text{Im}(\mathbf{K}_1)$.

3.1.3 Sistemas não-homogêneos

Considere (1) um sistema não-homogêneo.

O seguinte teorema é bastante esclarecedor na resolução de sistemas do gênero:

TEOREMA 9 Seja $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k$ um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo (2) em um intervalo I e seja \mathbf{X}_p um vetor arbitrário solução do sistema não-homogêneo (1) no mesmo intervalo. Então, $\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + \dots + c_k \mathbf{X}_k + \mathbf{X}_p$ é também uma solução do sistema não-homogêneo no intervalo, para quaisquer constantes reais c_1, c_2, \dots, c_k .

Com base neste teorema, segue:

DEFINIÇÃO 6 Seja \mathbf{X}_p uma solução dada do sistema não-homogêneo (1) em um intervalo I , e denotamos por $\mathbf{X}_c = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + \dots + c_n \mathbf{X}_n$ a solução geral, no mesmo intervalo, do sistema homogêneo (2) correspondente. Define-se a *solução geral* do sistema não-homogêneo no intervalo como $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p$.

EXEMPLO 3

Problema: Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y - 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + y + t + 5.$$

Resolução: Considere inicialmente o sistema homogêneo seguinte:

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + y.$$

Evidentemente, este sistema pode ser representado na forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Considere

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e λ um autovalor de \mathbf{A} . Buscamos resolver a princípio o sistema homogêneo caracterizado.

Como não nos basta apenas a solução trivial, usaremos o fato de que $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) = 0$.

Portanto,

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Como $(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 9 = 0$ segue que $(1 - \lambda)^2 = 9$. Logo, $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$ são os autovalores correspondentes à matriz \mathbf{A} . Considere \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 autovetores, associados a λ_1 e λ_2 respectivamente. Portanto, $\mathbf{A}\mathbf{K}_1 = 4\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{A}\mathbf{K}_2 = -2\mathbf{K}_2$ são constatações.

Verifica-se, desta maneira, que

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 6, complementado pelas informações da seção 3.1.2, constatamos que

$$\mathbf{X}_c = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t},$$

onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer e t real, denota a solução geral do sistema homogêneo associado.

Agora, buscaremos \mathbf{X}_p solução particular do sistema não-homogêneo inicial.

Sendo

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

é de se esperar que exista alguma solução \mathbf{X}_p configurada de “forma similar”. Ou seja, caracterizada por

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Nestas circunstâncias, a_1 , a_2 , b_1 e b_2 são constantes quaisquer.

Como

$$\mathbf{X}_p' = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{X}_p' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}_p + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

temos

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

ou simplesmente,

$$\begin{pmatrix} (a_2 + 3b_2 - 2)t + a_1 + 3b_1 - a_2 \\ (3a_2 + b_2 + 1)t + 3a_1 + b_1 - b_2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Desta última identidade, concluímos que

$$\begin{cases} a_2 + 3b_2 - 2 = 0 \\ 3a_2 + b_2 + 1 = 0 \end{cases} \text{ e}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3b_1 - a_2 = 0 \\ 3a_1 + b_1 - b_2 + 5 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas acima verificamos que $a_1 = -47/32$, $a_2 = -5/8$, $b_1 = 9/32$ e $b_2 = 7/8$. Portanto,

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{47}{32} \\ \frac{9}{32} \end{pmatrix}.$$

Desta maneira, usando o Teorema 9 e a Definição 6, vimos que

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{47}{32} \\ \frac{9}{32} \end{pmatrix}$$

é a solução geral procurada para este problema. ■

4 SISTEMAS AUTÔNOMOS E ESTABILIDADE

4.1 Sistemas autônomos

Um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem é chamado de autônomo quando pode ser apresentado na forma

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

É claro que f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são funções de múltiplas variáveis.

Além disso, podemos verificar que a variável independente t não aparece explicitamente no membro direito das equações diferenciais.

Um sistema autônomo plano pode ser colocado na seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

Observamos que $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ caracteriza o formato vetorial da solução do sistema proposto para a variável real t . Suponha que $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ represente o deslocamento de uma partícula pelo plano no decorrer do tempo t , esta agora uma variável positiva – para fazer sentido físico. Fazendo com que tal partícula esteja inicialmente no ponto (x_0, y_0) , evidentemente temos que $\mathbf{X}(0) = (x_0, y_0)$. Como $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ representa deslocamento, $\mathbf{X}'(t) = (x'(t), y'(t))$ representa sua velocidade no instante t .

Fazendo $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ campo vetorial, observa-se que $\mathbf{V}(x, y)$ caracteriza a velocidade da corrente em (x, y) , pois, $x'(t) = P(x, y)$ e $y'(t) = Q(x, y)$.

Utilizando a interpretação geométrica acima descrita e sendo $P(x, y)$, $Q(x, y)$ e as derivadas parciais de primeira ordem $\partial P/\partial x$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ e $\partial Q/\partial y$ funções contínuas em uma região R do plano, observamos que as soluções do sistema autônomo plano apresentado nesta seção são de três tipos básicos:

- Uma *solução constante* $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$, para todo t . Como se pode perceber, neste caso, interpretamos que se uma partícula é posta inicialmente num ponto $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, ali ela permanecerá indefinidamente, pois, $x'(t) = y'(t) = 0$ para todo t .

Uma solução constante é também chamada de *ponto crítico*.

- Uma solução $x = x(t)$, $y = y(t)$ que define um *arco*, ou seja, uma curva plana que não se intercepta.
- Uma *solução periódica* $x = x(t)$, $y = y(t)$. Esta solução, também chamada de *ciclo*, ocorre quando existe um período p tal que $\mathbf{X}(t + p) = \mathbf{X}(t)$. Nestas circunstâncias, se uma partícula é colocada sobre a curva em \mathbf{X}_0 percorrerá outros pontos do plano e voltará a \mathbf{X}_0 transcorridas p unidades de tempo.

4.2 Estabilidade

No tópico anterior, admitiu-se que o sistema autônomo plano

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y)\end{aligned}$$

origina um campo vetorial $\mathbf{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ e uma solução $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ pode ser interpretada como a trajetória resultante de uma partícula colocada inicialmente na posição $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$.

Se \mathbf{X}_0 é um ponto crítico, a partícula permanece estacionária, ou seja, mesmo variando-se t a partícula não se move.

Entretanto, se \mathbf{X}_0 não for ponto crítico, estando este nas proximidades de um ponto crítico \mathbf{X}_1 , podemos observar as distintas possibilidades de trajetórias:

- $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ descreve um arco de maneira que a condição inicial é respeitada e além disso, quando t é muito grande segue que $\mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{X}_1$.
- $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ descreve um ciclo de forma que a trajetória nunca tende ao ponto crítico, mas também “não se afasta” de \mathbf{X}_1 por completo.
- $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ descreve um arco de maneira que a condição inicial é respeitada e além disso, quando t é muito grande segue que $\mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{X}_2$. Considerando \mathbf{X}_2 um outro ponto crítico, temos que a trajetória não se aproxima do ponto crítico \mathbf{X}_1 .

A Figura 1 abaixo sintetiza as idéias sugeridas nesta abordagem:

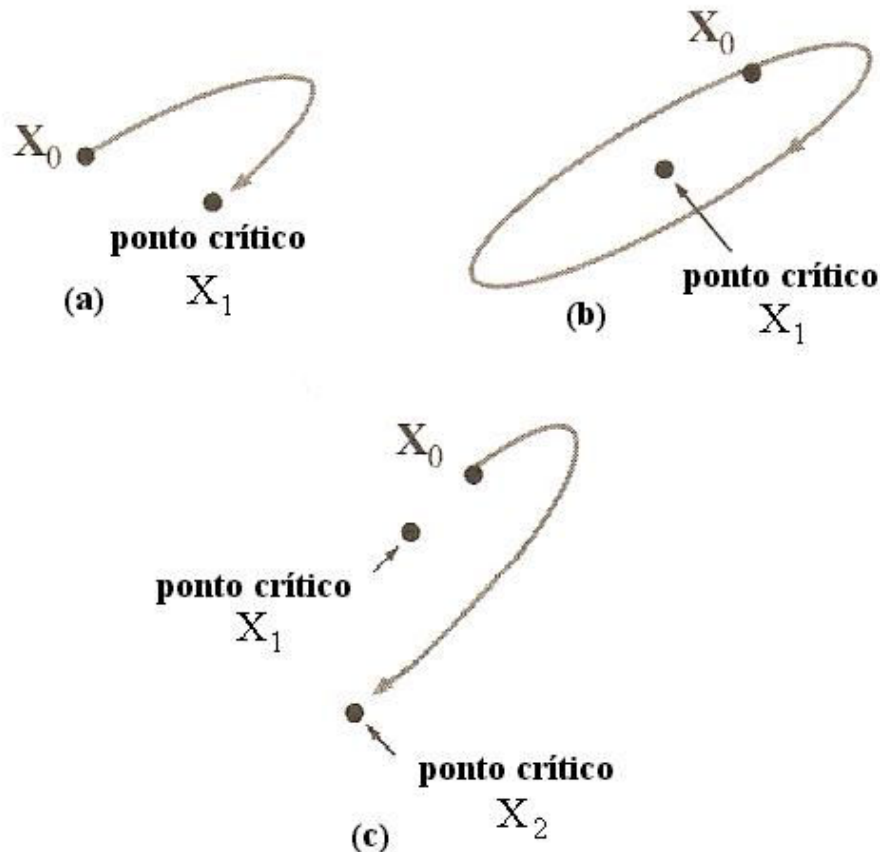


Figura 1: possíveis trajetórias que caracterizam as soluções para $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ nas proximidades de um ponto crítico

Se o caso (a) ou o caso (b) da Figura 1 sempre ocorre em alguma vizinhança ou proximidade do ponto crítico X_1 , segue que este é um ponto *crítico localmente estável*.

