UFSC - UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - HABILITAÇÃO LICENCIATURA

CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS A PARTIR DE TRÊS PONTOS

João César de Souza

Florianópolis
2007

JOÃO CÉSAR DE SOUZA

CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS
A PARTIR DE TRÊS PONTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: José Luiz Rosas Pinho

Florianópolis
Dezembro 2007

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n° 68/CCM/07.

Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da Disciplina

Banca Examinadora:

José Luiz Rosas Pinho
Orientador

Neri Terezinha Both Carvalho

Antônio Vladimir Martins

Sumário

INTRODUÇÃO

O estudo da figura geométrica triângulo é muito amplo. Estamos interessados no estudo da construção geométrica sistemática de triângulos que é um assunto pouco abordado. O tema deste trabalho foi inspirado na obra *Manuel de Construction de Triangles* do autor *Luis Lopes*[1] que trabalha neste livro com a construção sistemática de triângulos dadas três medidas. Alguns dos casos expostos no livro são: construir o triângulo ΔABC conhecendo-se as medidas dos três lados; construir o triângulo ΔABC dadas as medidas de suas três alturas, entre outros.

Neste trabalho, o interesse é outro. Partindo de trios de pontos particulares do triângulo tentamos reconstruí-lo e, nesse processo, verificamos se há solução única, mais de uma (finita) ou infinitas. Nestes dois últimos casos podemos dizer que os três pontos não caracterizam, ou determinam, um triângulo. É o caso, por exemplo, se forem dados o baricentro, o circuncentro e o ortocentro, em que há infinitos triângulos com estes pontos especiais. As questões que se colocam aqui são essencialmente duas: 1) três pontos dados que pertencem a um triângulo determinam esse triângulo?; 2) caso os três pontos dados determinem um (único, dois ou infinitos) triângulo, como construí-lo? Os pontos que aqui nos referimos são três dentre: os quatro centros, os três pés das alturas, os três pontos médios dos lados, os três pés das bissetrizes internas e os três pontos de Euler, todos estes citados em nossa notação. Fazendo a combinação destes pontos três a três (C_{19}^3), vimos que podemos obter 969 problemas de recuperação de triângulos. Aqui apresentaremos uma boa parte destes casos.

O trabalho está dividido da seguinte maneira: no capítulo 1 damos as definições importantes relativas ao tema e apresentamos, com demonstrações, as propriedades dos elementos do triângulo; no capítulo 2 enunciamos os problemas e a sua resolução com justificativas. Em cada problema são dados três dos pontos particulares citados acima, que consideramos distintos, utilizando a seguinte ordem: problema em que são dados os três vértices (2.1, o mais trivial de todos); problemas com dois vértices e um terceiro ponto particular; problemas com um vértice e dois pontos particulares; problemas em que os três pontos dados estão entre aqueles pertencentes ao círculo de nove pontos (pontos médios dos lados, pés das alturas e pontos de Euler); finalmente problemas que envolvem os centros do triângulo.

Nas resoluções assumimos conhecidas as construções básicas (mediatriz, bissetriz, etc), mesmo por que tais construções encontram-se já em macros do software Cabri Géometre II, que foi utilizado na construção das figuras deste trabalho. Além disso, ao final de cada resolução, além do comentário sobre o número de soluções, indicamos em que situações os dados são inconsistentes (por exemplo, se são dados três pontos colineares como vértices de um triângulo). Com relação à quantidade de problemas abordados, ressaltando, que cada seção (excetuando-se 2.1; 2.72; 2.73; 2.85) corresponde a no mínimo três problemas. Por exemplo, em 2.2, dados dois vértices (A e B) e o pé da altura relativa ao lado C (H_c). Análogo a este problema temos os trios (A, C, H_b) e (B, C e H_a). Além disso há casos em que dois pontos são fixados e o terceiro varia, mas em que o problema é essencialmente o mesmo. Por exemplo, em 2.5 temos o trio (A, B e M_a) - dois vértices e o ponto médio de a - que é análogo a (A, B e M_b). Isto é indicado, no título da seção, entre parênteses. Assim, uma seção como 2.5 corresponde a de fato $3 \times 2 = 6$ problemas. Desta forma totalizamos 379 problemas dentre os 969 citados acima.

Uma última palavra quanto às resoluções: Em alguns problemas não conseguimos chegar a solução. Tais problemas são listados no final, nas conclusões. Como nossa abordagem não foi analítica, uma possibilidade seria utilizar coordenadas e resolver um problema inverso. As equações obtidas poderiam indicar, através da teoria, se o problema permitiria ou não solução com régua e compasso. Isso poderia ficar, quem sabe, para um próximo trabalho.

NOTAÇÃO

Apresentamos aqui a notação que será utilizada para os pontos do triângulo.

1. Vértices

   Usaremos as letras maiúsculas A, B e C para denotarmos os vértices do triângulo ΔABC.

2. Pontos Médios

   Os pontos médios dos lados do triângulo denotaremos por M_a, M_b e M_c respectivamente opostos aos vértices A, B e C do triângulo.

3. Pés das alturas

   Chamaremos os pés das alturas do triângulo ΔABC de H_a, H_b e H_c respectivamente opostos aos vértices A, B e C.

4. Pés das bissetrizes

   Denotaremos por B_a, B_b, e B_c os pés das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo ΔABC, respectivamente opostos aos vértices A, B e C.

5. Pontos de Euler

   Os três pontos de Euler identificamos por E_a, E_b e E_c respectivamente referentes aos vértices A, B e C.

6. Os centros

   Para os centros baricentro, ortocentro, circuncentro e incentro usaremos a notação usual G, H, O e I respectivamente.

7. Resolução análoga

   Nos casos em que existem problemas com resolução análoga à do problema resolvido no texto, indicamos os dados entre parênteses ao lado dos dados do problema original. Por exemplo: dados os pontos A, B e H_a (ou A, B e H_b).

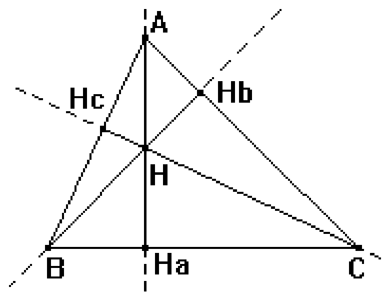
1 DEFINIÇÕES, PROPRIEDADES EM TRIÂNGULOS E CONSTRUÇÕES BÁSICAS

Neste capítulo apresentamos, com demonstrações, os principais resultados da geometria plana utilizadas na resolução dos problemas. Estes resultados foram consultados em: DOLCE e POMPEO [2], COXETER e GREITZER [3], SPIRA [4] e JUNCKES [5].

1.1 Ortocentro

As retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se em um mesmo ponto.

Sendo o ΔABC de alturas AH_a, BH_b e CH_c,



Hipótese

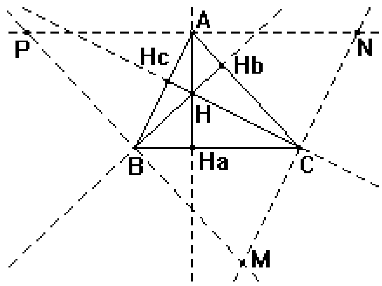
$\overleftrightarrow{AH_a}$, $\overleftrightarrow{BH_b}$ e $\overleftrightarrow{CH_c}$ retas que contêm as alturas.

Tese

A interseção das retas $\overleftrightarrow{AH_a}$, $\overleftrightarrow{BH_b}$ e $\overleftrightarrow{CH_c}$ determina H.

Demonstração

Pelos vértices A, B e C do triângulo conduzimos retas paralelas aos lados opostos, obtendo



o triângulo ΔMNP.
$A \in \overline{NP}$ e $\overline{NP} \parallel \overline{BC}$;
$B \in \overline{MP}$ e $\overline{MP} \parallel \overline{AC}$;
$C \in \overline{MN}$ e $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$.

De,
$APBC$ é paralelogramo $\Longrightarrow \overline{AP} \equiv \overline{BC}$ e
$ABCN$ é paralelogramo $\Longrightarrow \overline{AN} \equiv \overline{BC}$ temos que:
A é ponto médio de $\overline{NP}$ (1)
Como $\overleftrightarrow{AH_a} \perp \overline{BC}$, $\overline{NP} \parallel \overline{BC}$, decorre que $\overleftrightarrow{AH_a}$ é perpendicular a $\overline{NP}$ (2)

De (1) e (2), decorre que: a reta $\overleftrightarrow{AH_a}$ é mediatriz de $\overline{NP}$.

Analogamente:
A reta $\overleftrightarrow{BH_b}$ é mediatriz de $\overline{MP}$. A reta $\overleftrightarrow{CH_c}$ é mediatriz de $\overline{MN}$.

Logo, considerando o triângulo ΔMNP, as mediatrizes $\overleftrightarrow{AH_a}$, $\overleftrightarrow{BH_b}$ e $\overleftrightarrow{CH_c}$ dos lados do triângulo interceptam-se num ponto, H.

O ponto H de interseção das retas suportes das alturas de um triângulo é definido como ***ortocentro*** do triângulo.

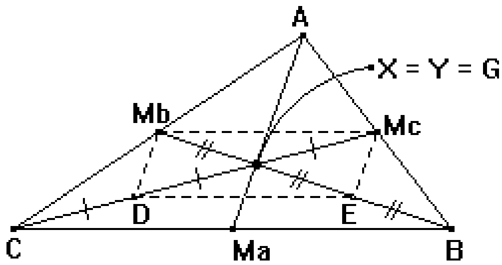
1.2 Baricentro

As três medianas de um triângulo interceptam-se em um mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contem o vértice é o dobro da outra.

Hipótese
$\overline{AM_a}, \overline{BM_b}, \overline{CM_c}$ são medianas.

Tese
1) A interseção de $\overline{AM_a}, \overline{BM_b}, \overline{CM_c}$ determina o ponto G;
2) $\overline{AG} = 2\overline{GM_a}, \overline{BG} = 2\overline{GM_b}, \overline{CG} = 2\overline{GM_c}$.

Demonstração



Seja X o ponto de interseção das medianas $\overline{BM_b}$ e $\overline{CM_c}$.

Considerando os pontos médios D e E de $\overline{BX}$ e $\overline{CX}$, temos o que segue:
No $\Delta ABC, \overline{AM_c} \equiv \overline{BM_c}$ e $\overline{AM_b} \equiv \overline{CM_b} \Longrightarrow \overline{M_bM_c} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{M_bM_c} = \frac{1}{2}\overline{BC}$; e no $\Delta XBC, \overline{XD} \equiv \overline{BD}$ e $\overline{XE} \equiv \overline{CE} \Longrightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Do resultado anterior temos que:
$\overline{M_bM_c} \parallel \overline{DE}$ e $\overline{M_bM_c} \equiv \overline{DE} \Longrightarrow M_bM_cDE$ é paralelogram, e implica que:
$\overline{DX} \equiv \overline{XM_b} \Longrightarrow \overline{BX} = 2\overline{XM_b}$ (1)
$\overline{EX} \equiv \overline{XM_c} \Longrightarrow \overline{CX} = 2\overline{XM_c}$ (2)

Logo, a mediana $\overline{BM_b}$ intercepta a mediana $\overline{CM_c}$ num ponto X tal que:

$$\overline{CX} = 2\overline{XM_c}.$$

De modo análogo, tomando-se as medianas $\overline{AM_a}$ e $\overline{CM_c}$ e sendo Y o seu ponto de interseção concluimos que:

$$\overline{CY} = 2\overline{YM_c} \ (3)$$

$$\overline{AY} = 2\overline{YM_a} \ (4).$$

De (2) e (3), decorre que $X = Y$.

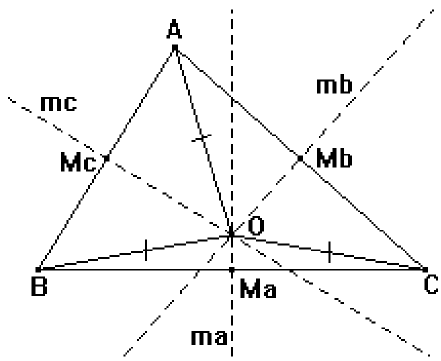
Chamando $X = Y$ de G e considerando (1), (2) e (4), temos:
G é o ponto de interseção das medianas $\overline{AM_a}, \overline{BM_b}, \overline{CM_c}$ e
$\overline{AG} = 2\overline{GM_a}$, $\overline{BG} = 2\overline{GM_b}$ e $\overline{CG} = 2\overline{GM_c}$.

O ponto G de interseção das medianas de um triângulo é definido como ***baricentro*** do triângulo.

1.3 Circuncentro

As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se em um mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.

Sendo o triângulo ΔABC,



Hipótese
m_a, m_b e m_c são mediatrizes de $\overline{BC}, \overline{AC}$ e $\overline{AB}$ respectivamente.

Tese
(1) a interseção das mediatrizes m_a, m_b e m_c determinam o ponto O;
(2) $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$.

Demonstração

Seja O o ponto de interseção de m_b e m_c.
De, $O \in m_b \Longrightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC}$ e
$O \in m_c \Longrightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OB}$.

Do resultado anterior segue que:
$\overline{OB} \equiv \overline{OC} \Longrightarrow O \in m_a$.

Portanto,
(1) a interseção das mediatrizes m_a, m_b e m_c determinam o ponto O e

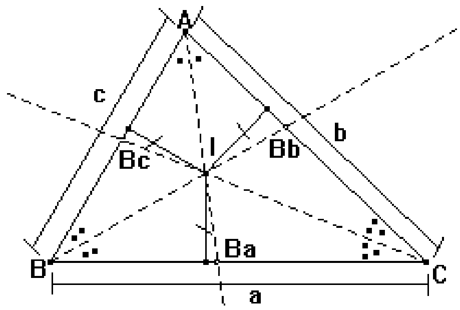
(2) $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$.

O ponto O de encontro das mediatrizes de um triângulo é chamado de ***circuncentro*** do triângulo e o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

1.4 Incentro

As bissetrizes internas de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo.

Seja o triângulo ΔABC:



Hipótese

$\overline{AB_a}, \overline{BB_b}$ e $\overline{CB_c}$ são bissetrizes internas ΔABC.

Tese

(1) A interseção de $\overline{AB_a}, \overline{BB_b}$ e $\overline{CB_c}$ determinam I;

(2) $d_{I,a} = d_{I,b} = d_{I,c}$.

Demonstração

Seja I o ponto de interseção de $\overline{BB_b}$ e $\overline{CB_c}$.

