Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática

Curso de Matemática

Espaços - Tempo de Newton a Minkowski: Aspectos Geométricos

Fabiano Carlos Cidral

Orientador: Ivan Pontual Costa e Silva

Florianópolis

29 de novembro de 2007

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática

Curso de Matemática

Espaços - Tempo de Newton a Minkowski: Aspectos Geométricos

Este trabalho foi apresentado ao curso de graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, como Trabalho de Conclusão de Curso, para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Fabiano Carlos Cidral

Florianópolis

7 de dezembro de 2007

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n°50/CCM/07.

Profª. Ms. Carmen Suzane Comitre Gimenez
Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva
Depto. de Matemática\ UFSC (Orientador)

Prof. Dr. Luiz Augusto Saeger
Depto. de Matemática\ UFSC

Prof. Dr. Marcelo Ferreira Lima Carvalho
Depto. de Matemática\ UFSC

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por todas as bênçãos que me concedeu, que muitas pessoas chamam de sorte ou de coincidência.

Aos meus pais, Antonio Carlos Cidral e Rose Maria Back Cidral, e ao meu irmão, Felipe Carlos Cidral, que sempre me apoiaram, colaboraram e me incentivaram em cada etapa da minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva, mais que um professor, um amigo com quem interagi durante esses quatro anos e com quem aprendi o verdadeiro significado da palavra Matemática. Agradeço também sua paciência, dedicação, seu companheirismo e incentivo que muito me ajudaram a prosseguir nesta caminhada nada fácil.

A todos os Professores da Faculdade de Matemática pela contribuição na minha formação das mais diferentes maneiras (aulas, conversas nos corredores, exemplos de vida).

Aos colegas da graduação, em especial a João Carlos Bez Batti e Lucas Ramiro Talarico, pela convivência e amizade durante todo o curso.

A meus pais.

Sumário

Introdução

O conceito de espaço-tempo, ao contrário do que comumente se acredita, não foi introduzido por Einstein no começo do século XX: esta idéia já estava presente desde a época de Newton. Esse erro se deve ao fato de que no caso Newtoniano existe uma separação geométrica implícita do tempo e do espaço. Uma das inovações apresentadas por Einstein foi que, no espaço-tempo de Minkowski, esta divisão não ocorre.

Os aspectos físicos do assunto que tratamos, uma das suas partes mais interessantes, não serão discutidos neste trabalho, devido à falta de tempo e espaço.

Este trabalho é constituído por cinco capítulos e dois apêndices. O primeiro capítulo é dividido em duas Seções. Na primeira, introduziremos o conceito de forma bilinear simétrica juntamente com a sua forma quadrática associada e caracterizaremos uma classe especial das mesmas, as chamadas formas quadráticas não-degeneradas, através dos seus dois invariantes: índice e posto. A segunda Seção é destinada às isometrias lineares, que são transformações lineares que preservam as estruturas de espaços vetoriais semi-Euclidianos. Além disso, o conjunto das isometrias lineares bijetoras de um espaço vetorial semi-Euclidiano forma o chamado Grupo Ortogonal, deste espaço.

No segundo capítulo restringiremos nosso estudo para um espaço vetorial de Lorentz e classificaremos os seus vetores e seus sub-espaços vetoriais através do seu caráter causal em três tipos: tipo-espaço, tipo-tempo e tipo-luz. No final do capítulo, definiremos o que vem a ser o cone de tempo de um espaço vetorial de Lorentz e provaremos alguns fatos interessantes a respeito do mesmo.

O terceiro capítulo é dedicado aos espaços afins, no qual mostraremos suas propriedades básicas e veremos um tipo especial de aplicações entre espaços afins: as transformações afins. Em particular, as transformações afins bijetoras de um espaço afim qualquer formam um grupo com respeito à composição, o chamado Grupo Afim. Além disso, obteremos o grupo afim do $\mathbb{R}^n$ e provaremos que o grupo afim de qualquer espaço afim n dimensional é isomorfo a ele.

No capítulo 4, o assunto principal são os espaços-tempo Newtonianos, que são espaços afins munidos de uma estrutura Galileana. Veremos também que existem transformações afins especiais, conhecidas como transformações Galileanas, que preservam essa estrutura. Por fim, caracterizaremos o grupo Galileano do $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e mostraremos que ele é isomorfo a qualquer grupo Galileano de um espaço-tempo Newtoniano $n+1$ dimensional.

O espaço-tempo de Minkowski, fundamental na Teoria da Relatividade Especial, é o tema do quinto capítulo. Novamente, percebemos que a presença de algumas transformações afins especiais, as isometrias, e damos uma caracterização detalhada do grupo de Poincaré. Finalmente, do ponto de vista geométrico, definiremos o que vem a ser o caráter causal de uma superfície no espaço tempo de Minkowski e classificaremos algumas superfícies conhecidas, quanto ao seu caráter causal.

Com relação aos Apêndices, nossa intenção é fornecer subsídios para um melhor entendimento do texto. Em cada um deles, são definidos os conceitos de grupo e superfície, respectivamente, e em seguida enunciamos e provamos alguns resultados básicos utilizados durante a apresentação do trabalho. Apesar de que o texto não possui um Apêndice específico sobre o assunto, um bom conhecimento de álgebra linear também é essencial para a sua compreensão.

Capítulo 1

Formas Quadráticas

Neste Capítulo discutiremos os principais aspectos das chamadas formas quadráticas. Em seguida, falaremos a respeito das isometrias lineares.

1.1 Propriedades Básicas

Definição 1.1.1. *Sejam E e F espaços vetoriais* [1]*. Uma* forma bilinear $g : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função linear em cada uma das duas variáveis, isto é, para quaisquer $u, u' \in E$, $v, v' \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:*

i) $g(u + u', v) = g(u, v) + g(u', v) \qquad g(\alpha u, v) = \alpha g(u, v);$

ii) $g(u, v + v') = g(u, v) + g(u, v') \qquad g(u, \alpha v) = \alpha g(u, v).$

Em particular, se E e F são espaços vetoriais de dimensão finita, duas bases arbitrárias $U = \{u_1, \ldots, u_m\} \subset E$ e $V = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset F$ definem uma matriz $C = [c_{ij}] \in M(m \times n)$ tal que $c_{ij} = g(u_i, v_j)$, chamada a matriz da forma bilinear g relativamente às bases U e V. Sendo assim, conhecendo os valores $c_{ij} = g(u_i, v_j)$, a forma bilinear $g : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ fica inteiramente determinada. Com efeito, para $u = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i u_i \in E$ e $v = \sum\limits_{j=1}^{n} y_i v_i \in F$ quaisquer, tem-se $g(u, v) = \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j \right)$.

[1]A menos de menção em contrário, todos os espaços vetoriais e matrizes neste trabalho estão definidas sobre $\mathbb{R}$.

Quando $E = F$, a matriz de uma forma bilinear $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ relativamente a uma única base $U = \{u_1, \ldots, u_m\} \subset E$ será a matriz $C = [c_{ij}] \in M(m \times m)$ tal que $c_{ij} = g(u_i, u_j)$. Nesse caso, podemos introduzir o conceito de forma bilinear *simétrica.*

Definição 1.1.2. *Uma forma bilinear $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se* simétrica *quando $g(u, v) = g(v, u)$ para quaisquer $u, v \in E$.*

De acordo com a definição, para que g seja simétrica é necessário que sua matriz em relação a qualquer base $U \subset E$ seja simétrica. Entretanto, é também suficiente que sua matriz em relação a alguma base de E seja simétrica. Com efeito, se $c_{ij} = c_{ji}$ então

$$g(v, u) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij} y_i x_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} c_{ji} x_j y_i \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{ji} x_j y_i \right) = g(u, v).$$

Exemplo 1.1.3. Dados os espaços vetoriais E e F e os funcionais lineares $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : F \longrightarrow \mathbb{R}$, a função $g : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(u, v) = f(u) \cdot h(v)$ é uma forma bilinear não-simétrica chamada *produto tensorial* de f e h. Com efeito, $g(u + u', v) = f(u + u') \cdot h(v) = (f(u) + f(u')) \cdot h(v) = f(u) \cdot h(v) + f(u') \cdot h(v) = g(u, v) + g(u', v)$ e $g(\alpha u, v) = f(\alpha u) \cdot h(v) = \alpha f(u) \cdot h(v) = \alpha g(u, v)$. Para a outra variável, a demonstração é análoga.

Exemplo 1.1.4. Dados os vetores $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $v = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, a função $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(u, v) = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$ é uma forma bilinear simétrica chamada *produto interno canônico* dos vetores u e v.
De fato, se $w = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ então $g(u + w, v) = (\alpha_1 + \gamma_1)\beta_1 + (\alpha_2 + \gamma_2)\beta_2 + \ldots + (\alpha_n + \gamma_n)\beta_n = g(u, v) + g(w, v)$ e $g(ku, v) = (k\alpha_1)\beta_1 + \ldots + (k\alpha_n)\beta_n = kg(u, v)$. Para a outra variável, a demonstração é análoga. Note também que $g(u, v) = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n = \beta_1\alpha_1 + \ldots + \beta_n\alpha_n = g(v, u)$, o que conclui a afirmação.

O conceito de forma bilinear simétrica nos possibilita definir o que vem a ser uma forma quadrática. É o que faremos agora. No restante deste capítulo, E denotará um espaço vetorial de dimensão finita, arbitrário mas fixado.

Definição 1.1.5. *Uma função* $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *chama-se uma* forma quadrática *quando existe uma forma bilinear simétrica* $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi(v) = g(v, v)$ *para todo* $v \in E$*, dita forma bilinear* associada *a* φ*.*

Observação: Note que a forma bilinear g associada a uma forma quadrática φ é única. De fato, a igualdade $g(u, v) = \dfrac{1}{2}\Big(\varphi(u + v) - \varphi(u) - \varphi(v)\Big)$, chamada *fórmula de polarização*, garante a unicidade.
Denotaremos por φ_g a forma quadrática com forma bilinear associada a g.

Definição 1.1.6. *A* matriz *de uma forma quadrática* $\varphi_g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *na base* $U = \{u_1, \ldots, u_m\} \subset E$ *é a matriz, nesta mesma base, da forma bilinear simétrica* $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi_g(v) = g(v, v)$*.*

Exemplo 1.1.7. A função $\varphi_g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi_g((x, y)) = x^2 + 4xy + 3y^2$ é uma forma quadrática associada à forma bilinear simétrica $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3y_1y_2$. De fato, a verificação é imediata. Em relação a base canônica de $\mathbb{R}^2$, a matriz $C = [c_{ij}] \in M(2 \times 2)$ da forma quadrática é $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, que é uma matriz simétrica.

Nosso objetivo a partir de agora consiste em estudar e caracterizar um tipo particular de formas quadráticas, as chamadas formas quadráticas *não-degeneradas*. Faremos essa caracterização com o auxílio de dois invariantes associados a uma forma quadrática, seu *índice* e seu *posto*.

Definição 1.1.8. *Uma forma quadrática* $\varphi_g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dita ser* não-degenerada *se a forma bilinear simétrica* $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *associada é* não-degenerada*, isto é, se*

$g(u,v)=0$ para todo $v \in E$ então $u=0$.

Exemplo 1.1.9. A função $\varphi_g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $\varphi_g((x,y,z)) = 4x^2 - y^2 + 2xy$ é uma forma quadrática degenerada. Para ver isto, basta tomar o vetor $u = (0,0,5) \in \mathbb{R}^3$. Note que $g(u,v)=0$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$ mas, obviamente, u não é um vetor nulo.

Exemplo 1.1.10. A função $\varphi_g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $\varphi_g((x,y,z)) = -x^2 + 2y^2 + 3z^2$ é uma forma quadrática não-degenerada. De fato, a forma bilinear simétrica associada a φ_g é $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = -x_1x_2 + 2y_1y_2 + 3z_1z_2$. Seja $u = (x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ tal que, para todo $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $g(u,v)=0$. Em particular, $g(u,e_k)=0$ em que $k \in \{1,2,3\}$. Sendo assim, temos que $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, isto é, $u = (0,0,0)$. Logo, $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é não-degenerada, ou seja, $\varphi_g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é não-degenerada.

Definição 1.1.11. *O* índice *de uma forma quadrática $\varphi_g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é a maior dimensão de um subespaço vetorial de E restrita ao qual a forma quadrática é negativa. Quando $\varphi_g(v) \geq 0$ para todo $v \in E$, diremos que o índice de φ_g é zero.*

Observação: Note que o índice de uma forma quadrática é uma noção intrínsica, independente de escolhas de base.

Definição 1.1.12. *O* posto *de uma forma quadrática $\varphi_g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ na base $U = \{u_1, \ldots, u_m\} \subset E$ é o posto da sua matriz nesta base.*

Observação: Apesar da definição mencionar a escolha de uma base de E, sabemos que o posto de uma forma quadrática é um invariante numérico, isto é, tem o mesmo valor independente da base escolhida. Ver [3].

Finalmente, estamos preparados para caracterizar as formas quadráticas não-degeneradas.

Teorema 1.1.13. *Seja $\varphi_g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma quadrática e E um espaço vetorial de dimensão finita n. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *$\varphi_g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é não-degenerada;*

(2) *A matriz de $\varphi_g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ com respeito a alguma (e portanto a toda) base é invertível.*

(3) *Posto de $\varphi_g = n$.*

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de E. A matriz da forma quadrática não-degenerada $\varphi_g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ relativamente a esta base é a matriz $C = [c_{ij}] \in M(n \times n)$ tal que $c_{ij} = g(v_i, v_j)$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Para provar que a matriz é invertível, vamos mostrar que o sistema $\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_i = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$ de n equações e n incógnitas possui apenas a solução trivial.

Note que as n equações podem ser reescritas de seguinte maneira: $\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} g(v_i, v_j)x_i = 0 \Rightarrow g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, v_j\right) = 0 \Rightarrow g(v, v_j) = 0$ onde $v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n \in E$. Dado $u = y_1v_1 + \ldots + y_nv_n \in E$ temos que $g(v, u) = \sum_{i=1}^{n} g(v, v_i)y_i = 0$. Mas isso implica que $v = 0$, pois a forma quadrática é não-degenerada por hipótese. Logo, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ e a matriz é invertível.

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de E e suponha que exista $w \in E$ tal que $g(u, w) = 0$ para todo $u \in E$. Em particular $g(v_i, w) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Escrevendo $w = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$, temos que $\sum_{j=1}^{n} g(v_i, v_j)x_j = 0$. Denotando $a_{ij} = g(v_i, v_j)$ temos o seguinte sistema linear: $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$. Como, por hipótese, a matriz é invertível, concluímos que $x_1 = \ldots = x_n = 0$, ou seja, $w = 0$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) A matriz de φ_g em uma dada base é invertível se e somente se, suas colunas são linearmente independente, isto é, se e somente se o posto de φ_g é igual a n.

■

Exemplo 1.1.14. (Novamente os exemplos 1.1.9 e 1.1.10) A função $\varphi_g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $\varphi_g((x, y, z)) = 4x^2 - y^2 + 2xy$ é uma forma quadrática degenerada. De fato, a matriz da forma bilinear associada a φ_g na base canônica é $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que não é invertível. Logo, φ_g é degenerada. A função $\varphi_g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $\varphi_g((x,y,z)) = -x^2+2y^2+3z^2$ é uma forma quadrática não-degenerada. De fato, a matriz da forma bilinear associada a φ_g na base canônica é $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, que é invertível. Logo, φ_g é não-degenerada.

Apresentaremos agora um resultado que nos ajudará na demonstração da existência de uma base ortonormal (veja definição abaixo) em todo espaço vetorial de dimensão finita munido de uma forma bilinear simétrica não-degenerada. Mas, primeiramente, vamos definir o que vem a ser o complemento ortogonal de um subespaço de E. Fixamos, pelo resto do capítulo, uma forma bilinear simétrica não-degenerada $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ em E.

Definição 1.1.15. *Dois vetores $u, v \in E$ chamam-se* ortogonais (ou perpendiculares) *quando $g(u,v) = 0$.*

Definição 1.1.16. *O* complemento ortogonal *de um conjunto não-vazio $X \subset E$ é o conjunto $X^\perp$ formada pelos vetores $v \in E$ que são ortogonais a todos os vetores $x \in X$:*

$$X^\perp := \{v \in E / g(v,x) = 0, \textit{para todo } x \in X\}.$$

Observação: Note que $X^\perp$ é sempre um subespaço vetorial de E.

Teorema 1.1.17. *Seja $F \subset E$ um subespaço vetorial. Então, valem as seguintes afirmações:*

(a) $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$;

(b) $(F^\perp)^\perp = F$;

(c) $E = F \oplus F^{\perp} \Leftrightarrow g|_{F\times F}$ *é não-degenerada.*

Demonstração:

(a) Seja $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ uma base de F. Inicialmente, vamos completá-la de tal maneira que seja uma base $\widetilde{V} = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ de E. Dado $u = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in E$, sabemos pela nossa definição de complemento ortogonal que $u \in F^{\perp} \Leftrightarrow g(v_i, u) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Podemos reescrever essa última igualdade na forma matricial $\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k1} & \cdots & g_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ em que $G = [g_{ij}]$, $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq n$ em que $g_{ij} = g(v_i, v_j)$. Assim, concluímos que $u \in F^{\perp} \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \in N(G)$, o núcleo de G. Em particular, $\dim F^{\perp} = \dim N(G)$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, sabemos que $\dim E = \dim N(G) + \dim \mathit{Im}(G)$. Como a forma bilinear simétrica é não-degenerada, pelo teorema anterior, sua matriz é invertível. Em particular isso significa que as linhas G são linearmente independentes e portanto $\dim \mathit{Im}(G) = k$. Por hipótese também, temos que $\dim E = n$ e, dessa forma, concluímos que $\dim N(G) = n - k$. Logo, temos que $\dim F^{\perp} = n - k = \dim E - \dim F$.

(b) Para provar essa igualdade usaremos o seguinte resultado da Álgebra Linear: Se E é um espaço vetorial de dimensão n e $F \subset E$ é um subespaço vetorial também de dimensão n, então $F = E$ [3]. Certamente $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$. Pela definição de complemento ortogonal e $(F^{\perp})^{\perp}$ é subespaço vetorial de E e portanto um espaço vetorial. Pelo item **(a)** temos que $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$ e $\dim (F^{\perp})^{\perp} = \dim E - \dim F^{\perp}$. Logo, $\dim (F^{\perp})^{\perp} = \dim F$ e o resultado segue.