Se eventualmente for possível encontrar algum X_0 na vizinhança de X_1 , onde o comportamento do caso (c) é verificado, então este ponto crítico será denominado *instável*.

Considerando $|\mathbf{X} - \mathbf{Y}|$ a distância entre dois pontos \mathbf{X} e \mathbf{Y} , as definições abaixo caracterizam formalmente a estabilidade e instabilidade de pontos críticos.

DEFINIÇÃO 7 Seja X_1 um ponto crítico de um sistema autônomo, e denotemos por $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ a solução que satisfaz a condição inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, com $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{X}_1$. Diz-se que X_1 é um *ponto crítico estável* se, dado um raio arbitrário $\rho > 0$, existe um raio correspondente $r > 0$ tal que, se a posição inicial X_0 satisfaz $|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1| < r$, então a solução $\mathbf{X}(t)$ correspondente verifica $|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_1| < \rho$ para todo $t > 0$. Se além disso, $\mathbf{X}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}_1$, sempre que $|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1| < r$, X_1 é chamado de *ponto crítico assintoticamente estável*.

DEFINIÇÃO 8 Seja \mathbf{X}_1 um ponto crítico de um sistema autônomo, e denotemos por $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ a solução que satisfaz a condição inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, com $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{X}_1$. Diz-se que \mathbf{X}_1 é um *ponto crítico instável* quando existe um disco de raio $\rho > 0$ com a propriedade de que, para qualquer $r > 0$, existe uma posição inicial \mathbf{X}_0 satisfazendo $|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1| < r$, e entretanto, a solução correspondente $\mathbf{X}(t)$ satisfaz $|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_1| \geq \rho$ para algum $t > 0$.

Considere o sistema autônomo plano linear

$$\begin{aligned}x' &= ax + by \\y' &= cx + dy.\end{aligned}$$

Para efeito de desenvolvimento de teoria consideraremos que $(0,0)$ é o único ponto crítico para o sistema. Observamos que o sistema dado pode ser apresentado, portanto, na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3)$$

onde

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é matriz de coeficientes.

Como admitimos que $(0,0)$ é o único ponto crítico para o sistema (e, $x' = 0$ e $y' = 0$), verificamos que $\det \mathbf{B} \neq 0$. Assim, $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Pela teoria apresentada na seção 3.1.1 deste trabalho, sabemos que a equação $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}_2) = 0$ define os autovalores associados da matriz \mathbf{B} .

Desta forma,

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Note que,

$$\begin{aligned}(a - \lambda)(d - \lambda) - bc &= 0 \\ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc &= 0 \\ \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc &= 0.\end{aligned}$$

Considerando $\tau = a + d$ o traço da matriz \mathbf{B} , verificamos que $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$ é a equação a ser respeitada.

Portanto, os autovalores de \mathbf{B} são:

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}.$$

Verificaremos a seguir que conforme as características dos autovalores de \mathbf{B} , o comportamento em relação à estabilidade ou instabilidade do ponto crítico $(0,0)$ apresentará profundas distinções nos dados sistemas autônomos planos lineares.

CASO 1 - Autovalores reais distintos

Neste caso, evidentemente $\tau^2 - 4\Delta > 0$.

Suponha λ_1 e λ_2 autovalores relativos à matriz \mathbf{B} . Além disso, \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 são os autovetores desta matriz correspondentes respectivamente aos autovalores λ_1 e λ_2 .

Pelo Teorema 6, constatamos que $\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t}$ é solução geral para o sistema autônomo plano (3), onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer. É equivalente, nestas condições, considerar que $\mathbf{X}(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1\mathbf{K}_1 + c_2\mathbf{K}_2e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}]$.

Os autovalores, neste caso, podem ser ambos negativos, ambos positivos ou possuírem sinais diferentes. Analisaremos cada um dos casos e verificaremos que a estabilidade se comporta diferentemente nos sistemas conforme cada uma destas características.

CASO 1.A - Ambos os autovalores negativos

Neste caso, vimos que $\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau < 0$ e $\Delta > 0$.

Admitamos $\lambda_2 < \lambda_1$.

Observando a expressão $\mathbf{X}(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1\mathbf{K}_1 + c_2\mathbf{K}_2e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}]$, notamos que quando $t \rightarrow \infty$ é verdade que $\mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ caracteriza matriz ou vetor nulo.

O ponto crítico nesta circunstância é denominado *nó estável*. A Figura 2 exibe uma coleção de curvas solução em torno da origem, caracterizando, portanto, o comportamento de pontos colocados na trajetória $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$, sujeita a $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$, estando este último nas vizinhanças de $(0,0)$ o ponto crítico do sistema autônomo considerado.

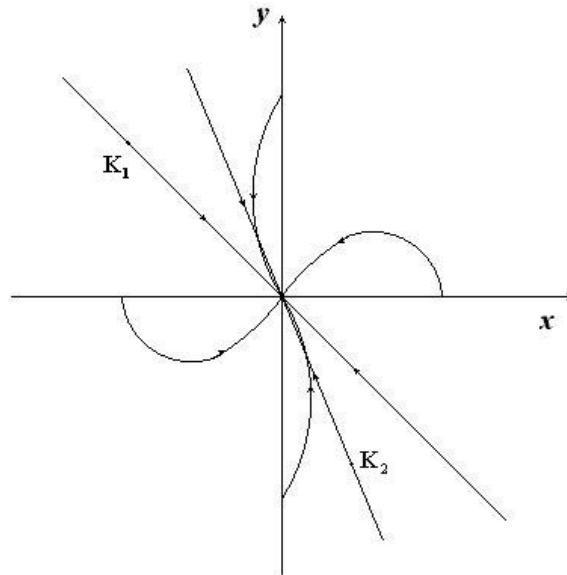


Figura 2: caracterização da origem como ponto crítico *nó estável*

CASO 1.B - Ambos os autovalores positivos

Neste caso, observamos $\tau^2 - 4\Delta > 0$, $\tau > 0$ e $\Delta > 0$.

Fazendo uma análise semelhante ao caso 1.A, ou seja, supondo que $\lambda_2 < \lambda_1$ notamos que quando t é grande, o vetor $\mathbf{X}(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 \mathbf{K}_1 + c_2 \mathbf{K}_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}]$ torna-se também arbitrariamente.

Neste caso, portanto, $\mathbf{X}(t)$ se distancia de $(0,0)$ quando t cresce. O ponto crítico, neste caso, é denominado *nó instável*. A Figura 3 apresenta a proposta do nó instável, considerando que $(0,0)$ é ponto crítico para o sistema.

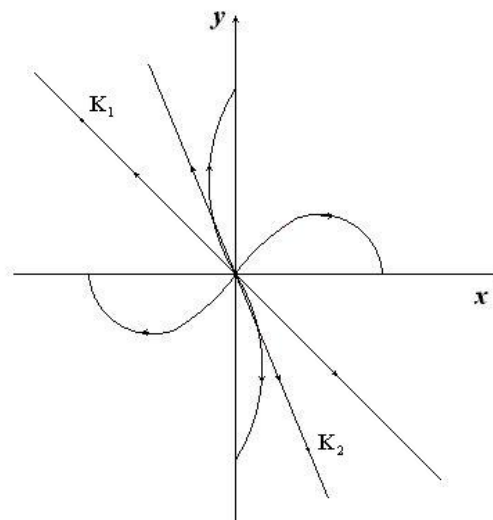


Figura 3: caracterização da origem como ponto crítico *nó instável*

CASO 1.C - Autovalores com sinais opostos

Para esta circunstância observamos: $\tau^2 - 4\Delta > 0$ e $\Delta < 0$.

A análise deste caso é praticamente análoga à observação desenvolvida no item 1.B. Entretanto, há de se fazer ressalvas na equação $\mathbf{X}(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 \mathbf{K}_1 + c_2 \mathbf{K}_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}]$ quando $c_1 = 0$ ou $c_2 = 0$.

Quando $c_1 = 0$, observamos que $\mathbf{X}(t) = c_2 \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}$. Supondo $\lambda_2 < 0$, notamos que quando $t \rightarrow \infty$ é verdade que $e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$, e, portanto, $\mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{0}$. Portanto, verificamos que a trajetória-solução, nestas circunstâncias, caminha em direção à origem.