Temos:

$S \in \overline{BB_b} \Longrightarrow d_{I,a} = d_{I,c}$, e

$S \in \overline{CB_c} \Longrightarrow d_{I,a} = d_{I,b}$ o que implica que:

$d_{I,b} = d_{I,c} \Longrightarrow S \in \overline{AB_a}$.

Logo,

(1) A interseção de $\overline{AB_a}, \overline{BB_b}$ e $\overline{CB_c}$ determinam I e

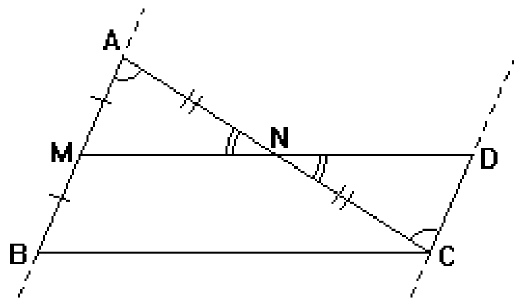
(2) $d_{I,a} = d_{I,b} = d_{I,c}$.

O ponto onde as bissetrizes de um triângulo se encontram é chamado de ***incentro*** do triângulo. Este ponto é ainda o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

1.5 Teorema da base média

i) Em um triângulo, se tivermos um segmento com extremidades nos pontos médios de dois lados, então:
1) este segmento é paralelo ao terceiro lado;
2) este segmento é metade do terceiro lado.

Seja o triângulo ΔABC.



Hipótese
$\overline{AM} \equiv \overline{MB}, \overline{AN} \equiv \overline{NC}$

Tese
1)$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$
2)$\overline{MN} = \dfrac{1}{2}\overline{BC}$

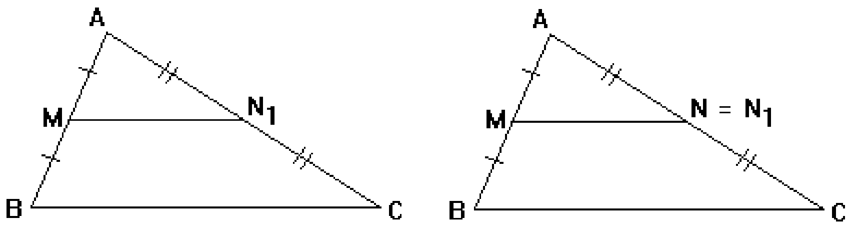
Demonstração

Traça-se por C uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e seja D o ponto de interseção com a reta $\overleftrightarrow{MN}$: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.
Mas,
$\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB} \Longrightarrow \widehat{C} \equiv \widehat{A}$
De,
$\widehat{C} \equiv \widehat{A}, \overline{AN} \equiv \overline{CN}, \widehat{N}$ comum $\Longrightarrow \Delta AMN \equiv \Delta CDN \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \overline{CD} \equiv \overline{AM} \Longrightarrow \overline{CD} \equiv \overline{MB}$
De,
$\overline{CD} \parallel \overline{MB}$, e $\overline{CD} \equiv \overline{MB} \Longrightarrow MBCD$ é paralelogramo $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \overline{MD} \parallel \overline{BC} \Longrightarrow \overline{MN} \parallel \overline{BC}$

E ainda:
$\Delta AMN \equiv \Delta CDN \Longrightarrow \overline{MN} \equiv \overline{DN}$
$MBCD$ é parapelogramo $\Longrightarrow \overline{MD} \equiv \overline{BC}$
Assim,
$2 \cdot \overline{MN} = \overline{BC} \Longrightarrow \overline{MN} = \dfrac{1}{2}\overline{BC}$.

ii) Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, então esta extremidade é ponto médio do terceiro lado.

Seja o triângulo ΔABC.



Hipótese
$\overline{MN} \parallel \overline{BC}, \overline{AM} \equiv \overline{MB}, N \in \overline{AC}$

Tese
$\overline{AN} \equiv \overline{NC}$

Demonstração

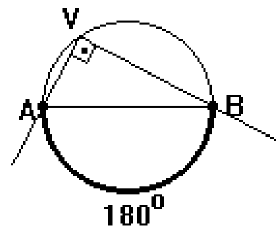
Seja N_1 o ponto médio de $\overline{AC}$. Pelo teorema anterior $\overline{MN_1} \parallel \overline{BC}$. Como a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ por M é única, resulta que $\overline{MN_1} = \overline{MN}$. E como $\overline{MN_1}$ e $\overline{MN}$ interceptam $\overline{AC}$ em N_1 e N, respectivamente, decorre que $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}$.

Logo, $\overline{AN} \equiv \overline{NC}$.

1.6 Ângulo inscrito numa circunferência

i) Todo ângulo reto inscrito subentende uma semicircunferência.

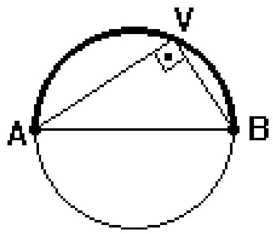
De fato,
se $A\widehat{V}B = 90^{o}$, $A\widehat{V}B$ inscrito $\Longrightarrow \widehat{AB} = 180^{o} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \widehat{AB}$ é uma semicircunferência.



ii) Um triângulo que tem os vértices numa semicircunferência é inscrito nela.

Se um triângulo inscrito numa semicircunferência tem um lado igual ao diâmetro, então ele é triângulo retângulo.

De fato, sendo AVB o triângulo, A e B os extremos da semicicunferência, $\widehat{AB} = 180^o \Longrightarrow$ $\Longrightarrow A\widehat{V}B = 90^o \Longrightarrow \Delta ABC$ é retângulo em V.

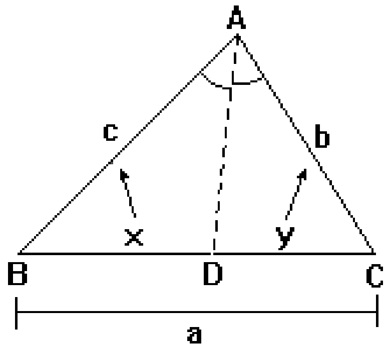


1.7 Teoremas das bissetrizes

1.7.1 Teorema da bissetriz interna

Uma bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto a esse ângulo em segmentos aditivos (isto é, dois segmentos cuja soma de suas medidas é igual a medida daquele lado do triângulo) proporcionais aos lados adjacentes.

Seja o triângulo ΔABC com as seguintes nomenclaturas:



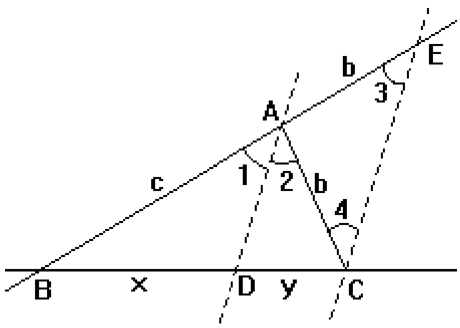
Hipótese

$\overline{AD}$ bissetriz do ângulo interno $\widehat{A}$ do ΔABC

Tese

$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$

Demonstração



Conduzimos por C uma reta paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$ ($\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$).

Temos que:
$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \widehat{1} \equiv \widehat{3}$ (correspondentes) e
$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \widehat{2} \equiv \widehat{4}$ (alternos internos).

Como por hipótese $\widehat{1} \equiv \widehat{2}$, decorre que $\widehat{3} \equiv \widehat{4}$.

De, $\widehat{3} \equiv \widehat{4} \Longrightarrow \Delta ACE$ é isósceles de base $\overline{CE} \Longrightarrow \overline{AE} \equiv \overline{AC} \Longrightarrow \overline{AE} = b$.

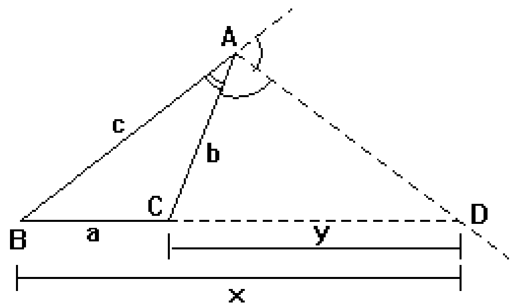
Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas ($\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$) e aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}, \text{ ou seja, } \frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$

1.7.2 Teorema da bissetriz externa

Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos subtrativos (isto é, dois segmentos cuja diferença de suas medidas é igual a medida daquele lado do triângulo) proporcionais aos lados adjacentes.

Seja o triângulo ΔABC com as seguintes nomenclaturas:



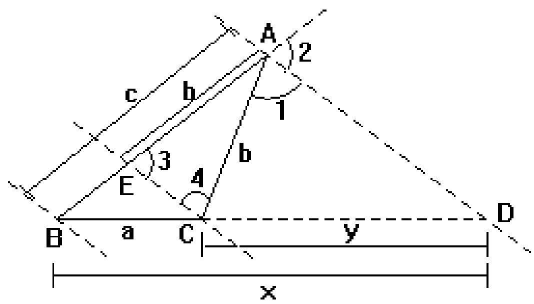
Hipótese

$\overline{AD}$ bissetriz externa do ΔABC

Tese

$\dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b}$

Demonstração



Conduzimos por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$ ($\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$).

Temos que:

$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \widehat{2} \equiv \widehat{3}$ (correspondentes) e

$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \widehat{1} \equiv \widehat{4}$ (alternos internos).

Por hipótese $\widehat{1} \equiv \widehat{2}$, logo temos que $\widehat{3} \equiv \widehat{4}$.

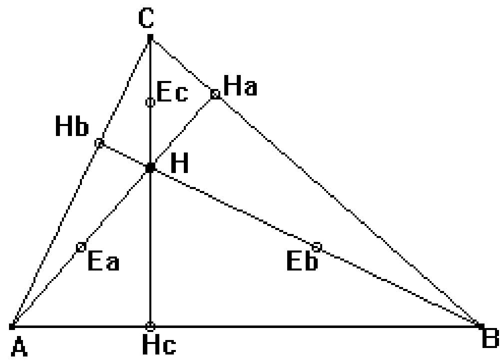
De $\widehat{3} \equiv \widehat{4} \Longrightarrow \Delta ACE$ é isósceles de base $\overline{CE} \Longrightarrow \overline{AE} \equiv \overline{AC} \Longrightarrow \overline{AE} = b$.

Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas ($\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$) e aplicando teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}, \text{ ou seja, } \frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$

1.8 Pontos de Euler

Seja ABC um triângulo de ortocentro H. Os pontos E_a, E_b e E_c são pontos médios dos segmentos AH, BH e CH respectivamente e são definidos como pontos de Euler.



1.9 Fórmula de Euler

Lema

Sendo ABC um triângulo obtusângulo, vale que $b^2 = a^2 + c^2 - 2c(c + m)$.

Demonstração

Seja o triângulo ΔABC:

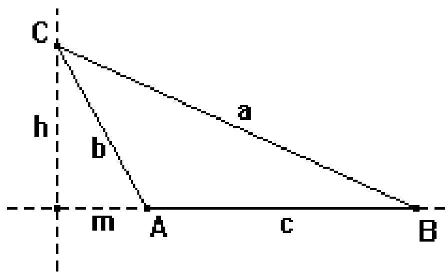
Sabe-se:

$h^2 = b^2 - m^2 \quad (1)$ e

$h^2 = a^2 - (c + m)^2 \quad (2)$.

De (1) e (2) segue que:

$b^2 - m^2 = a^2 - (c + m)^2$

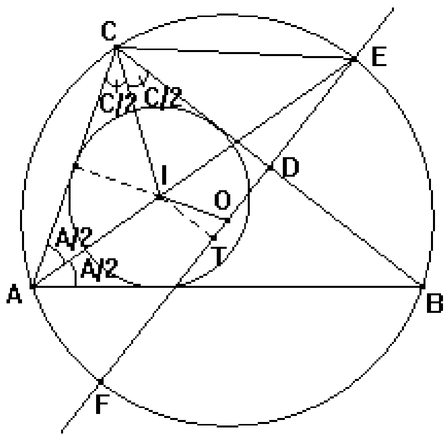


$b^2 = a^2 + m^2 - (c+m)^2 = a^2 + (m+c+m)(m-c-m) = a^2 + (2m+c)(-c) = a^2 - c^2 - 2cm =$
$a^2 + c^2 - 2c^2 - 2cm = a^2 + c^2 - 2c(c+m)$.

(Fórmula de Euler) Dado um triângulo e sendo R o raio da circunferência circunscrita, r o raio da circunferência inscrita e d a distância entre os centros das circunferências, é verdade que $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Demonstração

Seja o triângulo ΔABC de circuncentro O, e incentro I.



Por O conduzimos uma reta perpendicular ao lado BC que encontra a circunferência circunscrita em E (A e E estão em semiplanos opostos a BC).
Seja D o ponto médio de BC e T a projeção de I sobre $\overleftrightarrow{OE}$. Observe que a bissetriz de $\widehat{A}$ passa por I e por E.

No triângulo ΔOIE temos que:
$\overline{OI}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{IE}^2 - 2 \cdot \overline{OE} \cdot \overline{ET}$.
Note que:
$C\widehat{I}E = \frac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}$ (1) e

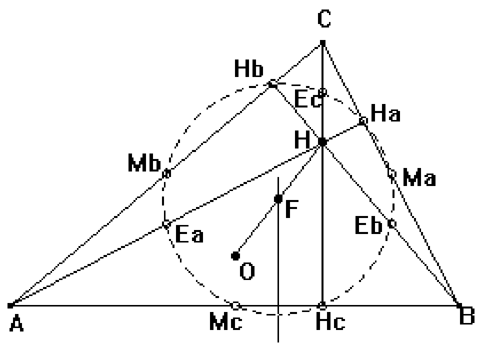
$I\widehat{C}E = \frac{\widehat{C}}{2} + B\widehat{C}E = \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2} \quad (2).$
De (1) e (2) temos que $C\widehat{I}E = I\widehat{C}E \Longrightarrow \overline{IE} = \overline{EC}$.
Segue ainda que $\overline{IE} = \overline{EC} = 2R\overline{ED}$ (certifique-se disto analisando o triângulo retângulo EFC).

Logo,

$$\begin{aligned} \overline{OI}^2 = d^2 = R^2 + 2R(\overline{ED} - \overline{ET}) = \\ = R^2 - 2R(\overline{ET} - \overline{ED}) \\ d^2 = R^2 - 2Rr \end{aligned}$$

1.10 O círculo de nove pontos

Seja ABC um triângulo de circuncentro O e ortocentro H. Então os pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos médios dos segmentos que ligam H aos vértices (chamados *pontos de Euler*) estão em um círculo cujo centro é o ponto médio de OH e cujo raio é a metade do raio do círculo circunscrito ao triângulo.



