UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática
Curso de Matemática - Licenciatura

Ondas de Choque

Autor: Luiz Henrique Sardá
Orientador: Prof. Dr. Joel Santos Souza

Florianópolis
Setembro 2008

Luiz Henrique Sardá

Ondas de Choque

Trabalho acadêmico de graduação apresentado
à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II,
do Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura,
do Centro Ciências Físicas e Matemáticas da
Universidade Federal de Santa Catarina

Professora: Carmem Suzane Comitre Gimenez

Florianópolis
Setembro 2008

Ondas de Choque

por

Luiz Henrique Sardá

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 38/CMM/08.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez

Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Joel Santos Souza

Orientador

Prof. Dr. Félix Pedro Quispe Gómez

Prof. Dr. Jardel Morais Pereira

Agradecimentos

A Deus.

Aos professores da banca que se dispuseram a ler este trabalho.

A todos os professores do curso que, de uma maneira ou de outra, contribuíram para que eu chegasse aqui. Principalmente aos professores Rubens, pelos seus ensinamentos, e Joel pela orientação deste trabalho realizada com muita responsabilidade, empenho, incentivo e dedicação, que contribuiu significamente para o resultado alcançado. Obrigado a todos pela dedicação, compreensão e pelos ensinamentos ministrados.

Agradeço a todos os funcionários e colegas de curso, especialmente às amigas Scheila, Fabiana e, ao amigo, Felipe.

À minha família pelo apoio e confiança em todos os momentos. Especialmente à minha mãe pelo grande incentivo demonstrado durante o curso.

Sumário

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é fazer um breve estudo sobre o método das características para resolução de equações diferenciais parciais de 1ª ordem e, de modo particular, na resolução da equação diferencial parcial não-linear de Burger.

No primeiro capítulo, introduziremos alguns conceitos que serão importantíssimos ao longo do nosso estudo de EDP's, tais como: a definição de função de n variáveis, algumas notações sobre conjuntos numéricos e derivadas parciais e os conceitos de linearidade, superposição e condições iniciais e de contorno.

No segundo capítulo, estudaremos, brevemente, um método de resolução de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem. Esse método é aplicado para as equações diferenciais exatas. No caso da EDO não ser exata, veremos que é possível transformá-la em uma EDO exata, através da multiplicação por um fator integrante.

No terceiro capítulo, estudaremos o problema de Cauchy (P.V.I) para as equações lineares da forma $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)$, cujo valor inicial pode ser dado por $u(\sigma(t), \rho(t)) = f(t), t \in I$. Provaremos, sob determinadas condições, que problemas desse tipo têm uma única solução de classe C^1 numa vizinhança da curva γ em Ω. Ainda nesse capítulo, procuraremos a solução geral de alguns tipos de EDP's de 1ª ordem.

No quarto capítulo, veremos que há propagação de singularidades através das curvas características, quando há uma descontinuidade na função f dada.

E, por fim, estudaremos as ondas de choque: veremos que EDP's não-lineares de 1ª ordem do tipo Burger não apresentam solução única, pois há interseção de características planas. Então, devemos proceder escolhendo uma solução que tenha significado físico (uma solução que satisfaça a condição de entropia, ou seja, uma solução em que a velocidade das partículas, antes da onda de choque, seja maior que a velocidade depois da onda de choque).

Capítulo 1

Definições preliminares

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos básicos que serão importantes ao longo de nosso estudo. Daremos aqui a definição de equação diferencial e mostraremos os tipos principais de equações diferenciais que podem ocorrer.

Definição 1.1. *De modo geral, uma equação diferencial é uma equação envolvendo uma função e suas derivadas, cuja incógnita é uma função.*

Existem dois tipos principais de Equações Diferenciais.

1. Equação Diferencial Ordinária (EDO): Quando a função envolvida é de uma variável;
2. Equação Diferencial Parcial (EDP): Quando a função envolvida depende de várias variáveis.

Vejamos alguns exemplos de equações diferenciais:

Exemplo 1.2. $\frac{dy}{dx} = 3x - 1 \quad$ (EDO).

Exemplo 1.3. $xdy - ydx = 0 \quad$ (EDO).

Exemplo 1.4. $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $u = u(t, x) \quad$ (EDP - equação do calor).

1.1 Definições Básicas

Introduziremos algumas notações e terminologia, conforme seguem:

- $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq 1\}$ - conjunto dos números naturais;

- $\mathbb{Z}$ = conjunto dos números inteiros;
- $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq 0\}$ - conjunto dos números inteiros não negativos;
- $\mathbb{C}$ = conjunto dos números complexos;
- $\mathbb{R}^n$ = espaço euclidiano de dimensão n, onde $\{n \in \mathbb{Z}; n \geq 1\}$ (Observação: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$).

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, um aberto, e u: $\Omega \to \mathbb{R}^n$, $(x, y, z, t, ...) \mapsto u(x, y, z, t, ...)$ uma função de várias variáveis. Existem várias notações para as derivadas parciais de u. Por exemplo, a derivada parcial de u em relação à variável x, que é a primeira variável, poderá ser denotada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, u_x, \partial_x u \ \ ou \ \ D_1 u.$$

Analogamente, denotaremos as derivadas de segunda ordem por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xx}, \partial_x^2 u \, ou \ D_1^2 u.$$

No caso de derivação em relação a variável x e depois em relação a y, denotaremos por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, u_{xy}, \partial_y \partial_x u \, ou \ D_2 D_1 u.$$

Em geral, uma equação diferencial ordinária (EDO), envolvendo uma função y= f(x), é uma equação da forma

$$F(x, f(x), f^{'}(x), f^{''}(x), ..., f^n(x)) = 0,$$

sendo $F(x, y_0, y_1, ..., y_n)$ alguma função.

Uma *equação a derivadas parciais ou equação diferencial parcial (EDP)* é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes $(x_1, ..., x_n)$ e derivadas parciais de uma função u $= u(x_1, ..., x_n)$. De maneira mais precisa, uma EDP com n variáveis independentes $(x_1, ..., x_n)$ é uma equação da forma

$$F(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}) = 0 \qquad (1.1)$$

onde $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, é um aberto, F é uma função dada e $u = u(x)$ é a função que queremos determinar.

A *ordem* de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que aparece na equação. A ordem da equação (1.1) é k se F, como função de alguma das derivadas de ordem k, é não constante.

Uma EDP é dita *linear* se é de primeiro grau em u e em todas as suas derivadas parciais que aparecem na equação; caso contrário a EDP é dita *não linear*.

A forma geral de uma EDP linear de primeira ordem é

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)D_j u + b(x)u + c(x) = 0, \tag{1.2}$$

onde algum dos coeficientes a_j não é identicamente nulo.

No caso de duas variáveis independentes, $\vec{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, a equação (1.2) pode ser reescrita como:

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u + D(x,y) = 0. \tag{1.3}$$

Uma EDP linear é dita *homogênea* se o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo. Por exemplo, a equação (1.3) é homogênea se, e somente se, D(x,y)=0.

Observação: u=0 é sempre solução de qualquer EDP linear homogênea.

A *parte principal* de uma EDP é a parte da equação que contém as derivadas de maior ordem que, em muitos casos, determina as propriedades das soluções. Por exemplo, a parte principal da equação (1.3) é

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y. \tag{1.4}$$

As equações não lineares que tem parte principal linear são chamadas de *equações semi-lineares.*

Por exemplo, uma EDP de primeira ordem, semi-linear com 3 variáveis independentes (x,y e z) é da forma

$$A(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = F(x,y,z,u).$$

Vejamos alguns exemplos de EDP's:

Exemplo 1.5. $xu_x - yu_y = sen(xy)$ é uma EDP não homogênea de 1ª ordem.