Por sua vez, se $c_2 = 0$ a solução geral é dada por $\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t}$. Sendo $\lambda_1 > 0$, é observado que quando $t \rightarrow \infty$ temos $e^{\lambda_1 t} \rightarrow \infty$. Portanto, por menor que seja a “distância” entre \mathbf{X}_0 e o ponto crítico $(0,0)$, a trajetória $\mathbf{X}(t)$ se afastará deste ponto crítico.

A Figura 4 apresenta a proposta das trajetórias em relação ao ponto crítico $(0,0)$. Neste caso, tal ponto é denominado *ponto de sela*.

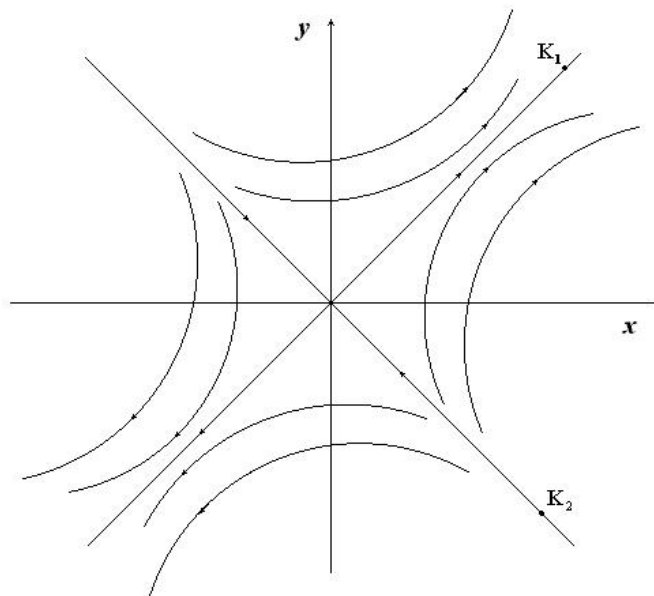


Figura 4: caracterização da origem como ponto crítico *de sela*

CASO 2 - Um autovalor real repetido

Neste caso, verificamos que a identidade $\tau^2 - 4\Delta = 0$ deve ser respeitada.

Pela teoria apresentada na seção 3.1.2 deste trabalho, verificamos que λ , único autovalor da matriz B, pode estar associado a um único autovetor ou a dois autovetores linearmente independentes.

Analisaremos a seguir o que acontece em cada um desses casos isoladamente.

CASO 2.A - Dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor repetido

Considere \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 dois autovetores linearmente independentes correspondentes ao único autovalor λ de \mathbf{B} .

Vimos que $\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda t} + c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda t} = (c_1\mathbf{K}_1 + c_2\mathbf{K}_2)e^{\lambda t}$ é solução geral para a trajetória, considerando, entretanto, que c_1 e c_2 são constantes quaisquer.

Se $\lambda < 0$, $\mathbf{X}(t)$ tende para $\mathbf{0}$ ao longo do vetor $c_1\mathbf{K}_1 + c_2\mathbf{K}_2$. Este ponto crítico aqui chamado de *nó estável degenerado* está representado na figura 5 (a).

Se $\lambda > 0$, $\mathbf{X}(t)$ se afasta da origem. Neste exemplo, o ponto crítico é chamado de *nó instável degenerado*. A Figura 5 (b) que o caracteriza lembra a Figura 5 (a), distinguindo-se apenas pela inversão do sentido das setas.

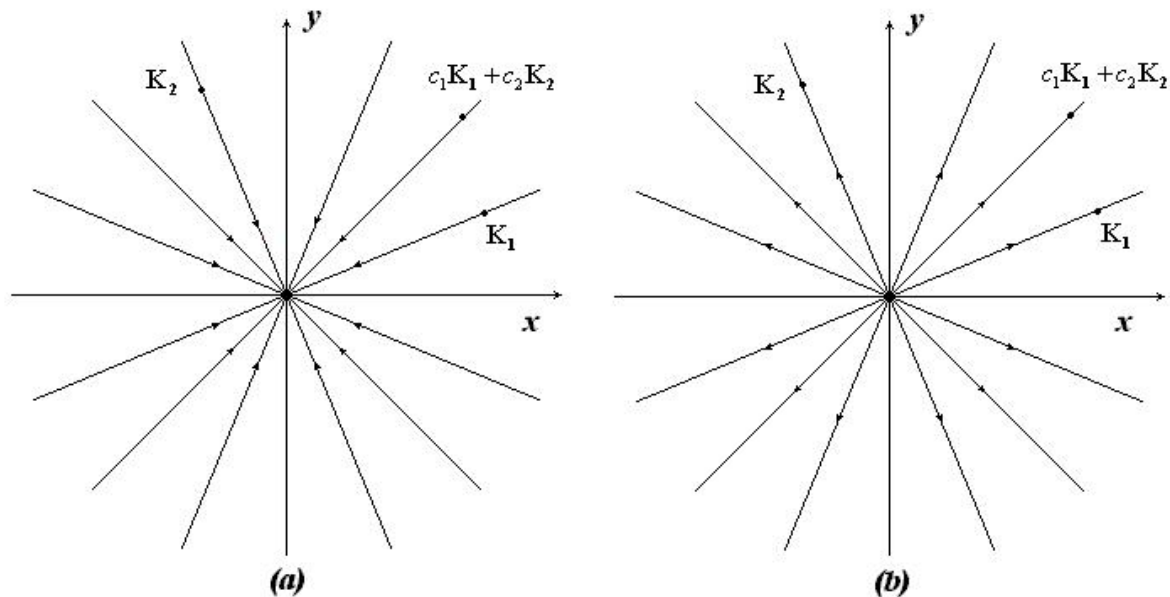


Figura 5: caracterização da origem como ponto crítico *nó degenerado estável* (a) e ponto crítico *nó degenerado instável* (b)

CASO 2.B - Um único autovetor linearmente independente associado ao autovalor repetido

De acordo com a proposta da seção 3.1.2, quando existe um único autovetor linearmente independente \mathbf{K}_1 associado ao autovalor λ de \mathbf{B} , a solução geral para (3) é dada por $\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda t} + c_2(\mathbf{K}_1te^{\lambda t} + \mathbf{P}e^{\lambda t})$, onde $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}_2)\mathbf{P} = \mathbf{K}_1$.

Evidentemente, temos que

$$\mathbf{X}(t) = te^{\lambda t} \left(c_2 \mathbf{K}_1 + \frac{c_1}{t} \mathbf{K}_1 + \frac{c_2}{t} \mathbf{P} \right).$$

Se $\lambda < 0$, temos que $te^{\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e, por conseguinte, $\mathbf{X}(t)$ tende a $\mathbf{0}$. Neste caso, este ponto crítico é também denominado *nó estável degenerado*. A Figura 6 apresenta a caracterização deste nó.

Se $\lambda > 0$, é perceptível que as soluções se comportam como as apresentadas na Figura 6, distinguindo-se apenas o sentido das setas. Este ponto crítico, por sua vez, é também denominado *nó instável degenerado*.

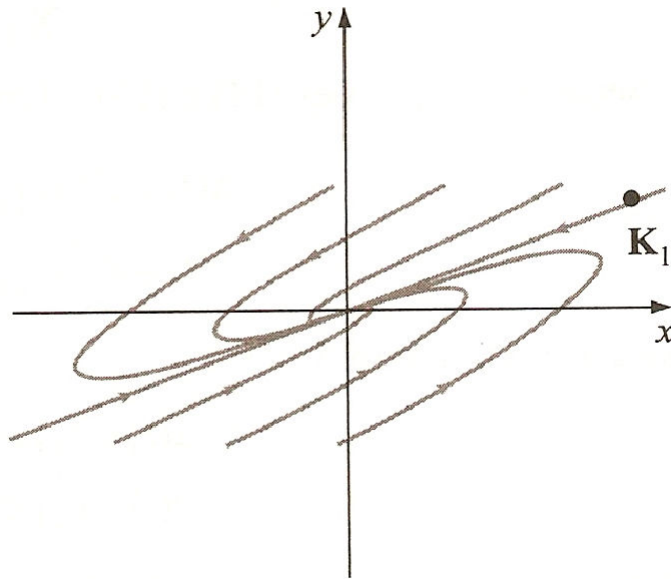


Figura 6: caracterização da origem como ponto crítico *nó estável degenerado*

CASO 3 - Autovalores complexos

Este caso ocorre quando $\tau^2 - 4\Delta < 0$.

Sejam que $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$, onde α e β são números reais e $i^2 = -1$, os autovalores complexos referentes à matriz B.