(c) ($\Rightarrow$) Seja $u \in F$ tal que $g(u, v) = 0$ para todo $v \in F$. Por definição de complemento ortogonal, temos que $u \in F^{\perp}$. Mas por hipótese, $E = F \oplus F^{\perp}$. Logo, $u = 0$ e assim $g|_{F\times F}$ é não-degenerada.

($\Leftarrow$) Usaremos nesta demonstração dois resultados de Álgebra Linear. O primeiro foi o utilizado no item **(b)** e o segundo é o seguinte: Sejam F_1 e F_2 subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial E. Tem-se $\dim\ F_1 + \dim\ F_2 =$

$\dim(F_1 \cap F_2) + \dim(F_1 + F_2)$ [3]. Certamente, $F + F^{\perp} \subset E$. Seja $u \in F$ tal que para todo $v \in F$ $g(u, v) = 0$ (ou seja, $u \in F \cap F^{\perp}$). Como por hipótese, $g|_{F\times F}$ é não-degenerada $u = 0$ e portanto $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Usando os resultados citados temos que $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim(F \cap F^{\perp}) + \dim(F + F^{\perp})$. Como $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$ e $\dim(F \cap F^{\perp}) = 0$ temos que $\dim E = \dim(F + F^{\perp})$. Portanto, $F + F^{\perp} = E$. Como $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, $F \oplus F^{\perp} = E$.

■

Observações:

(1) Uma forma quadrática pode ser não-degenerada no espaço vetorial E mas quando restrita a um subespaço vetorial pode tornar-se degenerada. Por exemplo, $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$ é não-degenerada, pois a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ é invertível. Mas se restrita no subespaço vetorial $F = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2\}$, φ é degenerada. De fato, a forma bilinear associada a ela quando restrita a F

$$\begin{array}{rcl} g: & F \times F & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_1), (x_2, x_2)) & \longmapsto x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2 \end{array}$$

é degenerada. Basta tomar o vetor $(1, 1)$ e note que $g((1, 1), (x, x)) = x - x = 0$, para todo $(x, x) \in F$.

(2) O item **(c)** do Teorema 1.2 pode ser reescrito da seguinte maneira: $g|_{F\times F}$ é não-degenerada $\Leftrightarrow F \cap F^{\perp} = 0$.

Corolário 1.1.18. *Seja $F \subseteq E$ subespaço vetorial. Então, $g|_{F\times F}$ é não-degenerada $\Leftrightarrow g|_{F^{\perp}\times F^{\perp}}$ é não-degenerada.*

Demonstração: De fato, dos itens **(b)** e **(c)** do Teorema 1.2, temos que: $g|_{F\times F}$ é não-degenerada $\Leftrightarrow E = F \oplus F^{\perp} \Leftrightarrow E = (F^{\perp})^{\perp} \oplus F^{\perp} \Leftrightarrow g|_{F^{\perp}\times F^{\perp}}$ é não-degenerada.

■

Definição 1.1.19. *Uma base $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset E$ é dita ser* ortonormal *quando $g(e_i, e_j) = 0$ se $i \neq j$ e $g(e_i, e_i) = \pm 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Exemplo 1.1.20. Fixe $s \in \mathbb{N}$, $s \leq n$, e seja $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear tal que $g(e_i, e_j) = \begin{cases} -1, & \text{se } 1 \leq i \leq s \\ 1, & \text{se } s+1 \leq i \leq n \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$
Os vetores do conjunto $B = \{e_1, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_n\}$ formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.21. *Todo espaço vetorial de dimensão finita munido de uma forma bilinear simétrica não-degenerada possui uma base ortonormal.*

Demonstração: Usaremos indução na dimensão de E. Sejam $\dim E = n$ e $v \in E$ um vetor não-nulo tal que $g(v, v) \neq 0$. Certamente existe um tal vetor, pois se $g(u, u) = 0$ para todo $u \in E$ teríamos $g(u + w, u + w) = 0$. Sendo assim, $g(u, w) = 0$ para todo $u, w \in E$ o que seria um absurdo pois, por hipótese, a forma bilinear simétrica é não-degenerada. Assim, se $n = 1$, $\left\{ \dfrac{v}{\sqrt{|g(v,v)|}} \right\}$ é uma base ortonormal de E. Se $n > 1$, considere o resultado válido para $n - 1$. Seja F o subespaço vetorial gerado por $\left\{ \dfrac{v}{\sqrt{|g(v,v)|}} \right\}$. Então, $g|_{F \times F}$ é não-degenerada. Com efeito, seja $u \in F$ tal que $g(u, w) = 0$ para todo $w \in F$. Em particular teríamos $g(u, v) = 0$. Como F tem dimensão 1, $u = \alpha v$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa forma, $\alpha g(u, u) = 0$. Logo, $\alpha = 0$, isso é, $u = 0$. Usando o Corolário 1.2, podemos concluir que $g|_{F^\perp \times F^\perp}$ também é não-degenerada. Mas $\dim F^\perp = n - 1$, pelo Teorema 1.2, item **(a)**. Pela hipótese de indução, existe uma base ortonormal $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\} \subset F^\perp$. Como $v \in F$, temos que $g(v, e_i) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Tomando $e_n = \dfrac{v}{\sqrt{|g(v,v)|}}$, teremos $B = \{e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n\}$ uma base ortonormal de E.

■

Note que, com respeito a uma base ortonormal, a matriz de g tem entradas fora da diagonal principal iguais a zero, e na diagonal principal temos i entradas -1 e $n - i$ entradas 1. O próximo teorema garante que i não depende da base ortonormal tomada, sendo de fato igual ao índice de g.

Teorema 1.1.22. *(Lei da inércia, de Sylvester) Seja $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma quadrática (não necessariamente não-degenerada). Se existir uma base $V = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset E$ tal que, para todo $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$ se tem $\varphi(v) = -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_r^2$, então a forma quadrática φ tem índice i e posto r.*

Demonstração: Primeiramente note que a matriz de $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ na base V tem i números -1 e $r - i$ números 1 na diagonal principal e os demais elementos iguais a zero. Logo, o posto de $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, que é igual ao posto dessa matriz, é r. Quanto ao índice, seja $F \subset E$ um subespaço vetorial, restrito ao qual φ é negativa. Mostraremos que $\dim F \leq i$. Com efeito, se o vetor não nulo $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$ pertencer a F então $-x_1^2 - \ldots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_r^2 < 0$. Logo, $x_1^2 + \ldots + x_i^2 > x_{i+1}^2 + \ldots + x_r^2 \geq 0$ e temos $(x_1, \ldots, x_i)$ não nulo em $\mathbb{R}^i$. Isso mostra que a transformação linear $A : F \longrightarrow \mathbb{R}^i$, definida por $Av = A(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i v_i) = (x_1, \ldots, x_i)$ é injetora. Portanto, $\dim F \leq i$. Para finalizar, observamos que o subespaço gerado por $\{v_1, \ldots, v_i\}$ tem dimensão i e, restrita a ele, $\varphi(v) = -x_1^2 - \ldots - x_i^2$ é negativa. Logo, i é a maior dimensão de um subespaço vetorial de E, restrita ao qual φ é negativa.

■

No caso de uma forma bilinear não-degenerada g em E, podemos escolher uma base ortonormal $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, que claramente atende as hipóteses da Lei da Inércia de Sylvester. Para todo $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ teremos $\varphi_g(v) = -x_1^2 - \ldots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_n^2$, onde ordenamos B de modo que: $\varphi_g(e_k) = \begin{cases} -1, & \text{se } 1 \leq k \leq i \\ 1, & \text{se } i+1 \leq k \leq n. \end{cases}$ A matriz de g nessa base é da forma

$$[g(e_i, e_j)] = \left[\begin{array}{cc} \underbrace{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}}_{i \text{ vezes}} & 0 \\ 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{n-i \text{ vezes}} \end{array} \right]$$

e φ_g fica então caracterizada inteiramente por seu índice.

No restante deste trabalho, assumiremos que toda base ortonormal será assim ordenada. Terminaremos essa seção com a definição de *espaço vetorial semi-Euclidiano.*

Definição 1.1.23. *Um* espaço vetorial semi-Euclidiano *é um par* (E, g)*, em que* E *é um espaço vetorial de dimensão finita e* $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma forma bilinear simétrica não-degenerada em* E*.* (E, g) *é dito ser um espaço vetorial* Euclidiano *se o índice de* g *é zero, e* Lorentziano (ou de Lorentz) *se o índice de* g *é* 1 *e* $\dim E \geq 2$.

1.2 Isometrias Lineares

Definição 1.2.1. *Sejam* (V, g) *e* (W, h) *espaços vetoriais semi-Euclidianos.* Uma isometria linear *é uma transformação linear* $T : V \longrightarrow W$ *tal que* $h(T(v), T(w)) = g(v, w)$ *para todo* $v, w \in V$.

Exemplo 1.2.2. Sejam $V = W = \mathbb{R}^2$, com $g = h = \langle , \rangle$ produto interno usual e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

A aplicação

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

é uma isometria linear. De fato, T é uma aplicação linear e além disso, pondo $v = (x, y)$ e $v' = (x', y')$, $h(T(v), T(w)) = \langle T(v), T(w) \rangle = \langle (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\cos\theta + y\cos\theta), (x'\cos\theta + y'\sin\theta, -x'\sin\theta + y'\cos\theta) \rangle = xx'\cos^2\theta + xy'\sin\theta\cos\theta + x'y\sin\theta\cos\theta + yy'\sin^2\theta + xx'\sin^2\theta - xy'\sin\theta\cos\theta - x'y\sin\theta\cos\theta + yy'\cos^2\theta = xx'(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + yy'(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = xx' + yy' = \langle v, w \rangle = g(v, w)$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.2.3. Sejam $V = W = \mathbb{R}^n$ e $g = h = \langle , \rangle$ produto interno usual. Seja $A \in M(n \times n)$ tal que $A^t A = I_{n \times n}$. A aplicação

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & Ax \end{array}$$

é uma isometria linear. Novamente, T é uma aplicação linear e além disso, $h(T(v), T(w)) = \langle T(v), T(w)\rangle = \langle Av, Aw\rangle = (Av)^t Aw = v^t A^t Aw = v^t I_{n\times n} w = v^t w = \langle v, w\rangle = g(v, w)$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$. Note que este exemplo inclui o anterior como caso particular.

Exemplo 1.2.4. Sejam $V = W = \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rcl} g = h: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & ((x, y, z), (x', y', z')) & \longmapsto -xx' + yy' + zz', \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{array}$$

A aplicação

$$\begin{array}{rcl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

é uma isometria linear. De fato, T é uma aplicação linear e além disso $h(T(v), T(w)) = h((x\cosh\alpha + y\sinh\alpha, x\sinh\alpha + y\cosh\alpha, z)(x'\cosh\alpha + y'\sinh\alpha, x'\sinh\alpha + y'\cosh\alpha, z')) = -xx'\cos^2 h\alpha - xy'\sinh\alpha\cosh\alpha - x'y\sinh\alpha\cosh\alpha - yy'\sinh^2\alpha + xx'\sin^2 h\alpha + xy'\sinh\alpha\cosh\alpha + x'y\sinh\alpha\cosh\alpha + yy'\alpha + zz' = xx'(\sin^2 h\alpha - \cos^2 h\alpha) + yy'(\cos^2\alpha - \sin^2 h\alpha) + zz' = -xx' + yy' + zz' = g(v, w)$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^3$.

Observação: É possível obter uma isometria linear entre espaços vetoriais semi-Euclidianos de índices distintos.

Exemplo 1.2.5. Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rcl} g: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto \langle u, v\rangle \end{array}$$

produto interno usual e

$$\begin{array}{rcl} h: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & ((x, y, z), (x', y', z')) & \longmapsto -xx' + yy' + zz'. \end{array}$$

A aplicação

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (0,x,y) \end{aligned}$$

é uma isometria linear. De fato, T é uma aplicação linear e além disso $h(T(v),T(w)) = h((0,x,y),(0,x',y')) = xx' + yy' = \langle v,w\rangle = g(v,w)$ para todo $v,w \in \mathbb{R}^2$.

Proposição 1.2.6. *Toda isometria linear é injetiva.*

Demonstração: Sejam (V,g) e (W,h) espaços vetoriais semi-Euclidianos, $T: V \longrightarrow W$ uma isometria linear e $v \in V$ com $T(v) = 0$. Sendo assim, temos que $0 = h(T(v),T(w)) = g(v,w)$ para todo $w \in V$. Como $g: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica não-degenerada, concluímos que $v = 0$ e o resultado segue.

∎

Definição 1.2.7. *Sejam (V,g) e (W,h) espaços vetoriais semi-Euclidianos. Um* isomorfismo linear *entre (V,g) e (W,h) é uma isometria linear sobrejetora (portanto bijetora).*

Teorema 1.2.8. *Sejam (V_i,g_i), $i = 1,2,3$, espaços vetoriais semi-Euclidianos e $T: V_1 \longrightarrow V_2$ e $S: V_2 \longrightarrow V_3$ isometrias lineares. A aplicação $S \circ T: V_1 \longrightarrow V_3$ é uma isometria linear. Além disso, se $R: V_i \longrightarrow V_j$ é um isomorfismo então $R^{-1}: V_j \longrightarrow V_i$ também é isomorfismo.* $(i,j = 1,2,3)$

Demonstração: Como a composição de aplicações lineares é uma aplicação linear, então $S \circ T: V_1 \longrightarrow V_3$ é uma aplicação linear. Além disso, temos que $g_3(S \circ T(v), S \circ T(w)) = g_3(S(T(v)), S(T(w))) = g_2(T(v),T(w)) = g_1(v,w)$ para todo $v,w \in V_1$. Logo, $S \circ T: V_1 \longrightarrow V_3$ é uma isometria linear.

Suponha que $R: V_i \longrightarrow V_j$ seja um isomorfismo. Como a inversa de uma aplicação linear é uma aplicação linear $R^{-1}: V_j \longrightarrow V_i$ é uma aplicação linear. Além disso,

$g_i(R^{-1}(v), R^{-1}(w)) = g_j(R(R^{-1}(v)), R(R^{-1}(w))) = g_j(v, w)$ para todo $v, w \in V_j$. Logo, $R^{-1} : V_j \longrightarrow V_i$ é um isomorfismo.

$\blacksquare$

Observação: Em particular, dado (V, g) um espaço vetorial semi-Euclidiano, a aplicação identidade

$$\begin{aligned} Id: \quad V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto v \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Teorema 1.2.9. *Sejam (V, g) e (W, h) espaços vetoriais semi-Euclidianos. A aplicação $T : V \longrightarrow W$ é um isomorfismo se e somente se V e W possuem a mesma dimensão e $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ possuem o mesmo índice.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha que $T : V \longrightarrow W$ é um isomorfismo. Seja $\{e_1, \ldots, e_I, e_{I+1}, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de V em que I seja o índice da forma quadrática associada a $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$. Como $T : V \longrightarrow W$ é uma bijeção linear, $\{T(e_1), \ldots, T(e_I), T(e_{I+1}), \ldots, T(e_n)\}$ é uma base de W. Portanto, V e W possuem a mesma dimensão. Além disso, como $T : V \longrightarrow W$ é isometria linear, temos que $h(T(e_k), T(e_l)) = g(e_k, e_l)$. Logo, $\{T(e_1), \ldots, T(e_I), T(e_{I+1}), \ldots, T(e_n)\}$ é uma base ortonormal, sendo o índice I pelo Teorema da Inércia.

$(\Leftarrow)$ Suponha que V e W tenham a mesma dimensão n e as formas quadráticas associadas a $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ tenham o mesmo índice. Sejam $\{e_1, \ldots, e_I, e_{I+1}, \ldots, e_n\}$ e $\{e'_1, \ldots, e'_I, e'_{I+1}, \ldots, e'_n\}$ bases ortonormais de V e W, respectivamente. Defina a aplicação $T : V \longrightarrow W$ da seguinte maneira: $T(e_k) = e`_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. A aplicação $T : V \longrightarrow W$ é uma aplicação linear e, além disso, é a única aplicação linear que satisfaz essa condição. Mais ainda, $T : V \longrightarrow W$ é uma isometria linear. De fato, $h(T(v), T(w)) = h(\alpha_1 T(e'_1) + \ldots + \alpha_n T(e'_n)), (\beta_1 T(e'_1) + \ldots + \beta_n T(e'_n)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j h\Big(T(e'_i), T(e'_j)\Big) \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i g(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j g(e_i, e_j) \right) = g(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n, \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n) = g(v, w)$ para todo $v, w \in V$. Sendo assim, $T : V \longrightarrow W$

é injetiva. Como $T : V \longrightarrow W$ é aplicação linear injetiva e V e W possuem mesma dimensão, então $T : V \longrightarrow W$ é sobrejetiva. Logo, $T : V \longrightarrow W$ é um isomorfismo.

■

Definição 1.2.10. *Seja (V, g) um espaço vetorial semi-Euclidiano.* O grupo ortogonal *de (V, g) é $O(V, g) = \{T : V \longrightarrow V/\ T \quad \text{é isomorfismo linear}\}$.*

Observação: Do Teorema 1.2.8, decorre imediatamente que $O(V, g)$ é um grupo com a operação dada por composição.

Fixe agora $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por M_n o conjunto das matrizes $n \times n$.

Definição 1.2.11. *Sejam $0 \leq I \leq n$ e* $\eta_I = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}}_{I\ vezes} & 0 \\ 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{n-I\ vezes} \end{bmatrix}$

$O(n - I, I) = \{A \in M_n / A\eta_I A^t = \eta_I\}$. Note que se $A \in O(n - I, I)$, $A\eta_I A^t = \eta_I$, e portanto $(A\eta_I A^t)^{-1} = \eta_I^{-1}$, isto é, $(A^t)^{-1}\eta_I A^{-1} = \eta_I$. Logo, $\eta_I = A^t\eta_I A$. Reciprocamente, se $\eta_I = A^t\eta_I A$, então $A\eta_I A^t = \eta_I$, isto é, $A \in O(n - I, I)$.

Observação: Denotamos por $GL(n)$, o grupo das matrizes $n \times n$ invertíveis.

