

HIANDRA BÁRBARA GÖTZINGER

**MODELAGEM DE PROBLEMAS BIOLÓGICOS  
USANDO EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS**

FLORIANÓPOLIS  
2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

HIANDRA BÁRBARA GÖTZINGER

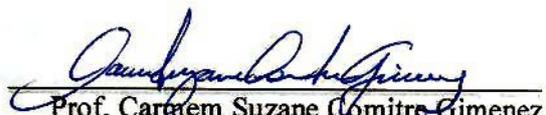
**MODELAGEM DE PROBLEMAS BIOLÓGICOS  
USANDO EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Curso de Matemática –  
Habilitação Licenciatura como parte dos  
requisitos para a obtenção do título de  
graduada em Matemática

Sob a orientação da  
Prof<sup>ª</sup> Dra. Sonia Palomino Bean

FLORIANÓPOLIS  
2007

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 64/CCM/07

  
Prof. Carmem Suzane Comitro Gimenez  
Professora da disciplina

Banca Examinadora

  
Prof. Dra. Sonia Palomino Bean  
Orientadora

  
Prof. Dr. Arno Blankensteyn

  
Prof. Nereu Estanislau Burin

A minha família,  
ao meu amor e aos  
meus amigos.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço neste primeiro momento a Deus, que esteve nos meus pensamentos em todos os momentos difíceis desta caminhada em busca da graduação no curso de Matemática Licenciatura da UFSC.

Agradeço a minha família que sempre permaneceu ao meu lado me dando o carinho e o apoio necessário para que eu pudesse prosseguir, em especial aos meus pais Jorge Luiz Götzinger e Neusa Miriam Götzinger, e ao meu namorado Cleiton de Liz Montibeller, por vocês compreenderem os meus momentos de ausência.

Agradeço também a todos os professores que tentam cada um a sua maneira passar a nós alunos uma motivação para irmos à busca do saber e do aprender cada vez mais. Em especial agradeço a professora Sonia Palomino Bean por ter me orientado durante este último ano neste início de projeto de pesquisa que será meu trabalho de conclusão de curso.

Enfim agradeço a todos meus amigos e demais pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para que fosse possível a realização deste trabalho.

## RESUMO

O trabalho lida com a resolução de funções discretas através das equações de diferenças lineares e não lineares aplicadas à modelagem de processos biológicos. Esse estudo é de grande interesse também para a área biológica, já que permite a realização de previsões do comportamento após muitas gerações dos processos modelados, e também porque através da análise da estabilidade é possível avaliar como os dados coletados podem afetar no equilíbrio, e se reconhecido algum problema tenta-se encontrar formas de reestruturar o processo para que ele mantenha sua regularidade.

**Palavras chaves:** equações de diferenças lineares; modelagem de processos biológicos; estabilidade.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	8
<b>2. EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS</b> .....	10
2.1. EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS DE 1ª ORDEM .....	11
2.1.1. Exemplos .....	14
2.2. EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS DE 2ª ORDEM .....	17
2.2.1. Exemplos .....	19
2.3. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES .....	23
2.3.1. Exemplos .....	24
<b>3. MODELOS BIOLÓGICOS: UMA APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES</b> .....	26
3.1. MODELO 1: UMA POPULAÇÃO DE INSETOS .....	26
3.2. MODELO 2: ESQUEMATIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE GLÓBULOS VERMELHOS NO SANGUE .....	30
<b>4. EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NÃO LINEARES</b> .....	35
4.1. FORMA DE UMA EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS NÃO LINEAR .....	35
4.2. ESTUDO DA ESTABILIDADE DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NÃO LINEARES DE 1ª ORDEM .....	37
4.2.1. Critérios de estabilidade de funções discretas não lineares .....	39
4.2.2. Exemplos .....	40
4.3. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NÃO LINEARES .....	42
4.3.1. Exemplo .....	46
<b>5. MODELOS BIOLÓGICOS: UMA APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NÃO LINEARES</b> .....	48
5.1. MODELO 1: MODELO PARA POPULAÇÕES DE PEIXES .....	48
5.2. MODELO 2: DENSIDADE POPULACIONAL .....	50
5.3. MODELO 3: ONDAS DE DOENÇAS .....	53
5.3.1. Analisando o comportamento do modelo de ondas de doenças para alguns valores supostos .....	57
5.4. COMENTÁRIOS .....	58
<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	61

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	63
APÊNDICE .....	65

## 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho de conclusão de curso tem por objetivo abordar o assunto de equações de diferenças e suas aplicações nas áreas biológicas usando modelos discretos.

