

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Um estudo sobre *Splines*

Marina Oliveira Búrigo

Orientador: Prof. Dr. Fermín S. V. Bazán

Florianópolis – SC

Setembro de 2008

Marina Oliveira Búrigo

Um estudo sobre *Splines*

Trabalho acadêmico de graduação apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, do Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, do Centro Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina.

Professor: Prof. Dr. Fermín S. V. Bazán

Florianópolis – SC


Setembro 2008

Um estudo sobre *Splines*


por

Marina Oliveira Búrigo

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº32/CCM/08.


Prof.^a Carmen Suzane Coimbra Gimenez
Professora da Disciplina

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Fermín S. V. Bazán
Orientador


Prof. Dr. Julianô de Bem Francisco


Prof. Dr. Márcio Rodolfo Fernandes

Agradecimentos

Agradeço a Deus por sempre iluminar meu caminho, minhas decisões e pela paz que me traz, por sempre estar comigo em pensamento e no coração fazendo com que as pedras no caminho se tornem apenas um aprendizado. Por ter colocado pessoas maravilhosas em minha vida durante o período de graduação e pela saúde que, embora enfrentado alguns problemas, tive e agradeço muito.

À minha família, tios(as), em especial meu tio amado Reinoldo, primos(as), minha avó querida, meu avó querido, minhas irmãs lindas, meus amigos(as), pelo amor, carinho, paciência e apoio que me ofereceram. Vocês contribuíram muito para que eu esteja aqui hoje feliz e com saúde. À meus pais queridos, pela força, amor, amizade e pelos momentos em que foram minha força, minha luz. Devo tudo a vocês! Obrigada do fundo do coração. Esta conquista é de vocês. Sem vocês nada seria possível. Meu amor é infinito.

Aos professores que contribuíram de alguma forma na minha graduação, em especial, ao meu grande mestre e amigo Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva que contribuiu de forma significativa para meu aprendizado e minha vida. Obrigada Ivan! És muito especial.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Fermin S. V. Bazán, pela amizade, paciência, pelo seu tempo dedicado e sua presteza nesta fase tão importante. Obrigada pelo conhecimento a mim repassado, colaborando com meu crescimento pessoal e profissional.

Aos meus colegas de graduação, em especial meus amigos Ana Paula B. Oberziner, Cintia André, Lucas Ramiro e Marcos Teixeira, pela amizade, carinho, força e companheirismo que foram essenciais no curso e além do mesmo. Obrigada meus amigos queridos, amo vocês e torço por vocês.

Aos professores membros da banda Prof. Dr. Juliano de Bem Francisco e Prof. Dr. Márcio Rodolfo Fernandes pela análise do trabalho e suas devidas sugestões.

Sumário

Introdução	3
1 Interpolação	4
1.1 O problema da Interpolação	4
1.2 Interpolação Polinomial	5
1.2.1 Interpolação Linear	7
1.2.2 Interpolação Quadrática	9
1.2.3 Interpolação Polinomial pelo Método de Lagrange	10
1.2.4 Interpolação Polinomial pelo Método de Newton	13
1.3 O Estudo do erro	20
1.3.1 O erro na Interpolação Linear	20
1.3.2 O erro na Interpolação Quadrática	22
1.3.3 Generalização do erro na Interpolação Polinomial	23
1.4 Interpolação Polinomial por Partes: <i>Splines</i>	28
1.4.1 <i>Spline</i> Linear	30
1.4.2 <i>Spline</i> Cúbica	32
2 Espaços Vetoriais de <i>Splines</i>	41

	2
2.1 Espaços Vetoriais Reais	41
2.1.1 Espaços vetoriais	41
2.1.2 Subespaços vetoriais	44
2.1.3 Combinação Linear	45
2.1.4 Dependência e Independência Linear	48
2.1.5 Base e dimensão	49
2.2 Espaços Vetoriais de <i>Splines</i>	50
2.2.1 Espaço Vetorial das Funções <i>Splines</i> Lineares	51
2.2.2 Espaço Vetorial das Funções <i>Splines</i> Cúbicas	55
3 Aplicações	61
3.1 <i>Splines</i> em equações diferenciais	61
3.1.1 Motivação e definições	61
3.1.2 Problemas de valores iniciais e de valores de contorno	63
3.1.3 Método da Colocação	66
Considerações Finais	73
Bibliografia	74

Introdução

Algumas das áreas matemáticas surgiram e foram desenvolvidas na tentativa de solucionar problemas reais, ou seja, aqueles relacionados com alguma situação prática. Com frequência estes problemas reais não podem ser solucionados através de fórmulas exatas. Para tanto, recorre-se à Métodos Numéricos a fim de encontrar uma boa aproximação para a solução do problema. Nosso interesse aqui é estudar maneiras de aproximar funções utilizando métodos numéricos. Estudaremos a Interpolação Polinomial por Lagrange, Newton e, mais importante, a Interpolação Polinomial usando *Splines*.

Para tanto, este trabalho é desenvolvido em três capítulos. No primeiro capítulo será apresentada a definição de Polinômio Interpolador, incluindo o teorema da unicidade, a interpolação polinomial por Lagrange e Newton, e o estudo do erro. Terminamos o capítulo apresentando a interpolação polinomial por partes: *splines*, enfatizando o uso desta aproximação. Este capítulo é de grande importância, pois desenvolveremos as idéias básicas para compreensão dos capítulos seguintes.

No segundo capítulo apresentaremos a definição de *spline*, mostrando que o conjunto de *splines* forma um Espaço Vetorial. Para tornar o texto auto contido, o capítulo contém algumas noções úteis da álgebra linear.

O terceiro capítulo trata de uma aplicação de *splines*, onde aplicamos o Método da Colocação para calcular soluções aproximadas de uma Equação Diferencial de segunda ordem com condições de contorno, através da base B-*spline* definida no capítulo anterior.

O trabalho encerra-se com algumas considerações finais e referências bibliográficas.

Capítulo 1

Interpolação

Os Métodos Numéricos correspondem a um conjunto de ferramentas ou técnicas usadas para se obter a solução de problemas matemáticos de forma aproximada. Esses métodos se aplicam a problemas que não são simples de ser resolvidos analiticamente.

Neste capítulo, nosso interesse é aproximar funções genéricas por meio de um grupo de funções mais simples. Tal interesse provém de diversas situações tais como: quando não conhecemos a expressão analítica da função ou quando a função apresenta uma forma analítica muito complexa[7]. Estudaremos a aproximação de funções por meio de polinômios e *splines* e abordemos o estudo do erro. A maior parte deste capítulo será dedicada ao estudo das propriedades destas classes de funções.

1.1 O problema da Interpolação

Interpolarmos uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma outra função $g(x)$, escolhida entre uma classe de funções definidas a priori e que satisfaça algumas propriedades. A função $g(x)$ é então usada em substituição à função $f(x)$. A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

(a) quando não conhecemos a expressão analítica de $f(x)$, ou seja, quando são conhecidos

somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos, situação que ocorre muito freqüentemente na prática quando se trabalha com dados experimentais.

(b) quando $f(x)$ é extremamente complicada. Então, às vezes, é interessante sacrificar a precisão em benefício da simplificação dos cálculos.

As classes de funções mais usadas na aproximação de uma função dada são polinômios, funções trigonométricas, exponenciais e funções racionais. Destas, o polinômio interpolador é, há muito tempo, a mais usada.

Este capítulo tratará especificamente desta classe de função.

1.2 Interpolação Polinomial

A análise numérica desenvolve métodos para a aproximação da solução de problemas complexos que não são resolúveis por técnicas analíticas[12]. A aproximação de funções por polinômios é uma das idéias mais antigas da análise numérica, e ainda uma das mais usadas. Os motivos para isto são muitos: os polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são novamente polinômios, suas raízes podem ser encontradas com relativa facilidade, etc. Portanto, é vantajoso substituir uma função complicada por um polinômio que a aproxime.

Definição 1.1 Consideremos $(n + 1)$ pontos distintos: x_0, x_1, \dots, x_n , chamados *nós de interpolação* e $n+1$ valores de uma função $y = f(x)$ sobre esses pontos, isto é: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$.

Chamamos de polinômio interpolador, ao polinômio $\mathcal{P}_n(x)$ de grau menor ou igual a n , tal que

$$f(x_k) = \mathcal{P}_n(x_k); \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

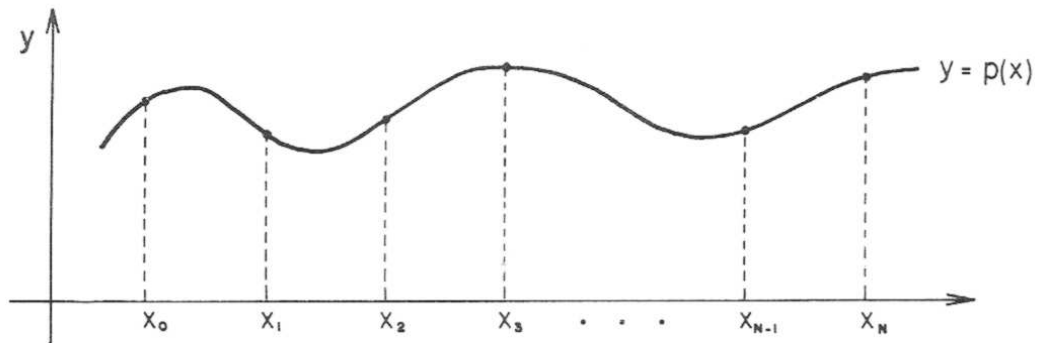


Figura 1.1: Polinômio Interpolador de grau n

Teorema 1.1 Dados $n + 1$ pontos distintos x_0, x_1, \dots, x_n (reais ou complexos) e $n + 1$ valores $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, existe um e só um polinômio $\mathcal{P}_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que:

$$\mathcal{P}_n(x_k) = f(x_k); \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração: Considere $\mathcal{P}_n(x)$ um polinômio de grau n , ou seja:

$$\mathcal{P}_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k; \quad a_k \text{ constante.}$$

Para determinar $\mathcal{P}_n(x_k)$ devemos determinar as constantes a_k de modo que $\mathcal{P}_n(x_k) = f(x_k); \quad k = 0, \dots, n$.

Isto é equivalente a resolver o sistema linear de $n + 1$ equações e $n + 1$ incógnitas:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n & = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n & = f(x_1) \\ \vdots & = \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n & = f(x_n) \end{cases}.$$

O sistema acima terá solução única desde que o determinante da matriz dos coefi-

cientes das incógnitas seja não nulo[15].

$$\text{Denotando } A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix},$$

temos que A é a matriz de Vandermonde e seu determinante é dado por[3]

$$\det(A) = \prod_{j>i} (x_j - x_i).$$

Como $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$, temos que $\det(A) \neq 0$ o que encerra a demonstração. ■

Assim, o problema de determinar o valor de uma função $f(x)$ aproximadamente em um ponto \bar{x} ; utilizando apenas os valores $(x_i, f(x_i))$; $i = 0, \dots, n$; pode ser resolvido substituindo $f(\bar{x})$ por $\mathcal{P}_n(\bar{x})$ onde $\mathcal{P}_n(x)$ é o polinômio de grau n que passa pelos pontos dados.

A seguir apresentaremos a interpolação para os casos linear e quadrático, a fim de motivar o estudo da próxima secção.

1.2.1 Interpolação Linear

Dados dois pontos distintos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) com $y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = f(x_1)$, o polinômio interpolador terá grau 1, isto é,

$$\mathcal{P}_1(x) = a_0 + a_1x.$$

Para determiná-lo, os coeficientes a_0 e a_1 devem ser calculados de forma que se tenha:

$$\mathcal{P}_1(x_0) = f(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_1(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

Ou seja, basta resolver o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 = y_1 \end{cases},$$

onde a_0 e a_1 são as incógnitas.

A Figura 1.2 mostra os dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) e a reta que passa por eles.

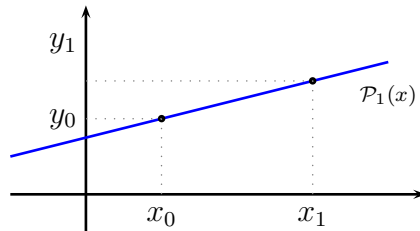


Figura 1.2: $\mathcal{P}_1(x)$ interpolando $f(x)$ em x_0 e x_1

Exemplo 1.1 Seja a função $y = f(x)$ definida nos pontos da tabela 1.1 abaixo. Determinar aproximadamente o valor de $f(0, 1)$.

x	-2	5
$f(x)$	7,4	-8

Tabela 1.1: Dados

Solução: Como temos 2 pontos definidos pela função $f(x)$, o polinômio interpolador será de grau 1.

Seja $\mathcal{P}(x) = a_0 + a_1x$ este polinômio. Então,

$$\mathcal{P}_1(0) = f(-2) \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot (-2) = 7,4$$

e

$$\mathcal{P}_1(2) = f(5) \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot 5 = -8.$$

Resolvendo o sistema linear obtemos:

$$a_0 = 3 \quad \text{e} \quad a_1 = -2,2.$$

Assim, $\mathcal{P}_1(x) = 3 - 2,2x$ é polinômio que interpola $f(x)$ em $x_0 = -2$ e $x_1 = 5$.

Logo, para $x = 0,1$; temos

$$f(0,1) \approx \mathcal{P}_1(0,1) = 3 - 2,2 \cdot 0,1 = 2,78.$$

1.2.2 Interpolação Quadrática

Se de uma função são conhecidos três pontos, então o polinômio interpolador será

$$\mathcal{P}_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (1.1)$$

Para determinar os valores de a_0 , a_1 e a_2 é necessário resolver o sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2 \end{cases},$$

onde os pontos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são conhecidos.

Exemplo 1.2 Seja a função $y = f(x)$ tal que $f(-1) = 9$, $f(0) = 5$ e $f(3) = 11$. Vamos encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola $f(x)$ nos pontos dados.

Solução: $\mathcal{P}_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ é o polinômio interpolador de $f(x)$. Logo, tem-se:

$$\mathcal{P}_2(-1) = f(-1) \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 = 9 \Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 9,$$

$$\mathcal{P}_2(0) = f(0) \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot (0) + a_2 \cdot (0)^2 = 5 \Rightarrow a_0 = 5 \text{ e}$$

$$\mathcal{P}_2(3) = f(3) \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot (3) + a_2 \cdot (3)^2 = 11 \Rightarrow a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 11.$$

Resolvendo o sistema linear, obtemos:

$$a_0 = 5, \quad a_1 = -\frac{5}{2} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{3}{2}.$$

Assim, o polinômio que interpola $f(x)$ em $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$ é:

$$\mathcal{P}_2(x) = 5 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}x^2.$$

Neste último exemplo, embora a resolução do sistema linear tenha sido um processo simples e exato na obtenção de $\mathcal{P}_2(x)$, não podemos esperar que isto ocorra sempre[1].

Em alguns casos, obter o polinômio interpolador através da solução de sistema lineares é muito trabalhoso e na solução pode ocorrer erros de arredondamentos, fazendo com que a solução obtida seja irreal. Conforme vimos, o polinômio $\mathcal{P}_n(x)$ que interpola f em x_0, x_1, \dots, x_n é único. Estudaremos a seguir duas formas de se obter este polinômio interpolador chamadas de Lagrange e Newton.