Proposição 1.2.12. *$O(n - I, I)$ é subgrupo de $GL(n)$.*

Demonstração: Seja $A \in O(n-I, I)$. Sendo assim, temos que $det\ \eta_I = det(A^t\eta_I A) = detA^t \cdot det\ \eta_I \cdot detA = det^2 A \cdot det\ \eta_I$. Portanto, $det^2 A = 1$ e, em particular, $detA \neq 0$. Logo, A é invertível, isto é, $A \in GL(n)$. Além disso, se $A \in O(n - I, I)$, $\eta_I^{-1} = \eta_I$ e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ temos que $\eta_I = \eta_I^{-1} = (A^t\eta_I A)^{-1} = A^{-1}\eta_I^{-1}(A^t)^{-1} = A^{-1}\eta_I(A^{-1})^t$. Analogamente, $\eta_I = (A^{-1})^t\eta_I A^{-1}$. Logo, $A^{-1} \in O(n - I, I)$. Seja também $B \in O(n -$

$I, I)$. Como $(AB)^t = B^t A^t$ temos que $(AB)^t \eta_I AB = B^t A^t \eta_I AB = B^t \eta_I B = \eta_I$. Logo, $AB \in O(n-I, I)$ e o resultado segue.

$\blacksquare$

Teorema 1.2.13. *Seja (V, g) um espaço vetorial semi-Euclidiano com dimensão n e índice da forma quadrática associada a $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ igual a I. Então os grupos $O(V, g)$ e $O(n-I, I)$ são isomorfos.*

Demonstração: Fixe $B = \{e_1, \ldots, e_I, e_{I+1}, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de V. Note que η_I é exatamente a matriz de $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ nessa base. Defina

$$\begin{aligned} \varphi : \quad O(V, g) &\longrightarrow O(n-I, I) \\ T \quad &\longmapsto T_B \end{aligned}$$

em que T_B é a matriz de T na base B. Sendo assim, temos que $[(T_B)^t \eta_I T_B]_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{l=1}^{n} (T_B)_{ki} \ (\eta_I)_{kl} \ (T_B)_{lj} \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{l=1}^{n} (T_B)_{ki} \ g(e_k, e_l) \ (T_B)_{lj} \right) = g\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (T_B)_{ki} \cdot e_k, \sum\limits_{l=1}^{n} (T_B)_{lj} \cdot e_l \right) = g(T(e_i), T(e_j)) = g(e_i, e_j) = (\eta_I)_{ij}$. Portanto, $T_B^t \eta_I T_B = \eta_I$. Logo, φ está bem definida. Além disso, temos que $\varphi(T \circ S) = (T \circ S)_B = T_B \cdot S_B$. Portanto, φ é um homomorfismo. Suponha que $T_B = S_B$. Sendo assim, temos que $T(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} (T_B)_{ij} e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} (S_B)_{ij} e_j = S(e_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, $T = S$ e φ é injetora. Seja $T_A \in O(n-I, I)$. Defina $T : V \longrightarrow V$ pondo $T\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_i (T_A)_{ji} e_j \right)$. Portanto, $\varphi(T) = T_A$. Logo, φ é um isomorfismo entre $O(V, g)$ e $O(n-I, I)$.

$\blacksquare$

No que segue, identificamos, sem maiores discussões, M_n e $\mathbb{R}^{n^2}$ com sua topologia e estrutura diferenciável usuais.

Teorema 1.2.14. *$O(n-I, I)$ é superfície de classe C^∞ e dimensão $\dfrac{n(n-1)}{2}$ em $\mathbb{R}^{n^2}$.* [2]

[2] Veja Apêndice B.

Demonstração: Denotamos por S_n o conjunto das matrizes $n \times n$ simétricas, que identificamos com $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rlll} f: & M_n(=\mathbb{R}^{n^2}) & \longrightarrow & S_n(=\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}) \\ & A & \longmapsto & A\eta_I A^t. \end{array}$$

f é polinomial, e portanto de classe C^∞. Além disso, $O(n-I, I) = f^{-1}(\eta_I)$.

Afirmação: Para todo $A \in \mathbb{R}^{n^2}$, a aplicação linear

$$\begin{array}{rlll} T: & M_n(=\mathbb{R}^{n^2}) & \longrightarrow & S_n(=\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}) \\ & B & \longmapsto & B\eta_I A^t + A\eta_I B^t \end{array}$$

é igual à derivada $Df(A)$ de f em A. De fato, usando a norma do *sup*, temos

$$\begin{aligned} \frac{\|f(A+B) - f(A) - T(B)\|}{\|B\|} &= \frac{\|(A+B)\eta_I(A+B)^t - A\eta_I A^t - B\eta_I A^t - A\eta_I B^t\|}{\|B\|} \\ &= \frac{\|B\eta_I B^t\|}{\|B\|} \leq \frac{\|B\|\|\eta_I\|\|B^t\|}{\|B\|} = \|B\|. \end{aligned}$$

Logo, $\lim\limits_{\|B\| \longrightarrow 0} \dfrac{\|f(A+B) - f(A) - T(B)\|}{\|B\|} = 0.$

Basta agora, pela Teorema B.9 do Apêndice 2, mostrar que para todo $A \in O(n-I, I)$, $Df(A)$ é sobrejetora. Seja $M \in S_n$ e considere $B = \frac{M\eta_I A}{2}$. Sendo assim, temos que $Df(A)(B) = \dfrac{M\eta_I A}{2}\eta_I A^t + A\eta_I\left(\dfrac{M\eta_I A}{2}\right)^t = \dfrac{M\eta_I\eta_I}{2} + \dfrac{\eta_I\eta_I^t M^t}{2} = \dfrac{M}{2} + \dfrac{M}{2} = M$. Logo, $O(n-I)$ é uma superfície de classe C^∞ e dimensão igual a $n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

■

Definição 1.2.15. *O grupo de Lorentz é* $O(n-1, 1)$. *O grupo especial de Lorentz é o subgrupo* $SO(n-1, 1) = \{A \in O(n-1, 1) / detA = 1\}$.

Capítulo 2

Espaços Vetoriais de Lorentz

Este capítulo tem como objetivo definir e caracterizar o caráter causal de certos subespaços vetoriais. Em seguida, descutiremos alguns aspectos do cone de tempo.

Repetimos aqui, por conveniência, a definição de espaço vetorial de Lorentz.

2.1 Propriedades Básicas

Definição 2.1.1. Um espaço vetorial de Lorentz *é um par* (V, g) *em que* V *é um espaço vetorial de dimensão finita com* $\dim V \geq 2$ *e* $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma forma bilinear simétrica não-degenerada cuja forma quadrática associada tem índice igual a* 1.

Exemplo 2.1.2. Sejam $V = \mathbb{R}^{n+1}$ e

$$\begin{array}{rcl} g_0 : & \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & ((x_0, x_1, \ldots, x_n), (y_0, y_1, \ldots, y_n)) & \longmapsto -x_0 y_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{array}$$

$(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ é um espaço vetorial de Lorentz. De fato, $\mathbb{R}^{n+1}$ é um espaço vetorial de dimensão finita com $\dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n + 1 \geq 2$ e g tem índice 1 pelo teorema da Inércia.

Fixado um espaço vetorial de Lorentz (V, g), é comum nos referirmos apenas a V como o espaço vetorial de Lorentz quando não existir perigo de confusão. Se $W \subseteq V$ é um subespaço, o *índice* de W é por definição o índice de $g|_{W \times W}$.

Definição 2.1.3. *Seja $W \subseteq V$ um espaço vetorial.*

i) *W é* tipo-espaço *se $g|_{W \times W}$ é positiva definida;*

ii) *W é* tipo-tempo *se $g|_{W \times W}$ é não-degenerada com índice 1 (ou seja, se* $\dim W \geq 2$, *então $(W, g|_{W \times W})$ é um espaço vetorial de Lorentz);*

iii) *W é* tipo-luz *se $g|_{W \times W}$ é degenerada.*

Observação: Evidentemente, estas três possibilidades são mutuamente excludentes. Nos referimos a elas como *o caráter causal* de W.

2.2 Caráter Causal

Definição 2.2.1. O caráter causal de $v \in V$ *(tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz) é o caráter causal do subespaço gerado por v.*

Observação: O vetor nulo é tipo-espaço por vacuidade.

Exemplo 2.2.2. Seja $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ como no Exemplo 2.1.2.
Os subespaços vetoriais $W_t = \{(x_0, x_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_0, x_1 \in \mathbb{R}\}$, $W_s = \{(0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ e $W_l = \{(x_0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\}$ são, respectivamente, tipo-tempo, tipo-espaço e tipo-luz. De fato, os três subconjuntos são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^{n+1}$ (imediato!). Além disso, é imediato também que a base canônica $\{e_0, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ é ortonormal com respeito a g_0 e que $B_t = \{e_0, e_1\}$ e $B_s = \{e_1, \ldots, e_n\}$ são bases, respectivamente, de W_t e W_s. Dessa forma, as matrizes de $g|_{W_t \times W_t}$ e $g|_{W_s \times W_s}$ são, respectivamente, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $I_{(n \times n)}$. Portanto, $g|_{W_t \times W_t}$ e $g|_{W_s \times W_s}$ são não-degeneradas e possuem índice 1 e 0, respectivamente. Finalmente, $u = (1, 1, 0, \ldots, 0) \in W_l$ e $g(u, w) = 0$ para todo $w \in W_l$. Logo, $g|_{W_l \times W_l}$ é degenerada.

Proposição 2.2.3. *Seja (V,g) um espaço vetorial de Lorentz e $v \in V \backslash \{0\}$:*

i) *V é tipo-tempo se e somente se $g(v,v) < 0$;*

ii) *V é tipo-espaço se e somente se $g(v,v) > 0$;*

iii) *V é tipo-luz se e somente se $g(v,v) = 0$.*

Demonstração: i), ii) ($\Rightarrow$) Seja $W = span\{v\}$ o subespaço gerado por v. Sendo assim, temos que W é tipo-tempo (respectivamente tipo-espaço). Dessa forma, $g|_{W\times W}$ é não-degenerada e a forma quadrática associada a $g|_{W\times W}$ tem índice 1 (respectivamente zero). Como W tem dimensão 1, $g(w,w) < 0$ (respectivamente $g(w,w) > 0$) para todo $w \in W \setminus \{0\}$. Em particular, $g(v,v) < 0$ (respectivamente $g(v,v) > 0$).

i), ii) ($\Leftarrow$) Seja $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ como $g(\alpha v, \alpha v) = \alpha^2 g(v,v)$, temos que $g(\alpha v, \alpha v)$ é negativa (respectivamente positiva). Sendo assim, $g|_{W\times W}$ é negativa definida (respectivamente positiva definida). Portanto, $g|_{W\times W}$ é não-degenerada e a forma quadrática associada tem índice 1 (respectivamente zero). Logo, W é tipo-tempo (respectivamente tipo-espaço).

iii)($\Rightarrow$) Seja $W = span\{v\}$ o subespaço gerado por v. Se $g|_{W\times W}$ é degenerada, então existe $w \in W \setminus \{0\}$ tal que $g(w,u) = 0$ para todo $u \in W$. Em particular, $g(w,v) = 0$. Como W tem dimensão 1, $w = \alpha v$, para algum $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sendo assim, temos que $g(v,v) = \dfrac{1}{\alpha}\, g(w,v) = 0$.

iii)($\Leftarrow$) Seja $w \in W$. Dessa forma, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $w = \alpha v$. Portanto, $g(w,v) = \alpha g(v,v) = 0$. Logo, $g|_{W\times W}$ é degenerada.

■

Teorema 2.2.4. *Seja $W \subseteq V$ um subespaço vetorial:*

i) *W é tipo-tempo se e somente se $W^\perp$ é tipo-espaço;*

ii) *W é tipo-espaço se e somente se $W^\perp$ é tipo-tempo;*

iii) *W é tipo-luz se e somente se $W^\perp$ é tipo-luz.*

Demonstração: i)($\Rightarrow$) Se W é tipo-tempo então $g|_{W\times W}$ é não-degenerada. Sendo assim, sabemos que $W^\perp$ é não-degenerado, pelo Corolário 1.1.18. Além disso, também temos que o índice de $W^\perp$ é zero. De fato, seja $\{e_1, \ldots, e_k\}$ base ortonormal de W com $g(e_1, e_1) = -1$ e suponha que $\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $W^\perp$. Então, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é base ortonormal de V e como o índice de V é 1, $g(e_i, e_i) = 1$, para todo $k+1 \leq i \leq n$, $g|_{W^\perp \times W^\perp}$ é positiva definida, isto é, o índice da forma quadrática associada a $g|_{W^\perp \times W^\perp}$ é zero.

i)($\Leftarrow$) Se $W^\perp$ é tipo-espaço então $g|_{W^\perp \times W^\perp}$ é positiva definida e portanto não-degenerada. Usando um raciocínio análogo ao anterior, concluímos que o índice de W é igual 1. Como já sabemos que $g|_{W \times W}$ é não-degenerada, o resultado segue.

ii) Basta utilizar o fato que $W = (W^\perp)^\perp$ e aplicar o Corolário 1.1.18 ao item **(i)**.

iii) ($\Rightarrow$) Suponha que W é tipo-luz. Sendo assim, $W^\perp$ é tipo-luz também pois, caso contrário, teríamos uma contradição com **(i)** ou **(ii)**.

iii) ($\Leftarrow$) Basta utilizar o resultado anterior e o fato que $(W^\perp)^\perp = W$.

$\blacksquare$

Os diferentes tipos de caráter causal para um subespaço W são ilustrados na figura 2.1, no final do capítulo.

Corolário 2.2.5. *Se $v, w \in V$ são tipo-luz então $g(v, w) = 0$ se e somente se v e w são paralelos.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $u \in V$ um vetor tipo-tempo (existe um subespaço de V de dimensão 1 em que os vetores não-nulos são do tipo-tempo). Se $g(v, u) = 0$, então $v \in u^\perp := (span\{u\})^\perp$, que é do tipo-espaço pelo teorema anterior. Mas então, como $v \neq 0$, teríamos $g(v, v) > 0$, uma contradição. Sendo assim, temos que $g(v, u) \neq 0$. Seja $\lambda = \dfrac{g(u, w)}{g(u, v)}$. Dessa forma, $\lambda g(u, v) - g(u, w) = 0$, isto é, $g(u, \lambda v - w) = 0$. Portanto, $\lambda v - w \in u^\perp$ e com isso $g(\lambda v - w, \lambda v - w) \geq 0$ sendo que $g(\lambda v - w, \lambda v - w) = 0 \Leftrightarrow \lambda v - w = 0$. Mas, por hipótese, $g(\lambda v - w, \lambda v - w) = \lambda^2 g(v, v) + g(w, w) - 2\lambda g(v, w) = 0$. Logo, $\lambda v - w = 0$ e então $w = \lambda v$.

($\Leftarrow$) Se $w, v \in V$ são paralelos então existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $w = \alpha v$. Logo, $g(w, v) = \alpha g(v, v) = 0$.

$\blacksquare$

As duas proposições seguintes caracterizam os subespaços vetoriais tipo-tempo e tipo-luz.

Proposição 2.2.6. *Seja $W \subseteq V$ um subespaço vetorial com* $\dim w \geq 2$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *W é tipo-tempo;*

ii) *W possui dois vetores tipo-luz linearmente independentes;*

iii) *W possui um vetor tipo-tempo.*

Demonstração: i) $\Rightarrow$ ii) Como W é tipo-tempo, então $g|_{W\times W}$ é não-degenerada e a forma quadrática associada tem índice 1. Seja $\{e_1, \dots, e_k\}$ uma base ortonormal de W com $g(e_1, e_1) = -1$ e $g(e_i, e_i) = 1$ para $2 \leq i \leq k$. Considere os vetores $v = e_1 + e_2$ e $w = e_1 - e_2$. Claro que v e w são vetores não-nulos. Além disso, v e w são linearmente independentes. De fato, $\alpha v + \beta w = 0 \Rightarrow (\alpha + \beta)e_1 + (\alpha - \beta)e_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$. Sendo assim, temos que $g(v, v) = g(e_1, e_1) + 2g(e_1, e_2) + g(e_2, e_2) = -1 + 0 + 1 = 0$. Analogamente, $g(w, w) = 0$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sejam v, $w \in W$ dois vetores tipo-luz linearmente independentes. Pelo Corolário 2.2.5, $g(w, v) \neq 0$. Mas, $g(w + v, w + v) = 2g(w, v)$ e $g(w - v, w - v) = -2g(w, v)$. Se $g(w, v) > 0$ então $w - v$ é tipo-tempo e se $g(w, v) < 0$ então $w + v$ é tipo-tempo. Em qualquer caso, W possui um vetor tipo-tempo.

iii) $\Rightarrow$ i) Seja $v \in W$ um vetor tipo-tempo. Então, para todo $w \in span\{v\} \setminus \{0\}$, $g(w, w) < 0$. Sendo assim, temos que o índice de W é maior ou igual a 1. Além disso, $g|_{W\times W}$ é não-degenerada. De fato, se não fosse, então existiria $u \in W \setminus \{0\}$ tal que $g(u, u) = 0$ e $g(u, v) = 0$. Assim, teríamos que $u \in v^\perp$ e com isso $g(u, u) \geq 0$ e $g(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Logo, $u = 0$ (contradição!). Com $g|_{W\times W}$ é não-degenerada, então $V = W \oplus W^\perp$, o que implica que o índice de W é menor ou igual a 1. Logo, o indice de W é igual a 1 e W é tipo-tempo.

■

Proposição 2.2.7. *Seja $W \subseteq V$ um subespaço vetorial. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *W é tipo-luz;*

ii) *W possui um vetor tipo-luz mas não possui um vetor tipo-tempo;*

iii) *$g|_{W\times W}$ é positiva semi-definida, mas não positiva definida;*

iv) *Se $N = \{v \in V \ / \ v$ é tipo-luz$\}$, então para algum subespaço vetorial $L \subseteq V$ de dimensão 1, $W \cap N = L \setminus \{0\}$;*

v) $\dim(W \cap W^{\perp}) = 1$.