Exemplo 1.6. A **equação de Burger, com viscosidade** $\partial_t u + u\partial_x u = v\partial_x^2 u$, onde v é constante, é semi-linear, mas de segunda ordem .

1.2 Linearidade e Superposição

As considerações que faremos a seguir são válidas para equações diferenciais parciais (EDP's) linerares de qualquer ordem mas, para fixar as idéias, vamos considerar uma EDP de primeira ordem com n variáveis independentes $x_1, x_2, ..., x_n$.

Seja $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos a equação

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)D_j u + b(x)u + c(x) = 0, \tag{1.5}$$

ou seja, existe $j, 1 \leq j \leq n$, tal que $a_j \neq 0$

Podemos reescrever a equação (1.5) na forma

$$Lu = f \tag{1.6}$$

onde f(x) = -c(x) e

$$Lu(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_j u + b(x)u. \tag{1.7}$$

A cada função u diferenciável corresponde única função Lu; dessa maneira definimos um operador ou transformação L.

De forma mais precisa: Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n \, e \;\; a_j \;\, e \, b, 1 \leq j \leq n$, são contínuas em Ω e tomam valores reais.

Podemos definir:

$$\begin{array}{rccc} L: & C^1(\Omega) & \rightarrow & C(\Omega) \\ & u & \mapsto & Lu. \end{array}, \tag{1.8}$$

onde Lu é dado pela fórmula (1.7); $C^1(\Omega)$ é o conjunto das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, continuamente diferenciáveis; C(Ω) é o conjunto das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, contínuas.

A função L está definida entre espaço de funções, isto é, L leva uma função u (determinadas propriedades) em outra Lu.

O operador L é um exemplo de um operador diferencial parcial.

O fato da equação (1.5) ser linear implica que o operador definido por (1.7) e um operador linear, ou seja: L(0)= 0 (L leva a função identicamente nula nela mesmo) e

$$L(u + \alpha v) = Lu + \alpha Lv, \forall\, u, v \in D(L) \;\, e \;\, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

$$L(u) = 0, \; \textit{é a equacão homogênea associada a equacão } (1.2) \tag{1.10}$$

Usando a linearidade de L e indução podemos verificar que qualquer combinação linear de soluções da equação (1.10) é também solução de (1.10), isto é: se $u_1, ..., u_m$ satisfazem (1.10) e α_1,...,$\alpha_m \in \mathbb{R}$ então

$$u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j \tag{1.11}$$

é também solução de (1.10). Em outras palavras, L é um operador linear definido num espaço vetorial V de funções ($V = C^1(\Omega)$) e as soluções de $u \in V$ da equação (1.10), formam um subespaço vetorial de V. Esse resultado é conhecido como princípio da superposição (na sua forma finita).

O espaço de soluções de EDP's lineares homogêneas, equação (1.10), pode ter dimensão infinita. Além disso existem EDP´s lineares de 1ª ordem que não tem solução.

Exemplo 1.7. Procuraremos soluções clássicas da equação linear homogênea

$$u_{xy} = 0, \tag{1.12}$$

para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Queremos encontrar uma solução clássica u = u(x,y). Seja o operador L, dado por

$$\begin{array}{rlcl} L: & C^2(\mathbb{R}^2) & \to & C(\mathbb{R}^2) \\ & u & \mapsto & (Lu)(x,y) = u_{xy}(x,y) \end{array}$$

Integrando (1.12) em relação a y, ou seja, fixando a variável x, obtemos: $\int (u_{xy})dy = 0$, então

$$u_x(x, y) = F(x), \tag{1.13}$$

onde F(x) é uma função em $C^1(\mathbb{R})$, arbitrária.

Fixando agora a variável y e integrando (1.13) em relação a x, obtemos: $\int (u_x(x, y))dx = \int (F(x))$, então

$$u(x, y) = f(x) + g(y), \tag{1.14}$$

onde f é uma primitiva de F em $C^2(\mathbb{R})$ e g é uma função arbitrária em $C^2(\mathbb{R})$.

Como F é arbitrária, então f e g são funções arbitrárias em $C^2(\mathbb{R})$.

Queremos soluções $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Como todas as funções da forma (1.14), com f e $g \in C^2(\mathbb{R})$, são soluções da equação (1.12), concluímos que o espaço das soluções clássicas de (1.12) é precisamente o conjunto

$$u \in C^2(\mathbb{R}^2) : \{u(x, y) = f(x) + g(y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}, f\ e\ g \in C^2(\mathbb{R}).$$

Portanto, o espaço das soluções tem dimensão infinita.

1.3 Princípio da Superposição

Proposição 1.8. *Seja L um operador diferencial parcial linear de 1ª ordem cujos coeficientes estão definidos num aberto* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$*. Suponha que* $(u_m)_{m=1}^{+\infty}$ *é um conjunto de funções de classe* C^1 *em* Ω *satisfazendo a EDP linear homogênea (1.10). Então, se* $(\alpha_m)_{m=1}^{+\infty}$ *é uma sequência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x) \tag{1.15}$$

é convergente e diferenciável termo a termo em Ω*, u satisfaz* $Lu = 0$*.*

Demonstração: Não demonstrado (ver [7]).

1.4 Condições de Contorno e Iniciais

Estamos procurando as soluções que estão definidas num aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

É natural substituir os extremos do intervalo (caso n=1) pela fronteira (ou bordo) $\partial\Omega$ da região Ω. Quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo da região (condições de contorno) temos um problema de valores de contorno ou, simplesmente, problema de contorno.

Condições Iniciais: Em EDP's temos mais de uma variável independente. É natural fixar uma delas e impor o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis (por exemplo $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$, f e g sendo funções dadas).

Observe que se n=2, com variáveis x e t, isso significa impor o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo da curva t=0; analogamente, no caso n=3, com variáveis x, y e t, fixar t=0 significa olhar a solução (e suas derivadas normais, se for o caso) ao longo da superfície t=0.

Podemos generalizar o conceito de condições iniciais impondo o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo de uma curva (se n=2) ou superfície (se n=3) inicial. O problema correspondente é um *problema de Cauchy ou valor inicial.*

Quando temos uma EDP com *condições iniciais e condições de contorno* temos um *problema misto.*

Exemplo 1.9. O problema $\begin{cases} u_y = 0 \, em \ \mathbb{R}^2 \\ u(x, p(x)) = f(x), \, x \ \in \ \mathbb{R} \end{cases}$

onde $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ são funções dadas, é um problema de Cauchy. Como a EDP e de 1ª ordem, basta impor o valor da solução na curva inicial y=p(x) no plano (tem solução clássica).

Exemplo 1.10. O problema $\begin{cases} u_y = 0 \, em \ \mathbb{R}^2 \\ u(0, y) = f(y), \, y \ \in \ \mathbb{R} \end{cases}$

é também um problema de Cauchy envolvendo uma EDP linear de 1ª ordem. A curva inicial é o eixo dos y. Ao contrário do exemplo anterior não tem solução (se f não é constante) ou tem uma infinidade de soluções (se f é constante)

Veremos, porque isso acontece e quando existe solução única para o problema de Cauchy envolvendo EDP's lineares de 1ª ordem em duas variáveis independentes.

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Desejamos aqui, de forma breve, fazer um estudo do método de resolução para Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) de 1ª ordem e 1º grau. Este método consiste em verificar se uma determinada EDO é uma equação diferencial exata e aplicar, então, o método de resolução; caso a EDO não seja exata, a transformaremos em uma equação diferencial exata, através da multiplicação por um fator integrante, de modo que seja possível a aplicação do método de resolução para as EDO's exatas.