Demonstração

Sejam M_a, M_b e M_c os pontos médios e H_a, H_b e H_c os pés das alturas. Então $M_bM_c = \frac{1}{2}BC = M_aH_c$, pois M_bM_c é base média do ΔABC relativa ao lado BC e M_a é o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo ΔBH_cC. Logo o trapézio $M_cH_cM_bM_a$ é isósceles e concluímos que o círculo $\boldsymbol{F}$ que passa por M_a, M_b e H_c também passa por M_c. Analogamente concluímos que $\boldsymbol{F}$ passa por H_a e H_b.

Os pontos H_a, H_b e H_c são também os pés das alturas do ΔAHB; o parágrafo acima, aplicado ao triângulo ΔAHB, mostra que o círculo que passa por H_a, H_b e H_c também passa pelos pontos médios dos lados AH e BH. O ponto médio de CH é tratado do mesmo modo e temos os nove pontos em $\boldsymbol{F}$.

Observamos agora que o trapézio (certifique-se disto) OM_cH_cH é retângulo em M_c e H_c; logo a mediatriz de M_cH_c passa pelo ponto médio F de OH, e o mesmo acontece com as mediatrizes de H_aM_a e H_bM_b. Concluímos que F é o centro de $\boldsymbol{F}$.

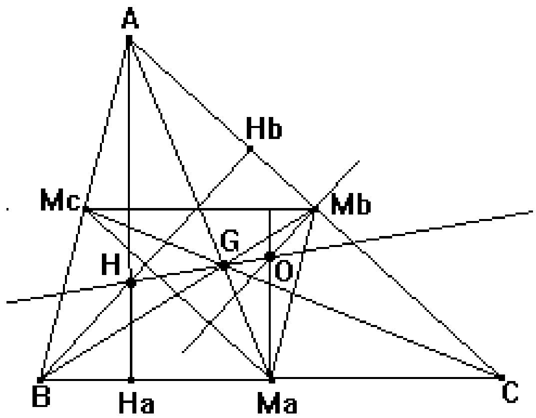
Finalmente, seja E_a o ponto médio de AH; então E_aF é um raio de $\boldsymbol{F}$ e é também base média do ΔAOH relativa ao lado OA. Como OA é raio do círculo circunscrito ao ΔABC, segue que o raio de $\boldsymbol{F}$ é $E_aF = \frac{1}{2}OA$.

1.11 Reta de Euler

Em um triângulo, o baricentro, o circuncentro, e o ortocentro são colineares. O baricentro está entre o circuncentro e o ortocentro e sua distância ao ortocentro é o dobro da sua distância ao circuncentro, ou seja, $2OG = GH$.

Demonstração

Seja o triângulo ΔABC, com os pontos médios dos lados M_a, M_b e M_c, as alturas AH_a e BH_b, o ortocentro H e o baricentro G.



Consideremos o triângulo $\Delta M_aM_bM_c$. É fácil notar que o ortocentro O do triângulo $\Delta M_aM_bM_c$ coincide com o circuncentro do triângulo ΔABC.

Além disso, como consequência do teorema da base média, os triângulos $\Delta M_aM_bM_c$ e ΔABC são semelhantes na razão de semelhança 1 : 2. Dessa forma, qualquer par de segmentos correspondentes nesses dois triângulos estão na mesma razão.

Como o quadrilátero $AM_cM_aM_b$ é um paralelogramo, suas diagonais $\overline{AM_a}$ e $\overline{M_bM_c}$ bisseccionam-se no ponto Q. Portanto a mediana M_aQ do triângulo $\Delta M_aM_bM_c$ está contida na mediana AM_a do triângulo ΔABC. Analogamente ocorre com as outras duas medianas. Logo os dois triângulos possuem o mesmo baricentro G.

Temos também $AH = 2M_aO$, por $\Delta M_aM_bM_c \sim \Delta ABC$; $AG = 2M_aG$, pelo teorema das medianas que diz que as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que dista de cada vértice $\frac{2}{3}$ da distância deste vértice ao ponto médio do lado oposto; e $H\widehat{A}G \equiv G\widehat{M_a}O$, pois $\overleftrightarrow{AH} \parallel \overleftrightarrow{OM_a}$.

Portanto os triângulos ΔAGH e ΔM_aGO são semelhantes na razão de semelhança 1 : 2, e então $A\widehat{G}H \equiv M_a\widehat{G}O$.

Assim, temos que O, G e H são colineares e $OG = \frac{1}{2}GH$.

A reta que contém esses três pontos notáveis do triângulo é chamada de ***reta de Euler***.

1.12 Conjugados harmônicos

Sejam A e B pontos distintos e $k > 0$ com $k \neq 1$. Então existem exatamente dois pontos P, Q $\in \overleftrightarrow{AB}$ que dividem AB interna e externamente, respectivamente, na razão k.

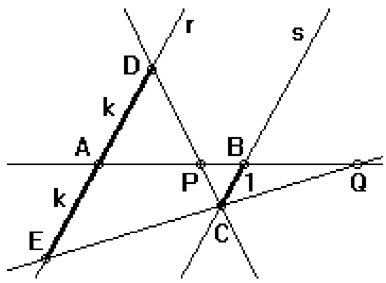
Demonstração

Para a unicidade, suponhamos que P e Q sejam pontos distintos que dividem AB internamente na mesma razão $k \neq 1$. Então,

$$k = \frac{AP}{BP} = \frac{AR}{BR} = \frac{AP - AR}{BP - BR} = \frac{PR}{PR} = 1,$$

um absurdo. Logo P = R e temos a unicidade; o caso do ponto externo é análogo.

Para a existência, tracemos por A uma reta r que não contenha B e por B uma paralela s a r. Em s marcamos C tal que BC = 1; em r marcamos D e E tais que AD = AE = k. Determinamos então P e Q como as interseções de $\overleftrightarrow{AB}$ com $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CE}$, respectivamente.

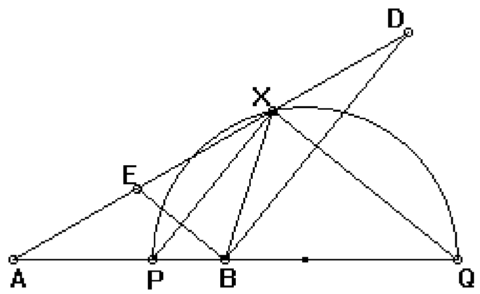


A semelhança dos triângulos ΔPAD e ΔPBC nos mostra que $\frac{AP}{BP} = k$, e os triângulos ΔQAE e ΔQBC nos dão o mesmo resultado para Q.

Com este resultado P e Q são ditos conjugados harmônicos com relação a A e B.

1.13 O círculo de Apolônio

Sejam A e B pontos distintos, $k > 0$ e $P, Q \in \overleftrightarrow{AB}$ conjugados harmônicos de A e B com relação à razão k. Então o lugar geométrico dos pontos X tais qur $\frac{AX}{BX} = k$ é a mediatriz de AB se $k = 1$ e o círculo **C** de diâmetro PQ se $k \neq 1$.



Demonstração

No caso $k = 1$ não há o que fazer; supomos então $k \neq 1$. Suponhamos primeiro que X é tal que $\frac{AX}{BX} = k$ e sejam P e Q os pés das bissetrizes interna e externa, respectivamente, do ângulo $A\widehat{X}B$; segue qur $P\widehat{X}Q$ é reto. O teorema da bissetriz nos diz que

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AX}{BX} = \frac{AQ}{BQ},$$

donde $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ} = K$. Logo os pontos P e Q dividem AB interna e externamente na mesma razão k e, deste modo, independem da escolha de X. Concluimos então que para qualquer escolha de X o ângulo $P\widehat{X}Q$ é reto em X, donde X $\in$ **C** .

Reciprocamente, seja X $\in$ **C**; temos então que $P\widehat{X}Q$ é reto. Tracemos por B paralelas a XP e XQ, que interceptam AX em D e E respectivamente.

Então$\frac{AP}{BP} = \frac{AX}{DX}$ e $\frac{AQ}{BQ} = \frac{AX}{EX}$; como $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ}$ obtemos XD = XE. Logo X é o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo ΔDBE, e obtemos XD = XB. Assim $\frac{AX}{BX} = k$.

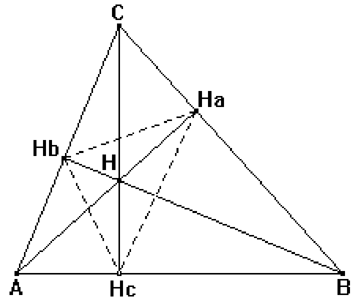
1.14 Triângulo órtico

O triângulo órtico de um triângulo ΔABC é o triângulo formado pelos pés das três alturas de ΔABC.

Propriedade do triângulo órtico: as alturas de ΔABC são as bissetrizes dos ângulos internos de seu triângulo órtico.

Demonstração

Sejam H_a, H_b e H_c os pés das alturas do triângulo ΔABC. Então $\Delta H_aH_bH_c$ é o seu triângulo órtico.

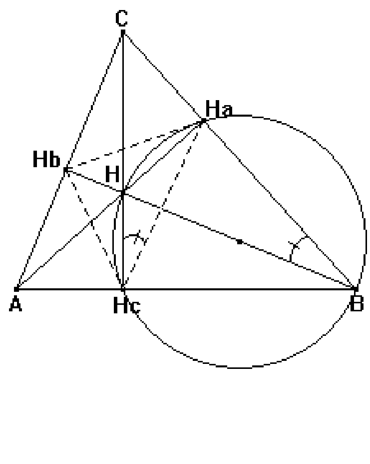


Vamos mostrar que $C\widehat{H_c}H_a = C\widehat{H_c}H_b$. Para os outros ângulos a demonstração é análoga. Note que $C\widehat{B}H_b + A\widehat{C}B = C\widehat{A}H_a + A\widehat{C}B = 90°$. Segue que $C\widehat{B}H_b = C\widehat{A}H_a$.
Por outro lado, os quadriláteros H_cBH_aH e H_cAH_bH são inscritíveis, pois

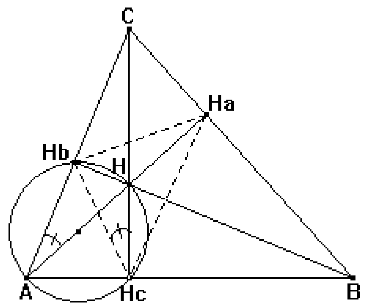
$$BH_cH + BH_aH = 180° \text{ e } AH_cH + AH_bH = 180°.$$

Então

$$C\widehat{H_c}H_a = H_a\widehat{B}H = \frac{arcoH_aH}{2} \text{ e}$$
$$C\widehat{H_c}H_b = H_b\widehat{A}H = \frac{arcoH_bH}{2}$$

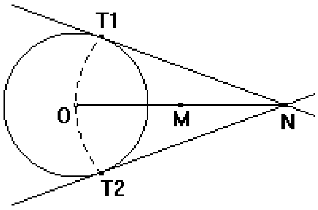


Logo, $C\widehat{H_c}H_a = C\widehat{H_c}H_b$.



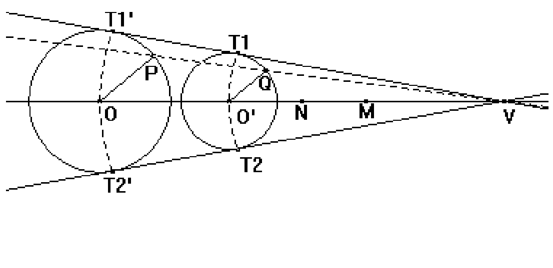
1.15 Reta tangente a uma circunferência

Dados uma circunferência e um ponto fora dela, traçar uma ou duas retas tangentes a circunferêcnia por este ponto. Acha-se o ponto médio de ON determinando M. Com centro em M e raio MO, traça-se o arco determinando os pontos T_1 e T_2. Então as retas $\overleftrightarrow{NT_1}$ e $\overleftrightarrow{NT_2}$ são tangentes a circunferência.



1.16 Reta tangente a duas circunferências

Dadas duas circunferências, traçar uma ou duas retas tangentes a essas circunferências. Traça-se dois raios quaisquer, tal que sejam paralelos entre si, e marca-se os pontos P e Q nas interseções com as circunferências. Na interseção da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ com a reta $\overleftrightarrow{OO'}$ determina-se o ponto V. Acha-se o ponto médio M de O'V. Com centro em M e raio O'M traça-se o arco determinando os pontos T_1 e T_2. Acha-se o ponto médio N de OV. Com centro em N e raio NO traça-se o arco determinando os pontos T_1' e T_2'. Assim, as retas $\overleftrightarrow{VT_1}$ e $\overleftrightarrow{VT_2}$ são tangentes as duas circunferências.



2 CONSTRUIR UM TRIÂNGULO ΔABC NOS SEGUINTES CASOS:

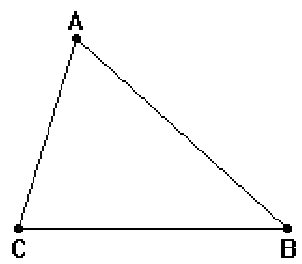
Neste capítulo apresentamos a resolução de 85 problemas de construção de triângulos, partindo sempre de três pontos dados de cada um desses triângulos. Indicamos, em cada caso, os problemas que possuem resolução análoga ao problema resolvido. Além disso, citamos após a resolução de cada problema, se este possui solução única, mais de uma (finita) ou infinitas soluções.

2.1 Dados os pontos A, B e C

Este é o caso mais trivial que temos. Como A,B e C são vértices do triângulo, basta unir-mos esses pontos.

Logo, constroi-se um único triângulo ΔABC.

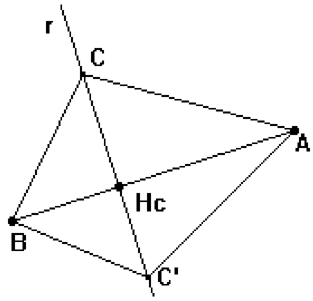
O problema não tem solução se A, B e C forem colineares.



2.2 Dados os pontos A, B e H_c

Traça-se por H_c uma reta r perpendicular ao lado AB dado. Nota-se que r é reta suporte para a altura correspondente ao vértice C. Para qualquer ponto sobre a reta r teremos o ΔABC.