Demonstração: i) $\Rightarrow$ ii) Como W é tipo-luz então $g|_{W\times W}$ é degenerada, isto é, existe $v \in W \setminus \{0\}$ tal que $g(v,u) = 0$ para todo $u \in W$. Em particular, $g(v,v) = 0$. Portanto, v é um vetor tipo-luz. Se existisse um vetor tipo-tempo em W, então W seria tipo-tempo pela proposição anterior (contradição!). Logo, W não possui um vetor tipo-tempo.

ii) $\Rightarrow$ iii) Como W não possui um vetor tipo-tempo, $g(v,v) \geq 0$ para todo $v \in W$ e sendo assim $g|_{W\times W}$ é positiva semi-definida. No entanto, como W possui um vetor u tipo-luz, $g(u,u) = 0$ mas $u \neq 0$. Logo, $g|_{W\times W}$ não é positiva definida.

iii) $\Rightarrow$ iv) Como $g|_{W\times W}$ é positiva semi-definida, existe $v \in W \setminus \{0\}$ tal que $g(v,v) = 0$, que é um vetor tipo-luz. Seja $L : span\{v\}$. L é um subespaço vetorial de dimensão 1 e além disso $W \cap N = L \setminus \{0\}$. De fato, se $w \in L \setminus \{0\}$ então é claro que $w \in W$. Além disso, existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $w = \alpha v$. Portanto, $g(w,w) = g(\alpha v, \alpha v) = \alpha^2 g(v,v) = 0$. Logo, $w \in N$ e com isso $L \setminus \{0\} \subseteq W \cap N$. Agora, seja $u \in W \cap N$ um outro vetor tipo-luz. Se $\{u, v\}$ fosse um conjunto linearmente independente então W seria tipo-tempo pela proposição anterior (contradição!). Portanto, existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $u = \lambda v$ e com isso $u \in L \setminus \{0\}$. Logo, $W \cap N \subseteq L \setminus \{0\}$.

iv) $\Rightarrow$ v) Primeiramente, note que $W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$. De fato, se $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ então $V = W \oplus W^{\perp}$. Portanto, $g|_{W\times W}$ é não-degenerada. Sendo assim, temos que W é tipo-tempo ou tipo-espaço. Se W fosse tipo-tempo, então W possuiria dois vetores tipo-luz linearmente independentes, o que contraria o fato de $L \subseteq V$ ter dimensão 1. Se W fosse tipo-espaço, então $W \cap N = \varnothing$, o que contraria novamente o fato de $L \subseteq V$ ter dimensão 1. Seja $v \in W \cap W^{\perp}$ um vetor não-nulo. Dessa forma, $g(v,v) = 0$ e com isso $v \in W \cap N = L \setminus \{1\}$. Portanto, $W \cap W^{\perp} \subseteq L$. Então, como $W \cap W^{\perp}$ é um subespaço vetorial não-nulo de L, $1 \leq \dim(W \cap W^{\perp}) \leq \dim L = 1$. Logo, $\dim(W \cap W^{\perp}) = 1$.

v) $\Rightarrow$ i) Como $\dim(W \cap W^{\perp}) = 1$ então existe $v \in W \setminus \{0\}$ tal que $v \in W \cap W^{\perp}$. Portanto, para todo $w \in W$, $g(v,w) = 0$. Logo, $g|_{W \times W}$ é degenerada.

$\blacksquare$

2.3 Cone de tempo

Definição 2.3.1. *Seja $\tau = \{v \in V / g(v,v) < 0\}$ o conjunto dos vetores tipo-tempo de V. O cone de tempo de $u \in \tau$ é $C(u) = \{v \in \tau, g(v,u) < 0\}$ o cone de tempo oposto de u é $C(-u) = \{v \in \tau, g(v,u) > 0\}$.*

Observação: O nome "Cone" vem, primeiro, do fato de que, se $v, w \in C(u)$ (respectivamente $C(-u)$), então $tv + sw \in C(u)$ (respectivamente $C(-u)$), para todo $t, s \in \mathbb{R}$, $t, s > 0$ e segundo porque estes são de fato cones no caso de $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$, como veremos adiante.

Proposição 2.3.2. *Para todo $u \in \tau$, $C(u) \cap C(-u) = \varnothing$ e $\tau = C(u) \cup C(-u)$.*

Demonstração: Claro que $C(u) \cap C(-u) = \varnothing$ e também $C(u) \cup C(-u) \subseteq \tau$ para todo $u \in \tau$. Seja $v \in \tau$. Se fosse $g(u,v) = 0$ então $v \in u^{\perp}$, uma contradição com o fato de que $u^{\perp}$ é tipo-espaço. Portanto, temos que $g(u,v) < 0$, isto é, $v \in C(u)$ ou $g(u,v) > 0$, isto é, $v \in C(-u)$. Logo, $\tau \subseteq C(u) \cup C(-u)$.

$\blacksquare$

Lema 2.3.3. *Sejam $u, v, w \in \tau$. Se $g(u,v) < 0$ e $g(u,w) < 0$ então $g(v,w) < 0$.*

Demonstração: Sejam $v_1 = v - \dfrac{g(u,v)}{g(u,u)}u$ e $w_1 = w - \dfrac{g(u,w)}{g(u,u)}u$. Dessa forma, $g(u,v_1) = g(u,v) - \dfrac{g(u,v)}{g(u,u)}g(u,u) = 0$. Analogamente, $g(u,w_1) = 0$. Como $u^{\perp}$ é tipo-espaço, $g(v_1,v_1) \geq 0$ e $g(w_1,w_1) \geq 0$ e a igualdade ocorre apenas se $v_1 = 0$ e

$w_1 = 0$, respectivamente. Defina $a = -\dfrac{g(u,v)}{\sqrt{|g(u,u)|}}$ e $b = -\dfrac{g(u,w)}{\sqrt{|g(u,u)|}}$. Sendo assim, temos que $a, b > 0$, $v = v_1 + au_0$ e $w = w_1 + bu_0$ onde $u_0 = \dfrac{u}{\sqrt{|g(u,u)|}}$. Além disso, $g(v,w) = abg(u_0,u_0) + g(v_1,w_1) = -ab + g(v_1,w_1)$. Como $u^\perp$ é tipo-espaço, $g|_{u^\perp \times u^\perp}$ é positiva definida. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos que $g(v_1,w_1) \leq \sqrt{g(v_1,v_1)} \cdot \sqrt{g(w_1,w_1)}$. Como $g(v,v) < 0$ então $-a^2 + g(v_1,v_1) < 0$, ou seja, $a > \sqrt{g(v_1,v_1)}$. Analogamente, $b > \sqrt{g(w_1,w_1)}$. Portanto, $ab > \sqrt{g(v_1,v_1)} \cdot \sqrt{g(w_1,w_1)} \geq g(v_1,w_1)$. Logo, $-ab + g(v_1,w_1) < 0$, isto é, $g(v,w) < 0$.

■

Teorema 2.3.4. *Para todo $v, w \in \tau$, defina: $v \sim w \Leftrightarrow g(v,w) < 0$. Desta forma, $\sim$ é uma relação de equivalência de τ. Além disso, existem exatamente duas classes de equivalência convexas C e C', isto é, para todo $u \in \tau$, ou $C = C(u)$ ou $C' = C(u)$*

Demonstração: Para todo $v \in \tau$, $g(v,v) < 0$ (reflexividade). $\sim$ é claramente simétrica. Para todo $u, v, w \in \tau$, se $u \sim v$ e $v \sim w$ então $u \sim w$ pelo lema anterior (transitividade). Seja $u \in \tau$. Para todo $v \in \tau$, já vimos que $g(u,v) < 0$ ($u \sim v$) ou $g(u,v) > 0$ ($-u \sim v$). Logo, $\tau = [u] \cup [-u]$. Entretanto, $[u] = C(u)$ e $[-u] = C(-u)$. Com isso, provamos que para todo $w \in \tau$, $C(w) = C(u)$ ou $C(w) = C(-u)$. De fato, se $w \sim u$, então para todo $v \in C(w)$ temos que $v \sim w$ e assim $v \sim u$, isto é, $v \in C(u)$. Portanto, $C(w) \subseteq C(u)$. Além disso, $C(u) \subseteq C(w)$ pois $u \sim v$. Logo, $C(u) = C(w)$. Analogamente, $C(-u) = C(-w)$. Pela Proposição 2.3.2, só falta mostrar que $C(u)$ é convexo. De fato, sejam $v, w \in C(u)$ e $a, b > 0$. Como $\langle v, u \rangle < 0$ e $\langle w, u \rangle < 0$ então $\langle av + bw, u \rangle < 0$. Logo, $av + bw \in C(u)$ e o resultado segue.

■

Exemplo 2.3.5. $(V, g) = (\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$. Seja $e_0 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. O cone de tempo de e_0 é $C(e_0) = \{u = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ g(u,u) < 0 \ \text{ e } \ g(u, e_0) < 0\}$, isto é, $x_0 > 0$ e $x_0^2 > \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$. Analogamente, o cone de tempo de $-e_0$ é $C(-e_0) = \{u = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ g(u,u) < 0 \ \text{ e } \ g(u, -e_0) < 0\}$, isto é, $x_0 < 0$ e $x_0^2 > \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

Observação: No caso particular em que $V = \mathbb{R}^3$ os cones de tempo de e_0 e $-e_0$ são cones propriamente ditos (ver figura 2.2 no fim do capítulo.).

Observação: As duas classes de equivalência do teorema anterior são chamadas *cones de tempo de* V.

Provaremos agora um fato interessante, consequência do índice não-nulo de V.

Proposição 2.3.6. *Sejam* $v, w \in V$ *vetores do tipo-tempo. Escreva* $\|u\| = \sqrt{|g(u,u)|}$ *para todo* $u \in V$. *Sendo assim,* $|g(v,w)| \geq \|w\| \cdot \|v\|$ *e a igualdade ocorre se e somente se* v *e* w *são colineares.*

Demonstração: Escreva $w = av + v'$ onde $a \in \mathbb{R}$ e $v' \in v^{\perp}$. Como w é tipo-tempo então $g(w,w) = a^2 g(v,v) + g(v',v') < 0$. Sendo assim, temos que $g(v,w)^2 = a^2 g(v,v)^2 = (g(w,w) - g(v',v'))g(v,v) \geq g(w,w)g(v,v) = \|w\|^2\|v\|^2$ pois $g(v',v') > 0$ e $g(v,v) < 0$. Portanto, $|g(v,w)| \geq \|w\|\|v\|$. Evidentemente, a igualdade ocorre se e somente se $g(v',v') = 0$, ou seja, $v' = 0$. Logo, $w = av$ e o resultado segue.

■

Corolário 2.3.7. *(Desigualdade triangular invertida): Se* u, v *são vetores do tipo-tempo do mesmo cone de tempo, então* $\|u\| + \|v\| \leq \|u + v\|$.

Demonstração: Por hipótese, temos que $g(u,v) < 0$. Além disso, pela Proposição 2.3.6, $\|u\|\|v\| \leq -g(u,v)$. Portanto, $(\|u\| + \|v\|)^2 = \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \leq -g(u + v, u + v) = \|u + v\|^2$. Logo, $\|u\| + \|v\| \leq \|u + v\|$.

■

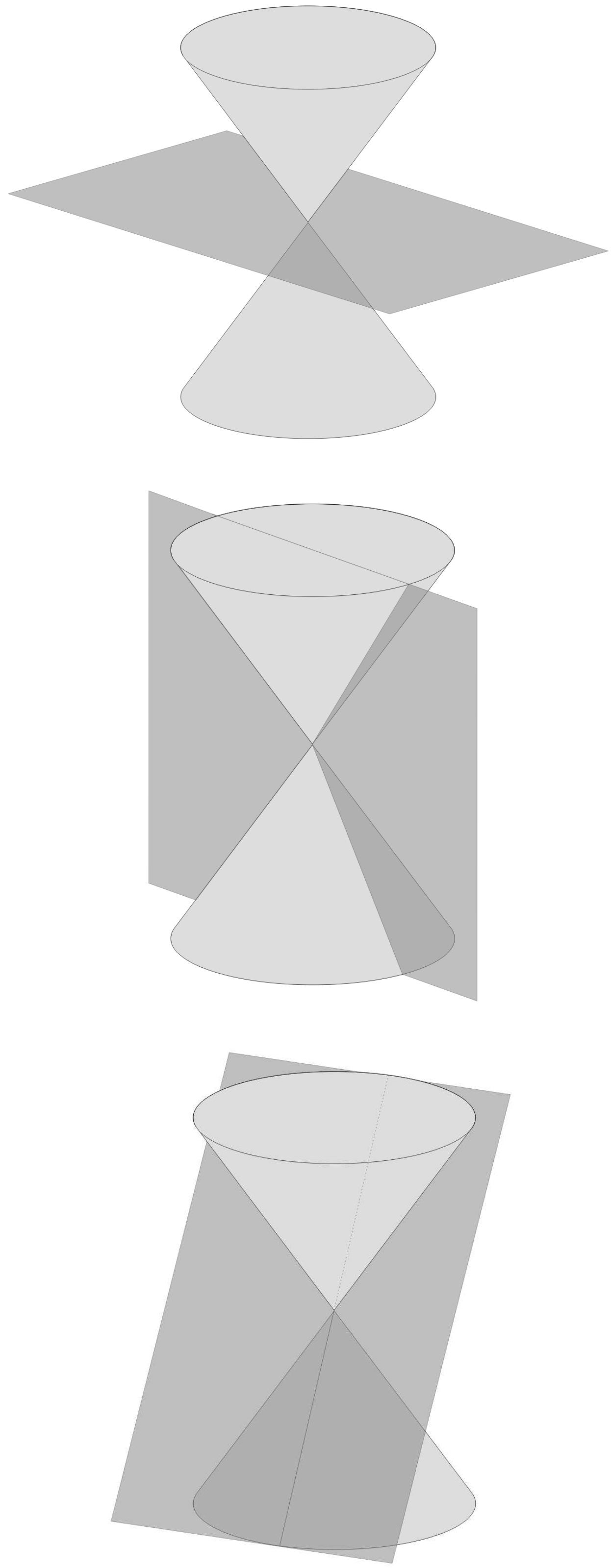

Figura 2.1: Os três tipos de espaço de acordo com seu o caráter causal. O primeiro subespaço é tipo-espaço, o segundo tipo-tempo e o terceiro tipo-luz.

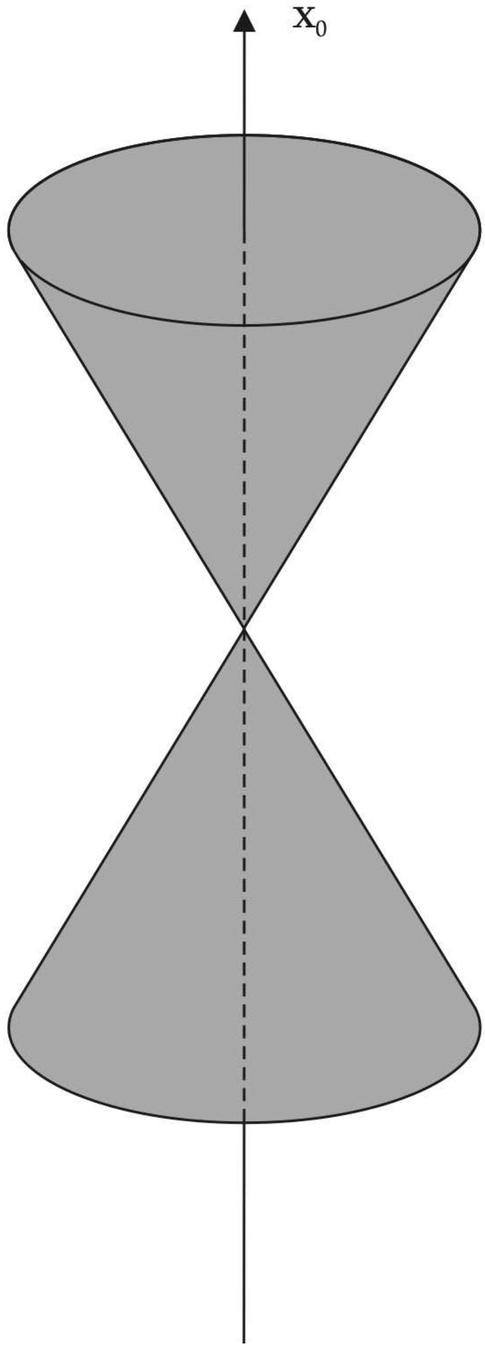

Figura 2.2: Exemplo 2.3.5.

Capítulo 3

Espaços Afins

Neste capítulo introduziremos o conceito de espaço afim. O estudo das transformações afins e a obtenção do grupo afim também estão presentes aqui.

3.1 Propriedades Básicas

Definição 3.1.1. *Um* espaço afim *é uma tripla* $(E, V, +)$ *que satisfaz as seguintes condições:*

(i) *E é um conjunto não vazio;*

(ii) *V é um espaço vetorial;*

(iii)
$$\begin{aligned} + : \quad V \times E &\longrightarrow E \\ (u, a) &\longmapsto a + u \end{aligned}$$

é uma aplicação em que $(a + u) + w = a + (u + w)$ para todo $a \in E$ e quaisquer que sejam $u, w \in V$ e além disso, dado $b \in E$ existe um único vetor $v \in V$ tal que $b = a + v$.

Observação: Quando não houver risco de confusão, mencionaremos apenas o conjunto E como sendo espaço afim.

Os elementos de E chamam-se *pontos* do espaço afim. V é dito ser o espaço vetorial *associado* a E. A *dimensão* do espaço afim E é, por definição, igual a dimensão do espaço vetorial V. O ponto $a+u$ denomina-se *soma do ponto* a *com o vetor* u. O único vetor u tal que $b = a + u$ denomina-se *diferença dos pontos* b e a e será denotado por $b - a$. Note que $b - a \in V$, e não é um ponto de E em geral. Portanto, para quaisquer que sejam $a, b \in E$, temos $b = a + (b - a)$. As seguintes propriedades, válidas para quaisquer que sejam $a, b, c \in E$ e $u \in V$, decorrem da condição **(iii)** da definição de espaço afim.

(1) $a + 0 = a$.

De fato, seja $u \in V$ o único vetor tal que $a + u = a$. Então, $(a + u) + 0 = a + 0$. Por outro lado, $(a + u) + 0 = a + (u + 0) = a + u = a$. Logo, $a + 0 = a$.

(2) $a - a = 0$.

Decorre de **(1)** e da definição de diferença de pontos.

(3) $(a - b) + (b - c) = a - c$.

Com efeito, $c+[(a-b)+(b-c)] = c+[(b-c)+(a-b)] = [c+(b-c)]+(a-b) = b + (a - b) = a$. Logo, $(a - b) + (b - c) = a - c$.

(4) $a - b = -(b - a)$.

Basta fazer $c = a$ em **(3)**.

(5) $(b - a) + u = (b + u) - a = b - (a + (-u))$.

De fato, $a+[(b-a)+u] = [a+(b-a)]+u = b+u$. Logo, $(b-a)+u = (b+u)-a$. Note também que $(a + (-u)) + [(b - a) + u] = (a + (-u)) + [u + (b - a)] = [(a+(-u))+u]+(b-a) = [a+((-u)+u)+(b-a) = (a+0)+(b-a) = a+(b-a) = b$. Logo, $(b - a) + u = b - (a + (-u))$.

(6) Regra do paralelogramo: Se $b - a = c - d$ então $b - c = a - d$.