Mostraremos, também, que é possível transformar uma EDO linear completa de 1ª ordem em uma equação diferencial exata, através de um fator integrante, possibilitando, assim, a resolução da EDO pelo mesmo método.

Antes, porém, veremos, atráves do Teorema que enunciaremos abaixo, que existe solução única para problemas de Cauchy envolvendo EDO's de 1ª ordem.

2.1 Existência e Unicidade de Soluções

Teorema 2.1. ***(Teorema de Peano)*** *Seja $f : D \to \mathbb{R}$, D domínio de $\mathbb{R}^2$, uma função.*

Considere o PVI:

$$\begin{cases} y^{'} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

com $(x_0, t_0) \in D$.

Se $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ são contínuas em D, então (2.1) possui uma única solução definida em algum intervalo I contendo x_0.

Demonstração: *Não demonstrado (Ver [5]).*

Observação: Podemos substituir as hipóteses acima por f(x,y) contínua em D e

Lipschitziana em D relativamente à segunda variável, isto é, que existe $K > 0$ tal que

$$|f(x, y_0) - f(x, y_1)| \leq K|y_0 - y_1|,$$

para todo $(x, y_0), (x, y_1) \in D$.

2.2 Equações Diferenciais Ordinárias Exatas

Definição 2.2. *Uma equação diferencial ordinária da forma*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.2}$$

é denominada exata quando existe uma função u(x,y), de classe C^1 em $\mathbb{R}$, cuja diferencial total é dada por:

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy, \text{ em } R$$

onde R é o retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a < x < b \text{ e } c < y < d\}$, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.

Fazendo uma aplicação do teorema que apresentaremos abaixo, podemos checar se uma EDO do tipo (2.2) é exata ou não, bem como calcular a função u, que é a solução de (2.2) a menos de uma constante (acrescida de uma constante).

Teorema 2.3. *A equação (2.2), onde M e N são funções de classe $C^1(\mathbb{R})$ com derivadas contínuas é uma EDO exata se, e somente se, ocorrer a relação*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \text{ em } R. \tag{2.3}$$

Assim, a relação (2.3) é condição necessária e suficiente para que a equação (2.2) seja uma EDO exata.

Demonstração:

1. **A condição é necessária**
   Mostraremos que se Mdx + Ndy = 0 é diferencial total, então

   $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

   Por hipótese, o primeiro membro de (2.2), Mdx + Ndy, é diferencial total, então existe u(x,y), tal que

   $$du = Mdx + Ndy. \tag{2.4}$$

Por outro lado, u = u(x,y) é solução de (2.2), então a diferencial de u pode ser escrita como:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{2.5}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y} = Mdx + Ndy. \tag{2.6}$$

Comparando (2.6), obtemos:

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.7}$$

e

$$N = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.8}$$

Derivando (2.7) em relação a y e (2.8) em relação a x, temos respectivamente

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Se $u \in C^2$, isto é , $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ são contínuas em $\mathbb{R}$.
Logo, pelo teorema de Schwartz,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Assim, a condição (2.3) é necessária para que o primeiro membro de (2.2) seja a diferencial total de u(x,y).

2. **A condição é suficiente**
   Mostraremos que vale a volta, ou seja, se (2.3) é verificada então o primeiro membro de (2.2) é diferencial total de u(x,y).
   Podemos achar u, solução de (2.2), integrando (2.7):

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \phi(y),\ onde\ \phi(y)\ é\ \ uma\ \ funcão\ arbitrária\ de\ y. \tag{2.9}$$

Derivando (2.9) em relação a y, obtemos: $N = \frac{\partial u}{\partial y} = \int \frac{\partial M}{\partial y}dx + \phi^{'}(y)$.
Ou seja, $\phi^{'}(y) = N - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx,\ que\ \ resulta\ \ em\ \phi(y) = \int (N - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx)dy.$

Como u(x,y) = constante, temos, finalmente:

$$\int M(x,y)dx + \int (N - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx)dy = K,$$

que é a solução geral de uma equação diferencial exata.

□

2.3 Equações Diferenciais Ordinárias Não Exatas

É comum nos depararmos com equações diferenciais do tipo (2.2) que não são equações diferenciais exatas, ou seja, tais que $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$.

No entanto, é possível mostrar-se que há uma infinidade de funções $\lambda(x, y)$, para as quais a EDO $\lambda.(Mdx + Ndy) = 0$, se torna uma equação diferencial ordinária exata, onde λ denomina-se fator integrante da equação (2.2).

Essa função λ, quando considerada como dependendo de uma única variável, pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\lambda(y) = e^{\int \psi(y)dy}, \; onde \; \psi(y) = \frac{1}{M}(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})$$

$$ou$$

$$\lambda(x) = e^{\int \psi(x)dx}, \; onde \; \psi(x) = \frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}).$$

2.4 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Completas

Vamos estudar agora um caso particular de EDO's da forma (forma normal):

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), x \in I, \tag{2.10}$$

onde P(x) e Q(x) são funções que dependem apenas da variável x e estão definidas em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

Uma outra maneira, mais geral, de se escrever a equação (2.10), é através da forma

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x), x \in I, \tag{2.11}$$

onde $a_0(x), a_1(x) \; e \; b(x)$ são funções apenas de x, definidas em I. Quando $a_0(x) \neq 0$, para todo $x \in I$, (2.11) pode ser reduzida à forma normal (2.10).

Podemos, ainda, reescrever (2.10) na forma

$$y' = f(x, y), \tag{2.12}$$

com $f(x, y) = -P(x)y + Q(x)$, em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in I\}$.

Definição 2.4. *Uma equação diferencial ordinária é dita linear completa se é da forma*

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \tag{2.13}$$

onde P e Q são funções de x ou constantes. Ela é dita linear homogênea ou incompleta, quando Q=0

A equação (2.13) pode ser reescrita como

$$(Py - Q)dx + dy = 0, \tag{2.14}$$

que é uma equação do tipo M(x,y)dx + N(x,y)dx = 0.

Vimos, anteriormente, que uma equação do tipo (2.14) pode ser classificada como equação diferencial ordinária exata ou não exata, e apresentamos um método para o cálculo da função u(x,y), que dá a solução da EDO, nesses casos.

Caso a equação (2.14) não seja uma EDO exata, um fator de integração que a torna exata é dado por,

$$\lambda(x) = e^{\int Pdx}.$$

Assim, a EDO $e^{\int Pdx}[(Py - Q)dx + dy] = 0$ é exata e o método utilizado anteriormente pode ser aplicado.

Capítulo 3

O Problema de Cauchy

Neste capítulo vamos estudar o problema de de Cauchy (P.V.I) para EDP's de 1ª ordem da forma

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y). \tag{3.1}$$

Para isto, seja γ uma curva plana inicial. Parametrizando-a por $(\sigma(t), \rho(t)), t \in I$, onde I é um intervalo aberto, podemos escrever o problema na forma

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) = f(t), t \in I. \end{cases} \tag{3.2}$$

Consideremos as seguintes hipóteses adicionais:

(i) a curva inicial γ é uma curva suave, ou seja, as funções σ e ρ são continuamente diferenciáveis em I e $\sigma^{'}(t)^2 + \rho^{'}(t)^2 \neq 0$, qualquer que seja $t \in I$;

(ii) $f \in C^1(I)$;

(iii) $a, b, c \in C^1(\Omega)$ e as funções a, b não se anulam ao mesmo tempo em Ω, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é um aberto contendo γ.

Para resolver o problema (3.2) precisamos, primeiramente, achar as curvas características planas da equação (3.1) (essas são curvas ao longo das quais a EDP pode ser escrita como uma derivada total).