O conteúdo de equações de diferenças foi escolhido por não ser um assunto abordado dentro das disciplinas do curso de Matemática Licenciatura, e também pela quantidade de aplicações que se podem encontrar nas demais áreas. Entre elas a área biológica, a área econômica, entre outras.

Na biologia é relevante a utilização de equações de diferenças para a modelagem de problemas já que nem todos os processos biológicos ocorrem em tempo contínuo. Processos como o de reprodução e desenvolvimento de insetos que ocorrem em diversos estágios, a colheita de plantas que ocorrem em períodos sazonais, ondas de doenças em que conta-se como variação de tempo o período de infecção, entre outros problemas, são representados de forma adequada através de modelos discretos.

O trabalho foi dividido em seis capítulos, sendo este o primeiro que apresenta os objetivos e o que será abordado no decorrer do trabalho.

No segundo capítulo é apresentada a teoria das equações de diferenças lineares e maneiras de como encontrar a equação solução das mesmas, contendo exemplos numéricos para explicitar o conteúdo.

No terceiro capítulo é apresentada a modelagem de dois processos biológicos, onde foram feitas suposições para que fosse possível resolvê-los através de modelos lineares. Os dados supostos foram escolhidos aleatoriamente de forma que possibilitassem a resolução e análise dos problemas, sendo assim os resultados obtidos são somente teóricos.

No quarto capítulo apresentam-se as equações de diferenças não lineares e sua metodologia de como encontrar a equação solução. É também neste capítulo que são definidos os critérios de estabilidade que auxiliam a análise do comportamento dos modelos, possibilitando a avaliação dos dados no decorrer do processo.

Já no quinto capítulo são apresentados três modelos matemáticos aplicados a processos biológicos. Os dados utilizados para que fosse efetuado o processo de resolução e análise dos modelos ou foram retirados de livros como constam nas referências, ou foram escolhidos aleatoriamente somente para que pudesse ser realizada uma breve análise sobre estes parâmetros. Desta forma a maioria das conclusões referidas nos modelos são resultados teóricos.

E por fim o sexto e último capítulo do trabalho é onde são apresentadas as conclusões e sugestões de futuras pesquisas e trabalhos referentes ao assunto abordado.

O material que o trabalho contém são dados iniciais necessários para pesquisas na área que esta sendo abordada, mas por não dispor ainda de muitos recursos fica difícil a modelagem de problemas biológicos realísticos. Sugere-se, em estudos posteriores, modelar processos biológicos reais de uma região e através da análise dos dados encontrar resultados que possam contribuir para a resolução de problemas.

## 2. EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES

Equações de diferenças são usadas para descrever sistemas dinâmicos discretos, que expressam o valor de uma variável em função de seus próprios valores anteriores, tempo e demais variáveis.

**Definição 1:** Seja  $k$  um inteiro positivo e uma função  $f : \mathcal{R}^k \rightarrow \mathcal{R}$ . A equação:

$$y_{n+k} = f(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}) \quad (1.1).$$

É chamada de equação de diferenças de ordem  $k$ .<sup>1</sup>

Neste primeiro capítulo será apresentado como se faz para encontrar as soluções das equações de diferenças lineares por meio de equações de diferenças de primeira e segunda ordem e também a forma de resolvermos sistemas de equações de diferenças de primeira ordem.

Para elaborar este trabalho foram usadas as seguintes referências: BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática [1]; KESHET, L. E. Mathematical Models in Biology [2]; MURRAY, J.D. Mathematical Biology [6]; BEAN, S.E.P. Matemática Elementar para Biocientistas [8]. Este material está devidamente citado nas Referências.