1.2.3 Interpolação Polinomial pelo Método de Lagrange

Sejam x_0, x_1, \dots, x_n , $(n+1)$ pontos distintos e $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Seja $\mathcal{P}_n(x)$ o polinômio de grau $\leq n$ que interpola f em x_0, x_1, \dots, x_n . Podemos representar $\mathcal{P}_n(x)$ na forma $\mathcal{P}_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n(x)$, onde os polinômios $L_k(x)$ são de grau n e definidos por

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

É fácil verificar que:

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq j \\ 1, & \text{se } k = j \end{cases}. \quad (1.2)$$

Baseado na propriedade (1.2) segue imediatamente que para cada i temos:

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + \dots + y_nL_n(x_i) = y_i.$$

Assim, para valores dados: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ de uma função $f(x) = y$, o polinômio

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$$

onde

$$L_k(x) = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i)}$$

é chamado de Fórmula de Lagrange para o polinômio interpolador.

Exemplo 1.3 Considere a função $y = f(x)$ definida pelos pontos do Exemplo 1.2. Temos:

$$x_0 = -1, \quad y_0 = f(x_0) = 9;$$

$$x_1 = 0, \quad y_1 = f(x_1) = 5;$$

$$x_2 = 3, \quad y_2 = f(x_2) = 11.$$

O polinômio de interpolação na forma de Lagrange é dado por:

$$\mathcal{P}_2(x) = \sum_{k=0}^2 y_k L_k(x).$$

Determinemos os polinômios $L_k(x)$, $k = 0, 1, 2$.

Temos:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 3)}{(-1 - 0)(-1 - 3)} = \frac{x^2 - 3x}{4}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(0 + 1)(0 - 3)} = \frac{x^2 - 2x - 3}{-3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(3 + 1)(3 - 0)} = \frac{x^2 + x}{12}$$

Assim, na forma de Lagrange

$$\mathcal{P}_2(x) = 9 \left(\frac{x^2 - 3x}{4} \right) + 5 \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{-3} \right) + 11 \left(\frac{x^2 + x}{12} \right).$$

Agrupando os termos semelhantes, segue que:

$$\mathcal{P}_2(x) = 5 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}x^2.$$

Exemplo 1.4 Determinar o polinômio de interpolação de Lagrange de terceiro grau, para a função conhecida pelos pontos dados na tabela 1.2. Determinar $\mathcal{P}(0,3)$.

x	0	0,2	0,4	0,5
$f(x)$	0	2,008	4,064	5,125

Tabela 1.2: Dados do problema

Solução: $\mathcal{P}_3(x) = \sum_{k=0}^3 y_k L_k(x)$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3(x) &= 0 \cdot \frac{(x - 0,2)(x - 0,4)(x - 0,5)}{(0 - 0,2)(0 - 0,4)(0 - 0,5)} + 2,008 \cdot \frac{(x - 0)(x - 0,4)(x - 0,5)}{(0,2 - 0)(0,2 - 0,4)(0,2 - 0,5)} \\ &+ 4,064 \cdot \frac{(x - 0)(x - 0,2)(x - 0,5)}{(0,4 - 0)(0,4 - 0,2)(0,4 - 0,5)} \\ &+ 5,125 \cdot \frac{(x - 0)(x - 0,2)(x - 0,4)}{(0,5 - 0)(0,5 - 0,2)(0,5 - 0,4)} \\ &= \frac{2,008}{0,012}(x^3 - 0,9x^2 + 0,2x) + \frac{4,064}{-0,008}(x^3 - 0,7x^2 + 0,1x) \\ &+ \frac{5,125}{0,015}(x^3 - 0,6x^2 + 0,008x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_3(x) = x^3 + 10x.$$

$$\therefore f(0,3) \approx \mathcal{P}_3(0,3) = 3,027.$$

1.2.4 Interpolação Polinomial pelo Método de Newton

Nem sempre temos conhecimento, a priori, do grau adequado para o polinômio interpolador. Um teste razoável consiste em aumentar o número de pontos de interpolação, crescendo portanto o grau do polinômio interpolador, e testar se houve melhoria nos cálculos. Observando a fórmula de Lagrange, verificamos que se acrescentarmos um novo ponto de interpolação os cálculos anteriores deverão ser refeitos.

Seria interessante se houvesse possibilidade de, conhecido o polinômio de grau p , passar para o de grau $p + 1$ apenas acrescentando mais um termo ao polinômio de grau p . Para tanto, veremos agora que tal objetivo é alcançado através da fórmula de Newton do polinômio interpolador.

A forma de Newton para o polinômio $\mathcal{P}_n(x)$ que interpola f em $(n + 1)$ pontos distintos x_0, x_1, \dots, x_n , pode ser escrita como:

$$\mathcal{P}_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + d_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1});$$

onde as constantes d_0, d_1, \dots, d_n serão determinadas pelas condições de interpolação. Tais coeficientes são diferenças divididas de ordem k entre os pontos $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, 1, \dots, k$.

Para a construção do polinômio de interpolação por este método, precisaremos então da noção de diferença dividida de uma função.

Definição 1.2 (Diferença Dividida) Sejam x_0, x_1, \dots, x_n ; $(n + 1)$ pontos distintos no intervalo $[a, b]$, e sejam $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$; $(n + 1)$ valores de uma função $y = f(x)$ sobre $x = x_k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Defini-se:

$$\begin{aligned} f[x_k] &= f(x_k), & k &= 0, 1, \dots, n, \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

onde $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ é a diferença dividida de ordem n da função $f(x)$ sobre os pontos x_0, x_1, \dots, x_n .

Uma maneira prática de calcular as diferenças divididas é através da Tabela de Diferenças Divididas. A tabela pode ser facilmente construída caso seja usada uma propriedade de simetria das diferenças.

x_i	$f[x_i]$	$[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	\dots
x_0	$f[x_0] = f(x_0)$			
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1] = f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		\dots
x_2	$f[x_2] = f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		\dots
x_3	$f[x_3] = f(x_3)$		$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$		\dots
x_4	$f[x_4] = f(x_4)$	\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots			

Tabela 1.3: Tabela de Diferenças Divididas

A Tabela 1.3 é construída da seguinte maneira:

- a) a primeira coluna é substituída dos pontos x_k , $k = 0, 1, \dots, n$;
- b) a segunda coluna contém os valores de $f(x)$ nos pontos x_k , $k = 0, 1, \dots, n$;
- c) nas colunas 1, 2, 3, ..., estão as diferenças divididas de ordem 1, 2, 3, ... Cada uma destas diferenças é uma fração cujo numerador é sempre a diferença entre duas

diferenças consecutivas e de ordem imediatamente inferior, e cujo denominador é a diferença entre os dois extremos dos pontos envolvidos.

Prova-se que as diferenças divididas satisfazem a propriedade a seguir[3]:

$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ é simétrica nos argumentos, ou seja,

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_{j_0}, x_{j_1}, \dots, x_{j_k}],$$

onde j_0, j_1, \dots, j_k é qualquer permutação de $0, 1, \dots, k$.

Por exemplo,

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0].$$

Para $k = 2$

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= f[x_0, x_2, x_1] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] \\ &= f[x_2, x_0, x_1] = f[x_2, x_1, x_0]. \end{aligned}$$

Forma de Newton

Seja $f(x)$ contínua e com tantas derivadas contínuas quanto necessárias em um intervalo $[a, b]$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $(n + 1)$ pontos. Para construir o polinômio $\mathcal{P}_n(x)$ que interpola f em x_0, x_1, \dots, x_n , iniciamos a construção obtendo $\mathcal{P}_0(x)$ que interpola f em $x = x_0$ e assim, sucessivamente, construiremos $\mathcal{P}_k(x)$ que interpola f em x_0, x_1, \dots, x_k , com $k = 0, 1, \dots, n$.

Seja $\mathcal{P}_0(x)$ o polinômio de grau 0 que interpola f em $x = x_0$. Então $\mathcal{P}_0(x) = f(x_0) = f[x_0]$. Para todo $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, temos que:

$$\begin{aligned}
f[x_0, x] &= \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&\Rightarrow (x - x_0)f[x_0, x] = f(x) - f(x_0) \\
&\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\mathcal{P}_0(x)} + \underbrace{(x - x_0)f[x_0, x]}_{E_0(x)} \\
&\Rightarrow E_0(x) = f(x) - \mathcal{P}_0(x) = (x - x_0)f[x_0, x].
\end{aligned}$$

Note que $E_0(x) = f(x) - \mathcal{P}_0(x)$ é o erro cometido ao se aproximar $f(x)$ por $\mathcal{P}_0(x)$.

Estudaremos o erro com mais detalhes na próxima secção.

Vamos agora, construir $\mathcal{P}_1(x)$, o polinômio de grau ≤ 1 que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1 .

Temos que:

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x] &= f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_1, x_0]}{x - x_1} \\
&= \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0]}{(x - x_1)(x - x_0)} \\
&\Rightarrow f[x_0, x_1, x] = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0]}{(x - x_0)(x - x_1)} \\
&\Rightarrow f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x]
\end{aligned}$$

Mas

$$f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] = \mathcal{P}_1(x)$$

visto que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1(x_0) &= f(x_0) \\
\mathcal{P}_1(x_1) &= f(x_0) + (x_1 - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1).
\end{aligned}$$

Logo

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0]}_{\mathcal{P}_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x]}_{E_1(x)}.$$

Vamos agora construir $\mathcal{P}_2(x)$, o polinômio de grau ≤ 2 que interpola $f(x)$ em x_0, x_1 e x_2 .

Temos que:

$$\begin{aligned}
 f[x_0, x_1, x_2, x] &= f[x_2, x_1, x_0, x] = \frac{f[x_1, x_0, x] - f[x_2, x_1, x_0]}{x - x_2} \\
 &= \frac{\frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} - f[x_2, x_1, x_0]}{x - x_2} \\
 &= \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_1, x_0]}{x - x_1} - f[x_2, x_1, x_0]}{x - x_2} \\
 &= \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0] - (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} \\
 &\Rightarrow f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \\
 &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x].
 \end{aligned}$$

Então,

$$\mathcal{P}_2(x) = f(x_0) - (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

e

$$E_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x].$$

Aplicando sucessivamente o mesmo raciocínio para

$$\begin{aligned}
 &x_0, x_1, x_2, x_3; \\
 &x_0, x_1, x_2, x_4; \\
 &\vdots \\
 &x_0, x_1, x_2, \dots, x_n;
 \end{aligned}$$

temos a forma de Newton para o polinômio de grau $\leq n$ que interpola $f(x)$ em x_0, \dots, x_n :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\
 &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n],
 \end{aligned}$$

onde o erro é dado por

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

Podemos verificar que de fato $\mathcal{P}_n(x)$ interpola $f(x)$ em x_0, x_1, \dots, x_n , pois sendo $f(x) = \mathcal{P}_n(x) + E_n(x)$, então, para todo $x_k, k = 0, \dots, n$, temos $f(x_k) = \mathcal{P}_n(x_k) + E_n(x_k) = \mathcal{P}_n(x_k) + 0 = \mathcal{P}_n(x_k)$.

Exemplo 1.5 Dados os mesmos pontos definidos em $y = f(x)$ dos exemplos 1.2 e 1.3, usando a forma de Newton, determinar o polinômio $\mathcal{P}_2(x)$ que interpola f .

Solução: O polinômio interpolador na forma de Newton é dado por:

$$\mathcal{P}_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2].$$

A priori, construímos a tabela de diferenças divididas.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-1	9		
		-4	
0	5		$\frac{5}{2}$
		6	
3	23		

Tabela 1.4: Tabela de Diferenças Divididas de ordem 2

Assim temos: $f[x_0] = 9$, $f[x_0, x_1] = -4$ e $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{3}{2}$. Logo:

$$\mathcal{P}_2(x) = 9 + (x + 1) \cdot (-4) + (x + 1)(x - 0) \cdot \frac{3}{2}.$$

Agrupando os termos semelhantes, obtemos $\mathcal{P}_2(x) = 5 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}x^2$, que é a mesma expressão obtida nos Exemplos 1.2 e 1.3.

Exemplo 1.6 Determinar o polinômio interpolador que passe pelos pontos $(1,0)$, $(2,2)$, $(4,12)$ e $(5,20)$.

Solução: Temos:

$$x_0 = 1, \quad f(x_0) = 0,$$

$$x_1 = 2, \quad f(x_1) = 2,$$

$$x_2 = 4, \quad f(x_2) = 12,$$

$$x_3 = 5, \quad f(x_3) = 20,$$

e, portanto $n = 3$. Assim, o polinômio de interpolação na forma de Newton é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3(x) &= f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3]. \end{aligned}$$

Construímos então a tabela de diferenças divididas 1.5:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
1	0			
		2		
2	2		1	
		5		0
4	12		1	
		8		
5	20			

Tabela 1.5: Tabela de Diferenças Divididas de ordem 3

Temos $f[x_0] = 0$, $f[x_0, x_1] = 2$, $f[x_0, x_1, x_2] = 1$ e $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0$.

Assim,

$$\mathcal{P}(x) = 0 + 2(x - 1) + 1(x - 1)(x - 2) + 0(x - 1)(x - 2)(x - 4) = x(x - 1).$$

Observação 1.1 Neste exemplo, apesar de usarmos 4 pontos de interpolação, o que deveria produzir um polinômio de grau 3, o resultado foi um polinômio de grau 2. De fato, os quatro pontos estão sobre a parábola.

1.3 O Estudo do erro

Como vimos, substituir uma função f por um polinômio interpolador $\mathcal{P}_n(x)$, de grau $\leq n$ para obtermos um valor aproximado da função $f(x)$ correspondente a algum ponto distinto dos x_i dados, $i = 0, 1, \dots, n$, não é uma operação impune: erros são introduzidos nesta aproximação, ou seja, para todo x no intervalo $[x_0, x_n]$ podemos definir o erro por

$$E_n(x) = f(x) - \mathcal{P}_n(x).$$

O que podemos dizer a respeito da qualidade desta aproximação, uma vez que podemos arquitetar muitas funções que passem pelos $n + 1$ pontos $(x_i, f(x_i))$? Estas e outras perguntas são respondidas quando estudamos a teoria do erro.

1.3.1 O erro na Interpolação Linear

Seja o intervalo $[x_0, x_1]$ e um ponto $\bar{x} \in [x_0, x_1]$. Como vimos, a interpolação linear consiste em aproximar $f(x)$ por $\mathcal{P}_1(x)$, onde $\mathcal{P}_1(x)$ é a reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. Assim, o erro cometido nesta aproximação é dado por:

$$E_1(x) = f(x) - \mathcal{P}_1(x).$$

No ponto \bar{x} , o erro depende de sua localização e se \bar{x} coincidir com x_0 ou x_1 , o erro será nulo. Diante disto, conclui-se que o erro é uma função que se anula nos pontos x_0 e x_1 . Podemos supor então que $E_1(x)$ seja da forma:

$$E_1(x) = A(x - x_0)(x - x_1),$$

onde A é uma constante que depende de x à ser determinada.

Com o objetivo de determinar a constante A , vamos considerar a função auxiliar definida por:

$$W(t) = f(t) - \mathcal{P}_1(t) - \widehat{E}_1(t),$$

em que

$$\mathcal{P}_1(t) = a_0 + a_1t$$

e

$$\widehat{E}_1(t) = (t - x_0)(t - x_1)A(x).$$

De fato, da função auxiliar, vem:

$$W(t) = f(t) - (a_0 + a_1t) - (t - x_0)(t - x_1)A(x).$$

Supondo que f seja contínua em $[x_0, x_1]$ e com derivadas de ordem 2 em (x_0, x_1) , teremos que $W(t)$ também satisfará essas mesmas propriedades, tendo em vista que $\mathcal{P}_1(t)$ e $\widehat{E}_1(t)$ são funções polinomiais de primeiro e segundo grau, respectivamente.

Por outro lado, temos que $W(x_0) = W(x_1) = W(\bar{x}) = 0$. Agora precisamos lembrar um resultado importante conhecido como teorema de Rolle e que descrevemos a seguir.