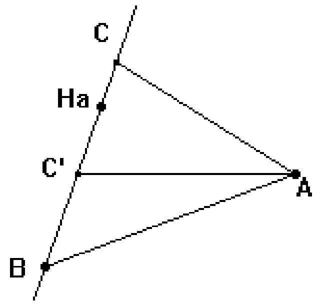
Portanto, tem-se infinitas soluções para o problema.



2.3 Dados os pontos A, B e H_a (ou A, B e H_b)

Por B e H_a traça-se a reta r. Para qualquer ponto C pertencente a r, C distinto de B, tem-se o ΔABC.

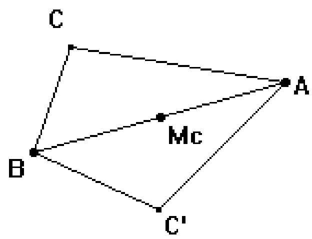
Logo, tem-se infinitas soluções para o problema.



2.4 Dados os pontos A, B e M_c

Para qualquer ponto C fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$ haverá uma solução.

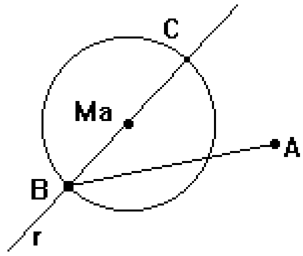
Logo, tem-se infinitas soluções para o problema.



2.5 Dados os pontos A, B e M_a (ou A, B e M_b)

Como M_a é ponto médio do lado $\overline{BC}$, marca-se C sobre a reta $\overleftrightarrow{BM_a}$, tal que, $BM_a = M_aC$.

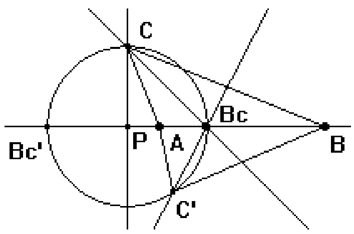
Logo, tem-se uma única solução para o problema.



2.6 Dados os pontos A, B e B_c

Se B_c for ponto médio de $\overline{AB}$ o triângulo será isósceles o que implica que o vértice C estará sobre a mediatriz de $\overline{AB}$, mas não na interseção. Caso $B_c \neq M_c$ acha-se o conjugado harmônico B_c' de B_c sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e usa-se "círculo de Apolonio"(ver índice). Então para qualquer vértice C sobre o círculo determina-se o ΔABC.

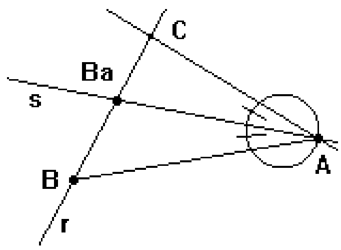
Logo, há infinitas soluções para o problema.



2.7 Dados os pontos A, B e B_a (ou A, B e B_b)

Como AB_a é bissetriz do ângulo Â do triângulo ABC, constrói-se o ângulo $B_a\hat{A}C = B_a\hat{A}B$, tal que C pertença a reta $\overleftrightarrow{BB_a}$.

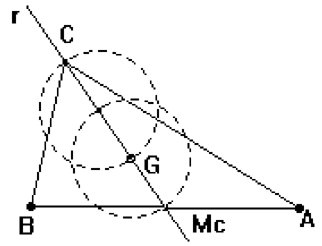
Logo, detemina-se um único triângulo ΔABC.



2.8 Dados os pontos A, B e G

Acha-se M_c ponto médio de AB. Pela propriedade de baricentro marca-se C na reta $\overleftrightarrow{M_cG}$ tal que $CG = 2GM_c$.

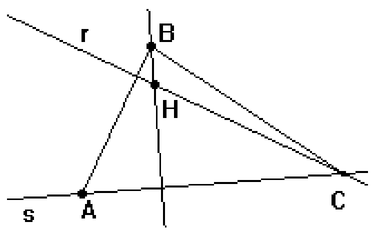
Portanto, temos a solução única para o problema.



2.9 Dados os pontos A, B e H

Traça-se por H a reta r perpendicular a AB, sendo r reta suporte da altura correspondente ao vértice C. Por A traça-se a reta s perpendicular a reta $\overleftrightarrow{BH}$. Na interseção das retas r e s tem-se o vértice C.

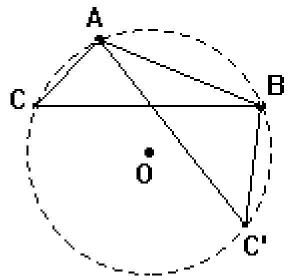
Logo, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.10 Dados os pontos A, B e O

Com centro em O traça-se a circunferência de raio OA, que é a cinrcunferência circunscrita ao triângulo ABC. Note que C é qualquer ponto sobre a circunferência, diferene apenas de A e de B.

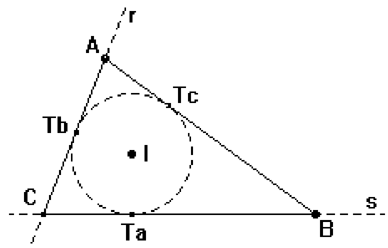
Assim, há infinitas soluções para o problema.



2.11 Dados os pontos A, B e I

Com centro em I traça-se a circunferência tangente ao lado AB. Por A e B traçam-se as retas r e s respectivamente, tangentes a circunferência. Na interseção das retas r e s determina-se o vértcice C.

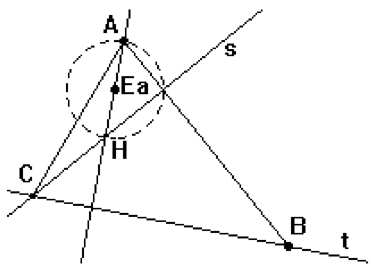
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.12 Dados os pontos A, B e E_a (ou A, B e E_b)

Tem-se que E_a é ponto de Euler e sabe-se que $AE_a = E_aH$, sendo H o ortocentro do triângulo ABC. Por H traça-se a reta s perpendicular a AB. Por B traça-se a reta t perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AH}$. Na interseção de t e s determina-se o vértice C.

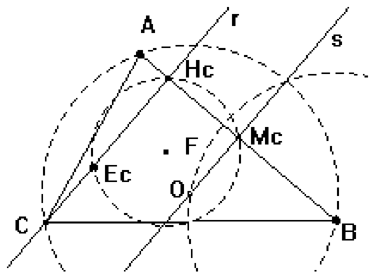
Assim, temos um único triângulo ΔABC.



2.13 Dados os pontos A, B e E_c

Por E_c traça-se a reta r perpendicular à AB determinando H_c na interseção. Traça-se a mediatriz s de AB e marca-se M_c ponto médio de AB. Sabe-se que E_c, H_c e M_c pertencem ao círculo de nove pontos (ver índice) e que esses três pontos determinam o círculo. Tome como F o centro do círculo de nove pontos. Sabe-se que o raio desse círculo é a metade do raio da circunferência circunscrita no triângulo ABC, ou seja, $2FE_c = OA$. Com centro em A (ou B) traça-se a circunferência de raio $2FE_c$ que intercepta a mediatriz s em O. Traça-se a circunferência circunscrita de centro O que intercepta a reta r determinando o vértice C do triângulo.

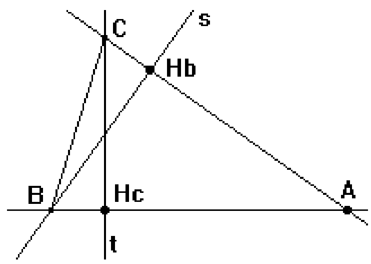
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.14 Dados os pontos A, H_b, e H_c

Por H_c traça-se uma reta t perpendicular à reta $\overleftrightarrow{H_cA}$. No encontro de t com a reta $\overleftrightarrow{H_bA}$ tem-se o vértice C. Por H_b traça-se uma reta s perpendicular à reta $\overleftrightarrow{H_bA}$. Na interseção de s com a reta $\overleftrightarrow{H_cA}$ tem-se o vértice B.

Portanto, temos um único triângulo ΔABC.

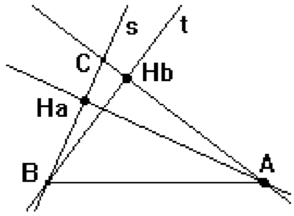


2.15 Dados os pontos A, H_a e H_b (ou A, H_a e H_c)

Por H_a traça-se uma reta s perpendicular à reta $\overleftrightarrow{H_aA}$. Na interseção de s com a reta $\overleftrightarrow{H_bA}$ encontra-se o vértice C. Por H_b traça-se uma reta t perpendicular à reta $\overleftrightarrow{H_bA}$. Na interseção de

t com a reta s encontra-se o vértice B.

Logo, temos um único triângulo ΔABC.

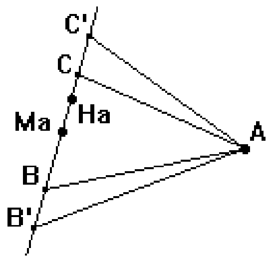


2.16 Dados os pontos A, H_a e M_a

Para quaisquer pontos B e C, tais que BM_a=M_aC, pertencentes à reta $\overleftrightarrow{M_aH_a}$ determina-se um triângulo ABC.

Assim, há infinitas soluções para o problema.

O problema só tem dados consistentes se $\overline{AH_a} \perp \overline{M_aH_a}$.

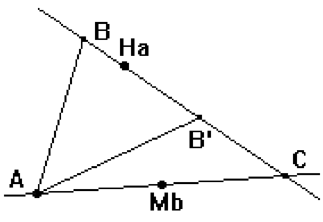


2.17 Dados os pontos A, H_a e M_b (ou A, H_a e M_c)

Acha-se C sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$ tal que $AM_b = M_bC$. Para qualquer vértice B, com B$\neq$C, pertencente a reta $\overleftrightarrow{H_aC}$ determina-se o triâgulo ABC.

Logo, tem-se infinitas soluções para o problema.

O problema só tem dados consistentes se $\overline{AH_a} \perp \overleftrightarrow{H_aC}$

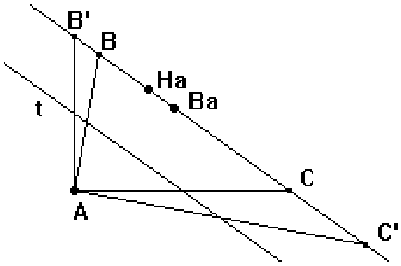


2.18 Dados os pontos A, H_a e B_a

Constroi-se a mediatriz t de AH_a. Tome C pertencente à $\overleftrightarrow{H_aB_a}$. Acha-se B em $\overleftrightarrow{H_aB_a}$ tal que $B\hat{A}B_a = B_a\hat{A}C$.

Portanto, há infinitas soluções para o problema.

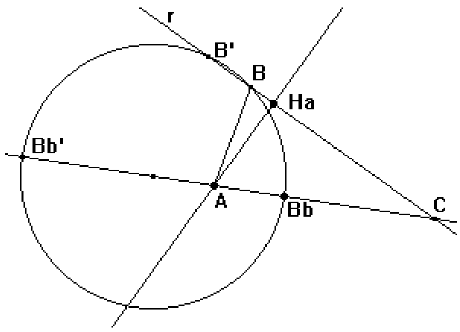
O problema tem dados consistentes se $\overline{AH_a} \perp \overline{H_aB_a}$



2.19 Dados os pontos A, H_a e B_b (ou A, H_a e B_c)

Por H_a traça-se uma reta r perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AH_a}$. No encontro de r com a reta $\overleftrightarrow{AB_b}$ encontra-se o vértice C. Caso B_b coincida com M_b tem-se um triângulo isósceles e para qualquer vértice B sobre a mediatriz de AC, com $B \neq B_b$, constroi-se o triângulo ABC. Logo tem-se infinitos ΔABC. Se $B_b \neq M_b$ usa-se conjugados harmônicos e acha-se o pé da bissetriz externa B_b' do triângulo procurado, com B_b' pertencente a reta $\overleftrightarrow{AB_b}$. Usando circulo de Apolonio (ver índice) determina-se o vértice B na interseção do círculo com a reta r.

Portanto, o problema pode ter duas (r secante ao círculo de Apolônio), uma (r tangente ao círculo), ou nenhuma solução (r não intercepta o círculo).

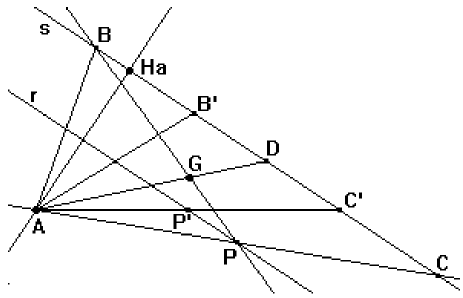


2.20 Dados os pontos A, H_a e G

Traça-se r mediatriz de AH_a. Por H_a traça-se a reta s perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH_a}$. Sabe-se que o triângulo AH_aC é inscritível a circunferência de diâmetro AC. Para qualquer centro P em r, P não pertencente a AH_a, detemina-se o vértice C na interseção de $\overleftrightarrow{AP}$ com a reta s. Na interseção de $\overleftrightarrow{PG}$ com a reta s determina-se o vértice B.

Logo, há infinitas soluções para o triângulo problema.

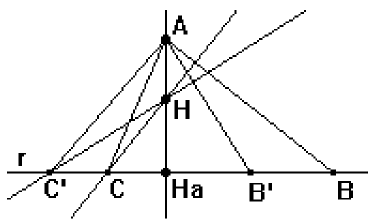
O problema é consistente se $\overleftrightarrow{AG}$ interceptar D tal que AG = 2GD. Observe que, neste caso, como $\overline{BP}$ é mediana relativa ao lado $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ também será mediana.



2.21 Dados os pontos A, H_a e H

Por H_a traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH}$. Para qualquer vértice B pertencente à reta r, com B $\neq H_a$, teremos o vértice C em r, tal que C é a interseção de r com a reta perpendicular a AB que passa por H.

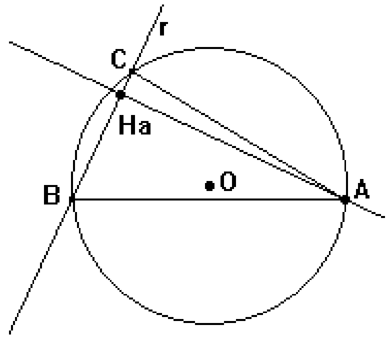
Assim, temos infinitas soluções para o problema.



2.22 Dados os pontos A, H_a e O

Por H_a traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH_a}$. Com centro em O traça-se a circunferência de raio OA, determinando os vértices B e C na interseção com a reta r.