Uma equação de diferenças linear de ordem  $n$  pode ser representada pela fórmula:

$$a_n y_n + a_{n-1} y_{n-1} + \dots + a_1 y_1 + a_0 y_0 = h(n) \quad (1.2)$$

onde  $h(n)$  é uma seqüência que depende apenas dos valores de  $n$  e  $a_i$  com  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  são constantes e para garantir que a equação seja de grau  $n$  devemos ter que o termo  $a_n$  seja diferente de zero.

Uma equação é linear quando a variável  $y_n$  e suas demais variações  $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0$  possuem grau um, ou seja, não possuem expoente diferente de um.

Para saber qual a ordem de uma equação de diferenças basta observar de quantas variações (gerações) anteriores  $y_n$  depende. Exemplos:

(a)  $y_n = a y_{n-1}$

(b)  $y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2}$

---

<sup>1</sup> Definição encontrada no Relatório disponível na página [www.mat.ufg.br/cursos/rialma/2003/rel\\_almr.pdf](http://www.mat.ufg.br/cursos/rialma/2003/rel_almr.pdf) de autoria RIBEIRO, A. L. M [9].

$$(c) \ y_n = a_5 y_{n-5} + a_2 y_{n-2} + a_1 y_{n-1}$$

$$(d) \ y_n = a_2 y_{n-2}$$

A equação da letra (a) depende de uma única variação imediatamente anterior a  $y_n$  e assim é uma equação de 1ª ordem. As equações das letras (b) e (d) dependem de duas variações imediatamente anteriores a  $y_n$  e assim são equações de 2ª ordem. Já a equação da letra (c) depende de cinco variações anteriores de  $y_n$  e assim é considerada uma equação de 5ª ordem.

**Definição 2:** Uma equação de diferenças como a equação (1.2) é dita homogênea quando  $h(n)=0$  e não homogênea quando  $h(n) \neq 0$ .

## 2.1. EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS DE 1ª ORDEM

**Definição 3:** Suponha que tenhamos uma função  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ . Uma equação de diferenças de 1ª ordem é uma seqüência de números  $y_n$  para  $n \in \mathbb{N}$ , tais que cada um dos termos após o primeiro é encontrado pela relação recursiva:

$$y_{n+1} = f(y_n).$$

Se  $f$  é uma função linear em  $y_n$  de (1.2), com  $h(n)=0$  consegue-se encontrar uma equação de diferenças linear de 1ª ordem homogênea como:

$$y_n = a y_{n-1} \quad (2).$$

Para encontrar a solução de uma equação de 1ª ordem deve-se dispor de um valor inicial dado, que é denominado  $y_0$ . Também podem ser resolvidas equações de diferenças sem que seja conhecido o valor inicial, mas estas não são interessantes para casos práticos.

O procedimento de resolução pode ser feito de duas maneiras:

- Utilizando o processo recursivo onde o valor  $y_0$  é conhecido. Neste caso tem-se:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= ay_0 \\
 y_2 &= ay_1 = a(ay_0) = a^2 y_0 \\
 &\vdots \\
 y_n &= ay_{n-1} = a(a^{n-1} y_0) = a^n y_0
 \end{aligned}$$

- Supondo que  $y_n = C \lambda^n$  é solução da equação (2). Neste caso substituindo em (2), tem-se:

$$\begin{aligned}
 C \lambda^n &= a C \lambda^{n-1} \\
 C \lambda^{n-1} (\lambda - a) &= 0
 \end{aligned}$$

Como  $C \neq 0$  e  $a \neq 0$ , então  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = a$ .