As curvas características planas da equação (3.1) são curvas suaves que admitem a parametrização $(\alpha(s), \beta(s))$ satisfazendo

$$\begin{cases} \alpha^{'}(s) = a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta^{'}(s) = b(\alpha(s), \beta(s)). \end{cases} \tag{3.3}$$

Para obter uma solução única para o sistema de EDO's acima, precisamos de um par de condições iniciais. Como $a, b \in C^1(\Omega)$, *dado* $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe uma única solução

$(\alpha(s), \beta(s))$ de (3.3) para s numa vizinhança de s_0 tal que

$$\alpha(s_0) = x_0, \beta(s_0) = y_0. \tag{3.4}$$

A existência e a unicidade de solução do problema (3.2) depende de como as curvas características intersectam a curva inicial γ.

Mostraremos, através do Teorema abaixo, que o problema (3.2) tem solução única numa vizinhança de γ (coberta por características planas).

Teorema 3.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto, γ uma curva suave em Ω parametrizada por $(\sigma(t), \rho(t)), t \in I, f \in C^1(I)$ e $a, b, c \in C^1(\Omega)$. Suponha que $a(x,y)^2 + b(x,y)^2 \neq 0, \forall (x,y) \in \Omega$, e*

$$\begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \forall t \in I.$$

Então, o problema (3.2) tem uma única solução de classe C^1 numa vizinhança da curva γ em Ω. Essa solução é dada por

$$u(x_0, y_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s,t_0), y(s,t_0))ds$$

Observação: A solução no ponto $(x_0, y_0) = (x(s_0,t_0), y(s_0,t_0))$ é obtida integrando-se a EDP ao longo da característica que passa por (x_0, y_0), de s=0 até $s = s_0$.

Demonstração: Consideraremos que as curvas características não são tangentes a curva inicial Ω. Então, o vetor tangente $(\sigma'(t), \rho'(t))$ e o vetor $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$ não são paralelos (ou seja, não são linearmente dependentes).

Com esta hipótese, para cada $t \in I$, existe uma única curva característica plana passando pelo ponto $(\sigma(t), \rho(t))$, que é a solução de (3.5) e (3.6):

$$\begin{cases} \alpha'(s) = a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta'(s) = b(\alpha(s), \beta(s)) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\Big\{ \ \alpha(s_0) = \sigma(t), \beta(s_0) = \rho(t), t \in I \tag{3.6}$$

numa vizinhança de s_0 (tomar $s_0 = 0$ para simplificar).

Além disso, $(\sigma(t), \rho(t))$ é o único ponto da curva característica que intersecta a curva inicial γ. Do contrário, haveria um ponto sob a curva característica cujo vetor tangente seria paralelo a $(\sigma'(t), \rho'(t))$, contradizendo a hipótese. Desse modo, podemos cobrir a vizinhança de γ através de curvas caracterísitcas contidas em Ω, e que intersectam γ num único ponto.

Isso permite fazer a mudança de varável $(x, y) \mapsto (s, t)$. Agora, para cada $t \in I$, denotamos a curva característica que passa por $(\sigma(t), \rho(t))$ por (x,y) $= (x(s, t), y(s, t))$. Fazendo isso, podemos reescrever (3.5) e(3.6) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x_s(s,t) = a(x(s,t), y(s,t)) \\ y_s(s,t) = b(x(s,t), y(s,t)) \\ x(0,t) = \sigma(t), y(0,t) = \rho(t), t \in I. \end{cases}$$

Agora note que:

$$0 \neq det \begin{pmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma^{'}(t) & \rho^{'}(t) \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} x_s(0,t) & y_s(0,t) \\ x_t(0,t) & y_t(0,t) \end{pmatrix},$$

para todo $t \in I$. Então, por continuidade,

$$det \begin{pmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{pmatrix} \neq 0.$$

Logo, a transformação $(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t))$ é localmente injetora. Podemos, então, fazer a mudança de variável $(x, y) \mapsto (s(x, y), t(x, y))$ e considerar a mudança v(s,t) $=$ u(x,y).

Daí, tem-se:

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = au_x + bu_y = c(x,y)$$

A condição inicial para v é:

$$v(0,t) = u(x(0,t), y(0,t)) = u(\sigma(t), \rho(t)) = f(t), \forall t \in I.$$

Então v deve ser solução do problema de Cauchy (P.V.I)

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial s}(s,t) = c(x(s,t), y(s,t)) \\ v(0,t) = f(t), \forall t \in I. \end{cases}$$

Este é um problema de valor inicial para uma EDO de 1ª ordem, para cada t fixo, cuja solução é obtida integrando de s=0 a s, que resulta em:

$$v(s_0, t_0) = v(0, t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s, t_0), y(s, t_0))ds$$

$$ou$$

$$v(s_0, t_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s, t_0), y(s, t_0))ds.$$

Para voltar para u(x,y), dado (x_0, y_0), nessa vizinhança de γ, seja (s_0, t_0) tal que $s_0 = s(x_0, y_0)$ e $t_0 = t(x_0, y_0)$, isto é,

$$\begin{cases} x_0 = x(s_0, t_0), \\ y_0 = y(s_0, t_0), \end{cases}$$

Então

$$u(x_0, y_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s,t_0), y(s,t_0))ds. \tag{3.7}$$

Se u é solução de (3.2) então u satisfaz (3.7). Como (3.7) é solução de (3.2), está demonstrado que (3.2) tem solução única. □

Vimos que (3.7) é solução de problema do tipo (3.2).

Veremos agora como encontrar a solução geral de uma EDP linear de 1ª ordem com coeficientes constantes, que pode ser escrita como

$$av_x + bv_y + cv = d, \tag{3.8}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$.

O método para encontrar a solução geral de (3.8) é, de certa forma, semelhante ao método para encontrar a solução única de (3.2).

Devemos procurar uma mudança de variável que coloque a equação (3.8) numa forma mais simples: seja s=s(x,y), t=t(x,y) tal que t é constante ao longo das curvas características planas.

As características planas satisfazem, neste caso:

$$x^{'}(s) = a, \textit{ então } \ x(s) = as + c_1 \tag{3.9}$$

$$y^{'}(s) = b, \textit{ então } \ y(s) = bs + c_2 \tag{3.10}$$

Por (3.9) temos:

$$s = \frac{x - c_1}{a}. \tag{3.11}$$

Substituindo (3.11) em (3.10) temos: $y = b(\frac{x-c_1}{a}) + c_2$. Então: $ay = bx - bc_1 + c_2$ e, daí: $ay - bx = k_1$. Concluímos que as curvas características planas são as retas $ay - bx = k_1$, sendo k_1 constante.

As retas ortogonais a essas são as retas $by + ax = k_2$, sendo k_2 constante.

Tomando t constante ao longo das retas características e s constante ao longo das retas ortogonais, obtemos

$$\begin{cases} s = ax + by \\ t = -bx + ay \end{cases} \tag{3.12}$$

Com a mudança de variável (3.12), a equação (3.8) fica

$$(a^2 + b^2)w_s + cw = d \tag{3.13}$$

Para cada t fixo, a equação (3.13) é uma EDO de 1ª ordem com fator integrante

$$(\frac{1}{a^2 + b^2})^{(\frac{cs}{a^2+b^2})} \tag{3.14}$$

Multiplicando (3.13) por (3.14) tornamos a EDO exata e obtemos

$$\frac{\partial}{\partial s}[w^{(\frac{cs}{a^2+b^2})}] = \frac{d}{a^2+b^2}^{\frac{cs}{a^2+b^2}}$$

Portanto, se $c \neq 0$, a solução geral de (3.13) é

$$w(s,t) = \frac{d}{c} + f(t)^{(\frac{-cs}{a^2+b^2})}$$

e a solução geral de (3.8) é

$$v(x,y) = \frac{d}{c} + f(-bx-ay)^{(\frac{-c}{a^2+b^2}(ax+by))}$$

no caso de c=0, a solução geral de (3.13) é

$$w(s,t) = \frac{d}{a^2+b^2}s + f(t)$$

e a solução geral de (3.8) é $v(x,y) = \frac{d}{a^2+b^2}(ax+by) + f(-bx+ay)$, onde $f \in C^1(\mathbb{R})$ é arbitrária.