Teorema 1.2 (Teorema de Rolle) Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, então, existe pelo menos um ponto $\varepsilon \in (a, b)$, tal que $f'(\varepsilon) = 0$ (A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Stewart [9]).

Podemos então utilizar o Teorema de Rolle 1.2 para concluir que:

$$\begin{cases} W(x_0) = W(\bar{x}) = 0 & \Rightarrow \exists \varepsilon_1(\bar{x}) \in (x_0, \bar{x}) / W'(\varepsilon_1) = 0 \\ W(\bar{x}) = W(x_1) = 0 & \Rightarrow \exists \varepsilon_2(\bar{x}) \in (\bar{x}, x_1) / W'(\varepsilon_2) = 0 \\ W'(\varepsilon_1) = W'(\varepsilon_2) = 0 & \Rightarrow \exists \varepsilon(\bar{x}) \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2) / W''(\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

Mas como $W''(t) = f''(t) - 2A$, fazendo $t = \varepsilon$, vem:

$$W''(\varepsilon) = f''(\varepsilon) - 2A = 0 \Rightarrow A = \frac{f''(\varepsilon)}{2}.$$

Logo,

$$E_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\varepsilon)}{2},$$

para algum $\varepsilon \in (x_0, x_1)$.

Observamos que o erro depende da concavidade da curva, ou seja, de $f''(x)$.

1.3.2 O erro na Interpolação Quadrática

Como já visto no estudo do erro na interpolação linear e lembrando que, agora, são três os pontos conhecidos, o erro é dado pelas expressões:

$$1) E_2(x) = f(x) - \mathcal{P}_2(x),$$

onde $f(x)$ é a função dada e $\mathcal{P}_2(x)$ é o polinômio interpolador de segundo grau;

$$2) E_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)A.$$

Tem-se, agora, como objetivo, a determinação do valor do parâmetro A .

Fazendo-se

$$W(t) = f(t) - \mathcal{P}_2(t) - E_2(t)$$

e sabendo-se que

$$\mathcal{P}_2(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$$

e

$$E_2(t) = (t - x_0)(t - x_1)(t - x_2)A,$$

vem:

$$W(t) = f(t) - (a_0 + a_1t + a_2t^2) - (t - x_0)(t - x_1)(t - x_2)A.$$

Como $\mathcal{P}_2(t)$ e $E_2(t)$ são funções polinomiais e supondo $f(t)$ contínua em $[x_0, x_2]$ e derivável em (x_0, x_1) , $W(t)$ também o é e também se anula pelo menos em $t = x_0$, $t = x_1$, $t = x_2$ e $t = \bar{x}$.

Logo, pelo Teorema de Rolle 1.2, tem-se:

$$\exists \varepsilon_1 \in (x_0, \bar{x}) / G'(\varepsilon_1) = 0$$

$$\exists \varepsilon_2 \in (\bar{x}, x_1) / G'(\varepsilon_2) = 0$$

$$\exists \varepsilon_3 \in (x_1, x_2) / G'(\varepsilon_3) = 0$$

Aplicando novamente o Teorema de Rolle 1.2 na função $G'(t)$, vem:

$$\exists \varepsilon_4 \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2) / G''(\varepsilon_4) = 0$$

$$\exists \varepsilon_5 \in (\varepsilon_2, \varepsilon_3) / G'''(\varepsilon_5) = 0$$

e, finalmente

$$\exists \varepsilon \in (\varepsilon_4, \varepsilon_5)$$

e, portanto

$$\varepsilon \in (x_0, x_2) / G'''(\varepsilon) = 0.$$

Mas como $W'''(t) = f'''(t) - 6A$, temos

$$0 = W'''(\varepsilon) = f'''(\varepsilon) - 6A \Rightarrow A = \frac{f'''(\varepsilon)}{6} = \frac{f'''(\varepsilon)}{3!}$$

para $\varepsilon \in (x_0, x_2)$. Portanto

$$E_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \frac{f'''(\varepsilon)}{3!}, \quad \varepsilon \in (x_0, x_2).$$

1.3.3 Generalização do erro na Interpolação Polinomial

Teorema 1.3 Seja I um intervalo contendo $n + 1$ pontos interpoladores x_0, x_1, \dots, x_n e f uma função contínua e que possua derivadas contínuas até ordem $(n + 1)$ para todo x pertencente ao intervalo I . Seja $\mathcal{P}_n(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ nos pontos x_0, x_1, \dots, x_n . Então, em qualquer ponto x pertencente a I , o erro é dado por:

$$E_n(x) = f(x) - \mathcal{P}_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n + 1)!} \quad (1.3)$$

onde ε é algum ponto contido no intervalo I .

Demonstração: Na demonstração deste teorema, será seguido um raciocínio análogo aos casos anteriores. Para tanto, considere a expressão abaixo:

$$E_n(x) = f(x) - \mathcal{P}_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)A. \quad (1.4)$$

Observemos que supondo x um ponto tabelado x_i , então, desde que $f(x_i) = \mathcal{P}_n(x_i)$ ambos os membros da expressão se anulam, ficando, assim, satisfeita esta igualdade.

Com base nestas observações, só nos resta determinar o valor da constante A . Com este objetivo, para cada $x \in I$, $x \neq x_i$, $i = 0, \dots, n$, construímos a função auxiliar

$$W(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t) - E_n(t).$$

Sabe-se que $W(t)$ se anula em $n + 2$ pontos: x_0, x_1, \dots, x_n e \bar{x} , $\bar{x} \in I$, e portanto, $G^{(n+1)}(\varepsilon) = 0$, para $\varepsilon \in (x_0, x_n)$, de acordo com o Teorema de Rolle 1.2.

Derivando $G(t)$, $n + 1$ vezes, vem:

$$G^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n + 1)!A.$$

Fazendo $t = \varepsilon$:

$$G^{(n+1)}(\varepsilon) = f^{(n+1)}(\varepsilon) - (n + 1)!A = 0.$$

Logo,

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n + 1)!}.$$

Substituindo A em 1.4, vem que:

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n + 1)!},$$

o que encerra a demonstração. ■

É importante notar que $\varepsilon = \varepsilon(x)$ depende do ponto x no qual a estimativa de erro é requerida. O termo $E_n(x)$ é chamado de termo do erro ou erro de truncamento.

Exemplo 1.7 Seja a função $f(x) = x^2 - 3x + 1$, usando os valores de x ($x_1 = 1$ e $x_2 = 1, 5$) e os valores correspondentes $f(x_1)$ e $f(x_2)$, calcule o valor aproximado para $f(1, 2)$ e o erro de truncamento cometido no cálculo.

Solução: $\mathcal{P}_1(x) = a_0 + a_1x$ é o polinômio interpolador de $f(x)$.

Logo,

$$\mathcal{P}_1(1) = a_0 + a_1 = 1$$

$$\mathcal{P}_1(1, 5) = a_0 + 1, 5a_1 = -1, 25$$

Resolvendo o sistema linear, concluímos que:

$$\mathcal{P}_1(x) = -0,5 - 0,5x \Rightarrow \mathcal{P}_1(1, 2) = -1, 1.$$

O erro é dado pela expressão:

$$E_1(x) = (x - x_0)(x - x_1) \frac{f''(x)}{2!}.$$

Como $f(x) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f''(x) = 2, \forall x$. Logo,

$$E_1(1, 2) = (1, 2 - 1)(1, 2 - 1, 5) \frac{2}{2} \Rightarrow E_1(1, 2) = 0, 06.$$

Uma vez que, em geral, raramente conhecemos $f^{(n+1)}(x)$ e em raríssimas ocasiões conhecemos o argumento ε , esta fórmula que acabamos de ver possui limitado uso prático. Contudo, a fórmula possui grande importância teórica, uma vez que é usada na obtenção de estimativas de erro para as fórmulas de interpolação, diferenciação e integração.

Estudaremos a seguir dois corolários do teorema, que relacionam o erro com um limitante de $f^{(n+1)}(x)$.

Corolário 1.3.1 Sob as hipóteses do teorema, se $f^{(n+1)}(x)$ for contínua em $I = [x_0, x_n]$, podemos escrever a seguinte relação:

$$|E_n(x)| = |f(x) - \mathcal{P}_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

onde $M_{n+1} = \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$.

Demonstração: M_{n+1} existe pois, por hipótese, $f^{(n+1)}(x)$ é contínua em $[x_0, x_n]$ e então,

$$|E_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

■

Corolário 1.3.2 Se além das hipóteses anteriores, os pontos forem igualmente espaçados, ou seja,

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n+1} = h,$$

então

$$|f(x) - \mathcal{P}_n(x)| < \frac{h^{n+1}M_{n+1}}{4(n+1)}.$$

Observe que a cota superior acima independe do ponto x considerado.

Teorema 1.4 $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon_x)}{(n+1)!}$, $x \in (x_0, x_n)$ e $\varepsilon_x \in (x_0, x_n)$.

Demonstração: Seja $\mathcal{P}_n(x)$ o único polinômio que interpola $f(x)$ em x_0, x_1, \dots, x_n . Do Teorema 1.3, temos que:

$$E_n(x) = f(x) - \mathcal{P}_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon_x)}{(n+1)!}$$

com $\varepsilon_x \in (x_0, x_n)$.

Da dedução da forma de Newton para $\mathcal{P}_n(x)$,

$$E_n(x) = f(x) - \mathcal{P}_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]; \quad x \in (x_0, x_n).$$

Assim

$$\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon_x)}{(n+1)!} = f[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

■

Exemplo 1.8 Seja $f(x) = e^x + x - 1$ tabelada abaixo. Determinar $f(0, 7)$ por interpolação linear e fazer uma análise do erro cometido.

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	0	1,1487	2,7183	4,9811	8,3890

Tabela 1.6: Nós interpoladores

Solução:

$$\mathcal{P}_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1].$$

Como $x = 0,7 \in (0,5;1)$, temos que $x_0 = 0,5$ e $x_1 = 1$.

Logo,

$$\mathcal{P}_1(x) = 1,1487 + (x - 0,5) \left(\frac{2,7183 - 1,1487}{1 - 0,5} \right) = 1,1487 + (x - 0,5)3,1392.$$

$$\therefore \mathcal{P}_1(0,7) = 1,7765.$$

Neste caso, temos condição de calcular o verdadeiro erro, dado por

$$|E_1(0,7)| = |f(0,7) - \mathcal{P}_1(0,7)| = |1,7137 - 1,7765| = |-0,0628| = 0,0628.$$

Os Corolários 1.3.1 e 1.3.2 nos fornecem as seguintes cotas para o erro:

a) Corolário 1.3.1 (em $x = 0,7$)

$$|E_1(0,7)| \leq |(0,7 - 0,5)(0,7 - 1)| \frac{M_2}{2}$$

onde $M_2 = \max_{x \in [0,5;1]} |f''(x)| = e^1 = 2,7183$.

Então, $|E_1(0,7)| \leq 0,0815$ (o que confirma o resultado, $|E_1(0,7)| = 0,0628 < 0,0815$).

b) Corolário 1.3.2 (para todo $x \in (0,5;1)$)

$$|E_1(x)| < \frac{h_2}{2} M_2 = \frac{(0,5)^2}{8} (2,7183) = 0,0850$$

que também confirma o resultado obtido para o erro exato.

Temos a idéia intuitiva de que a medida que aumentamos os pontos de interpolação e conseqüentemente o grau do polinômio interpolador, mais nos aproximamos da função, ou seja, o erro diminui. Entretanto, a natureza oscilatória dos polinômios de ordem elevada pode comprometer a qualidade da aproximação. Este fato é conhecido como “fenômeno de Runge” e ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 1.9 Considere a função $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ tabelada no intervalo $[-1,1]$ nos pontos $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

No gráfico da figura 1.3, apresenta-se a curva $f(x)$ e os polinômios de grau $n = 5$ e $n = 20$, que interpolam f em x_i , $i = 0, \dots, 5$ e $i = 0, \dots, 20$ respectivamente.

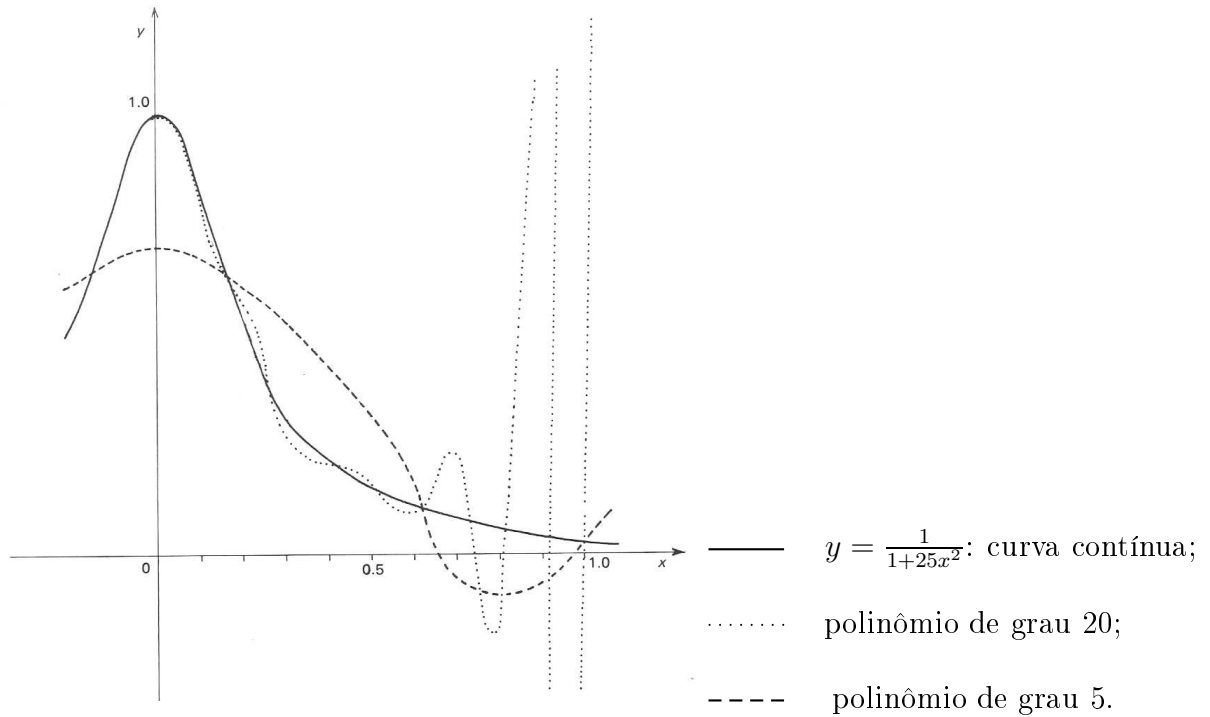


Figura 1.3: Interpolação de $y = \frac{1}{1+25x^2}$.

A fim de evitar casos como o “fenômeno de Runge”, busca-se uma nova maneira de interpolar uma função.

1.4 Interpolação Polinomial por Partes: *Splines*

Como vimos na Figura 1.3, $\mathcal{P}_5(x)$ se aproxima relativamente melhor da função f do que $\mathcal{P}_{20}(x)$. Logo, não basta aproximarmos f por um polinômio de grau alto para melhorar a qualidade da aproximação. Uma maneira de se contornar essa dificuldade é dividir o intervalo de interpolação em vários subintervalos (interpolação segmentada) e, obter em cada subintervalo um polinômio interpolador de grau inferior.

Definição 1.3 Considere uma partição do intervalo $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, onde os pontos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , denominamos de nós interiores e os pontos x_0, x_n nós exteriores. A função $S_m(x)$, definida em $[a, b]$, é denominada *spline* de grau m se:

a) $S_m(x)$ é um polinômio de grau $\leq m$ em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, (n-1)$:
 $s_m(x)$;

b) $S_m(x)$ é contínua e tem derivada contínua até ordem $(m - 1)$ em $[a, b]$.