Com efeito, da hipótese temos que $b = a + (c - d)$. Portanto, $d + (b - c) = d+[(a+(c-d))-c] = d+[a-(c+[(c-d)])] = d+[a-(c+(d-c))] = d+[a-d] = a$. Logo, $b - c = a - d$.

Exemplo 3.1.2. Todo espaço vetorial V pode ser considerado um espaço afim associado a si mesmo (neste caso $E = V$). Basta definir a soma do ponto $a \in E$ com o vetor $u \in V$ como sendo a soma $a + u$ de elementos de V, dada pela estrutura de espaço vetorial de V.

Exemplo 3.1.3. Seja $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = ax + b\}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O conjunto E é um espaço afim associado ao espaço vetorial $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = ax\}$. De fato, basta definir a soma usando a estrutura de $\mathbb{R}^2$ que é um espaço vetorial. Dessa forma, a condição **(ii)** é satisfeita trivialmente. Para mostrar a condição **(iii)**, note que dado $a = (x_1, v_1)$, $b = (x_2, v_2) \in E$ existe um único vetor $u \in v$ (a saber $u = (x_1 - x_2, a(x_1 - x_2)))$ tal que $b = a + u$.

Exemplo 3.1.4. Sejam $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $E_{a,b} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}$. E é um afim sobre $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$. De fato, V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e E é um conjunto não-vazio. Além disso, a aplicação

$$\begin{array}{lcl} + : & V \times E & \longrightarrow E \\ & ((u_1, \ldots, u_n), (c_1, \ldots, c_n)) & \longmapsto (c_1 + u_1, \ldots, c_n + u_n) \end{array}$$

satisfaz claramente o item **iii)** da definição.

Exemplo 3.1.5. Sejam V, W espaços vetoriais, $b \in W$ e $T : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear. $E = \{x \in V \ / \ T(x) = b\}$ é um espaço afim sobre $\ker T \subseteq V$ desde que, evidentemente, $E \neq \varnothing$. De fato, se esse for o caso, como $\ker T$ é um espaço vetorial e a aplicação

$$\begin{array}{lcl} + : & \ker T \times E & \longrightarrow E \\ & (u, v) & \longmapsto u + v \end{array}$$

satisfaz claramente o item **iii)** da definição o resultado segue. Em particular, se $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$, e $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, $E_{A,b} = \{x \in$

$\mathbb{R}^n \ / \ Ax = b\}$ é o conjunto das soluções do sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

E é o espaço afim sobre o espaço vetorial das soluções do sistema homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

3.2 Sistemas de Coordenadas Afins

Nesta seção, E será um espaço afim de dimensão finita n.

Definição 3.2.1. *Sejam* $a_0 \in E$ *e* $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ *base. A aplicação*

$$\begin{aligned} \varphi_{a_0,B} : \ E &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ a &\longmapsto (x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

tal que $x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = a - a_0$ *é chamado de* sistema de coordenadas afim em E associado *a* a_0 *e* B.

Note que a função $\varphi_{a_0,B} : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é bijetora. De fato, se $\varphi_{a_0,B}(a) = \varphi_{a_0,B}(b)$ então $a - a_0 = b - a_0$. Assim, $a_0 + (a - a_0) = a_0 + (b - a_0)$. Logo, $a = b$. Seja $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Basta tomar $a = a_0 + x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$ e temos $\varphi_{a_0,B}(a) = (x_1, \ldots, x_n)$.

Proposição 3.2.2. *Seja* $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *um sistema de coordenadas afim. Se* $\varphi(a) = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $\varphi(b) = (u_1, \ldots, u_n)$ *então* $a - b = (x_1 - u_1)v_1 + \ldots + (x_n - u_n)v_n$. *Mais ainda: se* $u = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$, *então* $\varphi(a + u) = (x_1 + u_1, \ldots, x_n + u_n)$.

Demonstração: Pelas hipóteses, temos que $a - a_0 = x_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ e $b - a_0 = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$. Como $a - b = (a - a_0) - (b - a_0)$ concluímos que $a - b = (x_1 - u_1)v_1 + \ldots + (x_n - u_n)v_n$. Note também que $a + u = [a_0 + (a - a_0)] + u = a_0 + [(a - a_0) + u]$. Assim, $(a + u) - a_0 = (a - a_0) + u = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n + u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$. Logo, $\varphi(a + u) = (x_1 + u_1, \ldots, x_n + u_n)$.

■

3.3 Mudança de Coordenadas

Sejam $\varphi_{a_0,B} : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi_{a_0',B'}$, com $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $B' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ dois sistemas de coordenadas afins em E. Dado $a \in E$, suponha que $\varphi(a) = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\psi(a) = (x_1', \ldots, x_n')$. Suponha ainda que $\psi(a_0) = (t_1, \ldots, t_n)$. Vamos investigar que relação existe entre esses dois sistemas de coordenadas. Para isso, considere $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ a matriz mudança de base da base B para B', isto é, $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i'$. Assim, como $a - a_0' = (a - a_0) + (a_0 - a_0')$ temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i'v_i' &= \sum_{j=1}^{n} x_jv_j + \sum_{i=1}^{n} t_iv_i' \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i'\right) + \sum_{i=1}^{n} t_iv_i' \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_ja_{ij}\right)v_i' + \sum_{i=1}^{n} t_iv_i'. \end{aligned}$$

Logo,

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + t_i \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

3.4 Transformações Afins

Definição 3.4.1. *Sejam E_1 e E_2 espaços afins associados, respectivamente, aos espaços vetoriais V_1 e V_2. Uma aplicação $f : E_1 \longrightarrow E_2$ é uma* transformação afim *se existe um ponto $a \in E_1$ e $T_f : V_1 \longrightarrow V_2$ aplicação linear tal que $f(a+u) = f(a)+T_f(u)$.*

Proposição 3.4.2. *Se $f : E_1 \longrightarrow E_2$ é uma aplicação afim como na Definição 3.4.1, a aplicação linear $T_f : V_1 \longrightarrow V_2$ não depende da escolha do ponto $a \in E_1$, e de fato é a única tal que $f(c+u) = f(c) + T_f(u)$, para todo $u \in V_1$, e para todo $c \in E_1$.*

Demonstração: Tome $b \in E_1$ e defina $T'_f : V_1 \longrightarrow V_2$ linear tal que $f(b+u) = f(b) + T'_f(u)$, para todo $u \in V_1$. Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned} f(b+u) &= f([a+(b-a)]+u) \\ &= f(a) + T_f((b-a)+u) \\ &= f(a) + T_f(b-a) + T_f(u) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f(b) + T'_f(u) &= f(a+(b-a)) + T'_f(u) \\ &= f(a) + T_f(b-a) + T'_f(u) \\ &= f(a) + T_f(b-a) + T'_f(u) \end{aligned}$$

Logo, $T_f(u) = T'_f(u), \quad \text{para todo} \quad u \in V_1$.

Além disso, para todo $c \in E_1$, e para todo $u \in V_1$, $f(c+u) = f(a+(c-a)+u) = f(a)+(T_f(c-a)+u) = f(a)+T_f(c-a)+T_f(u) = f(a+(c-a))+T_f(u) = f(c)+T_f(u)$.

■

Observação: $T_f : V_1 \longrightarrow V_2$ denomina-se aplicação linear *associada* à aplicação afim $f : E_1 \longrightarrow E_2$.

Exemplo 3.4.3. Seja E um espaço afim associado ao espaço vetorial V. Fixe $w \in V$ e defina $t_w : E \longrightarrow E$ tal que $t_w(a) = a + w$. t_w é uma transformação afim de E em E cuja aplicação linear associada é a função identidade de V ($I : V \longrightarrow V$ tal que $I(u) = u$). De fato, dado $a \in E$ temos que $t_w(a+u) = t_w(a) + T_{t_w}(u) = (a+u) + w =$

$a + (u + w) = a + (w + u) = (a + w) + u = t_w(a) + u$, para todo $v \in V$. Logo, $T_{t_w}(u) = u$ para todo $u \in V$. Toda operação $t_w : E \longrightarrow E$ com $w \in V$ como acima é dita ser uma *translação*. Em particular, a translação de vetor nulo ($w = 0$), isto é, a *aplicação identidade de E, é uma aplicação afim.*

Exemplo 3.4.4. Fixados $b \in E$ e $k \in \mathbb{R}$, a aplicação $f : E \longrightarrow E$ tal que $f(a) = b + k(a - b)$ é transformação afim cuja aplicação linear associada é $T_f : V \longrightarrow V$ tal que $T_f(u) = ku$. Com efeito, temos que $f(a + u) = b + k[(a + u) - b] = b + k(a - b) + ku = f(a) + ku$, para todo $u \in V$. Logo, $T_f(u) = ku$, para todo $u \in V$. Esse exemplo é denominado *homotetia de centro b e razão k.*

Exemplo 3.4.5. Dados $b, c \in E$ e uma aplicação linear $T : V \longrightarrow V$, a aplicação $f_T : E \longrightarrow E$ definida por $f_T(a) = c + T(a - b)$ é uma transformação afim tal que $f_T(b) = c$ e cuja aplicação linear associada é T. De fato, temos que $f_T(a + u) = c + T[(a + u) - b] = c + T(a - b) + T(u) = f_T(a) + T(u)$, para todo $u \in V$.

Exemplo 3.4.6. Sejam $a_0 \in E$ e $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ base. O sistema de coordenadas afim em E

$$\begin{aligned} \varphi_{a_0,\beta} : \ & E \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & a \longmapsto (x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

tal que $x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = a - a_0$ é uma transformação afim tal que

$$\begin{aligned} T_{\varphi_{a_0,\beta}} : \ & V \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & u \longmapsto (y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

com $u = y_1v_1 + \ldots, y_nv_n$ é aplicação linear associada. De fato, seja $a \in E$ e $u = y_1v_1 + \ldots + y_nv_n \in V$. Sendo assim, temos que $\varphi_{a_0,\beta}(a + u) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = \varphi_{a_0,\beta}(a) + T_{\varphi_{a_0,\beta}}(u)$, pela Proposição 3.2.2.

Proposição 3.4.7. *Uma transformação afim $f : E_1 \longrightarrow E_2$ será injetora, sobrejetora ou bijetora se e somente se $T_f : V_1 \longrightarrow V_2$ for, respectivamente, injetora, sobrejetora ou bijetora.*

Demonstração: Injetividade:($\Rightarrow$) Suponha que $f : E_1 \longrightarrow E_2$ seja injetora. Sejam $a \in E_1$ e $u \in V_1$, com $T_f(u) = 0$. Assim, $f(a + u) = f(a) + T_f(u) = f(a)$. Como f é injetora, temos que $a = a + u$, ou seja, $u = 0$. Logo, $T_f : V_1 \longrightarrow V_2$ é injetora.
($\Leftarrow$) Suponha que $T_f : V_1 \longrightarrow V_2$ seja injetora. Sejam $a, b \in E_1$ com $a \neq b$. Pela condição **(iii)** da definição de espaço afim existe um único vetor $u \in V_1$ tal que $b = a+u$. Assim, temos que $f(b) = f(a) + T_f(u)$. Como $a \neq b$ então $u \neq 0$ e portanto $T_f(u) \neq 0$ pois, por hipótese, $T_f : V_1 \longrightarrow V_2$ é injetora. Logo, $f(b) \neq f(a)$ e o resultado segue.
Sobrejetividade: ($\Rightarrow$) Suponha que $f : E_1 \longrightarrow E_2$ seja sobrejetora. Escolha $c \in E_2$ e seja $w \in V_2$. Como $f : E_1 \longrightarrow E_2$ é sobrejetora, então existem $a, b \in E_1$ tais que $f(a) = c$ e $f(b) = c + w$. Mas, $f(b) = f(a) + T_f(b - a)$, isto é, $c + w = c + T_f(b - a)$. Portanto, $T_f(b - a) = w$. Logo, $T_f : V_1 \longrightarrow V_2$ é sobrejetora.
($\Leftarrow$) Suponha que $T_f : V_1 \longrightarrow V_2$ seja sobrejetora. Fixe $a \in E_1$. Para todo $b \in E_2$, existe $v \in V_1$ tal que $T_f(v) = b - f(a)$. Sendo assim, temos que $f(a) + T_f(v) = b$, isto é, $f(a + v) = b$. Logo, $f : E_1 \longrightarrow E_2$ é sobrejetora.

■

Proposição 3.4.8. *Se $f : E_1 \longrightarrow E_2$ e $g : E_2 \longrightarrow E_3$ são transformações afins cujas aplicações lineares associadas são respectivamente, $T_f : V_1 \longrightarrow V_2$ e $T_g : V_2 \longrightarrow V_3$ então $(g_\circ f) : E_1 \longrightarrow E_3$ é transformação afim, cuja aplicação linear associada é $T_{g_\circ f} \equiv T_g \circ T_f$.*

Demonstração: Para todos $a \in E_1$ e $u \in V_1$, $g_\circ f(a + u) = g(f(a) + T_f(u)) = g_\circ f(a) + T_g \circ T_f(u)$, e o resultado segue pela unicidade de $T_{g \circ f}$.

■

Proposição 3.4.9. *Se $f : E_1 \longrightarrow E_2$ é uma aplicação afim bijetora então $f^{-1} : E_2 \longrightarrow E_1$ é também uma aplicação afim cuja aplicação linear associada é igual a $T^{-1} : V_2 \longrightarrow V_1$.*

Demonstração: Lembre que T_f é bijetora, pois f o é. Sejam $a \in E_2$ e $u \in V_2$. Temos que $f(f^{-1}(a) + T_f^{-1}(u)) = f \circ f^{-1}(a) + T_f \circ T_f^{-1}(u) = a + u$ e aplicando f^{-1} a ambos os lados dessa igualdade, vem que $f^{-1}(a) + T_f^{-1}(u) = f^{-1}(a + u)$.

■

3.5 O Grupo Afim

Dado um espaço afim E, existe naturalmente um grupo[1] de permutações de E que preserva a estrutura afim.

Definição 3.5.1. *Seja E um espaço afim associado a um espaço vetorial V. O conjunto $G(E) = \{f : E \longrightarrow E : \ f$ é bijeção afim$\}$ é um grupo com relação à operação de composição e é denominado* **grupo afim** *de E.*

Observação: De fato, que $G(E)$ é um grupo é consequência imediata das Proposições 3.4.8 e 3.4.9.

Um ponto fundamental é que o grupo afim de um espaço afim qualquer de dimensão n é isomorfo ao grupo afim do $\mathbb{R}^n$ (visto como espaço afim sobre si próprio) mediante a escolha de uma sistema de coordenadas afim. É o que mostraremos agora.

Proposição 3.5.2. *Sejam E um espaço afim de dimensão n e $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas afim. A aplicação*

$$\begin{aligned} j: \ G(E) &\longrightarrow G(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos.

[1] Doravante utilizaremos livremente os conceitos básicos de teoria de grupos. Esses conceitos serão introduzidos brevemente no Apêndice A.

Demonstração: Primeiramente, note que j está bem definida. De fato, $\varphi_\circ f_\circ \varphi^{-1}$ é uma bijeção afim de $\mathbb{R}^n$, de acordo com as Proposições 3.4.8 e 3.4.9. Note que $j : G(E) \longrightarrow G(\mathbb{R}^n)$ é um homomorfismo de grupos. Com efeito, sejam $g, h \in G(E)$. Assim, $j(g_\circ h) = \varphi_\circ (g_\circ h)_\circ \varphi^{-1} = \varphi_\circ (g_\circ \varphi_\circ^{-1} \varphi_\circ h)_\circ \varphi^{-1} = (\varphi_\circ g_\circ \varphi^{-1})_\circ (\varphi_\circ h_\circ \varphi^{-1}) = j(g)_\circ j(h)$. Logo, $j : G(E) \longrightarrow G(\mathbb{R}^n)$ é homomorfismo. Para provar que é um isomorfismo, basta encontrar a aplicação inversa de $j : G(E) \longrightarrow G(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, seja

$$\begin{array}{rll} l: & G(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow G(E) \\ & g & \longmapsto \varphi_\circ^{-1} g_\circ \varphi \end{array}$$

temos que $j(l(g)) = \varphi_0(\varphi_0^{-1} g_0 \varphi)\varphi^{-1} = (\varphi_0 \varphi^{-1})_0 g_0 (\varphi_0 \varphi^{-1}) = g$, para todo $g \in G(\mathbb{R}^n)$. Analogamente, para todo $f \in G(E)$ temos que $l(j(f)) = f$. Logo, $l : G(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G(E)$ é a aplicação inversa de $j : (E) \longrightarrow G((\mathbb{R}^n))$ e o resultado segue.

■

Nosso próximo passo é a obtenção do grupo afim do $\mathbb{R}^n$, que será de importâcia nos próximos Capítulos.

Teorema 3.5.3. $G(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n / \ f(x) = Ax + b,$ *com* A *matriz* $n \times n$ *invertível e* $b \in \mathbb{R}^n\}$.

Demonstração: Primeiramente, note que o conjunto ao lado direito da igualdade é um grupo por composição. De fato, a aplicação identidade $i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ pertence ao conjunto; se

$$\begin{array}{rll} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto Ax + b \end{array}$$

pertence ao conjunto então

$$\begin{array}{rll} f^{-1}: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto A^{-1}x + A^{-1}b \end{array}$$

também pertence e se

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto Ax+b \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} g: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto A'x+b' \end{aligned}$$

pertencem ao conjunto então

$$\begin{aligned} f\circ g: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto AA'x+Ab'+b \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} g\circ f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto A'Ax+A'b+b' \end{aligned}$$

também pertencem ao conjunto. Como a composição é associativa, concluímos que o conjunto é um grupo. Agora vamos provar a igualdade dos conjuntos. Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = Ax + b$ como no enunciado. Reescrevendo a igualdade, temos que $f(0 + x) = f(0) + T_{f(x)}$ em que $f(0) = b$ e

$$\begin{aligned} T_f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Logo, f pertence ao $G(\mathbb{R}^n)$. Seja $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ pertencente ao $G(\mathbb{R}^n)$. Sendo assim, existe $T_g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bijetora tal que $g(x) = g(0) + T_g(x)$. Escreva $b = g(0)$ e defina A como sendo a matriz (na base canônica por exemplo) associada a $T_g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Logo, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ pertence ao conjunto do lado direito e o resultado segue.