Desde que, para  $n = 0$  tem-se  $y_0 = C \lambda^0$ , então  $C = y_0$ . Logo:

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{se } y_0 = 0 \\ y_0 a^n & \text{se } y_0 \neq 0 \end{cases}$$

Observa-se que é encontrada a mesma solução por ambos os métodos de resolução. Logo conclui-se que a solução geral da equação de diferenças linear de 1ª ordem homogênea (2) é:

$$y_n = a^n y_0 \quad (2.1)$$

Se ao invés de fornecer o valor de  $y_0$  for dado o valor de  $y_1$  pode-se utilizar o seguinte procedimento usando o método recursivo:

$$\begin{aligned}
 y_2 &= ay_1 \\
 y_3 &= ay_2 = a(ay_1) = a^2 y_1 \\
 &\vdots \\
 y_n &= ay_{n-1} = a(a^{n-2} y_1) = a^{n-1} y_1 \\
 \therefore y_n &= a^{n-1} y_1 \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Também pode ser utilizado o método de supor que  $y_n = C \lambda^n$  é solução da equação (2), onde só serão feitas algumas alterações: Para  $n=1$ , tem-se  $y_1 = C \lambda^1$  e então  $C = \frac{y_1}{\lambda}$ , e assim:

$$\begin{aligned}
 y_n &= C \lambda^n = \frac{y_1}{\lambda} \cdot \lambda^n \\
 \therefore y_n &= \lambda^{n-1} y_1
 \end{aligned}$$

Lembrando que  $\lambda = a$ , chega-se novamente a equação:  $y_n = a^{n-1} y_1$  (2.2).

As expressões encontradas em (2.1) e (2.2), apesar de diferentes, geram o mesmo conjunto solução.

Observação 1: Caso não fosse conhecido um valor inicial, a solução da equação de diferenças pode ser encontrada utilizando o método de supor que a solução é  $y_n = C\lambda^n$  e então seria encontrado que a solução da equação de diferenças é  $y_n = Ca^n$ .

Outra forma de se ter uma equação de diferenças linear de 1ª ordem é quando acontece que  $h(n)=b$ , onde  $b \neq 0$  é uma constante, obtendo uma equação do tipo:

$$y_n = ay_{n-1} + b \quad (3)$$

Partindo da idéia de que já é conhecido o valor inicial  $y_0$  e a solução geral (2.1), basta agora ser encontrada a solução particular.

Seja:  $y_n = D$  e  $y_{n-1} = D$ , onde  $D$  será a solução particular de (3), então:

$$\begin{aligned} D &= aD + b \\ D(1 - a) &= b \\ D &= \frac{b}{1 - a}, \quad a \neq 1 \end{aligned}$$

A solução da equação (3) se dá de forma análoga ao que acontece nos processos contínuos, ou seja, será a solução geral homogênea mais a solução particular:

$$y_n = a^n y_0 + \frac{b}{1 - a}, \quad a \neq 1$$

Utilizando o método recursivo encontra-se a solução da equação (3) quando acontece que  $a=1$ .

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \cdot y_0 + b = y_0 + b \\ y_2 &= 1 \cdot y_1 + b = 1 \cdot (y_0 + b) + b = y_0 + 2b \\ y_3 &= 1 \cdot y_2 + b = 1 \cdot (y_0 + 2b) + b = y_0 + 3b \\ &\vdots \\ y_n &= 1 \cdot y_{n-1} + b = 1 \cdot (y_0 + (n-1)b) + b = y_0 + nb \end{aligned}$$

Assim é encontrada a solução da equação (3):

$$\begin{cases} y_n = y_0 + nb & a = 1 \\ y_n = y_0 a^n + \frac{b}{1 - a} & a \neq 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

### 2.1.1. Exemplos

Resolvendo algumas equações de 1ª ordem com valores numéricos:

a)  $x_{n+2} - 2x_{n+1} = 0$ ;  $x_0 = 10$

Supondo que  $x_n = C\lambda^n$  é solução, tem-se:

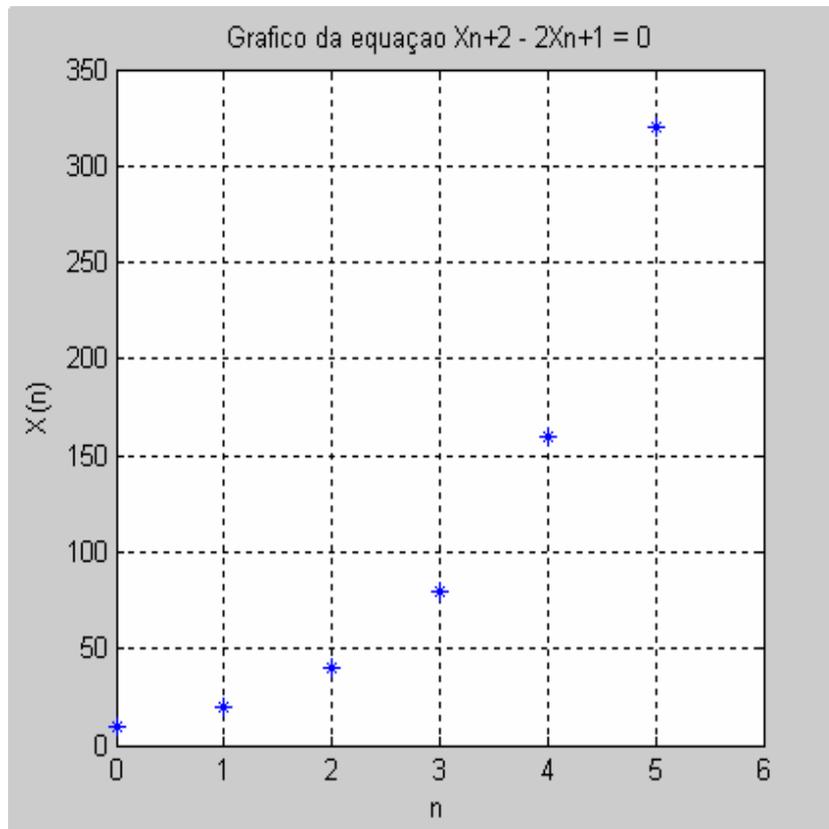
$$\begin{aligned} C\lambda^{n+2} - 2C\lambda^{n+1} &= 0 && (\div C\lambda^{n+1}) \\ \lambda - 2 &= 0 \\ \therefore \lambda &= 2 \end{aligned}$$

A solução geral deste tipo de equação é:  $x_n = x_0 \cdot \lambda^n$

Substituindo os valores de  $x_0$  que é dado na questão e  $\lambda$  que já foi calculado, tem-se:

$$x_n = 10 \cdot 2^n$$

Agora será ilustrada a equação acima através do gráfico dado pela Figura 1:



**Figura 1:** Gráfico da solução do exemplo a), com variação para  $n$  de 1 à 5.

b)  $x_{n+1} = 3x_n$ ;  $x_1 = 12$

Encontrando a solução homogênea considerando que  $x_n = C\lambda^n$  seja solução:

$$\begin{aligned} C\lambda^{n+1} &= 3C\lambda^n & (\div C\lambda^n) \\ \lambda &= 3 \end{aligned}$$

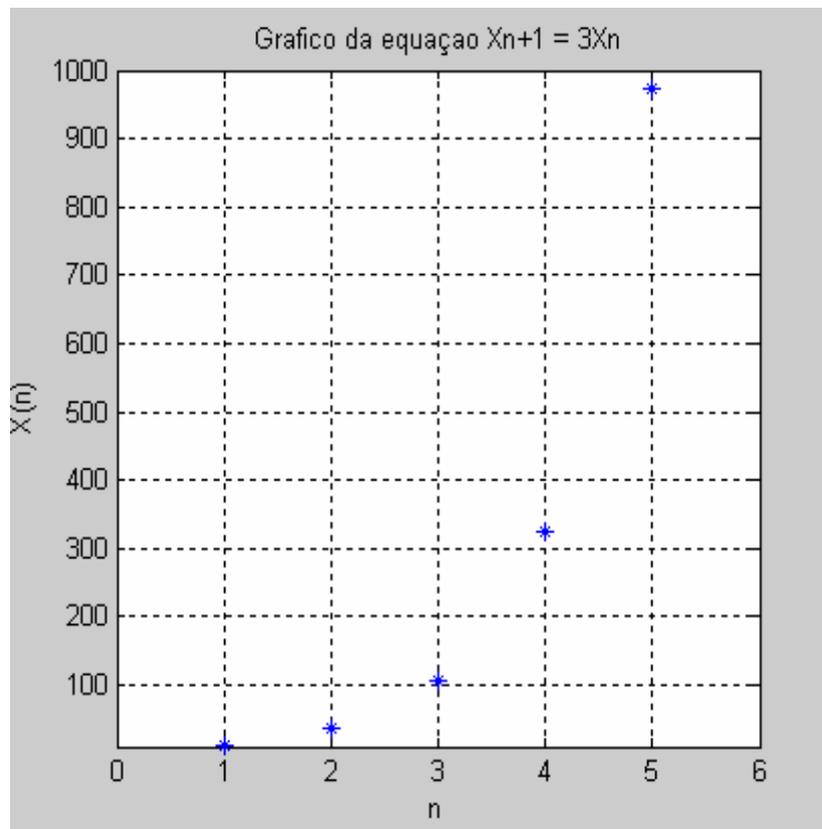
Lembrando que neste problema foi dado o valor de  $x_1$  e não de  $x_0$ , então:

$$x_n = \lambda^{n-1} x_1$$

Substituindo os valores encontrados tem-se:

$$x_n = 12 \cdot 3^{n-1}$$

Agora será ilustrada a equação acima através do gráfico dado pela Figura 2:



**Figura 2:** Gráfico da solução do exemplo b), com variação para  $n$  de 1 à 5.

c)  $y_{n+2} + 3y_{n+1} = 8$ ;  $y_0 = 5$

Primeiro encontra-se a solução homogênea considerando que  $y_n = C\lambda^n$  seja solução:

$$\begin{aligned} C\lambda^{n+2} &= -3C\lambda^{n+1} & (\div C\lambda^{n+1}) \\ \lambda &= -3 \end{aligned}$$

Agora supondo que  $y_{n+2} = D$  e  $y_{n+1} = D$ , onde  $D$  será a solução particular da equação:

$$D = -3D + 8$$

$$4D = 8$$

$$D = 2$$

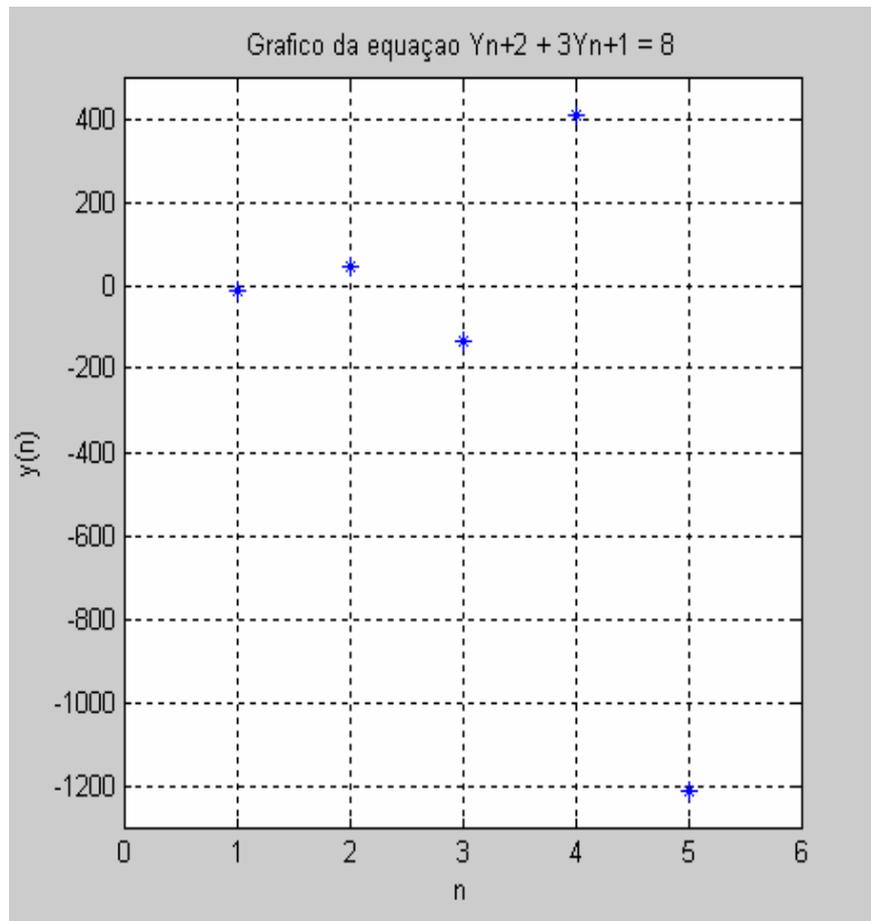
Como visto anteriormente a solução geral desta equação será a soma da solução homogênea com a solução particular:

$$y_n = y_0 \cdot \lambda^n + D$$

Substituindo os valores encontrados tem-se:

$$y_n = 5 \cdot (-3)^n + 2$$

Agora será ilustrada a equação acima através do gráfico dado pela Figura 3:



**Figura 3:** Gráfico da solução do exemplo c), com variação para  $n$  de 1 à 5

## 2.2. EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS DE 2ª ORDEM

Usando (1.2) quando  $n=2$  e  $h(n)=0$ , obtêm-se uma equação de diferenças linear de 2ª ordem homogênea<sup>2</sup>:

$$y_{n+2} = ay_{n+1} - by_n \quad (4)$$

Para ser resolvida uma equação de 2ª ordem precisa-se de dois valores iniciais dados,  $y_0$  e  $y_1$ . Seja  $y_n = C\lambda^n$  solução da equação (4), utilizando um procedimento análogo ao que foi utilizado na resolução das equações de diferenças lineares de 1ª ordem, encontra-se então:

$$\begin{aligned} C\lambda^{n+2} - aC\lambda^{n+1} + bC\lambda^n &= 0 \\ C\lambda^n(\lambda^2 - a\lambda + b) &= 0 \\ \therefore \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - a\lambda + b &= 0 \end{aligned}$$

- Quando  $\lambda = 0$  será obtido  $y_n = 0$  para todo valor de  $n$  o que só faz sentido se  $y_0 = y_1 = 0$ . Esta solução é conhecida como solução trivial e em situações práticas não faz muito sentido.

- Quando  $\lambda \neq 0$ <sup>3</sup> será obtido  $P(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda + b$ , denominado como polinômio característico da equação (4) e suas raízes  $\lambda_{1,2}$  são chamadas de autovalores. As raízes de  $P(\lambda)$  são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (4.1)$$

Para equações lineares vale o princípio da superposição, isto é, se existem várias soluções, então a combinação linear entre elas também é uma solução. Como se inicia da idéia de que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  foram escolhidos para que  $C\lambda_1^n$  e  $C\lambda_2^n$  sejam soluções de (4), concluí-se que:

$$y_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n \quad (4.2),$$

também é solução de (4).

A solução geral para a equação (4) pode ser separada em três casos dependendo do valor do discriminante ( $\text{disc} = a^2 - 4b$ ):

1º) Se  $\text{disc} = a^2 - 4b > 0$ , então a equação possui duas raízes reais diferentes. A expressão (4.2) será a solução geral da equação (4).

<sup>2</sup> A equação pode ser apresentada na forma  $a_1y_{n+2} = a_2y_{n+1} + a_3y_n$  como visto na equação (1.2), sendo  $a_1 \neq 0$ , fazendo as seguintes alterações  $a = \frac{a_2}{a_1}$  e  $b = \frac{-a_3}{a_1}$  chega-se facilmente na equação (4).

<sup>3</sup> A partir de agora serão resolvidas equações deste tipo, assim serão trabalhadas as equações de diferenças com soluções não triviais.

2º) Se  $\text{disc} = a^2 - 4b = 0$ , então a equação possui uma única raiz real de multiplicidade dois. É possível se encontrar a expressão da solução geral da seguinte forma:

Primeiramente tem-se que o discriminante:

$$\text{disc} = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot b = 0$$

Agora serão calculadas as raízes:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-a) \pm \sqrt{\text{disc}}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm 0}{2}$$

$$\lambda = \lambda_{1,2} = \frac{a}{2}$$

Assim:  $\lambda_1 = \lambda = \frac{a}{2}$  e  $\lambda_2 = n \cdot \lambda = n \cdot \frac{a}{2}$

$\lambda_2$  também é solução da equação pois é uma combinação linear da outra solução encontrada.