A idéia acima também pode ser utilizada no caso dos coeficientes de (3.8) não serem constantes.

Assim, as curvas características planas satisfazem

$$\begin{cases} x^{'}(s) = a(x(s), y(s)) \\ y^{'}(s) = b(x(s), y(s)), \end{cases}$$

e portanto são soluções da EDO de 1ª ordem

$$a(x,y)dy - b(x,y)dx = 0 \tag{3.15}$$

Se as soluções da EDO (3.14) forem da forma t(x,y)=k, onde k é uma constante arbitrária. É natural tomar t como uma das nossas novas variáveis. Há uma certa liberdade na escolha da variável s, bastando garantir que o jacobiano

$$det \begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} \neq 0,\ em\ \Omega.$$

Observe que se $t_y \neq 0$ em Ω (respectivamente, $t_x \neq 0\, em\ \Omega$), podemos tomar s=x (respectivamente, s=y).

Capítulo 4

EDP's de 1ª ordem

Neste capítulo estudaremos, principalmente, o método das características para resolução de EDP's de 1ª ordem do tipo Burger. Antes, porém, discutiremos as singularidades que se propagam ao longo das características planas.

4.1 Propagação de Singularidades

Consideremos novamente o seguinte problema de Cauchy (P.V.I)

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y) \\ u(\sigma(t),\rho(t)) = f(t), t \in I, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde I é um conjunto aberto; $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$ é uma curva inicial suave; a, b e c são funções que pertencem a $C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, é aberto com $\gamma \subseteq \Omega$ e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função dada.

O problema (4.1) tem uma única solução clássica, numa vizinhança de γ, se $f \in C^1(I)$ e se γ não é tangente as curvas características planas C_t.

A solução no ponto $(x_0, y_0) = (x(s_0,t_0), y(s_0,t_0))$ é obtida integrando-se a equação ao longo da característica C_{t_0}, de s=0 a $s = s_0$, onde em s=0, temos

$$(\sigma(t_0), \rho(t_0)) = (x(0,t_0), y(0,t_0)) \in \gamma \cap C_{t_0}.$$

Portanto, a solução em (x_0, y_0) depende apenas do dado inicial em $(\sigma(t_0), \rho(t_0)) \in \gamma$ e, por essa razão, $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ é chamado de *domínio de dependência* de (x_0, y_0).

A *região de influência*, $\widetilde{\gamma} \subset \gamma$, é o conjunto dos pontos por onde passam as características planas que intersectam $\widetilde{\gamma}$.

Se $f \notin C^1(I)$, mantendo a hipótese sobre γ, então não teremos uma solução clássica, isto é, $u \notin C^1(\Omega)$.

Se $f($ *ou* $f')$ tem uma descontinuidade em t_0, então u, ou alguma de suas derivadas, terá descontinuidades ao longo da característica que passa por $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$. Portanto as *singularidades são propagadas ao longo das caracterísitcas.*

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.1. Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = 4xy \\ u(x,0) = f(x), x \geq 0 \end{cases}$$

onde,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0\leq \text{x} \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Solução: Seja a curva inicial γ: y=0 (o eixo $0\vec{x}$). As curvas características são descritas por: $-ydy - xdx = 0$. Daí, $\frac{-y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = k$ e, portanto, $x^2 + y^2 = K$.

Assim, as curvas características C são circunferências centradas na origem, parametrizadas por:

$$C : \begin{cases} x(r,\theta) = rcos\theta \\ y(r,\theta) = rsen\theta, \end{cases}$$

que resulta em $r^2 = x^2 + y^2$, isto é, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Assim, ao longo das circunferências, usando coordenadas polares, a EDP fica

$$\frac{d}{d\theta}[u(rcos\theta, rsen\theta)] = 4r^2(sen\theta)(cos\theta).$$

Daí, $v(r,\theta) = \displaystyle\int_0^{\theta(x,y)} (4r^2 sen\theta.cos\theta)d\theta + u(r,\theta).$

Integrando o lado direito da igualdade acima obtemos: $v(r,\theta) = [2r^2 sen^2\theta]_0^{\theta(x,y)} + f(r) = 2r^2sen^2\theta - 2r^2sen^2 0 + f(r)$.

Então, $v(r,\theta) = 2r^2sen^2\theta + f(r)$.

E, finalmente, $u(x,y) = 2y^2 + f(\sqrt{x^2 + y^2})$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - (0,0)$.

Como $\sqrt{x^2 + y^2}$ não é diferenciável na origem, então a diferenciabilidade de u vai depender de f.

Suponha que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \textit{ então } \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \textit{ e } f(\sqrt{x^2+y^2}) = (\sqrt{x^2+y^2})^2 = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 > 1, \textit{ então } \sqrt{x^2+y^2} > 1 \textit{ e } f(\sqrt{x^2+y^2}) = 1 \end{cases}$$

Assim, u(x,y) =

$$\begin{cases} 3y^2 + x^2, \textit{ para } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 2y^2 + 1, \textit{ para } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

e, portanto, $u \in C(\mathbb{R}^2)$. Mas $u \notin C^1(\mathbb{R}^2)$, pois u não é diferenciável na circunferência $x^2 + y^2 = 1$. u satisfaz a equação diferencial parcial no interior da característica $C_1(0)$ e no exterior da característica $C_1(0)$, onde $C_1(0)$ é a característica plana passando por (1,0) e $\gamma \cap C_1(0)$.

Exemplo 4.2. Consideremos agora o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x + bu_y = 0 \\ u(0,y) = \frac{1}{y} \qquad \text{y} \neq 0\text{, onde b é constante} \end{cases}$$

Solução: Seja a curva inicial γ: $x = 0$ (o eixo $0\vec{y}$, mas $y \neq 0$). As curvas características são descritas por: $C_t : 1dy - bdx = 0$, *então* $y - bx = c$. Daí temos $y = bx + c$, onde c é constante.

Tomando $t(x,y) = y - bx$. Como $t_x = -b$ e $t_y = 1$, então podemos tomar $s = x$.

Assim, $C : \begin{cases} x = s \\ y = t + bs, \end{cases}$

então $v(s,t) = u(x(s,t), y(s,t))$, t=k em C. Derivando em relação a s (t fixo), obtemos: $\frac{dv}{ds} = u_x x_s + u_r y_s = u_x.1 + u_y.b$

$$\int_0^s (\frac{dv}{ds})ds = \int_0^s 0ds, \text{ então } v(s,t) = v(0,t)$$

$$v(0,t) = u(x(0,t), y(0,t)) = u(0,t) = \frac{1}{t}$$

Assim, $v(s,t) = \frac{1}{t}$, então $u(x,y) = \frac{1}{y-bx}, y \neq bx, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ é solução do problema no sentido que u satisfaz a EDP fora da reta y=bx .

A situação no caso não linear, tanto no que se refere à propagação de singularidades quanto ao comportamento da solução, é bastante diferente.