■

Teorema 3.5.4. *$G(\mathbb{R}^n)$ é isomorfo a $GL(n) \rtimes \mathbb{R}^n$ (produto semidireto).*

Demonstração: Basta mostrar que a função

$$\begin{aligned} \psi: G(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \rtimes GL(n) \\ f_{A,b} &\longmapsto (b, A) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Note que essa função está bem definida. De fato, sejam

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto Ax+b \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} g: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto A'x+b' \end{aligned}$$

tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular, $f(0) = g(0)$ e $f(e_i) = g(e_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Logo, $b = b'$ e $A = A'$, isto é, $\psi(f_{A,b}) = \psi(g_{A',b'})$. Claramente, ψ é um homomorfismo. Tome $f_{A,b}, g_{A',b'} \in G(\mathbb{R}^n)$. Pelo teorema anterior, temos que $\psi(f_{A,b} \circ g_{A',b'}) = (Ab' + b, AA') = (b, A) \rtimes (b', A') = \psi(f_{A,b}) \rtimes \psi(g_{A',b'})$.

■

Capítulo 4

Espaços - Tempo Newtonianos

O tema principal deste capítulo são os espaços-tempo Newtonianos. As aplicações Galileanas e a caracterização do grupo Galileano também são feitas aqui.

4.1 Estruturas Galileanas

Definição 4.1.1. *Uma* estrutura Galileana *em um espaço afim E de dimensão n (associado a um espaço vetorial V) é um par $(\tau, \langle , \rangle)$ em que:*

i) $\tau : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear não-nulo;

ii) $\langle , \rangle$ é um produto interno no núcleo de τ.

Definição 4.1.2. *Um* espaço-tempo Newtoniano *é um espaço afim E de dimensão $n \geq 2$ munido de uma estrutura Galileana.*

Os elementos de E são chamados *eventos*, $\tau : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamado *tempo* e a norma associada a $\langle , \rangle$ é dita *distância*.

Exemplo 4.1.3. Sejam $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^{n+1}$ e $+ : V \times E \longrightarrow E$ dada por $(t, x_1, \ldots, x_n) + (v_0, \ldots, v_n) = (t + v_0, \ldots, x_n + v_n)$. Nessas condições, E é um espaço afim de dimensão $n+1$. Considere também $\tau_0 : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tau_0(v_0, \ldots, v_n) = v_0$

e $\langle , \rangle_0 : \ker \tau_0 \times \ker \tau_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $\langle (0, v_1, \ldots, v_n), (0, w_1, \ldots, w_n) \rangle_0 = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$. Com essas definições, $(\tau, \langle , \rangle)$ é uma estrutura Gelileana e portanto $(E, \tau, \langle , \rangle)$ é um espaço tempo Newtoniano. De fato, basta notar que $\tau_0 : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear(projeção), $\ker \tau_0 = \{(0, u_1, \ldots, u_n)/u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}\}$ e $\langle , \rangle_0 : \ker \tau_0 \times \ker \tau_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ é (essencialmente) o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Observação: Ao longo deste Capítulo, assumiremos em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a estrutura Galileana e afim do Exemplo 4.1.3.

4.2 Aplicações Galileanas

Definição 4.2.1. *Sejam $(E_1, \tau, \langle , \rangle)$ e $(E_2, \rho, \ll, \gg)$ espaços-tempo Newtonianos. Uma* aplicação Galileana *é uma função $f : E_1 \longrightarrow E_2$ tal que:*

i) $f : E_1 \longrightarrow E_2$ é uma transformação afim;

ii) $\rho \circ T_f = \tau$ em que $T_f : V_1 \longrightarrow V_2$ é a aplicação linear associada a aplicação afim;

iii) $\ll T_f(v), T_f(w) \gg = \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in \ker \tau$.

Uma aplicação Galileana bijetora é chamado *isomorfismo Galileano.*

Exemplo 4.2.2. Sejam $(E, \tau, \langle , \rangle)$ um espaço-tempo Newtoniano com E espaço afim sobre o espaço vetorial V, e $w \in V$. A translação do vetor w isto é, $t_w : E \longrightarrow E$ tal que $t_w(a) = a + w$ para todo $a \in E$ é uma aplicação Galileana. De fato, já vimos que $T_{t_w} : V \longrightarrow V$ é a função identidade.

Proposição 4.2.3. *Sejam $(E_1, \tau, \langle , \rangle)$, $(E_2, \rho, \ll, \gg)$ e $(E_3, \delta, (,))$ espaços-tempo Newtonianos. Se $f : E_1 \longrightarrow E_2$ e $g : E_2 \longrightarrow E_3$ são aplicações Galileanas então $(g \circ f) : E_1 \longrightarrow E_3$ também é uma aplicação Galileana.*

Demonstração: i) Provamos no Capítulo 2 que $(g \circ f) : E_1 \longrightarrow E_3$ é uma transformação afim cuja aplicação linear associada é a composta das aplicações lineares associadas a $f : E_1 \longrightarrow E_2$ e a $g : E_2 \longrightarrow E_3$.

ii) $\delta \circ (T_g \circ T_f) = (\delta \circ T_g) \circ T_f = \rho \circ T_f = \tau$.

iii) $((T_g(T_f(v)), T_g(T_f(w))) = \ll T_f(v), T_f(w) \gg = \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in \ker \tau$.

$\blacksquare$

Proposição 4.2.4. *Sejam $(E_1, \tau, \langle, \rangle)$ e $(E_2, \rho, \ll, \gg)$ espaços-tempo Newtonianos. Se $T : E_1 \longrightarrow E_2$ é um isomorfismo Galileano então $T^{-1} : E_2 \longrightarrow E_1$ também é um isomorfismo Galileano.*

Demonstração: **i)** Provamos no Capítulo 2 que $T^{-1} : E_2 \longrightarrow E_1$ é uma transformação afim bijetora cuja aplicação linear associada é a inversa da aplicação linear associada a $T : E_1 \longrightarrow E_2$.

ii) $\tau \circ f_{T^{-1}} = (\rho \circ f_T) \circ f_{T^{-1}} = \rho \circ (f_T \circ f_{T^{-1}} = \rho$.

iv) $\langle T_{f^{-1}}(v), T_{f^{-1}}(w) \rangle = \ll T_f(T_{f^{-1}}(v)), T_f(T_{f^{-1}}(w)) \gg = \ll v, w \gg$ para todo $v, w \in \ker \rho$.

$\blacksquare$

4.3 Sistema de Coordenadas Galileano

Definição 4.3.1. *Seja $(E, \rho, \ll, \gg)$ um espaço-tempo Newtoniano de dimensão $n+1$. Sejam dados:*

i) Uma base $\beta = \{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ de V, em que $\rho(e_0) = 1$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é base ortonormal de $\ker \rho$.

ii) Um ponto $a_0 \in E$.

O sistema de coordenadas Galileano associado a β e a_0 *é*

$$\begin{aligned} \varphi_{a_0\beta} : \quad E &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ a &\longmapsto ((a - a_0)_0, \ldots, (a - a_0)_n) \end{aligned}$$

em que $(a - a_0)_i$ é a i-ésima componente do vetor $a - a_0$ com respeito à base β $(0 \leq i \leq n)$.

Proposição 4.3.2. *O sistema de coordenadas Galileano associado a β e a_0 é uma bijeção Galileana.*

Demonstração: Escreva $\varphi \equiv \varphi_{a_0\beta}$. Primeiramente, vamos provar que a função

$$\begin{aligned} \varphi: \quad E &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ a &\longmapsto ((a-a_0)_0, \ldots, (a-a_0)_n) \end{aligned}$$

é uma bijeção. De fato, se $\varphi(a) = \varphi(b)$ então $a-a_0 = b-a_0$. Assim, $a_0+(a-a_0) = a_0+(b-a_0)$. Logo, $a = b$. Seja $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Basta tomar $a = a_0+x_0e_0+\ldots+x_ne_n$ e obteremos $\varphi(a) = (x_0, \ldots, x_n)$.
i) $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é uma transformação afim. Com efeito, já vimos no Capítulo 2 que se $\varphi(a) = (x_0, \ldots, x_n)$ e $u = u_0e_0 + \ldots + u_ne_n$ então $\varphi(a+u) = (x_0u_0, \ldots, x_nu_n) = \varphi(a) + T_\varphi(u)$ em que

$$\begin{aligned} T_\varphi: \quad V &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ u &\longmapsto (u_0, \ldots, u_n). \end{aligned}$$

Como T_φ é uma transformação linear, concluímos que φ é uma transformação afim.
ii) Considere o espaço-tempo Newtoniano $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tau, \langle,\rangle)$. Sendo assim, temos que $\tau \circ T_\varphi(u) = \tau(T_\varphi(u)) = \tau(u_0, \ldots, u_n) = u_0$ e $\rho(u) = \rho(u_0e_0, \ldots, u_ne_n) = u_0\rho(e_0) + \ldots + u_n\rho(e_n) = u$, para todo u e para todo v. Logo, $\tau \circ f_\varphi = \varphi$.
iii) $\langle f_\varphi(v), f_\varphi(w)\rangle = \langle(0, v_1, \ldots, v_n), (0, w_1, \ldots, w_n)\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{j=i}^{n} v_iw_j\langle e_i, e_j\rangle) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_iw_i.$

■

4.4 O Grupo Galileano

Com base nos resultados obtidos, podemos obter o grupo das transformações que preserva a estrutura Galileana.

Definição 4.4.1. *Seja $(E, \tau, \langle,\rangle)$ um espaço tempo Newtoniano de dimensão $n+1$. O conjunto $G(E) = \{T : E \longrightarrow E \ / \ T$ é isomorfismo Galileano$\}$, que é um grupo com relação a operação de composição, é denominado* grupo Galileano *de E.*

A caracterizaçãodo grupo Galileano é facilitada pelo fato do grupo Galileano de um espaço tempo Newtoniano qualquer ser isomorfo ao grupo Galileano de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ mediante a uma escolha de um sistema de coordenadas Galileano. É o que mostraremos agora.

Proposição 4.4.2. *Sejam $G(E)$ o grupo Galileano de um espaço-tempo Newtoniano $(E, \tau, \langle,\rangle)$ de dimensão $n+1$, $G(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ o grupo Galileano de $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \tau_0, \langle,\rangle_0)$ e $\varphi_{a_0,\beta} : E \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas Galileana em $(E, \tau, \langle,\rangle)$. A aplicação*

$$\begin{aligned} j: \ G(E) &\longrightarrow G(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto \varphi\circ f\circ\varphi^{-1} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos.

Demonstração: Note que pelas Proposições 4.2.3 e 4.2.4, j está bem definida. Primeiramente, mostraremos que $j : G(E) \longrightarrow G(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ é um homomorfismo de grupos. De fato, sejam $f, g \in G(E)$. Assim, $j(f\circ g) = \varphi\circ(f\circ g)\circ\varphi^{-1} = \varphi\circ(f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ g)\circ\varphi^{-1} = (\varphi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ g\circ\varphi^{-1}) = j(f)\circ j(g)$. Logo, $j : G(E) \longrightarrow G(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ é homomorfismo. Para provar que é isomorfismo, basta encontrar a aplicação inversa de $j : G(E) \longrightarrow G(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. Com efeito, seja

$$\begin{aligned} l: \ G(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) &\longrightarrow G(E) \\ g &\longmapsto \varphi^{-1}\circ g\circ\varphi \end{aligned}$$

Para todo $g \in G(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ temos que $j(l(g)) = \varphi\circ(\varphi^{-1}\circ g\circ\varphi)\circ\varphi^{-1} = (\varphi\circ\varphi^{-1})\circ g\circ(\varphi\circ\varphi^{-1}) = g$. Analogamente, para todo $f \in G(E)$ temos que $l(j(f)) = f$. Logo, $l : G(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \longrightarrow G(E)$ é uma aplicação inversa de $j : G(E) \longrightarrow G(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ e o resultado segue.

■

Nosso próximo passo é a obtenção do grupo Galileano de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

Definição 4.4.3. *Sejam* $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \tau_0, \langle,\rangle)$ *espaço-tempo Newtoniano,* $s_0 \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{s} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ *e* $A \in 0(n) = \{B \in M(n,n) \ / \ B\cdot B^t = 1\}$. *As aplicações*

$$\begin{array}{rll} g_1: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ & (t,\overrightarrow{x}) & \longmapsto (t+s_0, \overrightarrow{x}+\overrightarrow{s}) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rll} g_2: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ & (t,\overrightarrow{x}) & \longmapsto (t, \overrightarrow{x}+t\overrightarrow{v}) \end{array} \quad e$$

$$\begin{array}{rll} g_3: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ & (t,\overrightarrow{x}) & \longmapsto (t, A\overrightarrow{x}) \end{array}$$

são denominadas, respectivamente, translações, "boosts"Galileanos e transformações ortogonais.

Proposição 4.4.4. *Seja* $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *uma aplicação Galileana. Então, existem* $g_1,\ g_2,\ g_3 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *tais que* $g = g_1\circ g_2\circ g_3$.

Demonstração: Seja $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ uma aplicação Galileana. Sendo assim, g é afim. Então, existe $M \in GL(n+1)$ e $(s_0, \overrightarrow{s}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ tal que $g(t,\overrightarrow{x}) = M\begin{pmatrix} t \\ \overrightarrow{x}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_0 \\ \overrightarrow{s}\end{pmatrix}$. Portanto, $g(t,\overrightarrow{x}) = g_1\left(M\begin{pmatrix} t \\ \overrightarrow{x}\end{pmatrix}\right)$. Vamos analisar agora $M\begin{pmatrix} t \\ \overrightarrow{x}\end{pmatrix}$. Escrevendo $M = [m_{ij}]\ 0 \le i,j \le n$, temos que:

$$M\begin{pmatrix} t \\ \overrightarrow{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00}t & + & \sum_{j=1}^{n} m_{0j}x_j \\ m_{10}t & + & \sum_{j=1}^{n} m_{1j}x_j \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n0}t & + & \sum_{j=1}^{n} m_{nj}x_j \end{pmatrix}.$$

Pelo fato de g ser Galileana, temos $\tau_0 \circ T_g = \tau_0$ onde

$$\begin{array}{rll} T_g: & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ & (x_0,\ldots,x_n) & \longmapsto M\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}. \end{array}$$

Portanto, para todo $(t, \overrightarrow{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $m_{00}t + \sum_{j=1}^{n} m_{0j}x_j = t$. Logo, $m_{00} = 1$ e $m_{0j} = 0$ para todo j, $1 \leq j \leq n$. Denotamos $v_i := m_{i0}$, $1 \leq i \leq n$, concluímos que M é da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_1 & m_{11} & & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ v_n & m_{n1} & & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

Chame de A a matriz $\begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$. Sendo assim, temos que $M \begin{pmatrix} t \\ \overrightarrow{x} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ v_1 t \\ \vdots \\ v_n t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ A\overrightarrow{x} \end{pmatrix} = g_2 \left(\begin{pmatrix} t \\ A\overrightarrow{x} \end{pmatrix} \right)$. Portanto, $g(t, \overrightarrow{x}) = g_1 \left(g_2 \begin{pmatrix} t \\ A\overrightarrow{x} \end{pmatrix} \right)$.

Basta mostrar agora que $A \in 0(n)$. Como g é Galileana, para todo $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, $\langle T_g(0, \overrightarrow{x}), T_g(0, \overrightarrow{y}) \rangle = \langle (0, \overrightarrow{x}), (0, \overrightarrow{y}) \rangle$. Portanto, $\langle A\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{y} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle_{\mathbb{R}^n}$. Então, $(\overrightarrow{x})^T A^T A \overrightarrow{y} = (\overrightarrow{x})^T \overrightarrow{y}$ para todo $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Assim, $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i c_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Portanto, $c_{ij} = \delta_{ij}$, ou seja, $A \in 0(n)$. Logo, $g(t, \overrightarrow{x}) = g_1 \left(g_2 \left(g_3 \begin{pmatrix} t \\ \overrightarrow{x} \end{pmatrix} \right) \right)$.

■

Definição 4.4.5. *Seja G um grupo e $X \subseteq G$. O subgrupo gerado por X é $\langle X \rangle = \cap \{H \subseteq G, H$ subgrupo e $X \subseteq H\}$.*

Proposição 4.4.6. *Dado $X = \{(g_1) \ / \ s_0 \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{s} \in \mathbb{R}^n\} \cup \{(g_2) \ / \ \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n\} \cup \{(g_3) \ / \ A \in 0(n)\}$, então o grupo Galileano do $\mathbb{R}^{n+1}$ é o subgrupo do grupo afim de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gerado por X.*

Demonstração: Seja $G_0 = \{g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ / \ g$ é aplicação Galileana$\}$ e defina $H = \{g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ / \ g = g_1 \circ g_2 \circ g_3\}$. Afirmação: $H = G_0$. De fato, $H \subseteq G_0$ é óbvio pois composição de aplicações Galileanas ainda é uma aplicação

Galileana. Seja, $g \in G_0$. Pela proposição anterior, vimos que toda transformação Galileana pode ser escrita como composição de g_1, g_2 e g_3. Portanto, $g \in H$. Logo, $H = G_0$. Basta mostrar agora que $H = \langle X \rangle$. De fato, $\{(g_1) \ / \ s_0 \in \mathbb{R}, \overrightarrow{s} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq H$ (Tome $\overrightarrow{v} = 0$ e $A = I$). $\{(g_2) \ / \ \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq H$ (tome $s_0 = 0$, $\overrightarrow{s} = 0$ e $A = I$) e $\{(g_3) \ / \ A \in 0(n)\} \subseteq H$ (tome $s_0 = 0$, $\overrightarrow{s} = 0$ e $\overrightarrow{v} = 0$). Logo, $X \subseteq H$. Seja H' um subgrupo do grupo afim de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tal que $X \subseteq H'$. Pelo fato de H' ser grupo, concluímos que $H \subseteq H'$. Logo, $\langle X \rangle = H$, ou seja, $\langle X \rangle = G_0$.

$\blacksquare$

Capítulo 5

Espaços - Tempo de Minkowski

Estudaremos neste Capítulo os Espaços-tempo de Minkowski, de fundamental importância na Relatividade Especial.

Adotaremos a seguinte notação: Se E é um espaço afim, V_E denotará seu espaço vetorial associado.

5.1 Propriedades Básicas

Definição 5.1.1. *Um* espaço-tempo de Minkowski $(n+1)$*-dimensional* [1] *é um par* (M, g) *em que* M *é um espaço afim de dimensão* $n+1$ *e* g *é uma forma bilinear simétrica não-degenerada Lorentziana sobre* V_M. *Os elementos de* M *são chamados* eventos.