Supondo que $\mathbf{K}_1 = \mathbf{C}_1 + i\mathbf{C}_2$ seja o autovetor associado ao autovalor λ_1 , onde \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 são vetores com entradas reais, então a solução geral pode ser posta na forma $\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{X}_1(t) + c_2 \mathbf{X}_2(t)$, de forma que:

$$\mathbf{X}_1(t) = (\mathbf{C}_1 \cos \beta t - \mathbf{C}_2 \sin \beta t)e^{\alpha t} \text{ e}$$

$$\mathbf{X}_2(t) = (\mathbf{C}_2 \cos \beta t + \mathbf{C}_1 \sin \beta t)e^{\alpha t}.$$

Considere

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} e^{\mathbf{K}_1 t} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}.$$

É verdade que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \left[\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \cos \beta t - \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} \sin \beta t \right] e^{\alpha t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} \cos \beta t + \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \sin \beta t \right] e^{\alpha t}$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_{11} e^{\alpha t} \cos \beta t - c_1 c_{12} e^{\alpha t} \sin \beta t + c_2 c_{12} e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 c_{11} e^{\alpha t} \sin \beta t \\ c_1 c_{21} e^{\alpha t} \cos \beta t - c_1 c_{22} e^{\alpha t} \sin \beta t + c_2 c_{22} e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 c_{21} e^{\alpha t} \sin \beta t \end{pmatrix}.$$

Assim, é possível verificar que:

$$x(t) = e^{\alpha t} (c_1 c_{11} + c_2 c_{12}) \cos \beta t + e^{\alpha t} (c_2 c_{11} - c_1 c_{12}) \sin \beta t \text{ e}$$

$$y(t) = e^{\alpha t} (c_1 c_{21} + c_2 c_{22}) \cos \beta t + e^{\alpha t} (c_2 c_{21} - c_1 c_{22}) \sin \beta t.$$

Fazendo $a_{11} = c_1 c_{11} + c_2 c_{12}$, $a_{12} = c_2 c_{11} - c_1 c_{12}$, $a_{21} = c_1 c_{21} + c_2 c_{22}$ e $a_{22} = c_2 c_{21} - c_1 c_{22}$, temos que:

$$x(t) = e^{\alpha t} (a_{11} \cos \beta t + a_{12} \sin \beta t) \text{ e}$$

$$y(t) = e^{\alpha t} (a_{21} \cos \beta t + a_{22} \sin \beta t).$$

Estas últimas expressões têm bastante significância, uma vez que servem de pilares para que entendamos o comportamento das soluções nos casos 3.A e 3.B, que serão descritos a seguir.

CASO 3.A - Autovalores imaginários puros

Caracterizado pelo fato de que $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau = 0$. $\Delta > 0$ é uma relação evidente.

Nesta circunstância, $\alpha = 0$. Assim, os autovalores a serem considerados são $\lambda_1 = i\beta$ e $\overline{\lambda_1} = -i\beta$. É possível interpretar, portanto, que as soluções gerais são do tipo

$$x(t) = a_{11} \cos \beta t + a_{12} \sin \beta t \text{ e}$$

$$y(t) = a_{21} \cos \beta t + a_{22} \sin \beta t.$$

Podemos perceber pelas equações acima que todas as solução são periódicas com período $p = 2\pi/\beta$. Fazendo que, a_{12} e a_{21} sejam simultaneamente nulas, temos que a equação acima será reduzida a

$$x(t) = a_{11} \cos \beta t \text{ e}$$

$$y(t) = a_{22} \sin \beta t.$$

Esta configuração caracteriza a equação paramétrica de uma elipse.

Notando que,

$$\frac{(x(t))^2}{a_{11}^2} + \frac{(y(t))^2}{a_{22}^2} = \frac{a_{11}^2 \cos^2 \beta t}{a_{11}^2} + \frac{a_{22}^2 \sin^2 \beta t}{a_{22}^2} = \cos^2 \beta t + \sin^2 \beta t = 1,$$

é possível entender que todas as soluções para o sistema $x(t) = a_{11} \cos \beta t$ e $y(t) = a_{22} \sin \beta t$ são elipses com centro na origem. Ampliando esta noção também podemos entender que são elipses com centro em $(0,0)$ que caracterizam as soluções para o sistema inicial $x(t) = a_{11} \cos \beta t + a_{12} \sin \beta t$ e $y(t) = a_{21} \cos \beta t + a_{22} \sin \beta t$.

O ponto crítico $(0,0)$ é neste caso chamado de *centro*. A Figura 7 mostra uma coleção típica de curvas solução para este contexto. Estas elipses podem ser percorridas tanto no sentido horário, quanto no anti-horário.

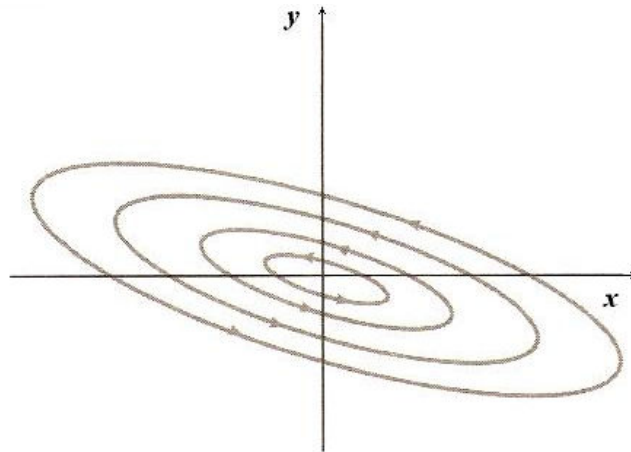


Figura 7: caracterização da origem como ponto crítico *centro*

CASO 3.B - Autovalores complexos com parte real não nula

Neste caso, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau \neq 0$.

Vimos que a solução aqui se interpreta por $x(t) = e^{\alpha t} (a_{11} \cos \beta t + a_{12} \sin \beta t)$ e $y(t) = e^{\alpha t} (a_{21} \cos \beta t + a_{22} \sin \beta t)$. Sua configuração não aponta para uma solução periódica, como foi visto no caso 3.A. Na verdade, as soluções se caracterizam em curvas como espirais. Quando $\alpha < 0$, segue que $\tau < 0$ e, além disso, $e^{\alpha t} \rightarrow 0$. As soluções semelhantes a espirais, circulam em torno da origem, cada vez mais próximas dela. O ponto crítico é chamado aqui de *ponto espiral estável*, e é representado na Figura 8 (a).

Quando $\alpha > 0$, observamos efeito contrário e a solução semelhante a espiral se afasta

cada vez mais da origem, caracterizando $(0,0)$ como um ponto crítico denominado *ponto espiral instável*. As soluções em torno de $(0,0)$ estão propostas na Figura 8 (b).

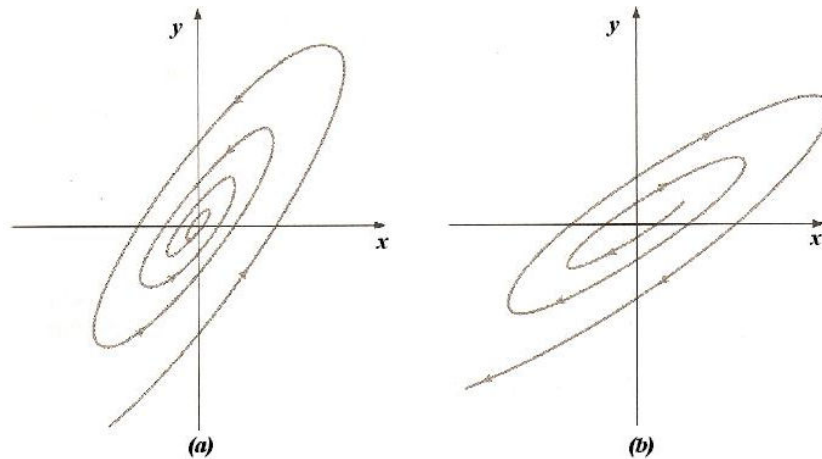


Figura 8: caracterização da origem como ponto crítico *espiral estável* (a) e ponto crítico *espiral instável* (b)

Com base nos resultados apresentados no decorrer desta seção, podemos propor o Teorema 10 que caracteriza os critérios de estabilidade para sistemas de equações diferenciais lineares.

TEOREMA 10 Para um sistema autônomo plano linear (3), denotamos por $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ a solução que satisfaz a condição inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, com $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{0}$.

- a. $\mathbf{X}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{0}$ se e somente se os autovalores de \mathbf{B} têm partes reais negativas. Isto ocorre quando $\Delta > 0$ e $\tau < 0$.
- b. $\mathbf{X}(t)$ é periódica se e somente se os autovalores de \mathbf{B} são imaginários puros, o que ocorre quando $\Delta > 0$ e $\tau = 0$.
- c. Em todos os outros casos, dada uma vizinhança arbitrária da origem, há ao menos um \mathbf{X}_0 nessa vizinhança para o qual $\mathbf{X}(t)$ se torna arbitrariamente grande quando t cresce.

A Figura 9 resume convenientemente os resultados desta seção. O traço e o determinante de \mathbf{B} são peças fundamentais para compreensão da estabilidade de um ponto crítico de um sistema autônomo plano linear.