4.2 Equação de Burger

Vejamos as EDP's não lineares de 1ª ordem da forma

$$u_t + (f(u))_x = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}, f \in C^2. \tag{4.2}$$

A equação (4.2) pode ser reescrita na forma

$$u_t + b(u)u_x = 0, \tag{4.3}$$

onde

$$b(u) = f^{'}(u). \tag{4.4}$$

As equações do tipo (4.2) aparecem no estudo de fenômenos ondulatórios (sem efeitos dissipativos) não lineares, como, por exemplo, em dinâmica dos gases e são derivadas de leis de conservação integrais da forma

$$(\frac{d}{dt}\int_G u dx = \int_{\partial G} f\eta ds), \tag{4.5}$$

onde G é uma região do espaço, u mede a densidade da entidade física em discussão, f descreve o fluxo e η é a normal exterior ao bordo ∂G de G. A equação (4.5) diz que a taxa da variação de quantidade total de entidade física contida numa região G é igual ao fluxo atravessando o bordo de G.

No caso unidimensional, G é um intervalo e a equação (4.5) fica

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = f(a,t,u(a,t)) - f(b,t,u(b,t)). \tag{4.6}$$

Observe que derivando debaixo do sinal de integral, dividindo por (b-a) e fazendo [a,b] tender a um ponto, obtemos a equação $u_t + f_x = 0$ que coincide com a equação (4.2) se $f = f(u)$.

Concluimos que (4.6) é a solução com sentido físico.

Vejamos alguns exemplos de sistemas da forma (4.2):

Exemplo 4.3. As equações de dinâmica de gases para um gás invíscido, um gás não condutor de calor em coordenadas Lagrangianas, podem ser escritas na forma:

$$\begin{aligned} \upsilon_t + u_x = 0 \quad &(conservac\tilde{a}o\, de\ massa) \\ u_t + p_x = 0 \quad &(conservac\tilde{a}o\, de\ momento) \\ E_t + (up)_x = 0 \quad &(conservac\tilde{a}o\, de\ energia) \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde υ é o volume específico; $\upsilon = \frac{1}{\rho}$ e ρ é a densidade; u é a velocidade e E é a energia específica; $E = e + \frac{u^2}{2}$, sendo e a energia interna. A pressão p é uma função dada de e e υ, que depende do gás particular em consideração; esta relação é geralmente chamada de equação do estado.

Exemplo 4.4. Em coordenadas Eurelianas, as equações acima tomam a forma

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad &(conservac\tilde{a}o\, de\ massa), \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0 \quad &(conservac\tilde{a}o\ de\ momento), \\ [\rho(\frac{u^2}{2} + e)] + [\rho u(\frac{1}{2}u^2 + i)]_x = 0 \quad &(conservac\tilde{a}o\, de\ energia). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Aqui $i = \frac{p}{\rho}$ é a entalpia específica, e a equação de estado é uma função dada $e = e(v,s)$, onde s é a entropia específica. A pressão p é obtida da fórmula $p = e_v$. A mudança das coordenadas é dada por $(h,\tau) \mapsto (x,t)$, onde $t = \tau$ e $h = \int_{-\infty}^{x(h,\tau)} \rho(s,\tau)ds$; essa mudança leva (4.8) em (4.7), se colocarmos x = h, $t = \tau$ em (4.7). Escolhendo ρ, u e s como variáveis dependentes, podemos facilmente reduzir (4.8) em (4.2).

Exemplo 4.5. (O p-sistema). As equações escritas em coordenadas Lagrangianas são

$$v_t + u_x = 0, \quad u_t + p(v)_x = 0. \tag{4.9}$$

Quando $p(v) = kv^{-\gamma} (\gamma \geq 1\, e\, k > 0\, \textit{são constantes})$, as equações (4.9) são um modelo para dinâmica de gases isentrópicos (= entropia constante). Essas equações estão relacionadas a certas equações de segunda ordem. Assim, diferenciando a primeira equação em relação a t e a segunda em relação a x resulta

$$v_{tt} + p(v)_{xx} = 0.$$

Por outro lado, em regiões simplesmente conexas, a primeira equação em (4.9) implica na existência de uma função ϕ tal que $v = \phi_x,\ e\ \ u = \phi$. A segunda equação então se torna

$$\phi_{tt} + p(\phi_x)_x = \phi_{tt} + p^{'}(\phi_x)\phi_{xx} = 0.$$

Se $p^{'} < 0$, esta é uma equação de onda não-linear, onde a velocidade de propagação, $\sqrt{-p^{'}}$, depende de ϕ_x. Esse tipo de equação tem sido intensivamente estudada numericamente.

É natural considerar o problema de valor inicial para (4.2), isto é, para encontrar a solução de (4.2) definida para $t > 0$ cujo dado inicial é dado por

$$u(x, 0) = u_0(x), \ \ x \in \mathbb{R},$$

no tempo t = 0. Se a função u_0 é suave, então é fácil construir uma solução local única, isto é, uma solução definida somente para $0 < t < T$. Essa limitação é real, e não devida a técnicas usadas para construir a solução. Ou melhor, é uma consequência da não linearidade das equações, isto é, da dependência de f em relação a u.

As curvas características planas da equação (4.3) são as curvas no plano xt satisfazendo adt - bdx=0. Daí b(u)dt - dx=0 e, portanto,

$$\frac{dx}{dt} = b(u), \tag{4.10}$$

onde $u = u(x(t), t)$. Ao longo destas curvas u é constante, pois

$$\frac{d}{dt}(u(x(t), t)) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = u_x.b(u) + u_t = 0.$$

Logo, as curvas definidas por (4.10) são retas. A princípio não podemos determiná-las, pois desconhecemos o valor de u ao longo da curva. Porém, podemos usá-las para achar a solução do problema (4.2) satisfazendo uma determinada condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

A idéia é semelhante ao caso linear, ou seja, construiremos a solução utilizando as características planas que intersectam a curva inicial plana t=0. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, u é constante e u= $u_0(x_0)$ ao longo da reta passando pelo ponto $(x_0, 0)$ e satisfazendo (4.7), isto é,

$$u = u_0(x_0), \tag{4.12}$$

ao longo da reta

$$x = b(u_0(x_0))t + x_0. \tag{4.13}$$

As retas (4.13) são chamadas de *características planas* do problema (4.3),(4.11). Com essas retas e com a condição (4.11) determinamos a solução do problema (4.3),(4.11) numa faixa de $t \in (0, T)$, mas as características planas podem se intersectar, o que nao acontecia no caso linear.

Exemplo 4.6. Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

onde

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Observação: Esta é a equação de Burger sem viscosidade e é da forma (4.2) com f(u) $= \frac{u^2}{2}$.

A curva inicial é γ: t=0. Como $b(u_0(x_0)) = u_0(x_0)$, então as características planas são definidas por:

$$x = \begin{cases} t + x_0 & \text{se } x_0 < 0 \\ (1 - x_0)t + x_0 & \text{se } 0 \leq x_0 \leq 1 \\ x_0 & \text{se } x_0 > 1 \end{cases}$$

Como $u = u_0(x_0)$, ao longo das características planas, então:

- $Se\ x < t < 1,$ então $x = t + x_0\, para\ \ algum\ x_0 < 0$ e, portanto, $u = u_0(x_0) = 1$;
- Se $t < x < 1$, então $x = (1 - x_0)t + x_0$ para algum $x_0 \in [0, 1]$, logo $u = u_0(x_0) = 1 - x_0 = 1 - \frac{x-t}{1-t} = \frac{1-t-x+t}{1-t}$;
- Se $t < 1 < x$, então $u = u_0(x) = 0$.