Se além disso, $S_m(x)$ satisfaz a condição:

c) $S_m(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, então S_m será denominada *spline* interpolante.

As funções *spline*¹ despontaram na área da aproximação numérica, durante a década de 50 do século XX, e contudo aceite que a primeira referência matemática a *splines* surgiu em 1946 num artigo de Schoenberg[17]. Estas surgiram no contexto da procura de melhores soluções para problemas de interpolação.

A natureza e as propriedades fundamentais das *splines* permitiram que fossem rapidamente adotadas em diversas áreas de matemática aplicada tais como, modelação geométrica na construção de automóveis e na construção de aeronaves (na indústria automóvel, pode referir-se em particular os trabalhos de De Casteljaou na Citroën, de Bézier na Renault e de De Boor na General Motors), levando a teoria das funções *spline* a um desenvolvimento fulgurante. Algum tempo mais tarde, em desenho assistido por computador, as funções *spline* tiveram um papel determinante como ferramenta essencial na reprodução de formas complexas suaves. O sucesso da utilização extensiva de *splines* polinomiais nas diversas áreas, deveu-se em grande parte a sua simplicidade do ponto de vista computacional e a sua capacidade intrínseca de reproduzir formas complexas.

Como vimos, exige-se que esta curva *spline* passe por um conjunto de pontos antecipadamente prescritos. Cada segmento da curva *spline* depende apenas dos dados iniciais na sua vizinhança e por isso a sua construção é realizada de forma individual. Esta propriedade local é do ponto de vista das aplicações uma propriedade desejável. Uma alteração pontual de algum dado inicial não requer o cálculo completo novamente da curva final.

¹A palavra *spline* provém do nome de um instrumento usado por engenheiros para o ajustamento de curvas suaves, por determinados pontos de interpolação.

1.4.1 *Spline* Linear

Uma *spline* linear, ou de primeira ordem, é definida (para um conjunto de pontos ordenados), por um conjunto de polinômios de grau um, ligados entre si nos nós interiores.

A função *spline* linear interpolante de $f(x)$, $S_1(x)$, nos nós x_0, x_1, \dots, x_n pode ser escrita em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, como:

$$s_i = f(x_i) \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + f(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Verificação:

- a) $S_1(x)$ é o polinômio de grau 1 em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, por definição;
- b) $S_i(x)$ é contínua em (x_i, x_{i+1}) , por definição, e, nos nós x_i , realmente S_1 será bem definida, pois:

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) = f(x_i) \Rightarrow S_i(x)$$

é contínua em $[a, b]$ e, portanto, $S_i(x)$ é *spline* linear;

- c) $S_1(x_i) = s_i(x_i) = f(x_i) \Rightarrow S_1(x)$ é *spline* linear interpolante de $f(x)$ nos nós x_0, x_1, \dots, x_n .

Exemplo 1.10 Seja a função $y = f(x)$ definida nos pontos da tabela 1.7. Determine a função *spline* que interpola a função.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	1	3

Tabela 1.7: Dados

Solução: De acordo com a definição,

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f(x_0) \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = 1 \cdot \frac{1 - x}{1 - 0} + 2 \cdot \frac{x - 0}{1 - 0} \\ &= 1 - x + 2x = x + 1, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2(x) &= f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 2 \cdot \frac{2 - x}{2 - 1} + 1 \cdot \frac{x - 1}{2 - 1} \\ &= 2(2 - x) + x - 1 = 3 - x, \quad x \in [1, 2]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3(x) &= f(x_2) \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + f(x_3) \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = 1 \cdot \frac{3 - x}{3 - 2} + 3 \cdot \frac{x - 2}{3 - 2} \\ &= 3 - x + 3(x - 2) = 2x - 3, \quad x \in [2, 3]. \end{aligned}$$

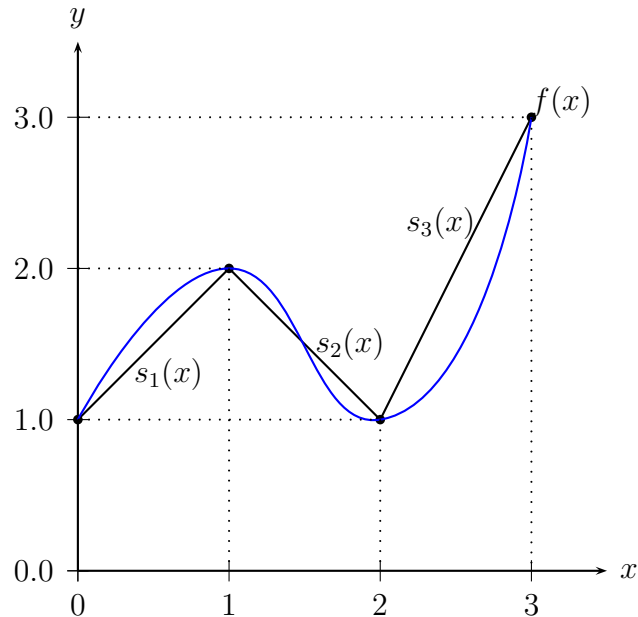


Figura 1.4: S_1 como função interpoladora de f

Uma desvantagem pertinente na aproximação com funções lineares está no fato de que não há diferenciação nos extremos dos subintervalos, ou seja, a função não é continuamente diferenciável. A aproximação mais comum utilizando polinômios por partes faz o uso de polinômios cúbicos como veremos a seguir.

1.4.2 *Spline* Cúbica

Como vimos, a *spline* linear apresenta a desvantagem de ter derivada primeira descontínua nos nós. Se usarmos *splines* quadráticas, teremos que $S_2(x)$ tem derivadas contínuas até ordem 1 apenas e, portanto, a curvatura de $S_2(x)$ pode trocar nos nós. Por esta razão, as *splines* cúbicas são mais usadas.

Uma *spline* cúbica, $S_3(x)$, é uma função polinomial por partes, contínua, onde cada parte, $s_k(x)$, é um polinômio de grau 3 no intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. $S_3(x)$ tem a primeira e segunda derivada contínua, o que faz com que a curva $S_3(x)$ não tenha picos e nem troque abruptamente de curvatura nos nós. A construção do *spline* cúbico não garante, entretanto, que as derivadas do interpolador concordem com as da função que está sendo aproximada, mesmo em seus nós.

Definição 1.4 Supondo que f esteja tabelada nos pontos x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ a função $S_3(x)$ é chamada *spline* cúbica interpolante de $f(x)$ nos nós x_i , $i = 0, \dots, n$ se existem n polinômios de grau 3, $s_k(x)$, $k = 1, \dots, n$ tais que:

- i) $S_3(x) = s_k(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$.
- ii) $S_3(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$
- iii) $s_k(x_k) = s_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, (n - 1)$
- iv) $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, (n - 1)$
- v) $s''_k(x_k) = s''_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, (n - 1)$

Em cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ a função *spline* cúbica S_3 que interpola f nos pontos da partição é um polinômio de grau 3 e, como tal, é definido à custa de 4 parâmetros. Assim, para determinar S de forma única temos que especificar, para cada k , $k = 1, 2, \dots, n$; um total de $4n$ coeficientes: $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n$. Para isso teremos que definir $4n$ equações.

Atendendo à definição de função *spline* temos impostas as seguintes equações: $(n+1)$ equações de interpolação, $(n-1)$ equações de ligação de S_3 (continuidade de S_3 em $[x_0, x_n]$), $(n-1)$ equações de ligação de S_3' e $(n-1)$ equações de ligação de S_3'' . No total temos assim $(4n-2)$ equações. Portanto, temos duas condições em aberto, ou seja, faltam duas condições para que o sistema tenha solução única ($4n-2+2=4n$). Essas condições podem ser impostas de acordo com informações físicas que tenhamos sobre o problema, etc. Ainda que os *splines* cúbicos sejam definidos com outras condições suplementares, as formas mais usuais de definir essas condições suplementares são as seguintes:

$$S''(a) = 0 \text{ e } S''(b) = 0 \text{ (spline natural),}$$

$$S'(a) = f'(a) \text{ e } S'(b) = f'(b) \text{ (spline completa).}$$

Em geral, as *splines* completas levam a aproximações mais precisas, na medida em que elas incluem mais informações sobre a função. Entretanto, para utilização desta condição adicional, é necessário se obter os valores das derivadas nos pontos extremos, ou uma aproximação aperfeiçoada desses valores.

Dedução da fórmula dos splines cúbicos

Para se construir o *spline* cúbico interpolador para uma função f dada, as condições indicadas na definição são aplicadas aos polinômios cúbicos

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Como um exemplo, vamos discutir a fórmula do *spline* cúbico natural. Com efeito, note que a condição (i) da definição 1.4 está automaticamente satisfeita, visto a definição que demos para cada $s_k(x)$.

Para impor a condição (ii), montamos, para $k = 1, \dots, n$, as equações

$$(1) \quad s_k(x_k) = d_k = f(x_k), \text{ e}$$

(2) $s_1(x_0) = f(x_0) \Rightarrow -a_1h_1^3 + b_1h_1^2 - c_1h_1 + d_1 = f(x_0)$, onde usamos a notação $h_k = x_k - x_{k-1}$ com $k = 1$.

Como $s_k(x_k) = f(x_k)$, a condição (iii) pode ser aplicada para se obter $(n - 1)$ equações para $k = 1, \dots, (n - 1)$, $s_{k+1}(x_k) = f(x_k)$, ou seja:

$$-a_{k+1}h_{k+1}^3 + b_{k+1}h_{k+1}^2 - c_{k+1}h_{k+1} + d_{k+1} = f(x_k). \quad (1.5)$$

Para impor as condições (iv) e (v), precisamos das derivadas das $s_k(x)$:

$$s'_k(x) = 3a_k(x - x_k)^2 + 2b_k(x - x_k) + c_k \quad \text{e} \quad s''_k(x) = 6a_k(x - x_k) + 2b_k.$$

Observamos que $s''_k(x_k) = 2b_k$. Assim cada coeficiente b_k pode ser escrito em função de $s''_k(x_k)$:

$$b_k = \frac{s''_k(x_k)}{2}$$

Analogamente, como $s''_k(x_{k-1}) = -6a_kh_k + 2b_k$, podemos também escrever a_k em função das derivadas segundas dos nós, pois

$$a_k = \frac{2b_k - s''_k(x_{k-1})}{6h_k} = \frac{s''_k(x_k) - s''_k(x_{k-1})}{6h_k}.$$

Impondo a condição (v) ($s''_k(x_{k-1}) = s''_{k-1}(x_{k-1})$), obtemos:

$$a_k = \frac{s''_k(x_k) - s''_{k-1}(x_{k-1})}{6h_k}.$$

Observamos que, no caso $k = 1$, estamos introduzindo uma variável, $s''_0(x_0)$, arbitrária.

Determinados a_k , b_k e $d_k = f(x_k)$, podemos determinar c_k em função das derivadas segundas nos nós. Substituindo k por $k + 1$ em (1.5) temos então

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{-f(x_{k-1}) - a_kh_k^3 + b_kh_k^2 + d_k}{h_k} \\ &= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - (a_kh_k^2 - b_kh_k) \\ &= \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \left\{ \frac{[s''_k(x_k) - s''_{k-1}(x_{k-1})]h_k}{6} - \frac{s''_k(x_k)}{2}h_k \right\} \end{aligned}$$

portanto:

$$c_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \frac{-2s''_k(x_k)h_k - s''_{k-1}(x_{k-1})h_k}{6}.$$

Como $s''_k(x_k)$ e $f(x_k)$ são utilizadas repetidamente nesse desenvolvimento, é conveniente introduzir duas notações simples: $s''_k(x_k) = g_k$ e $f(x_k) = y_k$. Então

$$a_k = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k} \quad (1.6)$$

$$b_k = \frac{g_k}{2} \quad (1.7)$$

$$c_k = \left[\frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1} h_k}{6} \right] \quad (1.8)$$

$$d_k = y_k. \quad (1.9)$$

Assim para $k = 1, 2, \dots, n$, podemos calcular todos os coeficientes de $s_k(x)$ em função $g_j = s''_j(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Impondo a condição (iv), $s'_k(x_k) = s'_{k+1}(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, (n-1)$, teremos:

$$s'_k(x_k) = c_k = 3a_{k+1}h_{k+1}^2 - 2b_{k+1}h_{k+1} + c_{k+1}$$

de onde temos que

$$c_{k+1} = c_k - 3a_{k+1}h_{k+1}^2 + 2b_{k+1}h_{k+1}.$$

Usando as equações (1.5), (1.6) e (1.7) temos

$$\begin{aligned} & \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} + \frac{2h_{k+1}g_{k+1} + g_k h_{k+1}}{6} = \\ & = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1} h_k}{6} - 3 \left(\frac{g_{k+1} - g_k}{6} \right) h_{k+1} + 2 \left(\frac{g_{k+1} h_{k+1}}{2} \right). \end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes, para $k = 1, \dots, n-1$,

$$\frac{1}{6} [h_k g_{k+1} + 2(h_k + 3h_{k+1} - h_{k+1})g_k + (6h_{k+1} - 3h_{k+1} - 2h_{k+1})g_{k+1}] = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k},$$

ou seja,

$$h_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k-1})g_k + h_{k+1}g_{k+1} = 6 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right)$$

que é um sistema de equações lineares da forma $Ax = b$, com $(n - 1)$ equações ($k = 1, \dots, (n - 1)$) e $(n + 1)$ incógnitas: $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}, g_n$ e portanto, indeterminado, onde $x = (g_0, g_1, \dots, g_n)^T$

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_4 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) & h_n & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n+1)}$$

e

$$b = 6 \begin{pmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}_{(n-1) \times 1}$$

Para podermos resolver esse sistema, de forma única, teremos de impor mais duas condições conforme já mencionamos. De posse da solução, então podemos determinar a_k, b_k, c_k e d_k para cada $s_k(\bar{x})$. Apresentaremos a seguir exemplos envolvendo a *spline* cúbica natural e completa.

Exemplo 1.11 Dados os valores funcionais da função $y = \frac{1}{x}$ na tabela 1.8, calcule $f(1,75)$ por meio da interpolante *spline* cúbica natural.

i	0	1	2	3	4
x_i	1	1,5	2	2,5	3
y_i	1	2/3	0,5	2/5	1/3

Tabela 1.8: Nós de Interpolação

Solução: Temos 4 subdivisões do intervalo $[1,3]$, da onde temos $n = 4$, e portanto temos de determinar $s_1(x), s_2(x), s_3(x)$ e $s_4(x)$ resolvendo, para $1 \leq k \leq 3$, o sistema:

$$h_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k-1})m_k + h_{k-1}g_{k-1} = 6 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right).$$

No nosso exemplo, $h_k = h = 0,5$. Assim:

$$hg_{k-1} + 4hg_k + hg_{k+1} = \frac{6}{h}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$$

$$\begin{cases} hg_0 + 4hg_1 + hg_2 = \frac{6}{h}(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ hg_1 + 4hg_2 + hg_3 = \frac{6}{h}(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ hg_2 + 4hg_3 + hg_4 = \frac{6}{h}(y_4 - 2y_3 + y_2) \end{cases}$$

Visto que na *spline* cúbica natural impomos $g_0 = g_4 = 0$, o sistema a ser resolvido será:

$$\begin{cases} 4hg_1 + hg_2 = \left(\frac{6}{h}\right)(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ hg_1 + 4hg_2 + hg_3 = \left(\frac{6}{h}\right)(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ hg_2 + 4hg_3 = \left(\frac{6}{h}\right)(y_4 - 2y_3 + y_2) \end{cases}$$

Assim

$$\begin{bmatrix} 4h & h & 0 \\ h & 4h & h \\ 0 & h & 4h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \frac{6}{h} \begin{bmatrix} y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \end{bmatrix}$$

onde, substituído os valores de h e de y_i , $0 \leq i \leq 4$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 2 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0,8 \\ 0,4 \end{bmatrix},$$

obtem-se: $g_1 = 0,97333$; $g_2 = 0,10667$; $g_3 = 0,2$.