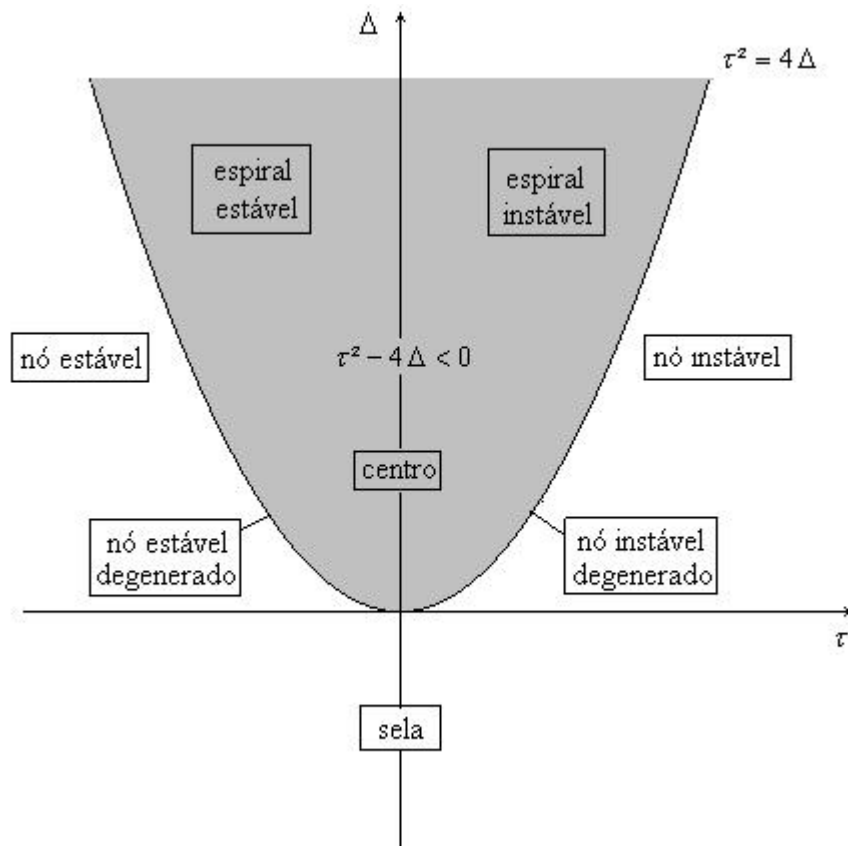


Figura 9: caracterização da origem como ponto crítico do sistema autônomo plano (3) através do conhecimento de τ (o traço da matriz B) e Δ (seu determinante)

4.3 Sistemas autônomos planos (não-lineares)

Em geral, sistemas autônomos de equações diferenciais não-lineares $\mathbf{X}' = G(\mathbf{X})$ podem possuir mais de um ponto crítico, distintos de $\mathbf{0}$. Desta forma, a estabilidade para pontos críticos destes sistemas não pode ser verificada simplesmente através da teoria desenvolvida na seção 4.2. Para verificação se tornar possível, se faz necessário a aplicação de um processo chamado *linearização* que consiste na substituição do termo $G(\mathbf{X})$ do sistema autônomo por um termo linear $\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)$ que melhor aproxime $G(\mathbf{X})$ em uma vizinhança de \mathbf{X}_1 , este último ponto crítico na caracterização. Abaixo será ilustrado o desenvolvimento da linearização para sistemas autônomos planos.

Considere $\mathbf{X} = (x, y)$. Além disso, $\mathbf{X}' = G(\mathbf{X})$ é um sistema autônomo plano não-linear. Assim, $(x', y') = G(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, onde P e Q são funções de duas variáveis. Faça $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1)$ um ponto crítico para o sistema $\mathbf{X}' = G(\mathbf{X})$.

Do Cálculo sabemos que

$$z = f(x_1, y_1) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} (x - x_1) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} (y - y_1)$$

é a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ em \mathbf{X}_1 . Convencionamos que $G(x, y)$ pode ser aproximada pela equação de seu plano nas proximidades de \mathbf{X}_1 .

Assim

$$(x', y') \approx (P(x_1, y_1), Q(x_1, y_1)) + \left(\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)}, \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} \right) (x - x_1) + \left(\left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)}, \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} \right) (y - y_1).$$

Sabendo que \mathbf{X}_1 é um ponto crítico, temos que $P(x_1, y_1) = Q(x_1, y_1) = 0$.

Logo,

$$x' = P(x, y) \approx \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} (x - x_1) + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} (y - y_1) \text{ e}$$

$$y' = Q(x, y) \approx \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} (x - x_1) + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} (y - y_1).$$

O sistema linear $\mathbf{X}' = G(\mathbf{X})$ pode, portanto, ser aproximado nas vizinhanças de \mathbf{X}_1 pelo sistema linear $(\mathbf{X}')^t = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)^t$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} & \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} \\ \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} & \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1)} \end{pmatrix}.$$

\mathbf{A} é chamada de *matriz jacobiana* em \mathbf{X}_1 e pode ser denotada por $G'(\mathbf{X}_1)$. Fazendo $\mathbf{H} = (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)^t$, o sistema $(\mathbf{X}')^t = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)^t$ se escreve $\mathbf{H}' = \mathbf{A}\mathbf{H}$ que é da forma linear analisada na seção anterior. O ponto crítico $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1$ para $(\mathbf{X}')^t = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1)^t$ corresponde, portanto ao ponto crítico $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ para o sistema linear $\mathbf{H}' = \mathbf{A}\mathbf{H}$. Se os autovalores de \mathbf{A} têm partes reais negativas, então $\mathbf{0}$ é um ponto crítico assintoticamente estável para $\mathbf{H}' = \mathbf{A}\mathbf{H}$. Se há um autovalor de \mathbf{A} com parte real positiva, $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ é um ponto crítico instável. O Teorema 11 a seguir afirma as conclusões suficientes para compreensão da estabilidade do ponto crítico \mathbf{X}_1 do sistema $\mathbf{X}' = G(\mathbf{X})$ original.

TEOREMA 11 Seja \mathbf{X}_1 um ponto crítico do sistema autônomo plano $\mathbf{X}' = G(\mathbf{X})$, onde $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma vizinhança de \mathbf{X}_1 .

a. Se os autovalores de $\mathbf{A} = G'(\mathbf{X}_1)$ têm partes reais negativas, então \mathbf{X}_1 é um ponto crítico assintoticamente estável de $\mathbf{X}' = G(\mathbf{X})$.

b. Se $\mathbf{A} = G'(\mathbf{X}_1)$ tem um autovalor com parte real positiva, então \mathbf{X}_1 é um ponto crítico instável de $\mathbf{X}' = G(\mathbf{X})$.

Aprofundando a teoria a cerca deste tema é possível desenvolver a Figura 10, assim como feito na seção 4.2 deste trabalho. Através deste esquema representa-se o comportamento da estabilidade de um ponto crítico a partir do conhecimento de

$$\tau = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x_1, y_1)} + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{(x_1, y_1)},$$

traço da matriz \mathbf{A} e

$$\Delta = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x_1, y_1)} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{(x_1, y_1)} \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{(x_1, y_1)} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{(x_1, y_1)} \right)$$

seu determinante.

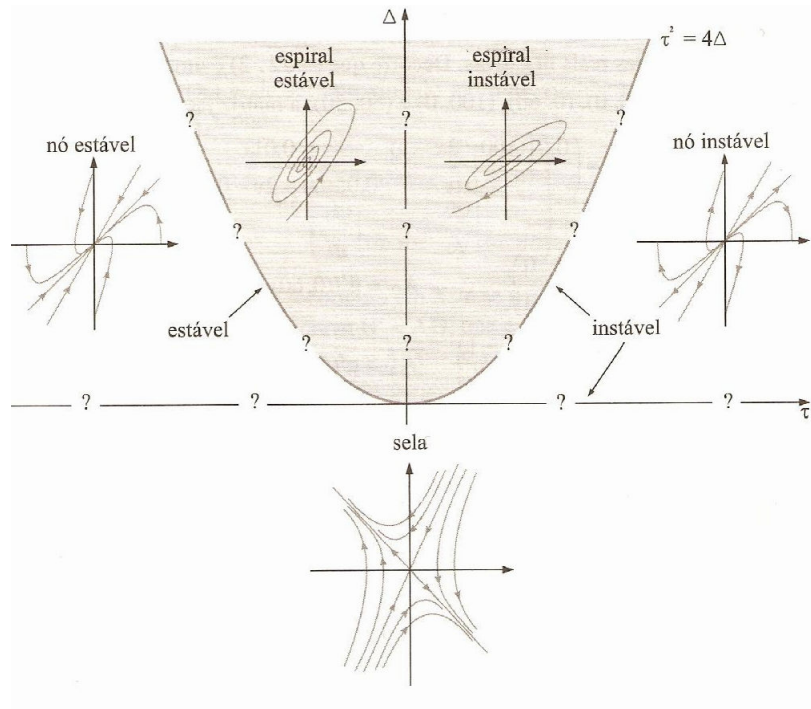


Figura 10: caracterização de um ponto crítico do sistema autônomo plano não linear $\mathbf{X}' = G(\mathbf{X})$, através do conhecimento de τ (o traço da matriz jacobiana \mathbf{A}) e Δ (seu determinante)

Como se percebe pela Figura 10, em cinco casos especiais (nó estável, ponto espiral estável, ponto espiral instável, nó instável e sela) o ponto crítico pode ser classificado conforme o ponto crítico no sistema linear correspondente. As soluções têm as mesmas características geométricas gerais que as soluções do sistema linear e, quanto menor a vizinhança em torno de \mathbf{X}_1 , maior a semelhança.