Exemplo 5.1.2. Sejam $M = \mathbb{R}^{n+1}$, $V_M = \mathbb{R}^{n+1}$ e

$$\begin{array}{rcl} g_0 : & \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & ((x_0, \ldots, x_n), (y_0, \ldots, y_n)) & \longmapsto -x_0 y_0 + \ldots + x_n y_n. \end{array}$$

O par $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ é um espaço-tempo de Minkowski $(n+1)$- dimensional. A verificação

[1] A utilização da dimensão $n+1$ é uma mera conveniência, pois espaços-tempo de Minkowski devem ter dimensão maior que ou igual a 2.

é imediata.

Definição 5.1.3. *Sejam* (M, g) *e* $N, h)$ *espaços-tempo de Minkowski. Uma aplicação* $f : M \longrightarrow N$ *é dita ser uma* imersão isométrica *se é afim e* $T_f : V_M \longrightarrow V_N$ *é uma isometria linear.*

Exemplo 5.1.4. Sejam (M, g) um espaço-tempo de Minkowski $(n+1)$-dimensional, $\beta = \{e_0, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de V_M, $a_0 \in M$ e $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ como no exemplo anterior. A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_{a_0,\beta} : \quad M &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ m &\longmapsto ((m-a_0)_0, \ldots, (m-a_0)_n). \end{aligned}$$

é uma imersão isométrica. De fato, a transformação linear associada a $\varphi_{a_0,\beta}$ é

$$\begin{aligned} T_{\varphi_{a_0,\beta}} : \quad V_M &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ v = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i &\longmapsto (x_0, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Além disso, dados $v = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i$ e $w = \sum_{i=0}^{n} y_i e_i \in V_M$, $g_0(T_{\varphi_{a_0,\beta}}(v), T_{\varphi_{a_0,\beta}}(w)) = g_0((x_0, \ldots, x_n), (y_0, \ldots, y_n)) = -x_0 y_0 + \sum_{i=0}^{n} x_i y_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} x_i y_j g(e_i, e_j) \right) = g(v, w)$.
A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_{a_0,\beta} : \quad M &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ m &\longmapsto ((m-a_0)_0, \ldots, (m-a_0)_n). \end{aligned}$$

é chamada *sistema de coordenadas de Minkowski (ou inercial) associado a* a_0 *e* β em M.

Proposição 5.1.5. *Toda imersão isométrica é injetora.*

Demonstração: Sejam (M, g) e (N, h) espaços-tempo de Minkowski e $f : M \longrightarrow N$ uma imersão isométrica. Como $T_f : V_M \longrightarrow V_N$ é isometria linear e toda isometria linear é injetora, então $f : N \longrightarrow N$ é injetora.

■

Observação: Quando uma imersão isométrica $f : M \longrightarrow N$ é também sobrejetora, então $f : M \longrightarrow N$ é dita ser uma *isometria.*

Proposição 5.1.6. *Sejam (M, g), (N, h) e (Q, l) espaços-tempo de Minkowski. Se $f : M \longrightarrow N$ e $f' : N \longrightarrow Q$ são isometrias então $f' \circ f : M \longrightarrow Q$ também é isometria.*

Demonstração: Como $T_f : V_M \longrightarrow V_N$ e $T'_f : V_N \longrightarrow V_Q$ são isometrias lineares então sabemos que $T_{f' \circ f} : V_M \longrightarrow V_Q$ também é isometria linear. Além disso, $f' \circ f : M \longrightarrow N$ é uma transformação afim bijetora pois é composição de transformações afins bijetoras. Logo, $f' \circ f : M \longrightarrow Q$ é uma isometria.

■

Proposição 5.1.7. *Sejam (M, g), (N, h) espaços-tempo de Minkowski. Se $f : M \longrightarrow N$ é uma isometria então $f^{-1} : N \longrightarrow M$ também é isometria.*

Demonstração: Como $T_f : V_M \longrightarrow V_N$ é isometria linear então sabemos que $T_{f^{-1}} : V_N \longrightarrow V_M$ também é isometria linear. Além disso, $f^{-1} : N \longrightarrow M$ é transformação afim. Logo, $f^{-1} : N \longrightarrow M$ é uma isometria.

■

5.2 O Grupo de Poincaré

Definição 5.2.1. *Seja (M, g) um espaço-tempo de Minkowski. O conjunto $Iso(M, g) := \{f : M \longrightarrow M \ / \ f$ é isometria$\}$ é chamado* grupo de isometrias *de (M, g).*

O grupo de isometrias de um espaço-tempo de Minkowski $n+1$ dimensional qualquer é isomorfo ao grupo de isometrias de $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ mediante a uma escolha de um sistema de coordenadas de Minkowski. É o que veremos agora.

Proposição 5.2.2. *Sejam $Iso(M, g)$ o grupo de isometrias de um espaço-tempo de Minkowski $n+1$ dimensional qualquer, $Iso(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ o grupo de isometrias de $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ e $\varphi_{a_0,\beta} : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ um sistema de coordenadas de Minkowski. A aplicação*

$$\begin{array}{rll} j: & Iso(M, g) & \longrightarrow Iso(\mathbb{R}^{n+1}, g_0) \\ & f & \longmapsto \varphi_{a_0,\beta} \circ f \circ \varphi_{a_0,\beta}^{-1} \end{array}$$

é um isomorfismo de grupos.

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que $j : Iso(M, g) \longrightarrow Iso(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ é um homomorfismo de grupos. De fato, sejam $f, g \in Iso(M, g)$. Assim, $j(g \circ f) = \varphi_{a_0,\beta} \circ (g \circ f) \circ \varphi_{a_0,\beta}^{-1} = \varphi_{a_0,\beta} \circ (g \circ \varphi_{a_0,\beta}^{-1} \circ \varphi_{a_0,\beta} \circ f) \circ \varphi_{a_0,\beta}^{-1} = (\varphi_{a_0,\beta} \circ g \circ \varphi_{a_0,\beta}^{-1}) \circ (\varphi_{a_0,\beta} \circ f \circ \varphi_{a_0,\beta}^{-1}) = j(g) \circ j(f)$. Logo, $j : Iso(M, g) \longrightarrow Iso(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ é um homomorfismo. Para provar que é um isomorfismo, basta encontrar a aplicação inversa de $j : Iso(M, g) \longrightarrow Iso(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$. Com efeito, seja

$$\begin{array}{rll} l: & Iso(\mathbb{R}^{n+1}, g_0) & \longrightarrow Iso(M, g) \\ & h & \longmapsto \varphi_{a_0,\beta}^{-1} \circ h \circ \varphi_{a_0,\beta} \end{array}$$

para todo $h \in Iso(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ temos que $j(l(h)) = \varphi_{a_0,\beta} \circ (\varphi_{a_0,\beta}^{-1} \circ h \circ \varphi_{a_0,\beta}) \circ \varphi_{a_0,\beta}^{-1} = (\varphi_{a_0,\beta} \circ \varphi_{a_0,\beta}^{-1}) \circ h \circ (\varphi_{a_0,\beta} \circ \varphi_{a_0,\beta}^{-1}) = h$. Analogamente, para todo $f \in Iso(M, g)$ temos $l(j(f)) = f$. Logo,

$$\begin{array}{rll} j: & Iso(M, g) & \longrightarrow Iso(\mathbb{R}^{n+1}, g_0) \\ & f & \longmapsto \varphi_{a_0,\beta} \circ f \circ \varphi_{a_0,\beta}^{-1}. \end{array}$$

é um isomorfismo.

■

Definição 5.2.3. *O conjunto $Iso(\mathbb{R}^{n+1}, g_0) = \{f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \ / \ f$ é isometria$\}$ é chamado* grupo de Poincaré.

Nosso próximo objetivo é uma caracterização mais detalhada do grupo de Poincaré.

Teorema 5.2.4. *$Iso(\mathbb{R}^{n+1}, g_0) = \{f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \ / \ f(x) = Ax + b$ com $A \in O(n,1)$ e $b \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.*

Demonstração: De fato, basta mostrar que $A \in O(n,1)$ pois toda isometria $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma transformação afim. Sejam $B = \{e_o, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\eta_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$ seja a matriz de

$$\begin{array}{rcl} g_0 : & \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & ((x_0, \ldots, x_n), (y_0, \ldots, y_n)) & \longmapsto -x_0 y_0 + \ldots + x_n y_n \end{array}$$

nessa base e

$$\begin{array}{rcl} T_f : & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ & x & \longmapsto Ax \end{array}$$

com $A \in GL(n+1)$. Sendo assim, temos que $[A^t \eta_1 A]_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{l=1}^{n+1} (A)_{ki} (\eta_1)_{kl} (A)_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{l=1}^{n+1} (A)_{ki} g_0(e_k, e_l)(A)_{lj} \right) = g \left(\sum_{k=1}^{n+1} (A)_{ki} e_k, \sum_{j=1}^{n+1} (A)_{lj} e_l \right) = g_0(T(e_i), T(e_j)) = g_0(e_i, e_j) = [N_1]_{ij}$. Portanto, $A^t N_1 A = N_1$. Logo, $A \in O(n,1)$.

■

Corolário 5.2.5. *$Iso(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ é isomorfo ao produto semidireto $O(n,1) \rtimes \mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração: Basta mostrar que a função

$$\begin{array}{rcl} \psi : & Iso(\mathbb{R}^{n+1}, g_0) & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \ \rtimes \ O(n,1) \\ & f_{A,b} & \longmapsto (b, A) \end{array}$$

é um isomorfismo. Note que essa função está bem definida. De fato, sejam

$$\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ & x & \longmapsto Ax + b \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} g : & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ & x & \longmapsto A'x + b' \end{array}$$

tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Em particular, $f(0) = g(0)$ e $f(e_i) = g(e_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Logo, $b = b'$ e $A = A'$, isto é, $\psi(f_{A,b}) = \psi(g_{A',b'})$. Claramente, ψ é um homomorfismo. Tome $f_{A,b}, g_{A',b'} \in Iso(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$. Pelo teorema anterior, temos que $\psi(f_{A,b} \circ g_{A',b'}) = (Ab' + b, AA') = (b, A) \rtimes (b', A') = \psi(f_{A,b}) \rtimes \psi(g_{A',b'})$.

■

5.3 Superfícies no Espaço - Tempo de Minkowski

Definição 5.3.1. *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície de dimensão m* [2]*. Para todo $p \in M$, seja $g_p := g|_{T_pM \times T_pM}$. g_p é uma forma bilinear simétrica. Se para todo $p \in M$, g_p é não-degenerada e tem o mesmo índice I, então $(M, (g_p)_{p \in M})$ é dita ser uma* superfície semi-Riemanniana de índice I.

Definição 5.3.2. *Um campo vetorial é uma função $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de classe C^k tal que para todo $p \in M$, $X(p) \in T_pM$.*

Observação: Denotando $X(p) = (X^1(p), \ldots, X^{n+1}(p))$ temos que, para todo $p \in M$, $g_p(X(p), X(p)) = g(X(p), X(p)) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} X^i(p) X^j(p) g\Big(\partial_i^{\varphi}(p), \partial_j^{\varphi}(p)\Big) \right)$ em que $\partial_i^{\varphi}(p) = Df_{f^{-1}(p)}(e_i)$, $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Observação: Dizemos que g_p *varia diferenciavelmente* sobre M se para todo $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de classe C^∞ e com $X(p) \in T_pM$, para todo $p \in M$, a função

$$\begin{aligned} f : \ M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto g_p(X(p), X(p)) \end{aligned}$$

é de classe C^∞.

Definição 5.3.3. *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ uma superfície de dimensão m. Suponha que para todo $p \in M$, T_pM tem o mesmo caráter causal (como subspaço de $\mathbb{R}^{n+1}$). Nesse caso,*

[2] Ver Apêndice B.

o caráter causal de M *será o de* T_pM *(para algum e portanto para todo* $p \in M$*).*

Exemplo 5.3.4. $S^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ não possui um caráter causal definido. De fato, considere a seguinte parametrização

$$\begin{array}{rll} \sigma: & (0,2\pi)\times(0,\pi) & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (\theta,\varphi) & \longmapsto (\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi) \end{array}$$

de S^2. A matriz Jacobiana de σ no ponto (θ,φ) é $\begin{bmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ 0 & -\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}$. Sejam $p_1 = (1,0,0)$, $p_2 = (0,0,-1)$ e $p_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontos de S^2.

Afirmação 1: $T_{(1,0,0)}S^2 = span\{(0,0,-1),(0,-1,0)\}$ é do tipo-espaço. Com efeito, seja $v \in T_{(1,0,0)}S^2$. Sendo assim, temos que $v = a(0,0,-1) + b(0,-1,0) = (0,-b,-a)$ em que $a, b \in \mathbb{R}$. Claro que $p_1 = (1,0,0)$ é do tipo-tempo. Além disso, $g_0\left((0,-b,-a),(1,0,0)\right) = 0$. Portanto, $T_{(1,0,0)}S^2 \subseteq p_1^{\perp}$. Seja $w \in p_1^{\perp}$. Dessa forma, $g_0(w, p_1) = 0$ e assim concluímos que $w = (0,c,d) = -d(0,0,-1) - c(0,-1,0) \in T_{(1,0,0)}S^2$. Logo, $p_1^{\perp} = T_{(1,0,0)}S^2$ e o resultado segue.

Afirmação 2: $T_{(0,0,-1)}S^2 = span\{(-1,0,0),(0,-1,0)\}$ é do tipo-tempo. De fato,basta notar que $(1,0,0) \in T_{(0,0,-1)}S^2$, como $(1,0,0)$ é do tipo-tempo, o resultado segue.

Afirmação 3: $T_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}S^2 = span\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0,-1,0)\right\}$ é do tipo-luz. Com efeito, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é do tipo-luz e claro que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in T_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}S^2$. Seja $w \in T_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}S^2$. Dessa forma, $w = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b(0,-1,0)$ em que $a, b \in \mathbb{R}$. Além disso, $g_0(w,w) = b^2 \geq 0$. Portanto w não pode ser do tipo-tempo. Logo $T_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}S^2$ é do tipo-luz. Com isso, mostramos que S^2 não possui um caráter causal definido. A figura 5.1, no final do capítulo, ilustra os três tipos de caráter causal para planos tangentes a S^2.

Exemplo 5.3.5. $H^2 = \{(x_), x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ é do tipo-tempo. De fato, considere a seguinte parametrização

$$\begin{aligned} \sigma: \quad (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, u) \quad &\longmapsto (\sinh u, \cosh u \sin\theta, \cosh u \cos\theta) \end{aligned}$$

de H^2. A matriz Jacobiana de σ no ponto (θ, u) é $\begin{bmatrix} 0 & \cosh u \\ \cosh u \cos\theta & \sinh u \sin\theta \\ -\cosh u \sin\theta & \sinh u \cos\theta \end{bmatrix}$. Seja $p \in H^2$. Para todo $v \in T_pH^2$, $v = a(0, \cosh u \cos\theta, -\cosh u \sin\theta) + b(\cosh u, \sinh u \sin\theta, \sinh u \cos\theta) = (b \cosh u, a \cosh u \cos\theta + b \sinh u \sin\theta, -a \cosh u \sin\theta + b \sinh u \cos\theta)$ em que $a, b \in \mathbb{R}$. Sendo assim, temos que $g_0(v, v) = a^2 \cosh^2 u \cos^2\theta + a^2 \cosh^2 u \sin^2\theta - b^2 \cosh^2 u + b^2 \cosh^2 u \sin^2\theta + b^2 \sinh^2 u \cos^2\theta = a^2 \cosh^2 u - b^2 \cosh^2 u + b^2 \sinh^2 u = -b^2 + a^2 \cosh^2 u$. Em particular, se $a = 0$ temos que v é do tipo-tempo. Portanto, T_pM é do tipo-tempo. Como p é arbitrário, H^2 é do tipo-tempo.

Observação: Note que a parametrização utilizada no Exemplo 5.3.5 não cobre toda a superfície. De fato, os pontos da hipérbole $x_2^2 - x_0^2 = 1$ com $x_2 > 0$ não estão incluídos na parametrização. Entretanto, essa complicação aparente não interfere no caráter causal de H^2. Para ver isso considere a seguinte parametrização σ'.

$$\begin{aligned} \sigma': \quad (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, u) \quad &\longmapsto (\sinh u, \cosh u \cos\theta, \cosh u \sin\theta) \end{aligned}$$

e faça uma verificação análoga.

Exemplo 5.3.6. $D^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \ / \ x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1\}$ é do tipo-espaço. De fato, considere a seguinte parametrização

$$\begin{aligned} \sigma: \quad (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, u) \quad &\longmapsto (\cosh u, \sinh u \sin\theta, \sinh u \cos\theta) \end{aligned}$$

de D^2. A matriz Jacobiana de σ no ponto (θ, u) é $\begin{bmatrix} 0 & \sinh u \\ \sinh u \cos\theta & \cosh u \sin\theta \\ -\sinh u \sin\theta & \cosh u \cos\theta \end{bmatrix}$. Seja $p \in D^2$. Para todo $v \in T_pD^2$, $v = a(0, \sinh u \cos\theta, -\sinh u \sin\theta) + b(\sinh u, \cosh u \sin\theta, \cosh u \cos\theta) = (-b\sinh u, a\sinh u\cos\theta + b\cosh u \sin\theta, -a\sinh u \sin\theta + b\cosh u\cos\theta)$ em que $a, b \in \mathbb{R}$. Sendo assim, temos que $g_0(v,v) = a^2\sinh^2 u\cos^2\theta + a^2\sinh^2 u \sin^2\theta - b^2\sinh^2 u + b^2\cosh^2 u\sin^2\theta + b^2\cosh^2 u\cos^2\theta = a^2\sinh^2 u - b^2\sinh^2 u + b^2\cosh^2 u = a^2\sinh^2 u + b^2 \geq 0$. Portanto, T_pM é do tipo-espaço. Logo, D^2 é do tipo-espaço.

Exemplo 5.3.7. $C^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$ é do tipo-luz. De fato, considere a seguinte parametrização

$$\begin{aligned} \sigma: \quad (0, 2\pi) \times \mathbb{R}\backslash\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, t) &\longmapsto (t, t\cos\theta, t\sin\theta) \end{aligned}$$

de C^2. A matriz Jacobiana de σ no ponto (θ, t) é $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -t\sin\theta & \cos\theta \\ t\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$. Seja $p \in C^2$. Para todo $v \in T_pC^2$, $v = a(0, -t\sin\theta, \cos\theta) + b(1, \cos\theta, \sin\theta) = (b, b\cos\theta - at\sin\theta, at\cos\theta + b\sin\theta)$ em que $a, b \in \mathbb{R}$. Sendo assim, temos que $g_0(v,v) = a^2t^2\sin^2\theta + a^2t^2\cos^2\theta - b^2 + b^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta = a^2t^2 - b^2 + b^2 = a^2t^2 \geq 0$. Portanto, T_pC^2 não possui vetores do tipo-tempo. Além disso, para $a = 0$, v é do tipo-luz. Logo, T_pC^2 é do tipo-luz e o resultado segue.