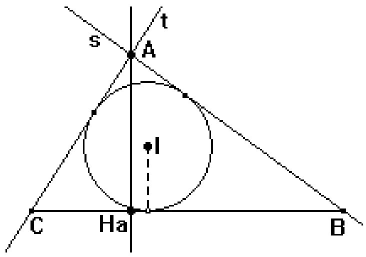
Portanto, tem-se uma ou nenhuma solução, conforme a reta r seja, respectivamente, secante ou tangente (ou não intercepta) a circunferência de centro O e raio OA.



2.23 Dados os pontos A, H_a e I

Traça-se por H_a a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH_a}$. Constrói-se a circunferência inscrita que tangência a reta r. Por A traçam-se as retas s e t, tangentes à circunferência inscrita, determinando B e C respectivamente nas interseções com r.

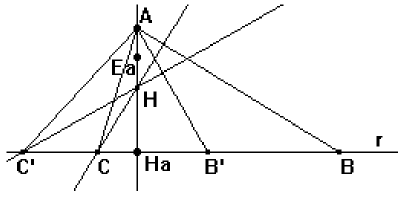
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.24 Dados os pontos A, H_a e E_a

Por H_a traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH_a}$. Sobre $\overleftrightarrow{AH_a}$ marca-se H. Para qualquer vértice B pertencente à reta r, com B $\neq$ H_a, teremos o vértice C em r, tal que C é a interseção de r com a reta perpendicular a AB que passa por H

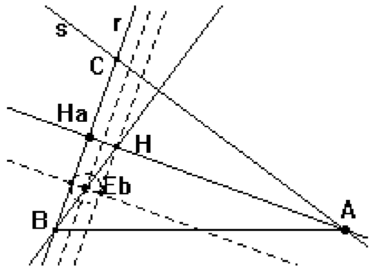
Assim, temos infinitas soluções para o problema.



2.25 Dados os pontos A, H_a e E_b (ou A, H_a e E_c)

Por H_a traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH_a}$. Como E_b é ponto médio de BH usando o teorema da base média determina-se B e H sobre as retas r e $\overleftrightarrow{AH_a}$ respectivamente. Por A traça-se a reta s perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BH}$, determinando assim o vértice C na interseção de s com r.

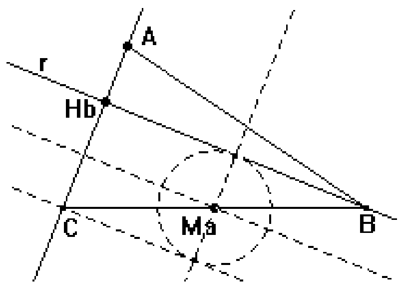
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.26 Dados os pontos A, H_b e M_a (ou A, H_c e M_a)

Traça-se por H_b a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH_b}$. Como M_a é ponto médio do lado CB, pelo teorema da base média determina-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AH_b}$, e consequentemente determina-se o vértice B sobre a reta r.

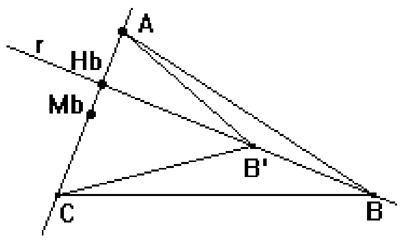
Logo, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.27 Dados os pontos A, H_b e M_b (ou A, H_c e M_c)

Como M_b é ponto médio do lado AC, temos o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Por H_b traça-se uma reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Para qualquer ponto diferente de H_b sobre a reta r tem-se o vértice B.

Portanto, há infinitas soluções para o problema.

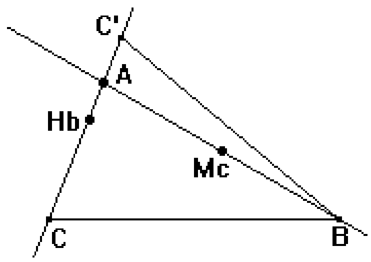


2.28 Dados os pontos A, H$_b$ e M$_c$ (ou A, H$_c$ e M$_b$)

Como M$_c$ é ponto médio do lado AB, tem-se o vértice B sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_c}$. Para qualquer ponto diferente de A sobre a reta $\overleftrightarrow{AH_b}$ tem-se o vértice C.

Então, temos infinitas soluções para o problema.

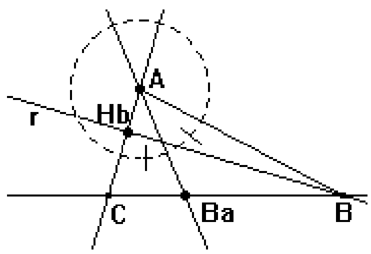
Os dados são consistentes se $\overline{BH_b} \perp \overline{AH_b}$.



2.29 Dados os pontos A, H$_b$ e B$_a$ (ou A, H$_c$ e B$_a$)

Por H$_b$ traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH_b}$. A reta $\overleftrightarrow{AH_b}$ é suporte do lado AC, com isso H$_b\widehat{A}$B$_a$ = B$_a\widehat{A}$B e assim marca-se o vértice B sobre a reta r. Na interseção das retas $\overleftrightarrow{AH_b}$ e $\overleftrightarrow{BB_a}$ encontra-se o vértice C.

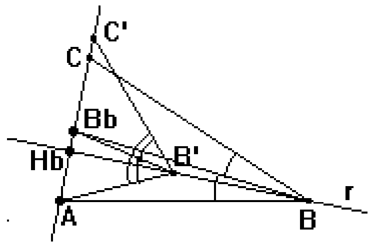
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.30 Dados os pontos A, H$_b$ e B$_b$ (ou A, H$_c$ e B$_c$)

Traça-se por H$_b$ a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB_b}$. Para qualquer vértice B sobre a reta r encontra-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AB_b}$, de modo que $C\widehat{B}B_b = A\widehat{B}B_b$.

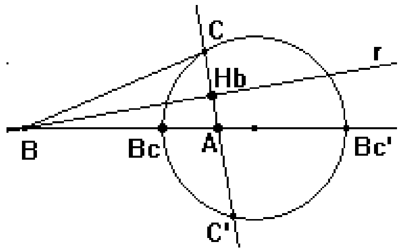
Portanto, temos infinitas soluções para o problema.



2.31 Dados os pontos A, H$_b$ e B$_c$ (ou A, H$_c$ e B$_b$)

Por H$_b$ traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH_b}$. Na interseção de r com a reta $\overleftrightarrow{AB_c}$ marca-se o vértice B. Por conjugados harmônicos acha-se o pé da bissetriz externa sobre $\overleftrightarrow{AB_c}$. Traça-se o círculo de Apolônio. Na interseção do círculo com $\overleftrightarrow{AH_b}$ encontra-se o vertice C.

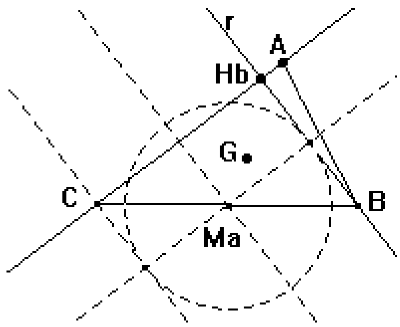
Assim, tem-se duas soluções para o problema.



2.32 Dados os pontos A, H$_b$ e G (ou A, H$_c$ e G)

Traça-se por H$_b$ a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH_b}$. Temos que AG = 2GM$_a$, então marca-se M$_a$ sobre $\overleftrightarrow{AG}$. Como M$_a$ é ponto médio do lado CB, pelo teorema da base média determina-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AH_b}$, e consequentemente determina-se o vértice B sobre a reta r.

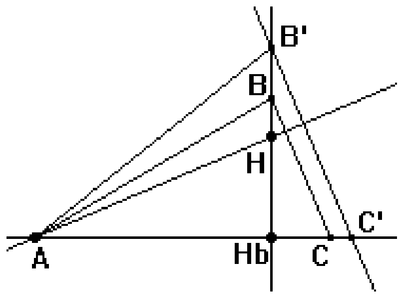
Logo, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.33 Dados os pontos A, H_b e H (ou A, H_c e H)

Para qualquer vértice B, diferente de H_b, pertencente a reta $\overleftrightarrow{HH_b}$ encontra-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AH_b}$, desde que BC seja perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH}$.

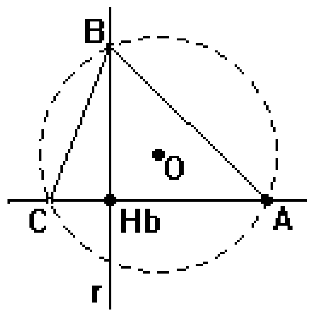
Então, temos infinitas soluções para o problema.



2.34 Dados os pontos A, H_b e O (ou A, H_c e O)

Por H_b traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH_b}$. Traça-se a circunferência circunscrita determinando assim os vértices B e C na interseção com as retas r e $\overleftrightarrow{AH_b}$ respectivamente.

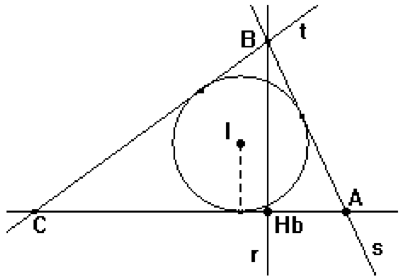
Portanto, temos duas soluções problema se $OA \neq OH_b$ e uma única solução se $OA = OH_b$ (triângulo retângulo em $C = H_b$).



2.35 Dados os pontos A, H_b e I (ou A, H_c e I)

Traça-se a circunferência inscrita que tangência a reta $\overleftrightarrow{AH_b}$. Por H_b traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH_b}$. Por A traça-se a reta s, diferente da reta $\overleftrightarrow{AH_b}$, tangente a circunferência inscrita, determinando na interseção com r o vértice B. Por B traça-se a reta t tangente a circunferência, com t diferente de s, determinando na interseção com a reta $\overleftrightarrow{AH_b}$ o vértice C.

Assim, determina-se um único triângulo ΔABC.

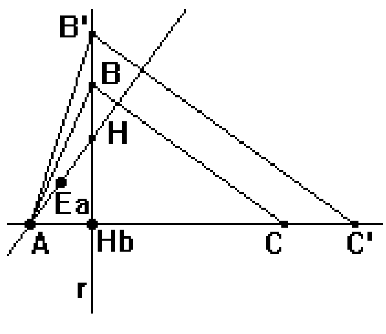


2.36 Dados os pontos A, H_b e E_a (A, H_c e E_a)

Como E_a é ponto médio de AH, tem-se H. Por H_b traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH_b}$. Para qualquer vértice B, B $\neq$ H_b, encontra-se o vértice C sobre $\overleftrightarrow{AH_b}$, tal que BC seja perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH}$.

Logo, há infinitas soluções para o problema.

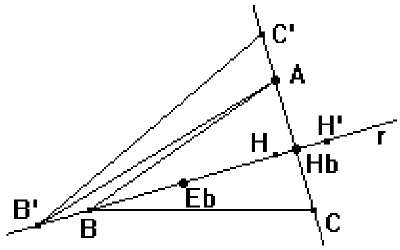
Os dados são consistentes somente se $AE_a = H_bE_a$.



2.37 Dados os pontos A, H_b e E_b (ou A, H_c e E_c)

Para qualquer ponto sobre a reta $\overleftrightarrow{E_bH_b}$ temos o vértice B, com B distinto de E_b e H_b. Como E_b é ponto médio de BH, tem-se H. Determina-se o vértice C sobre à reta $\overleftrightarrow{AH_b}$, com C $\neq$ A, tal que BC seja perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH}$.

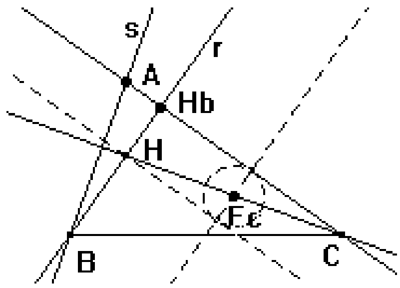
Portanto, tem-se infinitas soluções para o problema.



2.38 Dados os pontos A, H_b e E_c (ou A, H_c e Eb)

Por H_b traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH_b}$. Como E_c é ponto médio de CH, pelo teorema da base média encontra-se H sobre a reta r e o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AH_b}$. Por A traça-se uma reta s perpendicular à reta $\overleftrightarrow{CH}$. Na interseção de s com r temos o vértice B.

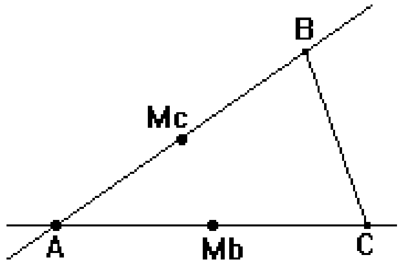
Logo, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.39 Dados os pontos A, M_b e M_c

Como M_b e M_c são pontos médios de AC e AB respectivamente, encontra-se os vértices C e B sobre as retas $\overleftrightarrow{AM_b}$ e $\overleftrightarrow{AM_c}$ respectivamente.

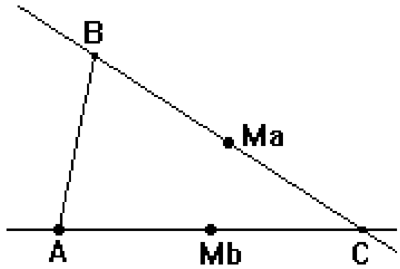
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.40 Dados os pontos A, M_a e M_b (ou A, M_a e M_c)

Como M_b é ponto médio de AC tem-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Como M_a é ponto médio de BC tem-se B sobre a reta $\overleftrightarrow{CM_a}$.

Então, determina-se um único triângulo ΔABC.

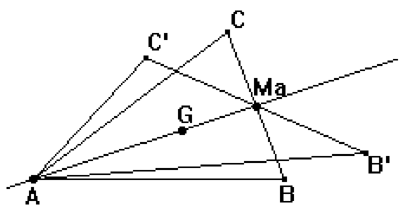


2.41 Dados os pontos A, M_a e G

Para qualquer vértice B fora da reta $\overleftrightarrow{AM_a}$ encontra-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{BM_a}$, tal que $BM_a = M_aC$.

Logo, há infinitas soluções para o problema.