Se $\tau^2 = 4\Delta$ e $\tau > 0$, o ponto crítico \mathbf{X}_1 é instável, mas, nesse caso extremo de fronteira, o ponto crítico pode ser uma espiral instável, um nó instável ou um nó instável degenerado. Se $\tau^2 = 4\Delta$ e $\tau < 0$, o ponto crítico \mathbf{X}_1 é estável, podendo ser uma espiral estável, um nó estável ou um nó estável degenerado. Se $\tau = 0$ e $\Delta > 0$, os autovalores de \mathbf{A} são imaginários puros e, nesse extremo de fronteira, o ponto crítico \mathbf{X}_1 pode ser uma espiral estável, uma espiral instável ou mesmo um centro. Existem técnicas matemáticas mais sofisticadas que se tornam úteis na classificação detalhada da estabilidade destes casos listados. Entretanto, por não caracterizarem o objetivo deste trabalho tais procedimentos não serão aprofundados aqui.

O método da linearização, quando aplicável, pode dar informações úteis sobre o comportamento local de soluções nas proximidades de pontos críticos. Entretanto, este método pode não ser muito útil quando estamos interessados em soluções cuja posição inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ não está próxima de um ponto crítico ou se desejamos ter uma visão global da família de curvas solução.

O método do plano de fases se baseia na constatação que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

e procura determinar y como uma função de x . Tal método além de solucionar as dificuldades acima mencionadas, pode em algumas ocasiões auxiliar na interpretação do comportamento da estabilidade de um ponto crítico qualquer quando a teoria apresentada neste trabalho não for suficiente.

4.4 Modelo presa-predador de Lotka-Volterra

Suponha duas espécies: A e B. Vivendo num ambiente isolado, A se alimenta quase que exclusivamente de B. B, entretanto, sobrevive através de outra fonte alimentar.

Considere $x(t)$ a população da espécie A, que neste contexto é a predadora. $y(t)$ será a população da espécie B, a presa. Interpretamos que o número de indivíduos de A e B varia conforme o tempo t , esta uma variável maior ou igual a zero.

Os cientistas Lotka e Volterra, a partir desta compreensão, desenvolveram um modelo que pretende entender o que ocorre com os valores de $x(t)$ e $y(t)$, a partir da interação definida.

Eles partiram das seguintes premissas:

- Na ausência do predador, $y(t)$ cresce sem limites, numa taxa proporcional ao seu tamanho. Deste modo, $y'(t) = dy(t)$, onde $d > 0$ e $x(t) = 0$ para todo $t > 0$.
- Na ausência da presa, o predador morre e $x(t)$ decai. Assim, $x'(t) = -ax(t)$, onde $a > 0$ e $y(t) = 0$ para todo $t > 0$.
- O aumento no número de predadores é inteiramente dependente do suprimento alimentar (presas) existente e as presas são consumidas numa taxa proporcional ao número de encontros entre presa e predador. Tais encontros diminuem o número de presas e aumentam o número de predadores.

Considerando dx/dt a taxa de crescimento de $x(t)$ e dy/dt a taxa de crescimento de $y(t)$, o modelo de interação presa-predador de Lotka-Volterra pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax + bxy = x(-a + by) \\ \frac{dy}{dt} &= -cxy + dy = y(-cx + d).\end{aligned}$$

Considerando $c > 0$ temos que o termo $-cxy$ representa a taxa de diminuição de y devido à predação por A. Considerando $b > 0$ temos que o termo bxy representa a contribuição positiva resultante para população de predadores devido à predação da outra espécie. Quanto maior o produto de x e y , maior será a predação de B por parte de A.

Podemos perceber que o sistema proposto é autônomo plano não-linear. Seus pontos críticos são, contudo, $(0, 0)$ e $(d/c, a/b)$. Considere a matriz jacobiana relativa ao sistema

$$g'((x, y)) = \begin{pmatrix} -a + by & bx \\ -cy & -cx + d \end{pmatrix}.$$

Como

$$g'((0, 0)) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

segue que $g'((0, 0))$ tem como autovalores $-a$ e d , ambos reais, um positivo e outro negativo. Pelo Teorema 11, observamos que $(0, 0)$ é um ponto crítico instável para o sistema. Na verdade, é possível verificar que $(0, 0)$ é um ponto de sela (já que o determinante da matriz é negativo, vide Figura 10). Entende-se, aprofundando o conhecimento deste ponto crítico, que

para qualquer par ordenado (x_0, y_0) que caracterize as populações não-nulas de x e y no instante zero, a trajetória $(x(t), y(t))$ não tende a $(0, 0)$ com o aumento de t .

Sendo

$$g'((d/c, a/b)) = \begin{pmatrix} 0 & bd/c \\ -ac/b & 0 \end{pmatrix},$$

segue que $g'((d/c, a/b))$ tem como autovalores $-i\sqrt{ad}$ e $i\sqrt{ad}$, ambos imaginários puros.

Por ser o ponto crítico de um sistema autônomo plano não-linear, $(d/c, a/b)$ através das características dos autovalores de seu jacobiano e dos comentários feitos na seção 4.3 deste trabalho pode ser classificado como um centro, como um ponto espiral estável ou como um ponto espiral instável. O método do plano de fase, entretanto, nos auxilia a verificação mais rígida em relação à estabilidade de $(d/c, a/b)$.

Note que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y(-cx+d)}{x(-a+by)}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{y(-cx+d)}{x(-a+by)} &\Rightarrow x(-a+by)dy = y(-cx+d)dx \Rightarrow \frac{-a+by}{y} dy = \frac{-cx+d}{x} dx \Rightarrow \int \frac{-a+by}{y} dy = \\ &= \int \frac{-cx+d}{x} dx \Rightarrow -a \int \frac{1}{y} dy + b \int dy = -c \int dx + d \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow -a \ln(y) + by = -cx + d \ln(x) + c_1, \end{aligned}$$

onde c_1 é uma constante qualquer. Fazendo $d = a + k$, temos que

$$\begin{aligned} a \ln(y) + d \ln(x) = by + cx - c_1 &\Rightarrow a \ln(y) + a \ln(x) + k \ln(x) = by + cx - c_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow a(\ln(y) + \ln(x)) + k \ln(x) = by + cx - c_1 &\Rightarrow \ln(x^a y^a) + \ln(x^k) = by + cx - c_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\ln(x^a y^a) + \ln(x^k)} = e^{by + cx - c_1} &\Rightarrow e^{\ln(x^a y^a)} e^{\ln(x^k)} = e^{by} e^{cx} e^{-c_1} \Rightarrow x^a y^a x^k = e^{by} e^{cx} e^{-c_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^a y^a x^d x^{-a} = e^{by} e^{cx} e^{-c_1} &\Rightarrow y^a x^d = e^{by} e^{cx} e^{-c_1} \Rightarrow x^d e^{-cx} y^a e^{-by} = c_0, \end{aligned}$$

onde $c_0 = e^{-c_1}$.

Infelizmente não conseguimos resolver a dada equação explicitamente para y em termos de x ou para x em termos de y . Pode-se demonstrar, entretanto, que a equação $x^d e^{-cx} y^a e^{-by} = c_0$ caracteriza uma curva fechada que “circunda” o ponto crítico $(d/c, a/b)$. Tal curva pode não caracterizar uma elipse, mas de qualquer forma, $(d/c, a/b)$ representa um centro. Quanto mais próxima ao ponto crítico, maiores são as semelhanças que tal equação têm em relação à equação das elipses com centro em $(d/c, a/b)$.

Considere (x_0, y_0) número de habitantes para A e B, respectivamente, no instante $t = 0$. Se $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ e $(x_0, y_0) \neq (d/c, a/b)$, observamos que o número de predadores e presas variará ciclicamente em volta de $(d/c, a/b)$, evidentemente não se anulando e voltando ao patamar de (x_0, y_0) após um período de tempo p .

EXEMPLO 1

Problema: Coelhos e lobos vivem numa região X do planeta Terra. Nesta região, os coelhos são as únicas fontes de alimento para os lobos. Os coelhos, entretanto, alimentam-se de vegetação (sempre abundante em X). Considere $y(t)$ a população de lobos. $x(t)$ será a população de coelhos conforme o tempo t , $t \geq 0$. Suponha que o crescimento (ou decréscimo) das populações de coelhos e lobos esteja descrito pelas seguintes equações de Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0,08x - 0,001xy = x(0,08 - 0,001y) \\ \frac{dy}{dt} &= -0,02y + 0,00002xy = y(-0,02 + 0,00002x).\end{aligned}$$

Sabendo que $x(0) = 1000$ e $y(0) = 40$, o que esperar dos valores $x(t)$ e $y(t)$ com a variação positiva de t ?