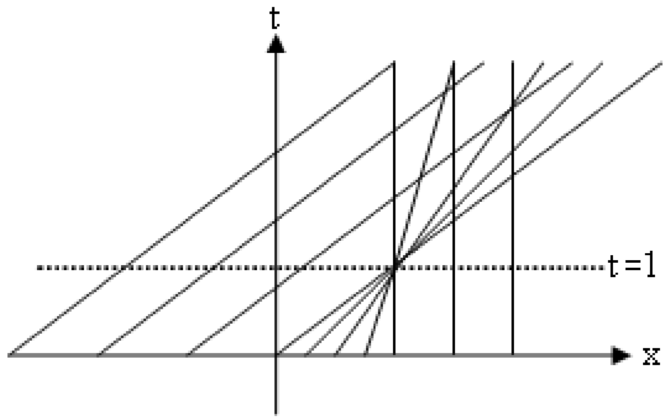

Figura 4.1: *Características planas referentes ao problema enunciado no exemplo (4.6).*

Portanto, a solução deste problema, definida para $0 \leq t < 1$ é:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < t < 1 \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{se } t \leq x < 1 \\ 0 & \text{se } t < 1 \leq x \end{cases}$$

A função u acima não é uma solução clássica pois $u \notin C^1(\mathbb{R} \times (0,1))$: as derivadas parciais não estão definidas nas retas características que passam por (0,0) e (1,0), isto é, ao longo dos segmentos de reta: $(t,t) : 0 \leq t < 1$ e $(1,t) : 0 \leq t < 1$, uma vez que a condição inicial não é diferenciável em x=0 e x=1 e essas características que passam por esses pontos, ao longo das quais as singularidades se propagam.

Observe que $u \in C(\mathbb{R} \times [0,1])$ e satisfaz este problema, fora desses segmentos de reta .

Exemplo 4.7. Consideremos agora a equação de Burger com outra condição inicial

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

onde

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

A curva inicial é γ: t=0. Como $b(u_0(x_0)) = u_0(x_0)$, então as características planas são definidas por:

$$x = \begin{cases} x_0 & \text{se } x_0 < 0 \\ t + x_0 & \text{se } x_0 > 0 \end{cases}$$

Como $u = u_0(x_0)$, ao longo das características planas, então:

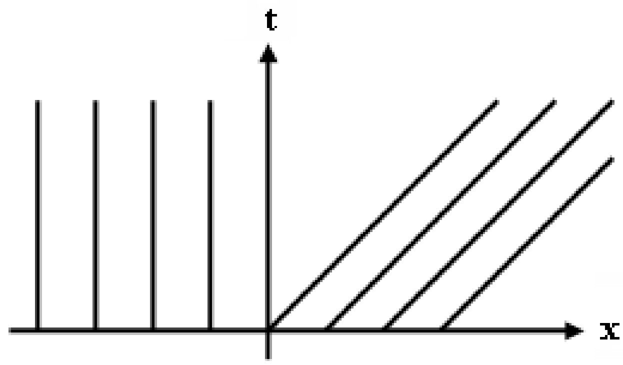

Figura 4.2: *Características planas referentes ao problema enunciado neste exemplo.*

- Se $x_0 < 0$ e $t \geq 0$, então $x = x_0$ para algum $x_0 < 0$ e, portanto, $u = u_0(x_0) = 0$;
- Se $x_0 > t \geq 0$, então $x = t + x_0$ para algum $x_0 > 0$, logo $u = u_0(x_0) = 1$;
- Se $t \geq x_0 \geq 0$ então $u = \frac{x}{t}$.

Portanto, a solução deste problema é:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, t \geq 0 \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 \leq x \leq t, t \neq 0 \\ 1 & \text{se } x > t \geq 0 \end{cases}$$

Observação: $u \in C(\mathbb{R} \times [0,\infty) \setminus (0,0))$ e é solução de deste problema, isto é, satisfaz o problema para $t > 0$ fora das características passando pela origem e satisfaz a condição inicial.

Percebemos através deste exemplo que é possível ter uma solução contínua para $t > 0$, embora a condição inicial (t=0) seja descontínua: portanto a descontinuidade não e propagada (pelas características planas), apenas as derivadas parciais são descontínuas ao longo das características planas passando pela origem. Tal fenômeno é puramente não linear .

4.3 Ondas de Choque

Considere o problema do exemplo (4.6), podemos perceber que não é possível achar a solução global, isto é, definida para $t > 0$, que seja contínua no ponto (1,1), uma vez que u=1, na região $x < t < 1$ e u=0, na região $t < 1 \leq$ x; além disso, mesmo admitindo soluções descontínuas, não saberíamos como determinar a solução na região $1 < x < t$, uma vez que cada ponto nessa região está em exatamente três características planas.

Outra observação possível de ser feita é que se $x_1 < x_2$, as características planas passando por $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ são dadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} l_1 : x = b(u_0(x_1))t + x_1 \\ l_2 : x = b(u_0(x_2))t + x_2 \end{cases}$$

logo l_1 e l_2 tem um ponto P em comum se e, somente, se $b(u_0(x_1)) > b(u_0(x_2))$.

Nesse caso, se $u_0(x_1) \neq u_0(x_2)$, uma solução global é necessariamente descontínua em $P = (x_0, t_0)$ pois, $t \to t_0^-$ ao longo de l_1, $u \to u_0(x_1)$, enquanto que $u \to u_0(x_2)$ quando $t \to t_0^-$ ao longo de l_2; dizemos então que uma onda é formada em $t = t_0$. Procuraremos funções u, descontínuas ao longo de uma curva $x = g(t)$, $t \geq 0$, mas que satisfaçam a EDP fora dessa curva.

Para achar a solução global do problema enunciado no exemplo (4.6) é necessário aceitar soluções descontínuas, e descobrir, analisando o problema físico como definir a solução na região $1 < x < t$.

Vamos procurar uma solução $u = u(x, t)$ para as equações do tipo (4.2) satisfazendo (4.11), e que não está definida ao longo de uma curva suave $x = g(t)$, $t \geq t_0$, onde $t_0 > 0$ é o menor valor de t para o qual há interseção de características (o exemplo (4.6) é deste tipo). Vamos supor que u dá um "salto"ao longo de $x = g(t)$, $t > 0$, que $t_0 \leq t < T$ e vamos tomar $a < b$, de modo que a porção de curva $x = g(t)$ para $t_0 \leq t < T$ esteja contida na faixa $a < x < b$, no plano xt.

A condição abaixo é chamada de *condição de salto*:

$$s[u] = [f],$$

onde $s = g^{'}(t)$, $[u] = u_d(g(t), t) - u_e(g(t), t)$ é o salto que u dá ao cruzar a curva $x = g(t)$, u_d = solução de u à direita da curva $x = g(t)$, u_e = solução de u à esquerda da curva $x = g(t)$, $[f] = f(u_d(g(t), t)) - f(u_e(g(t), t))$ e lembrando que $f^{'}(u) = b(u)$.

Exemplo 4.8. Vamos aplicar essas idéias para achar a solução geral do problema envolvido no exemplo (4.6).

Como $u = 1$ para $x < t < 1$ e u=0 para $x > \max\{1, t\}$, é natural buscar uma solução com $u_e = 1$ e $u_d = 0$ para $t > 1$ logo: $[u] = 0 - 1 = -1$; $[f] = f(0) - f(1) = \frac{0^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{-1}{2}$, pois $g(t) = \frac{t}{2} + c$ (i).

A descontinuidade começa no ponto (1,1), então: $1 = \frac{1}{2} + c$. Logo, $c = \frac{1}{2}$. (ii)

Substituindo (ii) em (i), obtemos: $g(t) = \frac{t+1}{2}$. Como $g(t) = x$ temos $x = \frac{t+1}{2}$ e portanto, $2x = t + 1$.