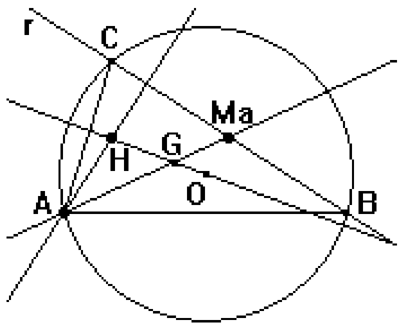
Os dados são consistentes somente se $AG = 2GM_a$.



2.42 Dados os pontos A, M_a e H

Por M_a traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH}$. Acha-se G sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_a}$. Por reta de Euler marca-se O sobre a reta $\overleftrightarrow{HG}$. Traça-se a circunferência circunscrita de centro O e raio OA que intercepta a reta r determinando-se os vértice B e C.

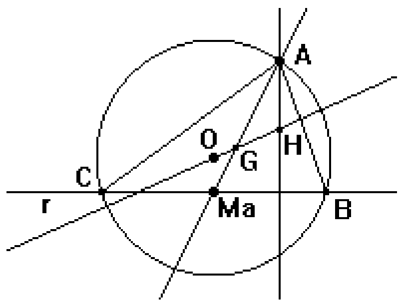
Então, temos duas ou nenhuma solução para o problema dependendo se r é, respectivamente, secante ou tangente (ou não intercepta a circunferência circunscrita).



2.43 Dados os pontos A, M_a e O

Sabe-se que AG = 2GM$_a$, então marca-se G sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_a}$. Por reta de Euler marca-se H sobre a reta $\overleftrightarrow{OG}$. Traça-se por M$_a$ uma reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH}$. Com centro em O e raio OA traça-se a circunferência circunscrita que intercepta a reta r determinando-se os vértice B e C.

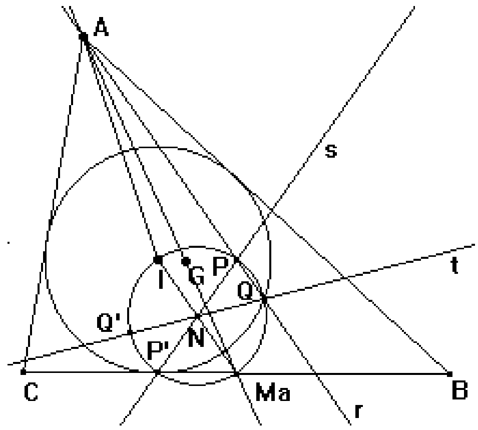
Assim, temos duas ou nenhuma solução, dependendo se r é, respectivamente, secante ou tangente (ou não intercepta a circunferência circunscrita).



2.44 Dados os pontos A, M_a e I

Por A traça-se a reta r paralela ao segmento $\overline{IM_a}$. Constrói-se a circunferência de diâmetro IM_a que intercepta a reta r nos pontos P e Q. Conduzimos por P e Q as retas s e t, respectivamente, que passam por N (centro da circunferência) e interceptam a circunferência nos pontos $P^{'}$ e $Q^{'}$. Os segmentos $\overline{IP\prime} = \overline{IQ\prime}$ são raios da circunferência inscrita ao triângulo ΔABC. Constrói-se a circunferência inscrita. Por A conduzimos retas tangentes à circunferência inscrita determinando na interseção com a reta $\overleftrightarrow{M_aP\prime}$ os vértices B e C.

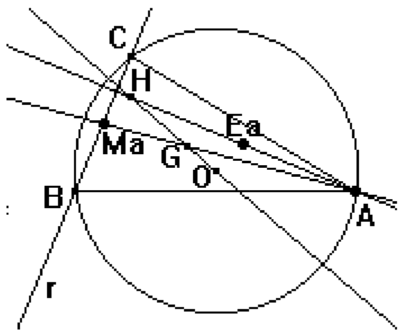
Portanto, tem-se duas soluções para o problema.



2.45 Dados os pontos A, M_a e E_a

Como AG = $2GM_a$ marca-se G sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_a}$. Sabe-se que $AE_a = E_aH$, então sobre a reta $\overleftrightarrow{AE_a}$ marca-se H. Traça-se por M_a a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AE_a}$. Por reta de Euler encontra-se O. Com centro em O e raio OA constroi-se a circunferência circunscrita que intercepta a reta r nos vertices B e C.

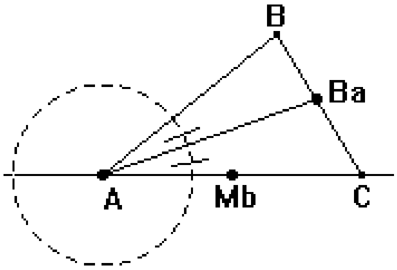
Portanto, temos duas ou nenhuma solução, dependendo se r é, respectivamente, secante ou tangente (ou não intercepta a circunferência circunscrita).



2.46 Dados os pontos A, M_b e B_a (ou A, M_c e B_a)

Como M_b é ponto médio de AC, temos o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Sabe-se que $C\hat{A}B_a = B_a\hat{A}B$, então marca-se vértice B sobre a reta $\overleftrightarrow{CB_a}$.

Logo, a solução para o problema é única se $C\hat{A}B_a$ for agudo. Caso contrário, o problema não tem solução.

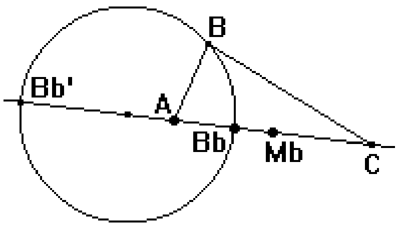


2.47 Dados os pontos A, M_b e B_b (ou A, M_c e B_c)

Como M_b é ponto médio de AC, marca-se C sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Por conjugados harmônicos acha-se o pé da bissetriz externa B_b' sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Constroi-se o Círculo de Apolônio. Tem-se para qualquer ponto diferente de B_b e B_b' sobre o círculo o vértice B.

Assim, há infinitas soluções para o problema.

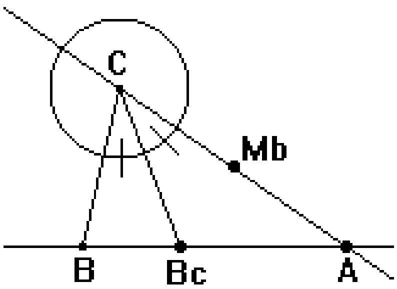
O problema não tem solução se $2AM_b < AB_b$.



2.48 Dados os pontos A, M_b e B_c (ou A, M_c e B_b)

Como M_b é ponto médio de AC marca-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Sabe-se que A$\widehat{C}B_c$ = $B_c\widehat{C}$B, então marca-se o vértice B sobre a reta $\overleftrightarrow{AB_c}$.

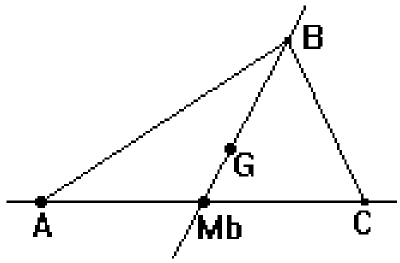
Logo, o problema tem solução única se $A\widehat{C}B_b$ for agudo. Caso contrário, o problema não tem solução.



2.49 Dados os pontos A, M_b e G (ou A, M_c e G)

De M_b ser ponto médio de AC marca-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Sabe-se que BG = 2G$M_b$, então marca-se o vértice B sobre a reta $\overleftrightarrow{GM_b}$.

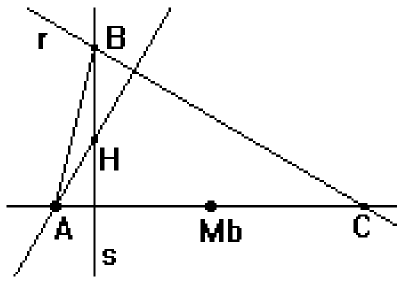
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.50 Dados os pontos A, M_b e H (ou A, M_c e H)

Como M_b ponto médio de AC, tem-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Por C traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH}$. Por H traça-se a reta s perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Na interseção de s com r temos o vértice B.

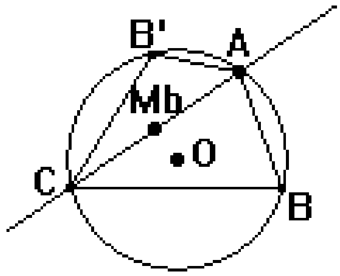
Logo, constrói-se um único triângulo ΔABC.



2.51 Dados os pontos A, M_b e O (ou A, M_c e O)

De M_b ponto médio de AC tem-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Com centro em O e raio OA traça-se a circunferência circunscrita. Para qualquer ponto, diferente de A e C, sobre a circunferência tem-se o vértice B.

Então, tem-se infinitas soluções para o problema.

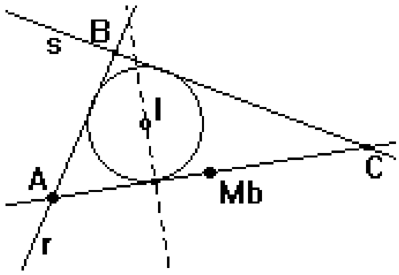


2.52 Dados os pontos A, M_b e I (ou A, M_c e I)

Como M_b ponto médio de AC tem-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Constroi-se a circunferência inscrita que tangencia o lado AC. Traçamos por A e C as retas r e s respectivamente, que tangenciam a circunferência inscrita. Na interseção de s com r encontra-se o vértice B.

Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.

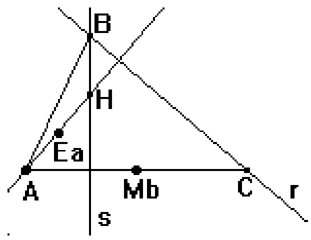
O problema não terá solução se $B\widehat{A}M_b + B\widehat{C}M_b \geq 180^o$.



2.53 Dados os pontos A, M_b e E_a

Como M_b é ponto médio de AC, marca-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Sabe-se que E_a é ponto médio de AH, então tem-se H sobre a reta $\overleftrightarrow{AE_a}$. Por C traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AE_a}$. Por H traça-se a reta s perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Na interseção de s com r temos o vértice B.

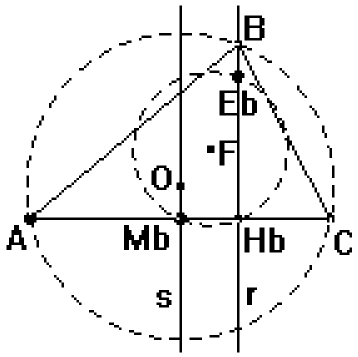
Assim, determinamos um único triângulo ΔABC.



2.54 Dados os pontos A, M_b e E_b (ou A, M_c e E_c)

Como M_b ponto médio de AC, marca-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Por E_b traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AM_b}$ determinando H_b na interseção de ambas. Sabe-se que os pontos M_b, H_b e E_b pertencem ao círculo de nove pontos e que esses três pontos determinam o centro do círculo. Sabe-se ainda que o raio do círculo de nove pontos é a metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC. Assim determina-se o centro O da circunferência circunscrita sobre a mediatriz s de AC. Com centro em O e raio OA constroi-se a circunferêcia circunscrita que intercepta r no vértice B.

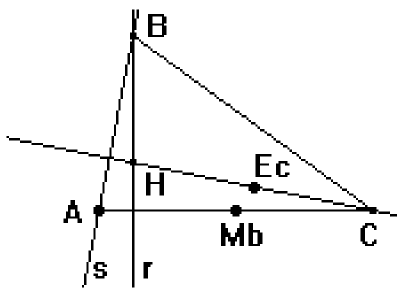
Logo, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.55 Dados os pontos A, M_b e E_c (ou A, M_c e E_b)

Como M_b ponto médio de AC marca-se o vértice C sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Sabe-se que E_c é ponto médio de CH, então marca-se H sobre a reta $\overleftrightarrow{CE_c}$. Por H traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AM_b}$. Traça-se por A a reta s perpendicular à reta $\overleftrightarrow{CE_c}$. Na interseção de s com r temos o vértice B.

Assim, detemina-se um único triângulo ΔABC.

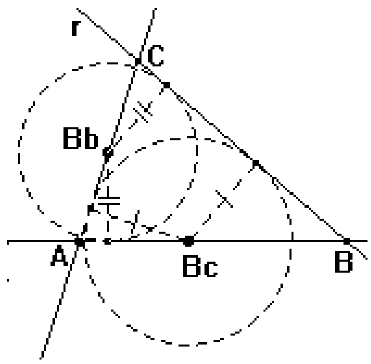


2.56 Dados os pontos A, B_b e B_c

Com centro em B_c traça-se a circunferência tangente a reta $\overleftrightarrow{AB_b}$. Com centro em B_b constroi-se a circunferência tangente a reta $\overleftrightarrow{AB_c}$. Tira-se a reta r tangente as duas circunferências. Encontra-se os vértices B e C na interseção de r com as retas $\overleftrightarrow{AB_c}$ e $\overleftrightarrow{AB_b}$ respectivamente.

Portanto, determinamos um único triângulo ΔABC.

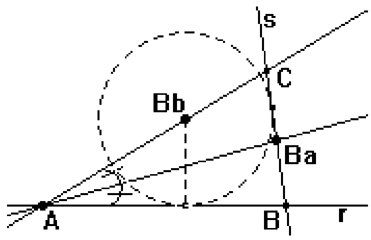
O problema não terá solução se uma das circunferências estiver no interior da outra.



2.57 Dados os pontos A, B_a e B_b (ou A, B_a e B_c)

Sabe-se que o vértice B pertence a reta r, pois $B_b\widehat{A}B_a = B_a\widehat{A}B$. Por B_b constroi-se a circunferência tangente a reta r. Por B_a traça-se a reta s que tangência a circunferência. Na interseção de s com as retas r e $\overleftrightarrow{AB_b}$ encontra-se os vértices B e C respectivamente.

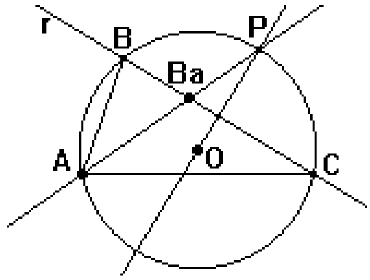
Logo, determinamos um único triângulo ΔABC.



2.58 Dados os pontos A, B_a e O

Com centro em O constroi-se a circunferência circunscrita ao triângulo. Na interseção da reta $\overleftrightarrow{AB_a}$ com a circunferência temos o ponto P, que divide o arco BC ao meio, pois $\overleftrightarrow{AB_a}$ bissetriz de $\widehat{A}$. Por B_a traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OP}$. Na interseção de r com a circunferência temos os vértices B e C.