Solução: Dado o sistema autônomo plano não-linear

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0,08x - 0,001xy = x(0,08 - 0,001y) \\ \frac{dy}{dt} &= -0,02y + 0,00002xy = y(-0,02 + 0,00002x).\end{aligned}$$

observamos que $(0, 0)$ e $(1000, 80)$ são os únicos pontos críticos para este sistema.

Seguindo os resultados apresentados nesta seção, podemos observar que $(0, 0)$ é um ponto de sela, de forma que, a população inicial caracterizada pelo par ordenado $(x_0, y_0) = (1000, 40)$ e configurada conforme o sistema apresentado, não tende a $(0, 0)$.

$(1000, 80)$, por sua vez, é para a estabilidade do sistema um centro. De tal forma, a trajetória de $(x(t), y(t))$ caracteriza uma curva fechada que circunda $(1000, 80)$ e atende a $(x(0), y(0)) = (1000, 40)$, voltando a este par ordenado após p unidades de tempo.

Através do método do plano de fases, podemos obter a equação da curva que atende a variação esperada para os valores de $x(t)$ e $y(t)$. Note que,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y(-0,02 + 0,00002x)}{x(0,08 - 0,001y)} \Rightarrow \frac{0,08 - 0,001y}{y} dy = \frac{-0,02 + 0,00002x}{x} dx \Rightarrow \\
&\Rightarrow \int \frac{0,08 - 0,001y}{y} dy = \int \frac{-0,02 + 0,00002x}{x} dx \Rightarrow \int \frac{0,08}{y} dy + \int -0,001 dy = \\
&= \int -\frac{0,02}{x} dx + \int 0,00002 dx \Rightarrow 0,08 \ln(y) - 0,001y = -0,02 \ln(x) + 0,00002x + C_0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 0,02 \ln(x) + 0,02 \ln(y) + 0,06 \ln(y) = 0,001y + 0,00002x + C_0 \Rightarrow 0,02 \ln(xy) + 0,06 \ln(y) = \\
&= 0,001y + 0,00002x + C_0 \Rightarrow e^{\ln(x^{0,02}y^{0,02}) + \ln(y^{0,06})} = e^{0,001y + 0,00002x + C_0} \Rightarrow x^{0,02} y^{0,02} y^{0,06} = \\
&= e^{0,001y} e^{0,00002x} e^{C_0} \Rightarrow x^{0,02} e^{-0,00002x} y^{0,08} e^{-0,001y} = e^{C_0}.
\end{aligned}$$

onde C_0 é uma constante qualquer.

Como tal equação atende ao par ordenado $(1000, 40)$, observamos que $C_0 = \ln(1000^{0,02} e^{-0,00002 \cdot 1000} 40^{0,08} e^{-0,001 \cdot 40}) \approx 0,373265$. A equação, portanto, que atende a todos os possíveis valores para as populações de coelhos e lobos, conforme a variação de t , é aproximada por

$$x^{0,02} e^{-0,00002x} y^{0,08} e^{-0,001y} = e^{0,373265}.$$

Técnicas gráficas nos permitem verificar que a Figura 11 caracteriza o comportamento dos pares (x, y) no plano.

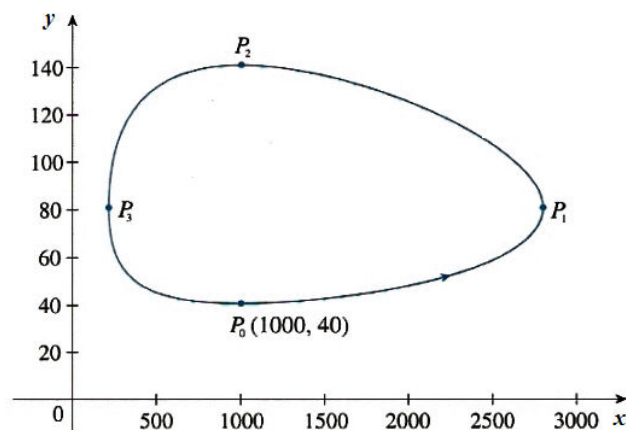


Figura 11

Inicialmente a população de coelhos corresponde a 1000 indivíduos, enquanto a população de lobos equivale a 40 elementos. Portanto, $(x(0), y(0)) = (1000, 40)$. A partir da teoria apresentada para as características do sistema, observamos que a curva gerada por $(x(t), y(t))$ com o variar positivo e contínuo de t caracteriza uma solução periódica. O gráfico, no plano, mostra que a partir de P_0 (população inicial), tal trajetória desloca-se no sentido anti-horário do plano (já que $x'(0) > 0$ e $y'(0) > 0$).

Interpretamos que em P_0 não existem lobos suficientes para manter um equilíbrio entre as populações; assim, a população de coelhos aumenta. O aumento da população de coelhos causa aumento da oferta de alimentos para os lobos. Os lobos bem alimentados se reproduzem, aumentando também o tamanho de sua população. Quanto maior a quantidade de lobos, mais freqüentes serão os encontros entre lobos e coelhos. Tendo dificuldades para fugir dos lobos, os coelhos viram presas fáceis e após um espaço de tempo t_1 , esta população começa a diminuir. Na figura, observamos que a população de coelhos começa a diminuir em P_1 , quando $x(t)$ admite valor máximo, por volta de 2800 indivíduos.

Algum tempo t_2 depois, com a diminuição brusca da quantidade de coelhos, a população de lobos também diminuirá, por ausência de alimentos. Caracteriza-se este evento em P_2 , onde a população de lobos é aproximada em 140 indivíduos e a população de coelhos equivale a 1000.

A diminuição do número de lobos, por sua vez, beneficia a população de coelhos. Quando atinge P_3 , $x(t) \approx 210$ e $y(t) \approx 80$, vemos que a população de presas volta a crescer. Como conseqüência, a população de lobos também voltará a crescer, fazendo com que $(x(t), y(t))$ atinja P_0 , reiniciando o ciclo descrito. ■

O modelo de Lotka-Volterra para presa e predador, apesar de bastante simples, tem verificação constatada quando aplicado na realidade. Em várias situações, onde são expostos experimentalmente animais de duas espécies, uma presa e outra predadora, com o variar do tempo verifica-se uma certa semelhança entre o comportamento da interação populacional com a proposta do modelo de Lotka-Volterra apresentado.

Embora obtendo algum sucesso na explicação e previsão do comportamento de populações acopladas, o modelo de Lotka-Volterra é criticado pela relativa simplicidade. Para tanto, modelos mais sofisticados foram elaborados a partir deste inicial tentando atender a mesma proposta de forma mais crítica e convincente. Uma das formas adotadas assume que na ausência de predadores, a presa cresce de acordo com um modelo logístico com capacidade de suporte populacional K . De tal forma, o modelo para crescimento populacional é apresentado como:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy = x(-a + by)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cxy + dy \left(1 - \frac{y}{K} \right),$$

onde $x(t)$ é população da espécie predadora, $y(t)$ a população de presas e a, b, c, d e K são constantes positivas. Note que, este é também um exemplo de sistema autônomo plano não-linear, que pode também ser interpretado através da teoria de estabilidade apresentada.

EXEMPLO 2

Problema: Ratos e corujas são mantidos em um ambiente experimental. Nas condições deste ambiente, os ratos têm alimento em abundância. As corujas, por sua vez, têm nos ratos a única fonte de alimento. Neste contexto, as corujas são as predadoras e os ratos as presas. Sabe-se ainda, que o crescimento excessivo do número de ratos promove aumento excessivo de resíduos por parte desta população e este fator junto às limitações de espaço caracterizam a queda do crescimento populacional destes indivíduos, sendo julgada, portanto, uma determinada capacidade suporte para população roedora.

Considerando $R(t)$ a população de ratos no dado ambiente conforme o tempo t e $W(t)$ a população de corujas neste mesmo contexto, cientistas conseguem verificar que as taxas de crescimento destas populações são dadas conforme as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= -0,001RW + 0,08R(1 - 0,0002R) \\ \frac{dW}{dt} &= -0,02W + 0,00002RW.\end{aligned}$$

Com base nestas informações, responder:

- Se inicialmente existissem apenas ratos, o que esperaríamos para o número destes quando t é um valor bastante grande?
- Supondo que a população inicial de ratos seja 1000 e a população de corujas 40, o que esperar destas populações com o variar do tempo?

Solução: Podemos perceber que este é um exemplo aprofundado do modelo presa-predador de Lotka-Volterra. Por conseguinte, sua resolução deve ser distinta se comparada à resolução do Exemplo 1.

Iniciaremos com a resolução do item a. Consideramos que inicialmente não existam corujas. Portanto, no tempo $t = 0$, temos que $W = 0$. Na verdade, para qualquer $t \geq 0$, a população de corujas será nula, pois, pensando em crescimento natural, a chegada de novas corujas ao ambiente depende exclusivamente da existência prévia de outras. Portanto, podemos verificar que o crescimento de ratos é regido pela equação seguinte:

$$\frac{dR}{dt} = 0,08R(1 - 0,0002R),$$

pois, $W = 0$.