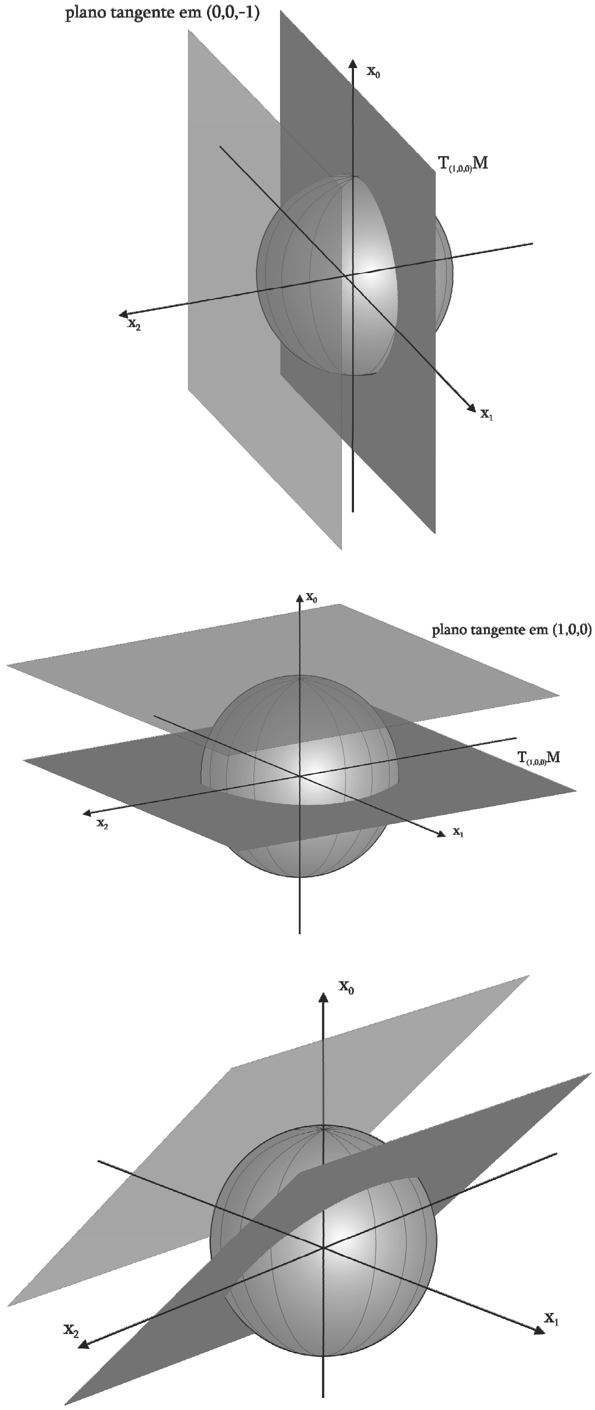

Figura 5.1: Existem planos tangentes à esfera dos três tipos. O primeiro é tipo-tempo, o segundo é tipo-espaço e o terceiro, tipo-luz.

Apêndice A

Elementos da Teoria de Grupos

Definição A.1. *Sejam G um conjunto e $* : G \times G \longrightarrow G$ uma operação sobre G. Dizemos que o par $(G, *)$ é um* grupo *quando os seguintes axiomas estiverem verificados:*

*i) (*Propriedade Associativa*) Quaisquer que sejam a, b e $c \in G$, tem-se $(a * b) * c = a * (b * c)$.*

*ii) (*Elemento Neutro*) Existe um elemento $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in G$.*

*iii) (*Elemento Inverso*) Para todo $a \in G$ existe um elemento $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$.*

Se a operação $* : G \times G \longrightarrow G$ satisfaz ainda o axioma

*iv) (*Propriedade Comutativa*) Quaisquer que sejam a, $b \in G$, tem-se $a * b = b * a$, dizemos que $(G, *)$ é um grupo* comutativo *ou* abeliano.

Observação: É fácil mostrar que o elemento neutro e os inversos em um grupo são únicos. Além disso, é tradicional, se $(G, *)$ é um grupo, nos referimos a G como grupo, se não houver risco de confusão.

Exemplo A.2. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é um grupo comutativo em relação à operação usual de adição.

Exemplo A.3. O conjunto $\mathbb{Q}^*$ dos números racionais não-nulos é um grupo comutativo em relação à operação usual de multiplicação.

Exemplo A.4. Seja $n \in \mathbb{N}$. O conjunto das matrizes inversíveis de ordem n (conhecido como $GL(n)$) é um grupo não-comutativo (se $n > 1$) com relação à operação de multiplicação entre matrizes.

Definição A.5. *Seja $(G, *)$ um grupo e seja H um subconjunto de G. Dizemos que H é um* subgrupo *de $(G, *)$ quando as seguintes condições estiverem verificadas:*

i) H é fechado em relação à operação $*$;

ii) Se para todo $x \in H$, $x^{-1} \in H$.

Exemplo A.6. O grupo aditivo $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é um subgrupo do grupo aditivo $\mathbb{Q}$ dos números racionais que, por sua vez, é um subgrupo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ dos números reais.

Exemplo A.7. O grupo multiplicativo $\mathbb{Q}^*$ dos números racionais não-nulos é um subgrupo do grupo multiplicativo $\mathbb{R}^*$ dos números reais não-nulos que, por sua vez, é um subgrupo do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ dos números complexos não-nulos.

Exemplo A.8. O grupo das matrizes invertíveis de ordem n cujo valor do determinante é 1 é um subgrupo do $GL(n)$.

Definição A.9. *Sejam* $(G, *)$ *e* $(G', \cdot)$ *dois grupos e* f *uma aplicação do conjunto* G *no conjunto* G'. *Dizemos que* $f : G \longrightarrow G'$ *é um* homomorfismo de $(G, *)$ em $(G', \cdot)$ *quando* $f(a*b) = f(a) \cdot f(b)$ *para quaisquer que sejam* a, $b \in G$. *Se* f *for uma aplicação bijetora então dizemos que* f *é um* isomorfismo *de* $(G, *)$ *em* $(G', \cdot)$.

Observação: Um homomorfismo de G em G também é denominado *endomorfismo* de G. Denotamos por $(End(G))$ o conjunto de todos os endomosfismos de G. Um isomorfismo de G em G é chamado *automorfismo* de G. Denotamos por $(Aut(G))$ o conjunto de todos os automorfismo G.

Exemplo A.10. Seja a um elemento do grupo G. A aplicação $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ definida por $f(n) = a^n$ é um homomorfismo de $(\mathbb{Z}, +)$ em $(G, \cdot)$. De fato, $f(m+n) = a^{m+n} = a^m \cdot a^n = f(m) \cdot f(n)$ para todo m, $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo A.11. Sejam $(\mathbb{R}, +)$ o grupo aditivo dos números reais, $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ o grupo multiplicativo dos números reais positivos e $a \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$. A aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ é um isomorfismo de $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$. Analogamente, a aplicação $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = log_a x$ é um isomorfismo de $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ em $(\mathbb{R}, +)$.

A demonstração é imediata.

Definição A.12. *Sejam* $(G, *)$ *e* $(G', \cdot)$ *dois grupos. Considere o produto cartesiano* $G \times G'$ *dos conjuntos* G *e* G' *e a operação* $\star : (G \times G') \times (G \times G') \longrightarrow G \times G'$ *definida por* $(a, b) \star (a', b') = (a * a', b \cdot b')$ *para todos* (a, b) , $(a', b') \in G \times G'$. $(G \times G', \star)$ *é denominado o* produto direto *de* G *e* G'.

Proposição A.13. $(G \times G', \star)$ *é um grupo com relação à operação* $\star$.

Demonstração: Sejam (a,b), (a',b') e $(a'',b'') \in G\times G'$. $[(a,b)\star(a',b')]\star(a'',b'') = (a*a', b\cdot b')\star(a'',b'') = ((a*a')*a'', (b\cdot b')\cdot b'') = (a*(a'*a''), b\cdot(b'\cdot b'')) = (a,b)\star(a'*a'', b'\cdot b'') = (a,b)\star[(a',b')\star(a'',b'')]$. Logo, $\star$ é associativa. Sejam $e\in G$ e $e'\in G'$ os elementos neutros de G e G', respectivamente . Sendo assim, temos que $(a,b)\star(e,e') = (a*e, b\cdot e') = (a,b)$ e analogamente $(e,e')\star(a,b) = (a,b)$. Logo, $\star$ possui um elemento neutro. Finalmente, $(a,b)\star(a^{-1},b^{-1}) = (a*a^{-1}, b\cdot b^{-1}) = (e,e')$ e analogamente $(a^{-1},b^{-1}\star(a,b) = (e,e')$. Logo, $(G\times G',\star)$ é um grupo com relação à operação $\star$.

Definição A.14. *Sejam $(G,*)$ e $(G',\cdot)$ dois grupos. Considere o produto cartesiano $G\times G'$ dos conjuntos G e G', fixe um homomorfismo*

$$\begin{aligned}\varphi:\ G' &\longrightarrow Aut(G)\\ b &\longmapsto \varphi_b : G\longrightarrow G\end{aligned}$$

e a operação $\rtimes : G\times G' \times G\times G' \longrightarrow G\times G'$ definida por $(a,b)\rtimes(a',b') = (a*\varphi_b(a'), b\cdot b')$ $(G\times G',\rtimes)$ é denominado o produto semi-direto *de $G\times G'$.*

Proposição A.15. *$(G\times G',\rtimes)$ é um grupo com relação à operação $\rtimes$.*

Demonstração: Sejam (a,b), (a',b') e $(a'',b'') \in G\times G'$. $[(a,b)\rtimes(a',b')]\rtimes(a'',b'') = (a*\varphi_b(a'), b\cdot b')\rtimes(a'',b'') = ((a*\varphi_b(a')*\varphi_{b\cdot b'}(a''), (b\cdot b')b'') = ((a*\varphi_b(a'))*\varphi_b(\varphi_{b'}(a'')), b\cdot (b'\cdot b'')) = (a*(\varphi_b(a')*\varphi_b(\varphi_{b'}(a''))), b\cdot(b'\cdot b'')) = (a*\varphi_b(a'\cdot\varphi_{b'}(a'')), b\cdot(b'\cdot b'')) = (a,b)\rtimes(a'*\varphi_{b'}(a''), b'b'') = (a,b)\rtimes[(a',b')\rtimes(a'',b'')]$. Logo, $\rtimes$ é associativa. Sejam $e\in G$ e $e'\in G'$ os elementos neutros de G e G', respectivamente. Sendo assim, temos que $(a,b)\rtimes(e,e') = (a*\varphi_b(e), be')(a*e, b\cdot e') = (a,b)$. Analogamente, $(e,e')\rtimes(a,b) = (a,b)$. Logo, $\rtimes$ possui um elemento neutro. Finalmente, $(a,b)\rtimes(a^{-1},b^{-1})(a*\varphi_b(a^{-1}), b\cdot b^{-1}) = (a*a^{-1}, b\cdot b^{-1}) = (e,e')$. Analogamente, $(a^{-1},b^{-1})\rtimes(a,b) = (e,e')$. Logo, $(G\times G',\rtimes)$ é um grupo com relação a operação $\rtimes$.

Apêndice B

Superfícies em $\mathbb{R}^n$

Definição B.1. *Uma* imersão *do aberto $V \subset \mathbb{R}^m$ no espaço $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $x \in V$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear injetiva.*

Observação: Isto, naturalmente, só pode ocorrer quando $m \leq n$.

Exemplo B.2. A aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(t) = (t^3 - t, t^2)$ é uma imersão de $\mathbb{R}$ no plano. De fato, $\mathbb{R}$ é aberto e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável. Além disso, para todo $x \in \mathbb{R}$, a derivada

$$\begin{aligned} f'(x) : \quad \mathbb{R} \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a \quad &\longmapsto \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 \\ 2x \end{pmatrix} a \end{aligned}$$

é claramente injetiva.

Definição B.3. *Uma parametrização de classe C^k e dimensão m de um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ é uma imersão $\varphi : V_0 \longrightarrow V$ de classe C^k que é, ao mesmo tempo, um homeomorfismo do aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ sobre V.*

Exemplo B.4. Dada uma aplicação $f : V_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^k no aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^m$, seja $V = \{(x, f(x)) \ / \ x \in V_0\} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ o gráfico de f. A aplicação $\varphi : V_0 \longrightarrow V$, dada por $\varphi(x) = (x, f(x))$ é uma parametrização de dimensão m e classe C^k do conjunto $V \subset \mathbb{R}^{m+n}$. De fato, se chamarmos de $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a projeção sobre as m primeiras coordenadas, a igualdade $\pi \circ \varphi = Id_{V_0}$ mostra que φ é um homeomorfismo, cujo inverso é a restrição $\pi|_V$ e, em virtude da regra da Cadeia, que $\pi(\varphi'(x)) = ID_{\mathbb{R}^m}$. Logo, $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é injetiva, para todo $x \in V_0$. Logo, φ é uma imersão.

Definição B.5. *Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ chama-se uma* superfície de dimensão m e classe C^k *quando todo ponto $p \in M$ está contido em algum aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $V = U \cap M$ é a imagem de uma parametrização $\varphi : V_0 \longrightarrow V$, de dimensão m e classe C^k. O conjunto V é um aberto em M (com a topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^n$, chamado uma* vizinhança parametrizada *do ponto p.*

Exemplo B.6. O gráfico de uma aplicação $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^k no aberto $V \subset \mathbb{R}^m$, é uma superfície $M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{m+n} \ / \ x \in V\}$ de dimensão m e de classe C^k em $\mathbb{R}^{m+n}$. De fato, M é a imagem da única parametrização $\varphi : V \longrightarrow M$ tal que $\varphi(x) = (x, f(x))$.

Definição B.7. *Seja p um ponto da superfície n, de dimensão m e classe C^k em $\mathbb{R}^n$. O* espaço vetorial tangente a M no ponto p *é um subespaço vetorial $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ tal que T_pM é o conjunto dos vetores-velocidade $v = \lambda'(0)$ dos caminhos diferenciáveis $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$, tais que $\lambda(0) = p$.*

Definição B.8. *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação deferenciável, definida no aberto $V \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Um ponto $c \in \mathbb{R}^n$ chama-se um* valor regular de f *quando, para todo $x \in U$ tal que $f(x) = c$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear sobrejetiva.*

Teorema B.9. *Seja $c \in \mathbb{R}^n$ um valor regular da aplicação $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. A imagem inversa $M = f^{-1}(c) = \{x \in U \ / \ f(x) = c\}$ é uma superfície de classe C^k e dimensão m em $\mathbb{R}^{m+n}$. O espaço vetorial tangente T_pM, em cada ponto $p \in M$, é o núcleo da derivada $f'(p) : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Pelo teorema da função implícita, note que $M = f^{-1}(c)$ é localmente o gráfico de uma aplicação de classe C^k. Logo, M é uma superfície. Além disso, para $p \in M$, todo vetor $v \in T_pM$ é da forma $v = \lambda'(0)$, onde $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ é um caminho diferenciável com $\lambda(0) = p$. Logo, $f'(p)(v) = f'(\lambda(0))(\lambda'(0)) = (f \circ \lambda)'(0) = 0$ pois $f \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é constante igual a c. Portanto, T_pM está contido no núcleo de $f'(p)$. Como $f'(p)$ é sobrejetiva, esse núcleo tem dimensão m e então é igual a T_pM.

■

Exemplo B.10. O conjunto $S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$, conhecido como *esfera unitária*, é uma superfície de dimensão n e classe C^∞. De fato, considere

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_0, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_0^2 + \ldots + x_n^2 \end{array}$$

f é de classe C^∞. Além disso, para todo $a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f(a) = 1$,

$$\begin{array}{rccl} f'(a): & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_0, \ldots, x_n) & \longmapsto & 2a_0x_0 + \ldots + 2a_nx_n \end{array}$$

é uma transformação linear sobrejetiva pois é um funcional linear não-nulo. Logo, $1 \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f e a afirmação está provada.

Exemplo B.11. O conjunto $H^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = 1\}$, conhecido como *hiperbolóide de duas folhas*, é uma superfície de dimensão n e de classe C^∞.

Exemplo B.12. O conjunto $D^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$, conhecido como *hiperbolóide de uma folha*, é uma superfície de dimensão n e de classe C^∞.

Exemplo B.13. O conjunto $C^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \ / \ -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0\}$, é uma superfície de dimensão n e de classe C^∞.

Observação: A verificação de que os exemplos B.11, B.12 e B.13 são superfícies é análoga à do Exemplo B.10.

Conclusão

As formas bilineares simétricas não degeneradas desempenham um papel muito importante no contexto de ambos os espaços-tempo: Newtoniano e de Minkowski. No primeiro caso, a forma bilinear tem índice zero enquanto que, no segundo, a forma possui índice um.

No decorrer deste trabalho procuramos explorar os aspectos geométricos mais significativos tanto dos espaços-tempo Newtonianos quanto dos espaços-tempo de Minkowski e demonstrar os seus principais resultados utilizando como ferramenta principal à álgebra linear. Apesar de ambos possuírem a mesma estrutura afim, que é, sem dúvida, um aspecto unificador interessante, as diferenças entre os dois tipos de espaços-tempo são bastante significativas, e as interpretações físicas subjacentes, radicalmente distintas.

Os aspectos físicos e a estrutura causal desses dois tipos de espaço-tempo merecem estudo mais detalhado, que infelizmente não podemos fazer aqui. Apesar disto, ilustrando essas diferenças, obtivemos e caracterizamos os dois grupos que preservam suas respectivas estruturas no caso particular do $\mathbb{R}^{n+1}$ e provamos que, de fato, isto era suficiente, pois todos os outros são isomorfos a um destes.

Referências Bibliográficas

[1] O'NEILL, B. ***Semi-Riemannian Geometry With Applications To Relativity***. Londres: Academic Press, 1983.

[2] ARNOLD, V. I. ***Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica***. Moscou: Editora Mir, 1987.

[3] LIMA, Elon L. ***Álgebra Linear***. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[4] LIMA, Elon L. ***Análise Real***. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[5] MONTEIRO, L. H. Jacy. ***Elementos de Álgebra***. Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1971.

[6] TORRETI, R. ***Relativity and Geometry***. New York: Dover Publications, 1996.