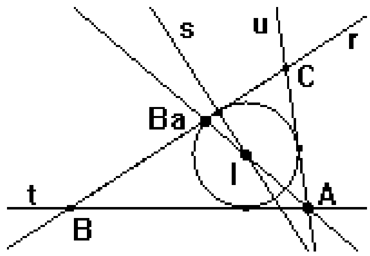
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.59 Dados os pontos A, B_a e I

Por B_a traça-se a reta r qualquer, tal que a distância de I a r seja positiva e menor do que AI. Por I traçamos a reta s perpendicular à reta r determinando o ponto de tangência da circunferência inscrita ao triângulo. Traça-se a circunferência inscrita. Por A traçam-se as retas t e u tangentes a circunferência. Na interseção de t com r temos o vértice B e na interseção de u com r temos o vértice C.

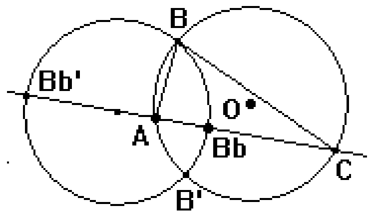
Logo, há infinitas soluções para o problema.



2.60 Dados os pontos A, B_b e O (ou A, B_c e O)

Na interseção da circunferência circunscrita com a reta $\overleftrightarrow{AB_b}$ temos o vértice C. Por conjugados harmônicos acha-se o pé da bissetriz externa B_b' e constroi-se o Círculo de Apolônio. Na interseção do circulo com a circunferência circunscrita encontra-se o vértice B.

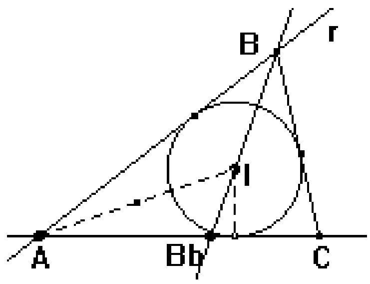
Logo, o problema tem duas soluções se A, B_b e O não forem colineares. Se esses pontos forem colineares o problema tem solução única (triângulo retângulo).



2.61 Dados os pontos A, B_b e I (ou A, B_c e I)

Constroi-se a circunferência inscrita ao triângulo. Por A traça-se a reta r tangente a circunferência. Na interseção de r com a reta $\overleftrightarrow{B_bI}$ encontra-se o vértice B. Sobre a reta $\overleftrightarrow{AB_b}$ marca-se o vértice C tal que $A\widehat{B}B_b = B_b\widehat{B}C$.

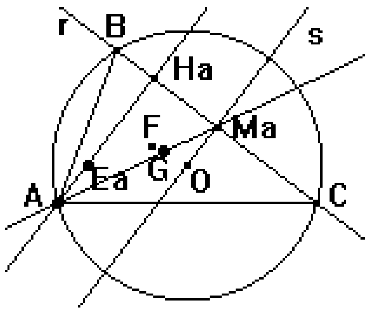
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.62 Dados os pontos A, G e E_a

Sobre a reta $\overleftrightarrow{AG}$ encontra-se M_a. Por M_a traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AE_a}$ encontrando-se H_a na interseção. Por M_a traça-se a reta s mediatriz de BC perpendicular à reta r. Sabe-se que os pontos E_a, H_a e M_a pertencem e determinam o círculo de nove pontos, então encontra-se o centro F do círculo. Sabe-se também que o raio do círculo de nove pontos é a metade do raio da circunferência circuncrita ao triângulo, assim encontra-se o centro O sobre a mediatriz s tal que OA = $2E_a$F. Na interseção da circunferência circunscrita com a reta r encontram-se os vértices B e C.

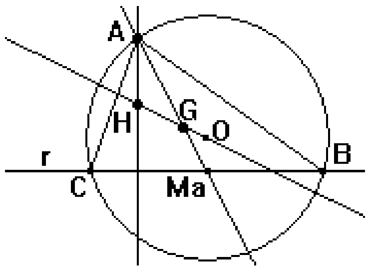
Assim, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.63 Dados os pontos A, G e H

Sobre a reta $\overleftrightarrow{HG}$ encontra-se o centro O, e sobre a reta $\overleftrightarrow{AG}$ encontra-se M$_a$. Por M$_a$ traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH}$. Na interseção de r com a circunferência circunscrita encontram-se os vértices B e C.

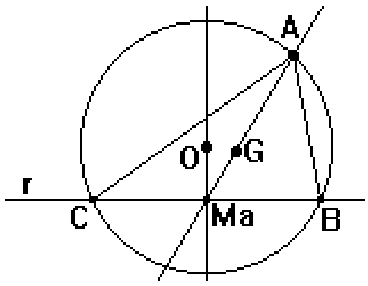
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.64 Dados os pontos A, G e O

Sobre a reta $\overleftrightarrow{AG}$ encontra-se M$_a$. Por M$_a$ traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OM_a}$. Na interseção de r com a circunferência circunscrita encontram-se os vértices B e C.

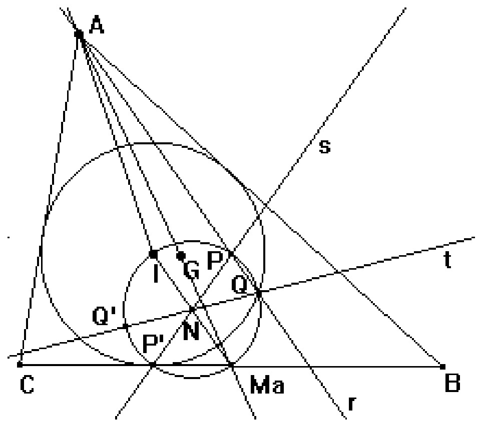
Logo, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.65 Dados os pontos A, G e I

Sobre a reta $\overleftrightarrow{AG}$ encontra-se M_a. Por A traça-se a reta r paralela ao segmento $\overline{IM_a}$. Constrói-se a circunferência de diâmetro IM_a que intercepta a reta r nos pontos P e Q. Conduzimos por P e Q as retas s e t, respectivamente, que passam por N (centro da circunferência) e interceptam a circunferência nos pontos P' e Q'. Os segmentos $\overline{IP'} = \overline{IQ'}$ são raios da circunferência inscrita ao triângulo ΔABC. Constrói-se a circunferência inscrita. Por A conduzimos retas tangentes à circunferência inscrita determinando na interseção com a reta $\overleftrightarrow{M_aP'}$ os vértices B e C.

Portanto, tem-se duas soluções para o problema.

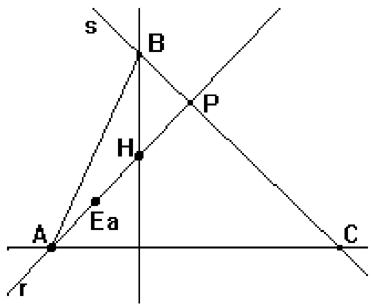


2.66 Dados os pontos A, H e E_a

Os pontos A, H e E_a devem ser colineares e pertencem a uma reta r. Por qualquer ponto P de r, distinto de A, H e E_a, traça-se uma reta s perpendicular a r. Toma-se B um ponto qualquer de s distinto de P. Por s traça-se uma perpendicular à $\overleftrightarrow{BH}$ encontrando-se C em s.

Portanto, há infinitas soluções para o problema.

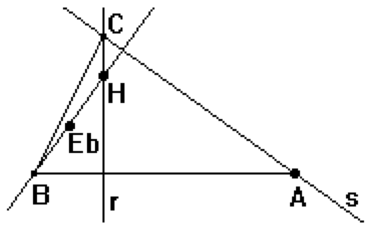
Os dados são inconsistentes se A, H e E_a não forem colineares ou se $AE_a \neq E_aH$.



2.67 Dados os pontos A, H e E_b (ou A, H e E_c)

Na reta $\overleftrightarrow{HE_b}$ encontra-se o vértice B. Por H traça-se a reta r perpendicular ao lado AB e por A traça-se a reta s perpendicular à reta $\overleftrightarrow{HE_b}$. Na interseção de s com r encontra-se o vértice C.

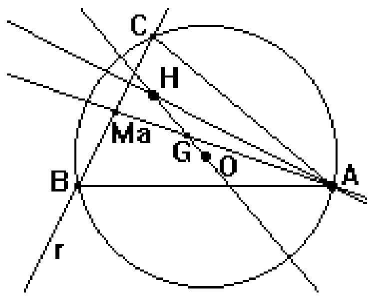
Logo, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.68 Dados os pontos A, H e O

Sobre a reta $\overleftrightarrow{HO}$ encontra-se G. Na reta $\overleftrightarrow{AG}$ encontra-se M_a. Por M_a traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AH}$. Na interseção de r com a circunferência circunscrita encontram-se os vértices B e C.

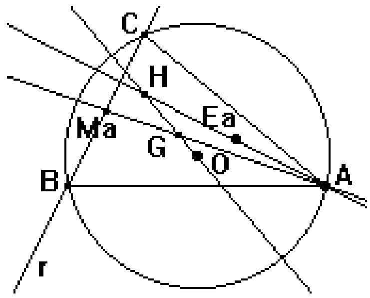
Assim, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.69 Dados os pontos A, O e E_a

Sobre a reta $\overleftrightarrow{AE_a}$ encontra-se H. Na reta $\overleftrightarrow{OH}$ encontra-se G. Sobre a reta $\overleftrightarrow{AG}$ encontra-se M_a. Por M_a traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AE_a}$. Na interseção de r com a cirucnferência circunscrita encontra-se os vértices B e C.

Logo, determina-se um único triângulo ΔABC.

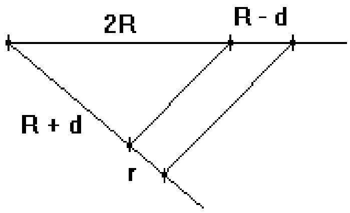


2.70 Dados os pontos A, O, I

Sejam: R o raio da circunferência circunscrita, r o raio da circunferência inscrita, e d a distância de I a O. Pela Fórmula de Euler temos que,

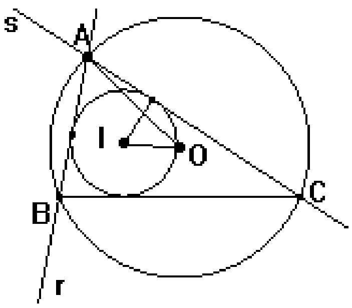
$$d^2 = R^2 - 2Rr$$
$$2Rr = R^2 - d^2$$
$$r = \frac{R^2 - d^2}{2R} = \frac{(R-d)(R+d)}{2R}$$
$$\frac{r}{R+d} = \frac{R-d}{2R}$$

então temos,



e assim encontramos r.
Constroi-se a circunferência inscrita. Por A traçam-se as retas r e s tangentes à circunferência inscrita. Na interseção das retas r e s com a circunferência circunscrita encontram-se os vértices B e C respectivamente.

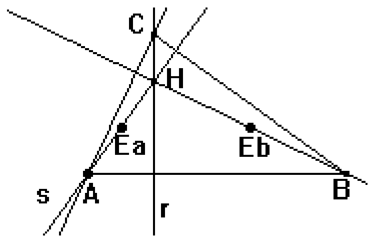
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.71 Dados os pontos A, E_a e E_b (ou A, E_a e E_c)

Sobre a reta $\overleftrightarrow{AE_a}$ encontra-se H. Na reta $\overleftrightarrow{HE_b}$ encontra-se o vértice B. Por H traça-se a reta r perpendicular ao lado AB. Por A traça-se a reta s perpendicular à reta $\overleftrightarrow{HE_b}$. Na interseção de r com s encontra-se o vértice C.

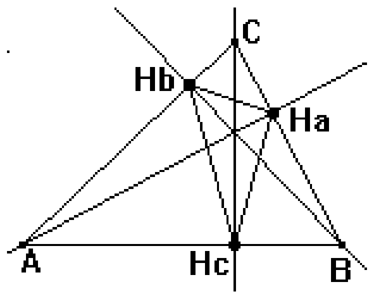
Assim, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.72 Dados os pontos H_a, H_b e H_c

Sabe-se pelo teorema do triângulo órtico que as alturas de um triângulo são as bissetrizes internas de seu triângulo órtico. Por H_a traça-se a reta r perpendicular à bissetriz de $\widehat{H_a}$. Na interseção de r com as bissetrizes de $\widehat{H_b}$ e $\widehat{H_c}$ temos os vértices B e C respectivamente. Encontramos o vértice A na interseção da reta $\overleftrightarrow{BH_c}$ com a bissetriz de H_a.

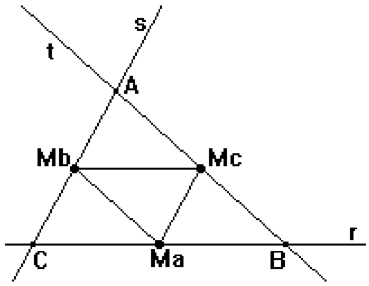
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.73 Dados os pontos M_a, M_b e M_c

Pelo teorema da base média conduzimos as retas r, s e t pelos pontos M_a, M_b e M_c, respectivamente, paralelas aos segmentos $\overline{M_bM_c}$, $\overline{M_aM_c}$ e $\overline{M_aM_b}$. Na interseção das retas temos os vértices A, B e C.

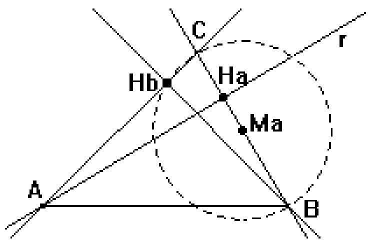
Logo, determina-se um único triângulo ΔABC



2.74 Dados os pontos H_a, H_b e M_a (ou H_a, H_b e M_b)

Pela propriedade de arco capaz, constroi-se a circunferência de centro em M_a e raio M_aH_b que intercepta a reta $\overleftrightarrow{M_aH_a}$ nos vértices B e C. Por H_a traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{M_aH_a}$. Na interseção de r com $\overleftrightarrow{CH_b}$ temos o vértice A.