Determinado os valores de g_1 , g_2 e g_3 , podemos encontrar $s_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Como queremos uma aproximação para $f(1,75)$ e $1,75 \in [x_1, x_2]$, temos que $i = 2$, ou

seja, $f(1,75) \approx s_2(1,75)$. Assim, precisamos determinar a_2, b_2, c_2 e d_2 . Temos:

$$a_2 = \frac{g_2 - g_1}{6h} = -0,28888$$

$$b_2 = \frac{g_2}{2} = 0,05333$$

$$c_2 = \left[\frac{y_2 - y_1}{h} + \frac{2hg_2 + g_1h}{6} \right] = -0,23444$$

$$d_2 = y_2 = 0,5$$

Assim

$$s_2(1,75) = 0,56646.$$

Portanto, $y(1,75) \approx 0,56646$.

Exemplo 1.12 Seja a função $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$, $x \in [-1, 1]$. Interpolar a função f em $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ por uma *spline* cúbica que satisfaz as seguintes condições:

$$S'(-1) = f'(-1) = 0;$$

$$S'(1) = f'(1) = 0.$$

Solução:

Como $x_0 = -1, x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ temos $h = 1.0$, ou seja, temos 2 subdivisões do intervalo $[-1, 0]$ e portanto temos de determinar $s_1(x)$ e $s_2(x)$. Seja

$$S_3(x) = \begin{cases} s_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, x \in [-1, 0] \\ s_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2, x \in [0, 1] \end{cases}$$

Para que S_3 seja a *spline* procurada, S_3 tem que satisfazer as condições da definição 1.4. A continuidade da *spline* está satisfeita:

$$1) S_3(-1) = s_1(-1) = f(-1) \Leftrightarrow -a_1 + b_1 - c_1 + d_1 = -1$$

$$2) S_3(0) = s_1(0) = f(0) \Leftrightarrow d_1 = 0$$

$$3) S_3(0) = s_2(0) = f(0) \Leftrightarrow d_2 = 0$$

$$4) S_3(1) = s_2(1) = f(1) \Leftrightarrow a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1$$

Do mesmo modo, a primeira e segunda derivada de S_3 , que são dadas abaixo, também precisam ser contínuas.

$$s'_i(x) = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i, i = 1, 2$$

$$s''_i(x) = 6a_i x + 2b_i, i = 1, 2$$

Então

$$5) s'_1(0) = s'_2(0) \Leftrightarrow c_1 = c_2$$

$$6) s''_1(0) = s''_2(0) \Leftrightarrow b_1 = b_2$$

Como temos seis equações e precisamos determinar oito para termos um sistema determinado, consideremos as duas condições iniciais do problema: $S'(-1) = f'(-1) = 0$ e $S'(1) = f'(1) = 0$.

$$7) s'_1(-1) = 3a_1 - 2b_1 + c_1 = 0$$

$$8) s'_2(1) = 3a_2 + 2b_2 + c_2 = 0$$

Considerando as oito equações, podemos reduzi-las ao sistema:

$$\begin{cases} -a_1 + b_1 - c_1 = -1 \\ a_2 + b_1 + c_1 = +1 \\ 3a_1 - 2b_1 + c_1 = 0 \\ 3a_2 + 2b_2 + c_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima temos:

$$a_1 = a_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_1 = b_2 = 0, \quad c_1 = c_2 = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad d_1 = d_2 = 0.$$

Logo,

$$S_3 = \begin{cases} s_1(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x, & x \in [-1, 0] \\ s_2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x, & x \in [0, 1] \end{cases} .$$

No decorrer deste capítulo definimos e encaminhamos o problema da aproximação de funções via interpolação polinomial. Apresentamos então uma nova forma de interpolação: a interpolação polinomial por partes (*splines*).

No próximo capítulo, abordaremos o estudo do uso das bases para *splines* e constatamos adiante que o problema da interpolação polinomial por partes torna-se simples e apresenta ótimos resultados de aproximação.

Capítulo 2

Espaços Vetoriais de *Splines*

Uma vez atribuída noções de interpolação por *splines* no capítulo anterior, determinou-se de forma trabalhosa a construção de *splines*, visto a necessidade de resolução de sistemas lineares bastante grandes.

Afim de facilitar o estudo da *spline*, apresentamos o conjunto de *spline* como um espaço vetorial (de dimensão finita), onde encontraremos bases para os mesmos, reduzindo grandemente a complexidade de determinar *splines* interpoladores.

Visando uma melhor compreensão do assunto em questão, introduziremos algumas definições e teoremas úteis da álgebra linear.

2.1 Espaços Vetoriais Reais

2.1.1 Espaços vetoriais

A noção de espaço vetorial é a base do estudo que faremos.

Definição 2.1 Seja um conjunto V não vazio. O conjunto V munido de duas operações \oplus e \odot tais que:

$\forall u, v \in V, u \oplus v \in V$ (isto é, V fechado com relação à operação \oplus) e

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in V, \alpha \odot u \in V$ (isto é, V é fechado em relação à operação \odot)

é um espaço vetorial (ou espaço gerado sobre \mathbb{R}) se forem verificados os seguintes axiomas:

i) $u \oplus v = v \oplus u, \forall u, v \in V$

ii) $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w, \forall u, v, w \in V$

iii) Existe um elemento 0 em V tal que

$$u \oplus 0 = 0 \oplus u = u, \forall u \in V$$

iv) Para cada u em V , existe um elemento $-u$ em V tal que

$$u \oplus (-u) = 0$$

v) $\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u, v \in V$

vi) $(\alpha \oplus \beta) \odot u = \alpha \odot u \oplus \beta \odot u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u, v \in V$

vii) $\alpha \odot (\beta \odot u) = (\alpha \odot \beta) \odot u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in V$

viii) $1 \odot u = u, \forall u \in V$

Os elementos de V são chamados vetores, os números reais são chamados escalares. A operação \oplus é chamada soma de vetores, a operação \odot é denominada multiplicação por escalar. O vetor 0 que aparece no axioma (iii) é conhecido como vetor nulo. O vetor $-u$ que ocorre na propriedade (iv) é o oposto de u . É possível provar que os vetores 0 e $-u$ são únicos.

Observação 2.1 Quando os escalares são números complexos, obtém-se um espaço vetorial complexo. Tais espaços têm muitas aplicações importantes na matemática e nas ciências em geral. Neste capítulo, entretanto, vamos nos limitar ao estudo de espaços vetoriais reais.

Veremos nos exemplos a seguir, que V pode ser um conjunto constituído de polinômios, matrizes, números, funções, etc, onde cada elemento (vetor) será um polinômio, uma matriz, uma número e uma função, respectivamente.

Apesar destes conjuntos apresentarem natureza diferente dos vetores no espaço, “comportam-se” como eles. Assim, a familiaridade que temos com os vetores, terá continuidade nesse conjunto, chamando seus elementos também de vetores. Portanto, um “vetor”, agora é, simplesmente um elemento de um espaço vetorial e não precisa estar associado a um segmento de reta orientado.

Exemplos:

1) Os conjuntos $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

2) O conjunto

$$\mathbb{P}_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{R}\}$$

dos polinômios com coeficientes reais de grau $\leq n$, mais o polinômio nulo, em relação às operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

3) O conjunto

$$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

das funções definidas em toda reta. Se $f, g \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se:

$$f \oplus g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$$

e

$$\alpha f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (\alpha \odot f)(x) = \alpha f(x)$$

Observação 2.2 Vamos nos referir freqüentemente a um espaço vetorial real simplesmente por espaço vetorial. Para simplificar a notação, escreveremos também $u \oplus v$ como

$u + v$ e $\alpha \odot u$ como αu , tomando cuidado para lembrar a operação particular que estamos efetuando.

2.1.2 Subespaços vetoriais

Definição 2.2 Seja V um espaço vetorial e S um subconjunto não-vazio de V . Se S é um espaço vetorial em relação às operações em V , dizemos que S é um subespaço de V .

Exemplo 2.1 Todo espaço vetorial tem pelo menos dois subespaços, ele mesmo e o subespaço $\{0\}$ que tem como único elemento o vetor nulo. O subespaço $\{0\}$ é chamado subespaço nulo. Esses dois são os subespaços triviais de V . Os demais subespaços são denominados subespaços próprios de V .

Antes de listar outros subespaços, vamos fazer uma pausa para desenvolver um resultado importante a cerca de subespaços.

Para mostrar que um subconjunto S é um subespaço vetorial de V , deveríamos testar os oito axiomas de espaço vetorial relativos à adição e à multiplicação por escalar. No entanto, como S é parte de V , não há necessidade da verificação de certos axiomas em S . O teorema seguinte estabelece as condições para que um subconjunto S de um espaço vetorial V seja um subespaço vetorial de V .

Teorema 2.1 Dado um espaço vetorial V , um subconjunto S , não vazio, será um subespaço vetorial de V se:

- i) Para quaisquer $u, v \in S$ tivermos $u + v \in S$.
- ii) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in S$ tivermos $\alpha u \in S$.

(A prova deste teorema está em Streinbruch [9]).

Observação 2.3 Qualquer subespaço S de V precisa necessariamente conter o vetor nulo, devido a condição (ii) quando $a = 0$. Mas, não vale a recíproca, pois podemos ter $0 \in S$ sem que S seja subespaço de V .

Exemplos:

1) Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x\}$, isto é, S é o conjunto dos vetores do plano que têm a segunda componente igual ao dobro da primeira. Note que o vetor $(0, 0) \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$.

Verifiquemos então as condições (i) e (ii).

Para $u = (x_1, 2x_1) \in S$ e $v = (x_2, 2x_2) \in S$, tem-se:

$$\text{i) } u + v = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in S$$

$$\text{ii) } \alpha u = \alpha(x_1, 2x_1) = (\alpha x_1, 2(\alpha x_1)) \in S$$

Portanto, S é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^2 .

Esse subespaço S representa geometricamente uma reta que passa pela origem.

2) Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$. Se escolhermos $u = (1, 1)$ e $v = (2, 4)$, temos $u + v = (3, 5) \notin S$. Assim, S não é subespaço vetorial de V pois, caso contrário, a condição I deveria ser satisfeita para quaisquer $u, v \in S$, e isto não ocorre neste exemplo.

2.1.3 Combinação Linear

Vamos comentar agora, uma das características mais importantes de um espaço vetorial, que é a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados.

Definição 2.3 Sejam v_1, v_2, \dots, v_k vetores do espaço vetorial V . Um vetor v em V é uma combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_k se existem números reais c_1, c_2, \dots, c_k tais que

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k.$$

Exemplo 2.2 Em \mathbb{R}^3 , considere os vetores

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 0, 2) \quad \text{e} \quad v_3 = (1, 1, 0).$$

O vetor $v = (2, 1, 5)$ é uma combinação linear de v_1 , v_2 e v_3 se pudermos encontrar escalares c_1 , c_2 e c_3 tais que

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$$

Substituindo v , v_1 , v_2 e v_3 , obtemos

$$(2, 1, 5) = c_1(1, 2, 1) + c_2(1, 0, 2) + c_3(1, 1, 0)$$

Combinando os termos do lado direito e igualando aos coeficientes correspondentes, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ 2c_1 + c_3 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = 5 \end{cases}$$

cujas soluções são $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $c_3 = -1$, o que significa que v é uma combinação linear de v_1 , v_2 e v_3 . Temos então

$$v = v_1 + 2v_2 - v_3$$

Subespaços Gerados

Teorema 2.2 Seja V um espaço vetorial. Consideremos um subconjunto $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$, $A \neq \emptyset$. O conjunto S de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço vetorial de V (Ver referência[14]).

Observações:

- 1) O subespaço S diz-se gerado pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_k , ou gerado pelo conjunto A , e representa-se por:

$$S = [v_1, v_2, \dots, v_k] \quad \text{ou} \quad S = \mathcal{G}(A).$$

2) Todo conjunto $A \subseteq V$ gera um subespaço vetorial de V , podendo ocorrer $\mathcal{G}(A) = V$.
Nesse caso, A é um conjunto gerador de V .

Exemplo 2.3 Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determinar o subespaço gerado pelo vetor $v_1 = (1, 2, 3)$.

Solução:

$$[v_1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = a(1, 2, 3), a \in \mathbb{R}\}.$$

Da igualdade: $(x, y, z) = a(1, 2, 3)$, em:

$$\left. \begin{array}{l} x = a \\ y = 2a \\ z = 3a \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2x \quad \text{e} \quad z = 3x.$$

Logo,

$$[v_1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \text{ e } z = 3x\} \quad \text{ou} \quad [v_1] = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Ou seja, subespaço gerado por um vetor $v_i \in \mathbb{R}^3$, $v_i \neq 0$, é uma reta que passa pela origem.

Exemplo 2.4 Os vetores $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$ geram o espaço vetorial \mathbb{R}^2 , pois qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de i e j :

$$(x, y) = x_i + y_j = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

Definição 2.4 Um espaço vetorial V se diz finitamente gerado se existe um conjunto finito A , $A \subseteq V$, tal que $V = \mathcal{G}(A)$.

Um exemplo de espaço vetorial que *não* é finitamente gerado é o espaço P de todos os polinômios reais. Seja $A = \{P_1, \dots, P_n\} \subset P$, onde P_i é polinômio de grau i e P_n o polinômio de mais alto grau. Então qualquer combinação linear: $a_1P_1 + a_2P_2 + \dots + a_nP_n$, tem grau $\leq n$. Assim, o subespaço $\{P_1, \dots, P_n\}$ contém somente polinômios de grau menor ou igual ao grau de P_n . Como P é formado por todos os polinômios, existem nele polinômios de grau maior que o de P_n . Logo $\mathcal{G}(A) \neq P$ para todo conjunto finito $A \subset P$.

2.1.4 Dependência e Independência Linear

Cada uma dos espaços vetoriais estudados que tem um conjunto formado por um número finito de vetores que descreve V completamente. Deve-se notar que, em geral, existe mais de um tal conjunto que descreve V .

Em nosso estudo temos grande interesse no conjunto gerador que seja o menor possível. Para a determinação do menor conjunto gerador de um espaço vetorial, precisamos ter a noção de dependência e independência linear.

Definição 2.5 Sejam V um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é linearmente independente (LI), ou que os vetores v_1, \dots, v_n são LI, se a equação

$$c_1v_1 + \dots + c_kv_k = 0$$

implica que $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. No caso em que existe algum $c_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente (LD), ou que os vetores v_1, \dots, v_n são LD.

Vetores linearmente dependentes podem ser caracterizados de uma outra maneira.

Teorema 2.3 $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD se, e somente se, um destes vetores for uma combinação linear dos outros. (ver referência [10])

Observação 2.4 Esta proposição também é equivalente a: um conjunto de vetores é LI se, e somente se, nenhum deles for uma combinação linear dos outros.

Exemplo 2.5 No espaço vetorial \mathbb{R}^3 , o conjunto $\{e_1, e_2, e_3\}$, tal que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ é LI:

De fato, a equação:

$$c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 = 0$$

ou

$$c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

transforma-se em

$$(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$$

e, portanto

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Logo, o conjunto

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \text{ é LI.}$$

De forma análoga, mostra-se que os vetores

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

formam um conjunto linearmente independente no \mathbb{R}^n .

2.1.5 Base e dimensão

Definição 2.6 Um conjunto $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ é uma base do espaço vetorial V se:

- i) \mathfrak{B} é LI;
- ii) $G(\mathfrak{B}) = V$.