Note que,

$$\frac{dR}{dt} = 0,08R \left(1 - \frac{R}{5000} \right).$$

O crescimento da população de ratos, na ausência de corujas, é caracterizado por uma equação de Verhulst, que define a existência de uma capacidade suporte ao ambiente, que impede a população de ratos de crescer infinitamente com o aumento contínuo de t .

Segundo tal equação, a população de ratos, na ausência de corujas - suas únicas predadoras no contexto descrito - se estabilizará em 5000 indivíduos. Esse valor é esperado indiferente do número inicial de ratos. É claro, entretanto, que se espera inicialmente populações de ratos não-nulas e aptas à reprodução. Se no contexto existir inicialmente 100 ratos do sexo masculino apenas, com o aumento de t , por mais que não haja competição e predação destes, a população roedora será extinta.

Agora, a resolução do item b. Considerando o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= -0,001RW + 0,08R(1 - 0,0002R) \\ \frac{dW}{dt} &= -0,02W + 0,00002RW, \end{aligned}$$

podemos perceber que o número de ratos e corujas se mantêm ambos constantes nos pontos críticos, ou seja, quando $R'(t) = 0$ e $W'(t) = 0$, simultaneamente. É fácil verificar que os pontos críticos deste sistema são $(0,0)$, $(5000,0)$ e $(1000,64)$. Os pontos descritos evidentemente caracterizam-se por pares ordenados do plano RW .

Embasado na teoria da seção 4.3, usando a matriz jacobiana associada ao sistema proposto

$$g'((R,W)) = \begin{pmatrix} 0,08 - 0,000032R - 0,001W & -0,001R \\ 0,00002W & -0,02 + 0,00002R \end{pmatrix},$$

é possível compreender a estabilidade dos pontos críticos encontrados.

Note que

$$g'((0,0)) = \begin{pmatrix} 0,08 & 0 \\ 0 & -0,02 \end{pmatrix}.$$

Como esta matriz possui um autovalor real positivo (o número 0,08), observamos pelo Teorema 11 que $(0,0)$ é um ponto crítico instável. Mais que isso, como o determinante desta matriz jacobiana é um valor menor que zero, a Figura 10 garante que este ponto crítico é um ponto de sela.

Por motivos semelhantes é observável também que o ponto crítico $(5000,0)$ é um ponto de sela, e por conseguinte, instável.

Por sua vez,

$$g'((1000,64)) = \begin{pmatrix} -0,016 & -1 \\ 0,00128 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores desta matriz não são números reais (são apenas complexos) e, além disso, seu traço é um valor menor que zero, a Figura 10 nos é suficiente para que entendamos que $(1000,64)$ é um ponto crítico espiral estável. Podemos interpretar, portanto, que populações inicialmente “próximas” a $(1000,64)$, ou seja, população de ratos em torno de 1000 indivíduos e população de corujas nas proximidades de 64 elementos, com o passar do tempo se estabilizarão em exatamente 1000 ratos e 64 corujas.

Considere (R_0, W_0) , par ordenado que caracteriza as populações iniciais não-nulas de ratos e corujas. Considerando que (R_0, W_0) não seja um ponto crítico, então a trajetória $(R(t), W(t))$ – que caracteriza as populações de ratos e corujas conforme o tempo t , $t \geq 0$ – se deslocará pelo plano podendo quiçá tender a $(0,0)$, $(5000,0)$ ou $(1000,64)$. Isto é possível inclusive para os pares ordenados $(0,0)$ e $(5000,0)$, pois, estes são pontos de sela, e nas suas proximidades há alguma trajetória de $(R(t), W(t))$ que convergirá para cada um destes pontos.

Entretanto, inicialmente as populações de ratos e corujas são caracterizadas conforme o problema pelo par ordenado $(1000,40)$. Métodos geométricos, como o campo de direções, podem nos indicar, conforme a Figura 12, o que se espera para o deslocamento de $(R(t), W(t))$ através das derivadas que caracterizam seus crescimentos ou decrescimentos ao variar-se de t .

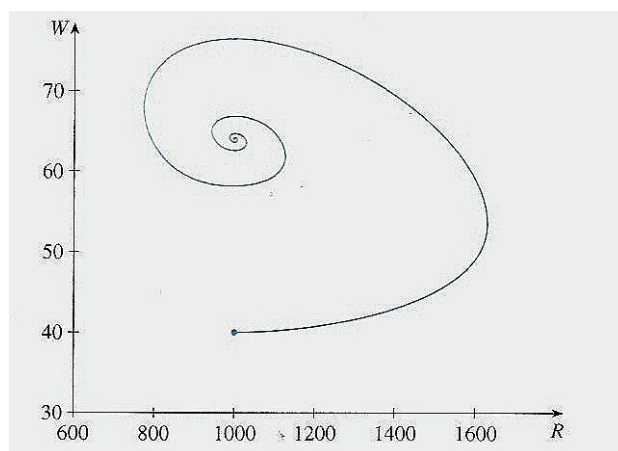


Figura 12

Como pode-se perceber, a trajetória iniciada em $(1000, 40)$ descreve uma espiral que tende a $(1000, 64)$ com o variar positivo do tempo. Biologicamente, interpreta-se que inicialmente não há corujas suficientes para manter o equilíbrio entre as populações; assim, a população roedora aumenta. O aumento da população de ratos faz crescer a oferta de alimento às corujas, que bem nutridas se reproduzirão aumentando também sua população. Quanto maior o número de corujas, mais frequentes são os encontros entre esta espécie com os ratos. Tendo dificuldades para se proteger, a partir de um determinado instante, a população de ratos começará a diminuir drasticamente.

Após algum tempo, a diminuição significativa no número de ratos, fará com que a população de corujas comece a diminuir, em virtude, sobretudo da ausência de alimentos. A diminuição do número de corujas beneficia a população roedora, que com o passar do tempo voltará a crescer, reiniciando o processo.

Apesar de lembrar a proposta do Exemplo 1, a atual situação caracteriza uma grande distinção em relação a anterior. No modelo de Lotka-Volterra original, o processo é cíclico. As populações variam conforme a estrutura descrita, passando exatamente pelos mesmos números de habitantes após um período de tempo p . Neste modelo apresentado no Exemplo 2, as etapas se repetem, entretanto, para números de habitantes distintos, o que não caracteriza um processo periódico. As populações oscilarão, ora crescendo, ora diminuindo, até se estabilizarem em 1000 ratos e 64 corujas. ■

5 CONCLUSÃO

O trabalho ressaltou a aplicabilidade da matemática. Através do qual foi possível aprofundar e solidificar conhecimentos, vinculados à teoria do Cálculo e da Álgebra Linear. A matemática em si, em todas as suas áreas de atuação, é rica em detalhes e inúmeros campos ainda podem ser aprofundados, servindo quiçá para interpretar de forma mais precisa a natureza e ajudar de maneira conveniente às tendências a desenvolver o mundo em que vivemos.

O projeto também me refletiu a necessidade de “cautela” na aplicação de teorias matemáticas. Um exemplo bastante presente no trabalho são as equações de Lotka-Volterra, que apesar da relativa coerência em sua fundamentação podem não ter na realidade o prognóstico esperado. A ecologia é um tema muito complexo. Os modelos para crescimento de populações na natureza podem não servir para uma interpretação precisa daquilo que de fato ocorre. Existem inúmeros e conflitantes fatores, que na realidade, acabam por impedir a verificação prevista matematicamente. São modelos, portanto, é de se esperar uma certa relevância entre previsões e resultados... Entretanto, a consciência de que estes são produzidos com base em situações ideais deve ser preservada, afim de que controvérsias entre a teoria e prática matemáticas sejam mais bem interpretadas, compreendidas e aceitas.

Além disso, vê-se ainda mais que assuntos como matrizes, determinantes, números complexos, funções e polinômios têm realmente grande importância e aplicabilidade no mundo contemporâneo. Isso estimula a aprofundar nestes níveis o ensino da matemática não unicamente fazendo-a de forma pura, sem motivação ao estudante. Tentar buscar aplicações aos conhecimentos matemáticos, fazendo com que o aluno entenda que a matemática é parte fundamental e presente em sua vida..

6 REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

PAULINO, R. P. **Biologia – volume único**. 7ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2001.

STEWART, J. **Cálculo, volume II**. 4ª ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Tradução Antonio Carlos Campos de Carvalho e Carlos Alberto Aragão de Carvalho. 3ª ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan, 1990.

CULLEN, M. R.; ZILL, D. G. **Equações diferenciais, volume I**. Tradução Antonio Zumpano. 3ª ed. São Paulo: Makron Books, 2001.

CULLEN, M. R.; ZILL, D. G. **Equações diferenciais, volume II**. Tradução Alfredo Alves de Farias. 3ª ed. São Paulo: Makron Books, 2001.