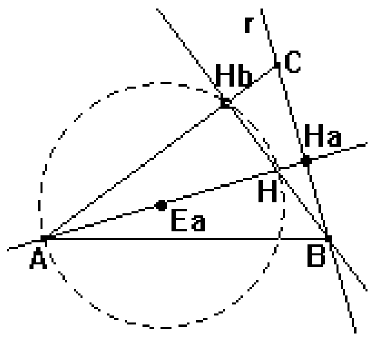
Logo, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.75 Dados os pontos H_a, H_b e E_a (ou H_a, H_b e E_b)

Sabe-se que E_a é ponto médio de AH, então pela propriedade de arco capaz constroi-se a circunferência de centro em E_a e raio E_aH_b. Na interseção da circunferência com a reta $\overleftrightarrow{E_aH_a}$ temos o vértice A, e consequentemente H. Por H_a conduzimos a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{E_aH_a}$. Nas interseções das retas r com $\overleftrightarrow{AH_b}$ e r com $\overleftrightarrow{HH_b}$ temos os vértices C e B respectivamente.

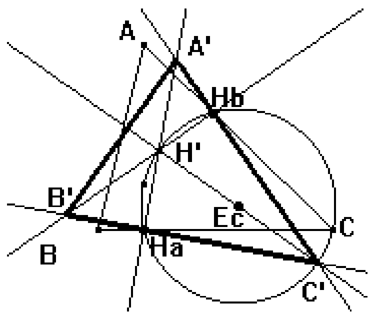
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.76 Dados os pontos $\mathbf{H}_a$, $\mathbf{H}_b$ e $\mathbf{E}_c$

Sabe-se que E_c é ponto médio de CH. Pela propriedade de arco capaz constroi-se a circunferência de centro E_c e raio $E_cH_a = E_cH_b$. Para qualquer ponto sobre a circunferência, diferente apenas de H_a e H_b, teremos o vértice C' e consequentemente H'. Na interseção das retas $\overleftrightarrow{C'H_b}$ com $\overleftrightarrow{H'H_a}$ e $\overleftrightarrow{C'H_a}$ com $\overleftrightarrow{H'H_b}$ encontramos os vértices A' e B' respectivamente.

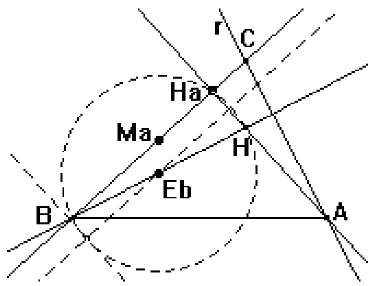
Logo, há infinitas soluções para o problema.



2.77 Dados os pontos $\mathbf{H}_a$, $\mathbf{M}_a$ e $\mathbf{E}_b$ (ou $\mathbf{H}_a$, $\mathbf{M}_a$ e $\mathbf{E}_c$)

Como E_b é ponto médio de BH, pelo teorema da base média encontra-se o vértice B e consequentemente o vértice C, sobre a reta $\overleftrightarrow{M_aH_a}$. Com isso tem-se ainda o ortocentro H. Por C traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BE_b}$. Na interseção de r com $\overleftrightarrow{HH_a}$ encontra-se o vertice A.

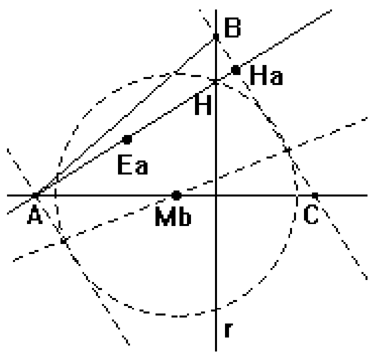
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.78 Dados os pontos H_a, M_b e E_a (ou H_a, M_c e E_a)

De M_b ponto médio de AC temos pelo teorema da base média o vértice A sobre a reta $\overleftrightarrow{E_aH_a}$. Consequentemente encontramos o vértice C e o ortocentro H sobre as retas $\overleftrightarrow{AM_b}$ e $\overleftrightarrow{AE_a}$ respectivamente. Por H conduzimos a reta r perpendicular ao lado AC. Na interseção de r com a reta $\overleftrightarrow{CH_a}$ encontramos o vértice B.

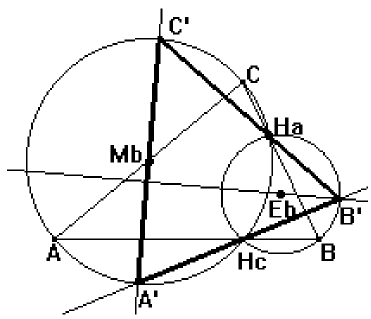
Logo, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.79 Dados os pontos H_a, M_b e E_b (ou H_a, M_c e E_c)

M_b é ponto médio de AC, e E_b é ponto médio de BH. Com isso pela propriedade de arco capaz construimos as cricunferências de centros M_b e E_b, e raios M_bH_a e E_bH_a respectivamente. As circunferências se interceptam nos pontos H_a (ja obtido) e H_c. Para qualquer ponto sobre a circunferência de centro E_b teremos o vértice B', com B' diferente de H_a e de H_c. Consequentemente encontramos os vertices A' e C' sobre a cricunferência de centro M_b.

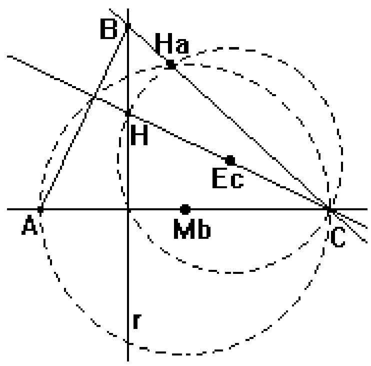
Portanto, há infinitas soluções para o problema.



2.80 Dados os pontos $\mathbf{H}_a$, $\mathbf{M}_b$ e $\mathbf{E}_c$ (ou $\mathbf{H}_a$, $\mathbf{M}_c$ e $\mathbf{E}_b$)

H_a pertence ao arco capaz de diâmetro AC, e também ao arco capaz de diâmetro CH. Constroi-se as circunferências de centro em M_b e E_c com raios $\mathrm{M}_b\mathrm{H}_a$ e $\mathrm{E}_c\mathrm{H}_a$, respectivamente, encontrando vértice C na interseção de ambas, com C $\neq$ H_a, e consequentemente encontramos o vértice A sobre a reta $\overleftrightarrow{CM_b}$. Sobre a reta $\overleftrightarrow{CE_c}$ encontramos H, e por H traçamos a reta r perpendicular ao lado AC. Na interseção de r com a reta $\overleftrightarrow{CH_a}$ encontramos o vertice A.

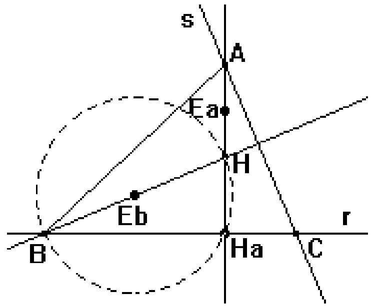
Logo, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.81 Dados os pontos $\mathbf{H}_a$, $\mathbf{E}_a$ e $\mathbf{E}_b$ (ou $\mathbf{H}_a$, $\mathbf{E}_a$ e $\mathbf{E}_c$)

Por H_a traça-se a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{E_aH_a}$. H_a pertence ao arco capaz de diâmetro BH e ponto médio E_b, assim construindo a circunferência com centro em E_b e raio $\mathrm{E}_b\mathrm{H}_a$ encontramos na interseção com a reta r o vértice B, B $\neq$ H_a, e encontramos ainda H na interseção com a reta $\overleftrightarrow{E_aH_a}$. Como E_a é ponto médio de AH encontramos o vértice A sobre $\overleftrightarrow{E_aH_a}$. Por A conduzimos a reta s perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BH}$ que intercepta a reta r no vértice C.

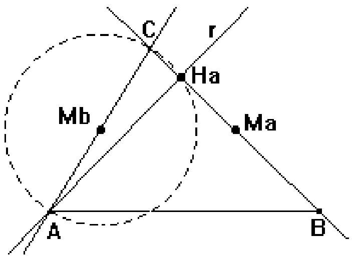
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.82 Dados os pontos M_a, M_b e H_a (ou M_a, M_b e H_b)

Por H_a conduzimos a reta r perpendicular à reta $\overleftrightarrow{M_aH_a}$. Sabe-se que H_a pertence ao arco capaz de diâmetro AC e ponto médio M_b, então construimos a circunferência de centro em M_b e raio M_bH_a que intercepta a reta r no vértice A, com $A \neq H_a$. Como M_b e M_a são pontos médios dos lados AC e BC respectivamente, encontramos os vértices C e B sobre as retas $\overleftrightarrow{AM_b}$ e $\overleftrightarrow{CM_a}$ nessa mesma ordem.

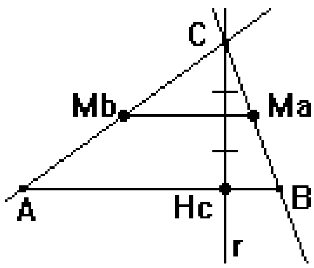
Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.83 Dados os pontos M_a, M_b e H_c

Pelo teorema da base média conduzimos por H_c a reta r perpendicular ao segmento $\overline{M_aM_b}$ e encontramos o vértice C sobre r. Encontramos os vértices A e B sobre as retas $\overleftrightarrow{CM_b}$ e $\overleftrightarrow{CM_a}$ respectivamente pelas propriedades de ponto médio.

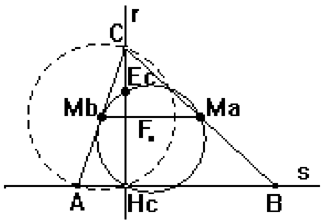
Logo, determina-se um único triângulo ΔABC.



2.84 Dados os pontos M_a, M_b e E_c

Construimos o círculo de nove pontos através dos pontos M_a, M_b e E_c. Pelo teorema da base média sabe-se que $\overline{M_aM_b} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, então conduzimos por E_c a reta r perpendicular ao segmento $\overline{M_aM_b}$, que intercepta o círculo de nove pontos no ponto H_c, com $H_c \neq E_c$. Por H_c conduzimos a reta s, suporte do lado AB, paralela ao segmento $\overline{M_aM_b}$. Com centro em M_b traça-se a circunferência de raio M_bH_c, arco capaz, que intercepta a reta s no vértice A, com $A \neq H_c$. Sobre a reta $\overleftrightarrow{AM_b}$ encontramos o vértice C e sobre a reta $\overleftrightarrow{CM_a}$ encontramos o vértice B, ambos pela propriedade de ponto médio.

Portanto, determina-se um único triângulo ΔABC.

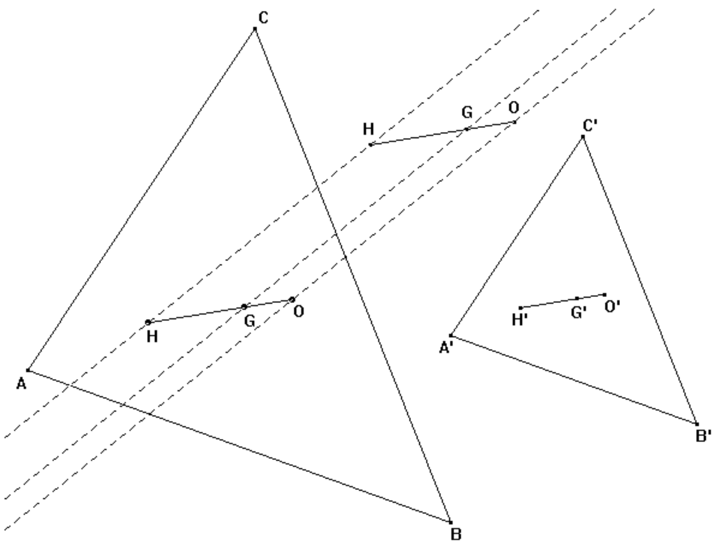


2.85 Dados os pontos O, G e H

O problema só é consistente se $HG = 2GO$.

Constrói-se um triângulo $\Delta A'B'C'$ qualquer e amplia-se (ou diminui-se) este triângulo na razão $\frac{HG}{H'G'}$ (homotetia).

Com isso obtemos um triângulo ΔABC semelhante a $\Delta A'B'C'$ tal que os três centros são, a menos de rotação e translação, os três pontos dados.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das definições e propriedades citadas neste trabalho (item 2) mostramos que é possível construir triângulos partindo de trios de pontos distintos particulares deste triângulo.

Ao todo determinamos 379 casos de reconstrução de triângulos, sendo que dentre estes, alguns apresentam solução única, mais de uma (finita), ou infinitas.

Os problemas aqui apresentados não são usualmente encontrados nos livros de construções geométricas. Acreditamos que este seja um estudo interessante e amplo sobre triângulos. Sugerimos então uma continuidade do mesmo, visto que há alguns casos que não foram abordados e outros onde não conseguimos obter sua solução. Destes citamos os seguintes casos: Determinar o triângulo ΔABC dados os pontos: A, M_a e B_a; A, M_a e B_b (ou A, M_a e B_c); A, M_a e E_b (A, M_a e E_c); A, B_a e G; A, B_a e H; A, B_a e E_a; A, B_a e E_b (ou A, B_a e E_c); A, B_b e G (ou A, B_c e G); A, B_b e H (ou A, B_c e H); A, B_b e E_a (ou A, B_c e B_a); A, B_b e E_b (ou A, B_c e E_c); A, B_b e E_c (ou A, B_c e E_b); A, G e E_b (ou A, G e E_c); A, H e I; A, O, E_b (ou A, O, E_c); A, I, E_a; A, I, E_b (ou A, I, E_c); A, E_b e E_c; H_a, H_b e M_c; H_a, M_a e E_a; M_a, M_b e E_a (ou M_a, M_b e E_b).

Técnicas utilizando transformações tais como simetria, rotação, homotetia e inversão não foram aqui exploradas e poderiam, eventualmente produzir mais alguns resultados. Além disso, como já dissemos na introdução, um estudo analítico dos problemas poderia indicar se, de fato, os problemas não resolvidos apresentados acima poderiam ou não ter solução com régua e compasso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] LOPES, Luis - "Manuel de construction de triangles- QED TEXTE, Québec, 1996.

[2] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. - Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana - Atual Editora, 7ª edição, São Paulo, 1997.

[3]COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. - Geometry Revisited - The Mathematical Association Of America - Washington, D. C., 1967.

[4] SPIRA, Michel - Como Transformar Retas em Círculos e Vice Versa - A Inversão e Construções Geométricas - II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática - Universidade Federal da Bahia, 25 a 29 de outubro de 2004.

[5] JUNCKES, Klaryssa G. - Colinearidade e Concorrência na Geometria Euclidiana Plana - Trabalho de Conclusão de Curso - UFSC - Licenciatura em Matemática - Florianópolis - 2007.