Exemplos:

- 1) Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ formam uma base para \mathbb{R}^2 , os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base para \mathbb{R}^3 e, no caso geral, os vetores e_1, e_2, \dots, e_n formam uma base para \mathbb{R}^n . Cada um desses conjuntos de vetores é chamado base natural ou base canônica para \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^n , respectivamente.
- 2) $\mathfrak{B} = \{(1, 2), (2, 4)\}$ não é base de \mathbb{R}^2 , pois \mathfrak{B} é LD.
- 3) $\mathfrak{B} = \{(1, 2, 1), (-1, -3, 0)\}$ não é base de \mathbb{R}^3 . \mathfrak{B} é LI, mas não gera todo \mathbb{R}^3 .

4) O conjunto $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é uma base do espaço vetorial \mathbb{P}_n .

De fato,

$$a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$$

implica $a_0 = a_1 = \dots = 0$ pela condição de identidade de polinômios. Portanto, \mathfrak{B} é LI.

Por outro lado, \mathfrak{B} gera o espaço vetorial \mathbb{P}_n , pois qualquer polinômio $p \in \mathbb{P}_n$ pode ser escrito assim:

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

que é a combinação linear de $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Logo, \mathfrak{B} é uma base de \mathbb{P}_n . Essa é a base canônica de \mathbb{P}_n e tem $n + 1$ vetores.

Dimensão

Corolário 2.3.1 Duas bases quaisquer de um espaço vetorial têm o mesmo número de vetores. Este número é chamado dimensão de V , e denotado $\dim V$ (Ver [11]).

Exemplos

- 1) A base canônica de \mathbb{R}^3 tem três vetores. Logo, qualquer base do \mathbb{R}^3 terá também três vetores. Então, $\dim V = 3$.
- 2) $\dim \mathbb{R}^n = n$
- 3) $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$

2.2 Espaços Vetoriais de *Splines*

Como vimos, as funções *splines* estão associadas a uma partição pré-determinada que consiste na junção de várias funções definidas de forma que as partes estão ligadas

umas as outras de maneira contínua e suave. Entretanto, a determinação da função *spline*, em partículas de grau 3, é muito trabalhosa. A seguir veremos que o conjunto de *splines* de primeiro e terceiro graus associados a uma certa partição de um certo intervalo formam espaços vetoriais de dimensão finita e encontraremos bases para estes com o intuito de facilitar a determinação de *splines* interpoladores.

Antes de introduzirmos o estudo a cerca de espaços vetoriais de *splines*, chamamos a atenção para a Definição de *Splines* 1.3 sobre a possibilidade do grau do polinômio em cada subintervalo.

2.2.1 Espaço Vetorial das Funções *Splines* Lineares

Seja uma partição π definida pelos pontos x_0, x_1, \dots, x_n tais que,

$$\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (2.1)$$

onde $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e $x_i - x_{i-1} = h$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Definamos o conjunto:

$$S = \{s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid s \text{ é spline linear associado a } \pi\}.$$

Então, $S \subseteq C[a, b]$, e sabemos que $C[a, b]$ é espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

Proposição 2.1 O conjunto S é um subespaço vetorial de $C[a, b]$ com as operações usuais.

Demonstração: Para mostrar que S é um subespaço vetorial de $C[a, b]$, basta verificar se ele está fechado pelas operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

Evidentemente, $S \neq \emptyset$, pois o *spline* nulo está em S .

Sejam $r, s \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{I) } r, s \in S \Rightarrow r, s \in C[a, b] \Rightarrow r + s \in C[a, b];$$

$$r, s \in S \Rightarrow \text{grau}(r) \leq 1 \text{ e } \text{grau}(s) \leq 1 \Rightarrow \text{grau}(r + s) \leq 1.$$

II) $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r \in S \Rightarrow r \in C[a, b] \Rightarrow \alpha r \in C[a, b]$;

$\alpha \in \mathbb{R}$ e $r \in S \Rightarrow \text{grau}(r) \leq 1 \Rightarrow \text{grau}(\alpha r) \leq 1$.

Logo, tem-se que S é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . ■

Observação 2.5 Note que a observação sobre o grau de *splines* faz toda a diferença, pois teremos o *spline* nulo em qualquer conjunto de *splines*.

Um fato importante nas aplicações das funções *splines* é a possibilidade de estabelecermos bases para este conjunto. Apresentaremos a seguir as bases para as *splines* lineares associados à partição definida em (2.1).

Base para os *splines* lineares

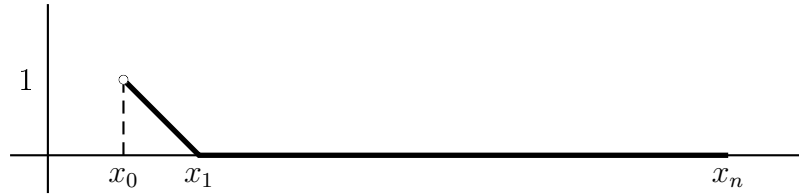
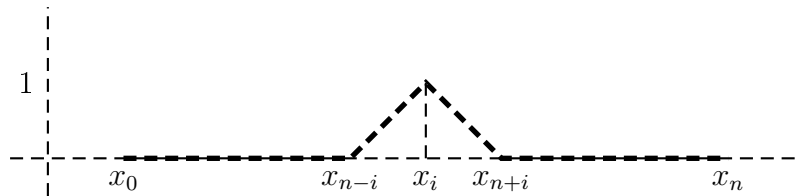
Um *spline* linear é composto de uma seqüência de segmentos de reta, com extremos nos pontos de interpolação. Logo, ele estará bem definido, se conhecermos seus valores nos pontos da partição. Este raciocínio nos leva a definir, para $1 \leq j \leq n-1$, os seguintes *splines*:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\frac{1}{h}x + \frac{x_1}{h} & ; \text{ se } x \in [x_0, x_1] \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}x - \frac{x_{i-1}}{h} & ; \text{ se } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{1}{h}x + \frac{x_{i+1}}{h} & ; \text{ se } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}x - \frac{x_{n-1}}{h} & ; \text{ se } x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

As funções $\varphi_0(x)$, $\varphi_j(x)$ e $\varphi_n(x)$ tem o gráfico das figuras 2.1, 2.2 e 2.3, respectivamente.

Figura 2.1: $\varphi_0(x)$ Figura 2.2: $\varphi_j(x)$ Figura 2.3: $\varphi_n(x)$

Teorema 2.4 Seja $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$. O conjunto φ é base de S e $\dim(S) = n + 1$.

Demonstração: Como $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, temos $\varphi \subseteq S$.

Precisamos então, mostrar que:

- I) φ é LI;
- II) φ gera s .

De fato:

- I) φ é LI, pois dados $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_0\varphi_0(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x) = 0$, para qualquer $x \in [a, b]$, temos que em particular para elementos $x_i \in \pi$, $0 \leq i \leq n$:

$$\alpha_0\varphi_0(x_i) + \alpha_1\varphi_1(x_i) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x_i) = \alpha_i\varphi_i(x_i) = \alpha_i = 0.$$

Então, $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ e φ é LI.

II) Seja $s \in S$. Temos que mostrar que existem $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $s = \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_n\varphi_n$. Para tanto, devemos ter esta igualdade em todo subintervalo de $[a, b]$.

Seja $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Como s é spline linear $s(x) = a_ix + b_i$.

Além disso, $\alpha_0\varphi_0(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x) = \alpha_{i-1}\varphi_{i-1}(x) + \alpha_i\varphi_i(x)$.

Logo,

$$s(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x) \Leftrightarrow a_ix + b_i = \alpha_{i-1}\varphi_{i-1}(x) + \alpha_i\varphi_i(x).$$

Em particular, isto deve valer para x_{i-1} e $x = x_i$:

$$a_ix_{i-1} + b_i = \alpha_{i-1}\varphi_{i-1}(x_{i-1}) + \alpha_i\varphi_i(x_{i-1}) = \alpha_{i-1}$$

$$a_ix_i + b_i = \alpha_{i-1}\varphi_{i-1}(x_i) + \alpha_i\varphi_i(x_i) = \alpha_i$$

Basta, então, verificarmos se $\alpha_{i-1}\varphi_{i-1}(x) + \alpha_i\varphi_i(x) = a_ix + b_i$, dados α_{i-1} e α_i como os coeficientes acima.

$$\begin{aligned} \alpha_{i-1}\varphi_{i-1}(x) + \alpha_i\varphi_i(x) &= (a_ix_{i-1} + b_i) \left(-\frac{1}{h}x + \frac{x_i}{h} \right) + (a_ix_i + b_i) \left(\frac{1}{h}x - \frac{x_{i-1}}{h} \right) \\ &= -\frac{(a_ix_{i-1})x}{h} + \frac{a_ix_{i-1}}{h} - \frac{b_ix}{h} + \frac{bx_i}{h} + \frac{a_ix_ix}{h} - \frac{a_ix_ix_{i-1}}{h} + \\ &\quad + \frac{b_ix}{h} - \frac{b_ix_{i-1}}{h} \\ &= \frac{a_ix_{i-1} - b_i + a_ix_i + b_i}{h}x + \frac{a_ix_{i-1}x_i + bx_i + a_ix_ix - b_ix_{i-1}}{h} \\ &= a_ix + b_i. \end{aligned}$$

Como isto vale para todo $1 \leq i \leq n$ e s é spline, os α_i estão bem definidos.

Segue então que φ é base de S e $\dim(S) = n + 1$.

■

2.2.2 Espaço Vetorial das Funções *Splines* Cúbicas

Seja uma partição π definida novamente por (2.1) com $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e $x_i - x_{i-1} = h$, $\forall 1 \leq i \leq n$.

Definamos o conjunto:

$$S = \{s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid s \text{ é spline cúbico associado a } \pi\}.$$

Da definição vem que $S \subseteq C^2[a, b]$ e $C^2[a, b]$ é espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

Proposição 2.2 O conjunto S é um subespaço vetorial de $C^2[a, b]$ com as operações usuais.

Demonstração: Como $S \subseteq C^2[a, b]$ e $S \neq \emptyset$ (o *spline* nulo está em S), basta mostrar que $r + s \in S$ e $\alpha r \in S, \forall r, s \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{I) } r, s \in S \Rightarrow r, s \in C^2[a, b] \Rightarrow r + s \in C^2[a, b];$$

$$r, s \in S \Rightarrow \text{grau}(r) \leq 3 \text{ e } \text{grau}(s) \leq 3 \Rightarrow \text{grau}(r + s) \leq 3.$$

$$\text{II) } r \in S \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow r \in C^2[a, b] \Rightarrow \alpha r \in C^2[a, b];$$

$$r \in S \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{grau}(r) \leq 3 \Rightarrow \text{grau}(\alpha r) \leq 3.$$

O que encerra a demonstração. ■

Base para os *Splines* Cúbicos

Os *splines* cúbicos se caracterizam por uma “colagem” de polinômios de grau 3, definidos em cada subintervalo da partição de modo que a função resultante tenha duas derivadas contínuas em $[a, b]$. Definimos, então, os \mathfrak{B} -*splines*, para $2 \leq i \leq n - 2$:

$$\mathfrak{B}_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{4h^3}(x - x_{i-2})^3 & , x_{i-2} \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h}(x - x_{i-1}) + \frac{3}{4h^2}(x - x_{i-1})^2 - \frac{3}{4h^3}(x - x_{i-1})^3 & , x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4h}(x_{i+1} - x) + \frac{3}{4h^2}(x_{i+1} - x)^2 - \frac{3}{4h^3}(x_{i+1} - x)^3 & , x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \frac{1}{4h^3}(x_{i+2} - x)^3 & , x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ 0 & , x \notin [x_{i-2}, x_{i+2}] \end{cases}$$

$\mathfrak{B}_i(x)$ tem o gráfico apresentado abaixo.

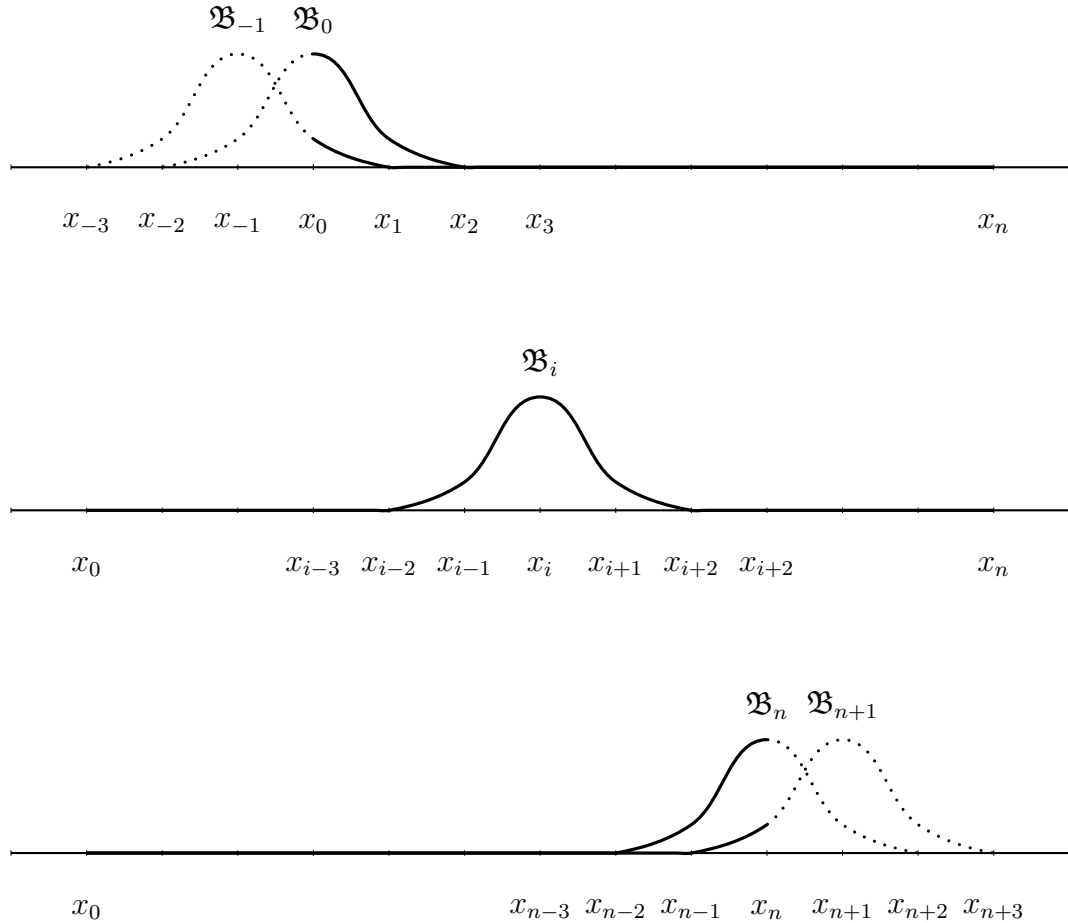


Figura 2.4: $\mathfrak{B}_i, i = -1, 0, \dots, n, n + 1$

Essa função assume, no ponto x_i , seu vértice e se anula fora do intervalo (x_{i-2}, x_{i+2}) .

Pode-se observar que para completar a base no intervalo (x_0, x_n) é necessário introduzir seis nós adicionais: $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_{n+1}, x_{n+2}$ e x_{n+3} . De fato, se traçarmos o gráfico $\mathfrak{B}_{-1}(x)$ veremos que $\mathfrak{B}_{-1}(x) \neq 0$ em (x_0, x_1) . De modo análogo, $\mathfrak{B}_{n+1}(x)$ também contribui no intervalo (x_0, x_1) . Portanto, também podemos definir os \mathfrak{B}_i , para $i = -1, 0, 1, n-1, n+1$.