Logo, a curva suave $x = g(t), t \geq 1$, deve ser a semi-reta $2x = t + 1$, $t \geq 1$ e a solução global desejada, levando também em consideração a solução já encontrada no exemplo (4.6), é

$$u(x,t)=\begin{cases}1 & \text{se } x<t<1 \text{ ou } x<\frac{1+t}{2} \text{ com } t\geq 1\\ \frac{1-x}{1-t} & \text{se } t\leq x<1\\ 0 & \text{se } t<1\leq x \text{ ou } x>\frac{1+t}{2}\geq 1\end{cases}$$

O gráfico abaixo, no plano xt, mostra as descontinuidades de u: u é descontínua ao longo da semi-reta $2x=t+1, t\geq 1$ e as derivadas de 1ª ordem são descontínuas (além da semi-reta acima) nos segmentos de reta $x=t,\ 0\leq t\leq 1$ e $x=1,\ 0\leq t\leq 1$.

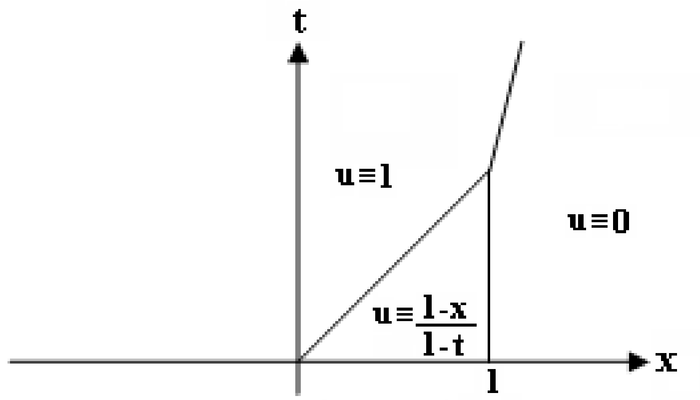

Figura 4.3: *Solução global do problema enunciado no exemplo (4.6)*

Estendendo o conceito da solução, tornamos possível resolver problemas de Cauchy do tipo (4.2), satisfazendo (4.11) que não tem soluções globais. Ao mesmo tempo, existe o perigo de termos aumentado demais a classe de possíveis soluções, perdendo a unicidade. Percebemos essa perda da unicidade no exemplo (4.7):

As características planas não se intersectam e existe solução clássica para $t>0$, mas que não está determinada na região $0\leq x\leq t$. Usando a idéia do exemplo (4.1) vemos que a função

$$u_1(x,t)=\begin{cases}0 & \text{se } x<\frac{t}{2}\\ 1 & \text{se } x>\frac{t}{2}\end{cases}$$

satisfaz a condição de salto e é solução do problema enunciado no exemplo (4.7), no sentido que satisfaz a EDP para $t>0$ fora da reta $x=\frac{t}{2}$ e satisfaz a condição inicial. Por outro lado, a função

$$u_2(x,t)=\begin{cases}0 & \text{se } x<0, t\geq 0\\ \frac{x}{t} & \text{se } 0\leq x\leq t, t\neq 0\\ 1 & \text{se } x>t\geq 0\end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}\times[0,\infty)\setminus(0,0)$ (logo, em particular, satisfaz a condição de salto

$[u] = [f] = 0$ e satisfaz a EDP para $t > 0$ fora das características passando pela origem).

Apenas uma dessas funções têm significado físico. A solução u_1, no exemplo acima pode ser descartada, pelo seguinte condiçãode entropia.

4.4 Condição de Entropia

Condição 1: Dado (x, t), *com* $t > t_0$, fora da curva de descontinuidade, existe uma característica plana passando por (x,t) que é intersectada pela curva de descontinuidade num instante $t_1 > t$.

Observando a figura (4.2), que mostra as características do problema enunciado no exemplo (4.7), é evidente que não existe nenhuma curva na região $0 < x < t$ que satisfaça a (Condição 1), logo a solução global que procuramos para o problema enunciado no exemplo (4.7) tem que ser contínua.

A Condição de Entropia dada na Condição (1) pode ser reformulada, em termos da velocidade de propagação da onda, da seguinte forma.

Condição 2: Dados $(x_1, t), (x_2, t)$ e uma curva de choque $x = g(t)$, com

$x_1 < g(t) < x_2$ *e* $t > t_0$, tem-se que:

$$b(u_e(x_1, t)) > g'(t) > b(u_d(x_2, t)). \tag{4.14}$$

Observação: A Condição (2) é mais forte que a Condição (1), isto é, sempre que a Condição (2) acontece então a Condição (1) se verifica.

Conclusão

A elaboração deste trabalho possibilitou a realização de um estudo a respeito das equações diferenciais parciais (EDP's) de 1ª ordem em duas variáveis independentes, cujo objetivo principal era fazer um breve estudo do método das características para a resolução de EDP's de 1ª ordem e, de modo particular, fazer um estudo do método de resolução da equação diferencial parcial não-linear de Burger.

Através deste trabalho, foi possível perceber a importância de se fazer um estudo a respeito das EDP's, pois esta área tem apresentado um significativo avanço nas recentes pesquisas. Sabemos, também, que as EDP's constituem uma área muito importante entre outras áreas da própria matemática como, também, em áreas afins, principalmente, em aplicações da Física-Matemática e da Engenharia.

Este trabalho tem a sua continuação natural no próprio campo das EDO's do $\mathbb{R}^n$, no caso de equações vetoriais, no caso de sistemas de EDO's e em espaços métricos mais gerais que o $\mathbb{R}^n$. A sua continuação pode se dar, também, no estudo das aplicações das EDO's na resolução de diversas EDP's.

Para continuação do estudo aqui desenvolvido e para um estudo mais avançado das EDO's, recomendamos as referências [7,8,9 e 10].

Por tudo isso, consideramos muito proveitoso a realização deste trabalho, além do que, praticamente todos assuntos abordados eram desconhecidos.

Finalmente, esperamos que este trabalho possa ser útil a outras pessoas como um material de estudo e/ou consulta.

Referências Bibliográficas

[1] ABUNAHMAN, Sérgio A. **Equações diferenciais.** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, Editora S.A., 1984.

[2] AYRES JR., Frank. **Equações diferenciais.** 1nd ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1959.

[3] BRAUER, Fred.; NOHEL, John A. **Ordinary differential equations, a first course.** W.A. Benjamin, INC, 1967.

[4] BRAUER, Fred.; NOHEL, John A. **The qualitative theory of ordinary differential equations.** W.A. Benjamin, INC, 1968.

[5] FIGUEIREDO, Djairo G. de; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações diferenciais aplicadas.** 2nd ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[6] HIRSCH, Morris W.; SMALE, Stephen. **Differential equations, dynamical systems and linear algebra.** Academic Press, 1974.

[7] IÓRIO, Valéria. **EDP, um curso de graduação.** 2nd ed. Rio de Janeiro, 2005.

[8] KREIDER, Donald; HULLER, Robert C., OSTBERG, Donald R.; PERKINS, Fred W. **Introdução à análise linear.** Rio de Janeiro: Ao livro técnico S.A. ,1975.

[9] MARSDEN, Jerrold E.; HOFFMAN, Michael J. **Elementary classical analysus.** W. H. Freeman, 1974.

[10] SMOLLER, Joel. **Shock waves and reaction: diffusion equations.** 2nd ed. New York: Springer, 1994.

[11] SOTOMAYOR, Jorge. **Lições de equações diferenciais ordinárias.** Projeto Euclides, 1979.