A base apresentada para *splines* cúbicos, chamados \mathfrak{B} -*splines*, recebem esta **nomenclatura** devido a sua semelhança com sinos (bell), como podemos verificar na figura 2.4.

Em 1966 I. J. Schoenberg[17], mostrou que não é possível construir bases para *splines* cúbicos que se anulam fora dos conjuntos “menores” que (x_{i-2}, x_{i+2}) como é o caso das funções $\mathfrak{B}_i(x)$.

Teorema 2.5 Seja $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_{-1}, \dots, \mathfrak{B}_{n+1}\}$. O conjunto \mathfrak{B} é base de S e $\dim(S) = n + 3$.

Demonstração: Como $\mathfrak{B}_j(x)$, $1 \leq j \leq n + 1$, é um polinômio de grau 3 em cada subintervalo (x_{i-1}, x_i) , a combinação linear dessas funções

$$F(x) = \alpha_{-1}\mathfrak{B}_{-1}(x) + \alpha_0\mathfrak{B}_0(x) + \dots + \alpha_n\mathfrak{B}_n(x) + \alpha_{n+1}\mathfrak{B}_{n+1}(x)$$

também terá esta propriedade.

Verifica-se que a segunda derivada em $\mathfrak{B}_i(x)$ é contínua, ou seja, $B \subseteq S$.

Para mostrar que \mathfrak{B} é base de S , temos que verificar as seguintes condições:

I) \mathfrak{B} é LI;

II) \mathfrak{B} gera S .

I) \mathfrak{B} é LI: Sejam $\alpha_{-1}, \dots, \alpha_{n+1}$ tais que $\alpha_{-1}\mathfrak{B}_{-1} + \dots + \alpha_{n+1}\mathfrak{B}_{n+1} = 0$.

Diferenciando, temos $\alpha_{-1}\mathfrak{B}'_{-1} + \dots + \alpha_{n+1}\mathfrak{B}'_{n+1} = 0$. Esta igualdade deve valer para todo $x \in [a, b]$, em particular, para x_{i-1} e x_i , $1 \leq i \leq n$.

Aplicando ambas as funções nesses pontos, temos:

$$\begin{cases} \alpha_{-1}\mathfrak{B}_{-1}(x_{i-1}) + \cdots + \alpha_{n+1}\mathfrak{B}_{n+1}(x_{i-1}) & = 0 \\ \alpha_{-1}\mathfrak{B}_{-1}(x_i) + \cdots + \alpha_{n+1}\mathfrak{B}_{n+1}(x_i) & = 0 \\ \alpha_{-1}\mathfrak{B}'_{-1}(x_{i-1}) + \cdots + \alpha_{n+1}\mathfrak{B}'_{n+1}(x_{i-1}) & = 0 \\ \alpha_{-1}\mathfrak{B}'_{-1}(x_i) + \cdots + \alpha_{n+1}\mathfrak{B}'_{n+1}(x_i) & = 0 \end{cases}$$

Para facilitar os cálculos, apresentamos na Tabela 2.1 os valores de $\mathfrak{B}_j(x)$, bem como de suas derivadas nos pontos $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$.

	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
\mathfrak{B}_i	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0
\mathfrak{B}'_i	0	$\frac{3}{4h}$	0	$-\frac{3}{4h}$	0
\mathfrak{B}''_i	0	$\frac{3}{2h^2}$	$\frac{-3}{h^2}$	$\frac{3}{2h^2}$	0

Tabela 2.1: Derivadas de \mathfrak{B}_i em $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$

Temos então o sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4h} & 0 & \frac{3}{4h} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4h} & 0 & \frac{3}{4h} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{i-2} \\ \alpha_{i-1} \\ \alpha_i \\ \alpha_{i+1} \end{bmatrix} = 0$$

A matriz acima possui determinante $\frac{-27}{64h^2} \neq 0$.

Logo, como esta relação vale para todo $1 \leq i \leq n$, temos que $\alpha_{-1} = \alpha_0 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$.

II) \mathfrak{B} gera S : Iremos fazer por indução sobre i .

Suponha que $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$.

Então,

$$\alpha_{-1}\mathfrak{B}_{-1}(x) + \cdots + \alpha_{n-1}\mathfrak{B}_{n-1}(x) = \alpha_{i-2}\mathfrak{B}_{i-2}(x) + \cdots + \alpha_{i+1}\mathfrak{B}_{i+1}(x).$$

Substituindo os \mathfrak{B}_i pelos seus valores em x , temos:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{1}{4h^3}\alpha_{i-2} + \frac{3}{4h^3}\alpha_{i-1} - \frac{3}{4h^3}\alpha_i + \frac{1}{4h^3}\alpha_{i+1} \right) x^3 + \\
& + \left[\frac{3x_i}{4h^3}\alpha_{i-2} + \left(\frac{3}{4h^2} - \frac{9x_i}{4h^3} \right) \alpha_{i-1} + \left(\frac{3}{4h^2} + \frac{9x_{i-1}}{4h^3} \right) \alpha_i - \frac{3x_{i-1}}{4h^3}\alpha_{i+1} \right] x^2 + \\
& + \left[-\frac{3x_i^2}{4h^3}\alpha_{i-2} + \left(-\frac{3}{4h} - \frac{6x_i}{4h^2} + \frac{9x_i^2}{4h^3} \right) \alpha_{i-1} + \right. \\
& + \left. \left(\frac{3}{4h} - \frac{6x_{i-1}}{4h^2} - \frac{9x_{i-1}^2}{4h^3} \right) \alpha_i + \frac{3x_{i-1}^2}{4h^3}\alpha_{i+1} \right] x + \\
& + \left[\frac{x^3}{4h^3}\alpha_{i-2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{3x_i}{4h} + \frac{3x_i^2}{4h^2} - \frac{3x_i^3}{4h^3} \right) \alpha_{i-1} + \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{4} - \frac{3x_{i-1}}{4h} + \frac{3x_{i-1}^2}{4h^2} + \frac{3x_{i-1}^3}{4h^3} \right) \alpha_i - \frac{x_{i-1}^3}{4h^3}\alpha_{i+1} \right].
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Como \mathfrak{B} é LI, o núcleo desta matriz é trivial: pela sua dimensão, ela é invertível; então, existem únicos $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ que satisfazem este sistema.

Considere, agora, $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Suponha que existem $\alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1} \in \mathbb{R}$ tais que $s(x) = \alpha_{i-2}\mathfrak{B}_{i-2}(x) + \dots + \alpha_{i+1}\mathfrak{B}_{i+1}(x)$. Queremos mostrar que existem $\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2} \in \mathbb{R}$ tais que, se $x \in [x_i, x_{i+1}]$, tenhamos $s(x) = \alpha_{i-1}\mathfrak{B}_{i-1}(x) + \dots + \alpha_{i+2}\mathfrak{B}_{i+2}(x)$.

Basta encontrar, os coeficientes $\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}$ já estão determinados pela hipótese. Basta encontrar α_{i+2} . Tomando a expressão (2.2) para $i+1$ e igualando seu $s(x) = a_{i+1}x^3 + b_{i+1}x^2 + c_{i+1}x + d_{i+1}$, para $x \in [x_i, x_{i+1}]$, temos:

$$\alpha_{i+2} = \alpha_{i-1} - 3\alpha_i + 3\alpha_{i+1} + 4h^3\alpha_{i+1}. \tag{2.3}$$

Basta, então, verificarmos se este coeficiente é bom, ou seja, que podemos conseguir $a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}, d_{i+1}$ a partir da expressão (2.2) em $i+1$.

O coeficiente a_{i+1} sai direto de (2.3). Faremos o desenvolvimento para b_{i+1} , e os outros são obtidos de forma análoga.

Como s é *spline* cúbico e $x_i \in [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}]$:

$$s''(x_i) = 6a_{i+1}x_i + 2b_{i+1} = 6a_ix_i + 2b_i,$$

e, pela hipótese de indução,

$$s''(x_i) = \alpha_{i-2}\mathfrak{B}''_{i-2}(x_i) + \cdots + \alpha_{i+1}\mathfrak{B}''_{i+1}(x_i) \\ \frac{3}{2h^2}\alpha_{i-1} - \frac{3}{h^2}\alpha_i + \frac{3}{2h^2}\alpha_{i+1}.$$

Desta maneira:

$$b_{i+1} = \frac{s''(x_i)}{2} - 3\alpha_{i+1}x_i \\ = \frac{3}{4h^2}\alpha_{i-1} - \frac{3}{2h^2}\alpha_i + \frac{3}{4h^2}\alpha_{i+1} + \frac{3x_i}{4h^3}\alpha_{i-1} + \frac{9x_i}{4h^3}\alpha_{i+1} - \frac{3x_i}{4h^3}\alpha_{i+2} \\ = \left(\frac{3}{4h^2} - \frac{3x_i}{4h^3}\right)\alpha_{i-1} + \left(-\frac{3}{2h^2} - \frac{9x_i}{4h^3}\right)\alpha_i + \left(\frac{3}{4h^2} + \frac{9x_i}{4h^3}\right)\alpha_{i+1} - \frac{3x_i}{4h^3}\alpha_{i+2} \\ = \frac{3x_i + 3h}{4h^3}\alpha_{i-1} + \frac{3h - 9x_i - 9h}{4h^3}\alpha_i + \left(\frac{3}{4h^2} + \frac{9x_i}{4h^3}\right)\alpha_{i+1} - \frac{3x_i}{4h^3}\alpha_{i+2} \\ = \frac{3x_{i+1}}{4h^3}\alpha_{i-1} + \left(\frac{3}{4h^2} - \frac{9x_{i+1}}{4h^3}\right)\alpha_i + \left(\frac{3}{4h^2} + \frac{9x_i}{4h^3}\right)\alpha_{i+1} - \frac{3x_i}{4h^3}\alpha_{i+2},$$

que é exatamente o que a expressão (2.2) nos dá. Para determinar c_{i+1} , utilizamos a primeira derivada e, para d_{i+1} , a própria função.

Logo, temos que \mathfrak{B} é base de S e $\dim(S) = n + 3$.

■

Capítulo 3

Aplicações

Muitas vezes, determinar analiticamente a solução de uma Equação Diferencial é uma tarefa bastante penosa. Para contornar essa dificuldade emprega-se métodos numéricos a fim de construir soluções aproximadas para o problema. Neste capítulo apresentamos o Método da Colocação para resolver aproximadamente uma Equação Diferencial de segunda ordem com condições de contorno, fazendo uma projeção da solução “exata” sobre um subespaço de dimensão finita gerado por uma base *B-spline*.

3.1 *Splines* em equações diferenciais

3.1.1 Motivação e definições

As equações diferenciais são usadas para modelar problemas de ciências e engenharias que envolvam a mudança de alguma variável em relação à outra. Na maioria das situações da vida real, a equação diferencial que modela o problema é muito complicada para ser resolvida com exatidão. Sendo assim, recorre-se a métodos numéricos para aproximar a solução.

Estes métodos aproximam a solução da equação diferencial por uma combinação

linear finita de funções conhecidas. Estas funções conhecidas, usualmente chamadas de funções de base, são polinômios, funções trigonométricas e, mais importante, funções *splines*, assunto a ser tratado neste capítulo. Conceitualmente, consideramos a solução estando em um espaço de funções apropriado (dimensão infinita), e um subespaço que é determinado por funções de base. A “projeção” da solução no subespaço de dimensão finita é a solução aproximada[12].

Antes de estudarmos o assunto em questão, necessitamos de algumas definições e resultados da teoria das equações diferenciais ordinárias.

Definição 3.1 Uma equação diferencial ordinária é uma equação que envolve uma função desconhecida, $y(x)$, suas derivadas até uma ordem n e a variável independente x ; ou seja, é uma equação da forma:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Exemplos:

$$(1) \frac{dy}{dx} = 5x + 3$$

$$(2) e^y \frac{dy}{dx^2} + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1$$

$$(3) 5 \frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x) \frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0$$

Observação 3.1 Se a função incógnita depender de duas ou mais variáveis independentes, temos uma equação diferencial parcial. Este tipo de função estará fora do nosso campo de estudo.

Definição 3.2 Denomina-se ordem de uma equação diferencial a mais alta ordem de derivação que aparece na equação.

As equações dos exemplos (1),(2) e (3) são de primeira, segunda e terceira ordem, respectivamente.

Definição 3.3 Dizemos que uma equação diferencial ordinária de ordem n é linear se ela é da seguinte forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (3.1)$$

onde os coeficientes $a_0(x), \dots, a_n(x)$ são funções conhecidas da variável x . Quando $g(x)$ for identicamente nula, dizemos que a equação (3.1) é homogênea.

Se uma equação diferencial ordinária de ordem n não for do tipo (3.1), dizemos que ela é não-linear.

Uma solução de uma equação diferencial ordinária é uma função da variável independente que satisfaça a equação. Veremos a seguir alguns casos:

- i) $\frac{dy}{dx} = y$ tem $y(x) = ae^x$, $a \in \mathbb{R}$ como solução;
- ii) $z''' = 0$ é satisfeita para $z(x) = P_2(x)$ onde $P_2(x)$ é qualquer polinômio de grau 2;
- iii) $(y')^4 + y^2 = -1$ não admite solução, pois não há função que satisfaça esta equação.

Observamos que algumas equações diferenciais admitem infinitas soluções, enquanto outras não apresentam solução. No caso em que há infinitas soluções, a fim de individualizarmos somente uma, necessita-se impor condições suplementares ao problema. Em geral, uma equação de ordem m requer m condições adicionais a fim de ter uma única solução.

3.1.2 Problemas de valores iniciais e de valores de contorno

Uma equação diferencial juntamente com condições auxiliares sobre a função incógnita e suas derivadas (todas especificadas para o mesmo valor da variável independente), constituem um *problema de valores iniciais* (PVI). As condições auxiliares são condições iniciais.

Exemplos:

$$\text{a) } \begin{cases} y'(x) = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y''' + (x + 1)y' + \cos y' - (x_2 - 1)y = x_2 + y_2 \sin(x + y) \\ y(0) = 1, 1; y'(0) = 2, 2; y''(0) = 3, 3 \end{cases}$$

Se, em problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias de ordem m , $m \geq 2$, as condições fornecidas para busca de solução única não são todas dadas em um mesmo ponto, então temos um problema de valor de contorno, PVC.

Exemplo:

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 9x \\ y(0) = 1; y'(1) = 2 \end{cases}$$

Ao contrário do que ocorre com os problemas de valor inicial, é comum que problemas de contorno não tenham unicidade de solução.

Por exemplo, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $y(x) = \alpha(1 + x)$ é solução do PVC:

$$\begin{cases} y'' = 0 \\ y(-1) = 0 \\ y(1) - 2y'(1) = 0 \end{cases}$$

Nos casos em que o PVC apresenta uma única solução, condições a cerca do problema precisam ser satisfeitas. Embora haja uma única solução, verificadas as condições, a determinação de tal solução muitas vezes envolve um alto grau de dificuldade.

A fim de aproximar esta solução, estudaremos o Método da Colocação, onde procuramos a solução aproximada em um subespaço de dimensão finita S_3 , $S_3 = \{\text{spline cúbicos associados à uma partição uniforme}\}$, no qual $S_3 \in C^2[a, b]$ e $\dim S_3 = n + 3$, como vimos.

Neste estudo, nos limitaremos ao PVC linear de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem da forma

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b,$$

junto com as condições de contorno

$$y(a) = \alpha \quad \text{e} \quad y(b) = \beta.$$

Para tanto, enunciaremos primeiramente o teorema que garante a unicidade de solução para equações diferenciais de segunda ordem.

Teorema 3.1 Suponha que a função f no problema com valor de contorno

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

seja contínua no conjunto

$$D = \{(x, y, y') \mid a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < y' < \infty\},$$

e que as derivadas parciais f_y e $f_{y'}$ também sejam contínuas em D . Se

(i) $f_y(x, y, y') > 0$ para todo $(x, y, y') \in D$ e

(ii) exista uma constante M , com

$$|f_{y'}(x, y, y')| \leq M, \quad \text{para todo } (x, y, y') \in D,$$

então o problema com valor contorno tem um única solução.

Exemplo 3.1 O problema com valor de contorno

$$y'' + e^{-xy} + \sin y' = 0, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = y(2) = 0,$$

tem

$$f(x, y, y') = -e^{-xy} - \sin y'.$$

Como $f_y(x, y, y') = xe^{-xy} > 0$ e $|f_{y'}(x, y, y')| = |-\cos y'| \leq 1$, esse problema tem uma única solução.

Quando $f(x, y, y')$ tem a forma

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x),$$

a equação diferencial

$$y'' = f(x, y, y')$$

é linear. Problemas desse tipo freqüentemente ocorrem e, nesses caso, o Teorema 3.1 pode ser simplificado.

Corolário 3.1.1 Se o problema linear com valor de limite

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha \text{ e } y(b) = \beta,$$

satisfaz

- (i) $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ são contínuas em $[a, b]$
- (ii) $q(x) > 0$ em $[a, b]$, então o problema tem uma única solução.

3.1.3 Método da Colocação

Considaremos o problema de construir soluções aproximadas para uma equação diferencial de segunda ordem com os dados de contorno da forma

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y' + q(x)y = r(x), & a \leq x \leq b; \\ y(a) = \alpha \text{ e } y(b) = \beta, \end{cases} \quad (3.2)$$

tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, e $x_i - x_{i-1} = h$, $1 \leq i \leq n$, onde assumimos que (3.2) satisfaz o Corolário 3.1.1.

Neste método procuramos uma solução aproximada $\tilde{y}(x)$ em um subespaço de dimensão finita gerados por splines cúbicos S_3 , associados à uma partição uniforme. Note que a solução da equação diferencial é uma função que tem duas derivadas.

Sejam \mathfrak{B}_j a base \mathfrak{B} -spline do subespaço S_3 . Usamos a representação da solução aproximada $\tilde{y}(x)$ através desta base para estabelecer

$$y(x) \approx \tilde{y}(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} c_j \mathfrak{B}_j(x), \quad (3.3)$$

lembrando que $\mathfrak{B}_{-1}(x)$ e $\mathfrak{B}_{n+1}(x)$ entram nesta combinação linear uma vez que contribuem no intervalo $[a, b]$ onde procuramos a solução. Assim, encontrar tal solução resume-se a encontrar os coeficientes c_j , uma vez que conhecemos os valores $\mathfrak{B}(x)$.

O Método da Colocação para resolver aproximadamente o problema de contorno(3.2), consiste em assumir que a solução aproximada $\tilde{y}(x)$ satisfaz (3.2) em todos os pontos da partição.

Para determinarmos a solução aproximada, precisamos da primeira e segunda derivada de $\mathfrak{B}(x)$. As derivadas da solução aproximada serão:

$$\tilde{y}'(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} c_j \mathfrak{B}'_j(x) \quad \text{e} \quad \tilde{y}''(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} c_j \mathfrak{B}''_j(x).$$

Substituindo as expressões de $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}'(x)$ e $\tilde{y}''(x)$ na equação diferencial, do método da colocação vemos que uma relação que deve ser satisfeita pelos coeficientes c_j para que (3.3) seja uma solução aproximada para (3.2) é:

$$\sum_{j=-1}^{n+1} c_j \{ \mathfrak{B}''_j(x_i) + p(x_i) \mathfrak{B}'_j(x_i) + q(x_i) \mathfrak{B}_j(x_i) \} = r(x_i), \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Para ser compatível com as $n+3$ incógnitas $c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_n, c_{n+1}$ montaremos um sistema de $(n+3)$ equações nestas incógnitas, fazendo uso das $(n+1)$ relações em (3.4) e das duas condições de contorno definidas em (3.2). Assim, o sistema resultante é da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=-1}^{n+1} c_j \mathfrak{B}_j(a) = \alpha \\ \sum_{j=-1}^{n+1} c_j \{ \mathfrak{B}''_j(x_{i-1}) + p(x_i) \mathfrak{B}'_j(x_i) + q(x_{i-1}) \mathfrak{B}_j(x_i) \} = r(x_{i-1}), \quad 0 \leq i \leq n \\ \sum_{j=-1}^{n+1} c_j \mathfrak{B}_j(b) = \beta \end{array} \right.$$

Que em forma matricial pode ser expresso como

$$Ac = \widehat{r}, \quad (3.5)$$

onde A é uma matriz $(n+3) \times (n+3)$,

$$a_{ij} = \begin{cases} \mathfrak{B}_j''(x_{i-2}) + p(x_{i-2})\mathfrak{B}_j'(x_{i-2}) + q(x_{i-2})\mathfrak{B}_j(x_{i-2}), \\ 2 \leq i \leq n+2 \quad 1 \leq j \leq n+3 \end{cases}$$

com a primeira e última linha de A definidas de maneira óbvia,

$$c = (c_{-1}, c_0, \dots, c_n, c_{n+1})^T$$

e

$$\widehat{r} = (\alpha, r(x_0), \dots, r(x_n), \beta)^T.$$

Como as funções $B_j(x)$ são nulas fora do intervalo (x_{j-2}, x_{j+2}) , temos

$$\mathfrak{B}_j(x_i) = \mathfrak{B}_j'(x_i) = \mathfrak{B}_j''(x_i) = 0 \quad \text{quando } j - i > 1.$$

Assim sendo, para cada j as equações intermediárias do sistema têm apenas três termos não-nulos (ver tabela 3.1).

	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
\mathfrak{B}_i	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0
\mathfrak{B}_i'	0	$\frac{3}{4h}$	0	$-\frac{3}{4h}$	0
\mathfrak{B}_i''	0	$\frac{3}{2h^2}$	$-\frac{3}{h^2}$	$\frac{3}{2h^2}$	0

Tabela 3.1: Derivadas de \mathfrak{B}_i

Temos então, para $n = 6$, por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} & a_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{i+2,i+1} = \frac{3}{2h^2} + p(x_i)\frac{3}{4h} + q(x_i)\frac{1}{4}, \quad i = 0, \dots, n. \\ a_{i+2,i+2} = -\frac{3}{2} + q(x_i), \quad i = 0, \dots, n. \\ a_{i+1,i+2} = \frac{3}{2h^2} - p(x_i)\frac{3}{4h} + q(x_i)\frac{1}{4}, \quad i = 0, \dots, n. \end{array} \right.$$

$$c = \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ \vdots \\ c_6 \\ c_7 \end{bmatrix} \quad e \quad \hat{r} = \begin{bmatrix} \alpha \\ r(x_0) \\ \vdots \\ r(x_7) \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Note que a A é uma matriz quase tridiagonal, sendo que apenas a primeira e a última equação desrespeitam a condição de tridiagonalidade.

Uma vez que todos a_{ij} da matriz A e todos os componentes do vetor \hat{r} são disponíveis, a solução do sistema linear é um vetor cujas componentes c_j servem para

construir a solução aproximada do problema, o que termina o método.

Exemplo numérico:

Para aplicação deste método, considere o problema na forma de (3.2) com $p(x) = 2x$, $q(x) = -1$, $r(x) = 2(1 + x^2) \cos(x)$, e condições de fronteira $y(1) = \sin(1)$ e $y(2) = 2 \sin(2)$. A solução exata neste exemplo é dada por

$$y(x) = x \sin(x).$$

Seja uma partição no intervalo $[1, 2]$, tal que:

$$\pi : x_0 = 1, 0 < x_1 = 1, 1 < x_2 = 1, 2 < \dots < x_{10} = 2, 0,$$

isto é, os x_i são os pontos aos quais associaremos a base de splines com $h = 0, 1$.

Vimos que a solução aproximada da equação diferencial, $\tilde{y}(x)$, é estabelecida pela base \mathfrak{B} -spline associada à partição π . Ou seja:

$$y(x) \approx \tilde{y}(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} c_j \mathfrak{B}_j(x).$$

Derivando e substituindo $\tilde{y}(x_i)$, $\tilde{y}'(x_i)$ e $\tilde{y}''(x_i)$ na equação diferencial do nosso problema temos:

$$\tilde{y}''(x_i) + 2x\tilde{y}'(x_i) - \tilde{y}(x_i) = 2(1 + x_i^2) \cos(x_i),$$

o que implica

$$\sum_{j=-1}^n c_j \{ \mathfrak{B}_j''(x_i) + 2x\mathfrak{B}_j'(x_i) - \mathfrak{B}_j(x_i) \} = 2(1 + x_i^2) \cos(x_i).$$

Montamos então um sistema de treze equações fazendo com que a equação seja satisfeita nos onze pontos da partição e que $\tilde{y}(x)$ seja definida nas duas condições de contorno.

A resolução deste sistema nos levou aos seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} c_{-1} &= 0.1173353; & c_0 &= 0.140179; & c_1 &= 0.163403; & c_2 &= 0.186507; & c_3 &= 0.208956; \\ c_4 &= 0.230210; & c_5 &= 0.249731; & c_6 &= 0.266995; & c_7 &= 0.281495; & c_8 &= 0.292755; \\ c_9 &= 0.300334; & c_{10} &= 0.303836 & e & c_{11} &= 0.302917. \end{aligned}$$

Segue abaixo a figura e tabela relacionada ao nosso problema a fim de comparar a solução aproximada e exata com $n = 10$. Na tabela apresentamos a solução aproximada obtida pelo método e a solução analítica da equação diferencial, que neste exemplo é $y(x) = x \sin x$.

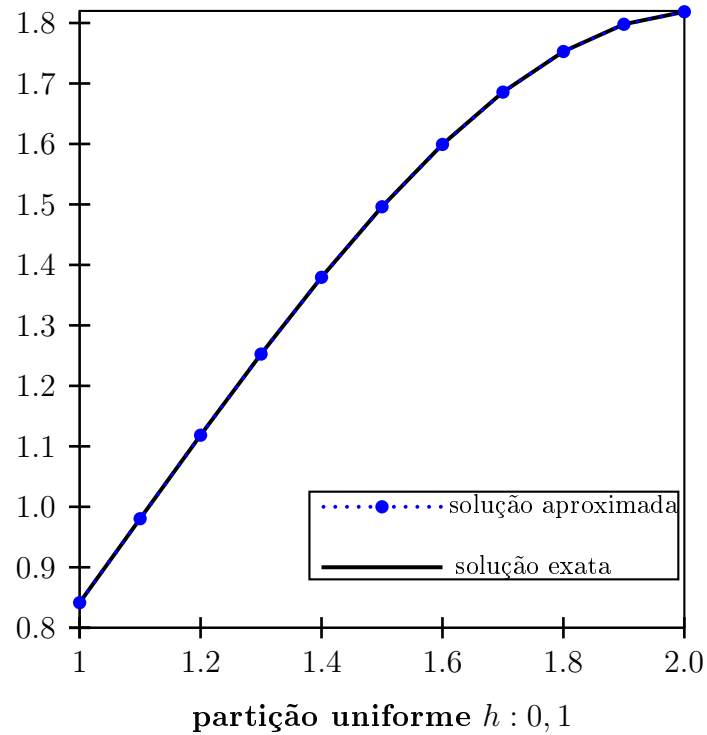


Figura 3.1: Aproximação pelo Método da Colocação

x_i	$y(x_i)$	$\tilde{y}(x_i)$	$ y(x_i) - \tilde{y}(x_i) $
1,0	0,84147098480790	0,84147098480788	0,00000000000001
1,1	0,98032809606758	0,98029963716764	0,00002845889994
1,2	1,11844690316067	1,11838918382362	0,00005771933705
1,3	1,25262564104235	1,25254200994572	0,00008363109663
1,4	1,37962962198384	1,37952668851428	0,00010293346956
1,5	1,49624247990608	1,49612922521881	0,00011325468728
1,6	1,59931776486641	1,59920470662925	0,00011305823716
1,7	1,68583017776920	1,68572862590252	0,00010155186667
1,8	1,75292573558075	1,75284716077271	0,00007857480804
1,9	1,79797016660609	1,79792568975582	0,00004447685027
2,0	1,81859485365136	1,81859485365136	0,00000000000000

Tabela 3.2: Comparação sobre os valores reais da função e os valores aproximados determinados pelo Método da Colocação

Constatamos, visto o exemplo, a ótima aproximação que o Método da Colocação traz ao problema.

Considerações Finais

A idéia inicial era fazer uma trabalho na área da Matemática Aplicada a fim de se conhecer mais sobre esta área. Optar pelo estudo das Funções Splines e suas aplicações foi muito mais interessante do que imaginei, pois percebi que esta imensa teoria é aplicada a diversos problemas das ciências aplicadas.

Visto que o trabalho iniciou-se em março de 2008, buscamos exibí-lo de maneira didática, apresentando ao leitor exemplos e figuras, a fim de ilustrar toda a teoria envolvida. Para tanto preparamos o capítulo 1: Interpolação Polinomial, cujo objetivo inicial é apresentar o assunto foco do trabalho, a interpolação, de maneira a gerar um entendimento total do assunto, desenvolvendo ou fornecendo as ferramentas básicas para a leitura dos capítulos seguintes. Da mesma forma fizemos com os capítulos 2 e 3.

Acredita-se que os objetivos propostos tenham sido atingidos com a realização do trabalho ao estudar a Interpolação Polinomial e tudo que abrange e em particular o assunto principal, funções Splines e aplicações.

Referências Bibliográficas

- [1] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lucia da Rocha. *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Makron Books, 1996.
- [2] BARROSO, Leônidas C. Barroso et al. *Cálculo Numérico (com aplicações)*. 2ª ed. São Paulo: Harbra, 1987.
- [3] FRANCO, Neide Bertoldi. *Cálculo Numérico*. 1ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [4] CONTE, S. D. *Elementos de Análise Numérica*. 2ª ed. Porto Alegre: Globo, 1977.
- [5] MASSARANI, Giulio. *Introdução ao Cálculo Numérico*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Ao livro técnico, 1967.
- [6] SCHEID, Francis. *Análise Numérica*. 2ª ed. Lisboa: McGraw-Hill, 1988.
- [7] CUNHA, Cristina. *Métodos Numéricos para as engenharias e ciências aplicadas*. 2ª ed. São Paulo: UNICAMP, 1993.
- [8] CLÁUDIO, Dalcídio Moraes; MARINS, Jussara Maria. *Cálculo Numérico Computacional: teoria e prática*. 2ª ed. São Paulo: Atlas, 1994.
- [9] STEWART, James. *Cálculo*. 4ª ed. São Paulo: Thomson Learning & Row do Brasil, 2006.
- [10] AIMI, Anderson Luis. *Interpolação Polinomial – Trabalho de Conclusão de Curso – UFSC – Licenciatura em Matemática – Florianópolis 2008*.

- [11] LACERDA, Conrado Damato de – Seminário – UFSC – Florianópolis 2005.
- [12] BURDEN, Richard. *Análise Numérica*. 1ª ed : Thomson, 2003.
- [13] GOLUB, Gene H; ORTEGA, James M. *Scientific computing and differential equations: an introduction to numerical methods*. London: Academic Press, 1981.
- [14] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra Linear*. 2ª ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- [15] KOLMAN, Bernard. *Introdução à Álgebra Linear*. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- [16] BOLDRINI, José Luiz et al. *Álgebra Linear*. 3ª ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [17] <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Schoenberg.html>