Portanto a expressão neste caso é da forma:

$$\begin{aligned} y_n &= A_1 \cdot \lambda^n + A_2 \cdot n \cdot \lambda^n \\ y_n &= \lambda^n \cdot (A_1 + n \cdot A_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

3º) Se  $\text{disc} = a^2 - 4b < 0$ , serão encontradas duas raízes complexas que são iguais em módulo.

Olhando (4.1) são observadas as raízes, neste caso em que elas são complexas denomina-se:

$$\lambda_1 = t + ui \quad \text{e} \quad \lambda_2 = t - ui \quad (4.4)$$

Onde:  $t = \frac{a}{2}$  e  $u = \frac{\sqrt{-a^2 + 4b}}{2}$

Quando são obtidos valores complexos para  $\lambda$  é necessário que faça sentido as soluções gerais que envolvem potências de números complexos, como por exemplo:

$$y_n = A_1(t + ui)^n + A_2(t - ui)^n \quad (4.5)$$

Um número complexo possui duas representações equivalentes. Uma delas é  $t + ui$  que é a representação de um ponto no plano complexo com coordenadas  $(t, u)$ . A outra forma de representar é especificando um ângulo  $\phi$  na posição habitual (medido à direita do eixo positivo até  $t + ui$ ) e a distância  $r$ , medida do ponto  $(t, u)$  até o ponto de origem, representando então o número complexo pelo par  $(r, \phi)$ , assim as coordenadas podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} t &= r \cdot \cos \phi \\ u &= r \cdot \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \quad (4.6)$$

Se for considerado (4.6) como um sistema pode-se obter as seguintes relações:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{t^2 + u^2} \\ \phi &= \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{t}\right) \end{aligned}$$

Agora reescrevendo (4.4) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} t + ui &= r(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \\ t - ui &= r(\cos \phi - i \operatorname{sen} \phi) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Utilizando as expressões encontradas em (4.7) reescreve-se a solução (4.5):

$$\begin{aligned} y_n &= A_1 [r(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)]^n + A_2 [r(\cos \phi - i \operatorname{sen} \phi)]^n \\ y_n &= A_1 r^n (\cos(n\phi) + i \operatorname{sen}(n\phi)) + A_2 r^n (\cos(n\phi) - i \operatorname{sen}(n\phi)) \end{aligned}$$

Ao fazer  $B_1 = A_1 + A_2$  e  $B_2 = (A_1 - A_2)i$ , tem-se:

$$y_n = B_1 r^n \cos(n\phi) + B_2 r^n \operatorname{sen}(n\phi) \quad (4.8)$$

### 2.2.1. Exemplos

Agora serão resolvidas algumas equações de diferenças de 2ª ordem lhes acrescentando valores numéricos:

**a)**  $x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 0$ ;  $x_0 = 6$  e  $x_1 = 3$

Deve-se primeiramente obter o polinômio característico e em seguida encontrar os autovalores que são as raízes do polinômio.

$$\begin{aligned} D\lambda^{n+2} + D\lambda^{n+1} - 2D\lambda^n &= 0 && (\div D\lambda^n) \\ \lambda^2 + \lambda - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\operatorname{disc} = 1 + 8 = 9 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1$$

Logo a solução geral é:

$$\begin{aligned} x_n &= A_1 (-2)^n + A_2 (1)^n \\ x_n &= A_1 (-2)^n + A_2 \end{aligned}$$

Mas como foram dados os valores iniciais,  $x_0$  e  $x_1$ , pode-se encontrar os valores de  $A_1$  e  $A_2$  da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_0 = A_1(-2)^0 + A_2 \\ x_1 = A_1(-2)^1 + A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = A_1 \cdot 1 + A_2 \\ 3 = A_1 \cdot (-2) + A_2 \end{cases}$$

Ao ser resolvido este sistema encontra-se os valores de  $A_1$  e  $A_2$ , que são:

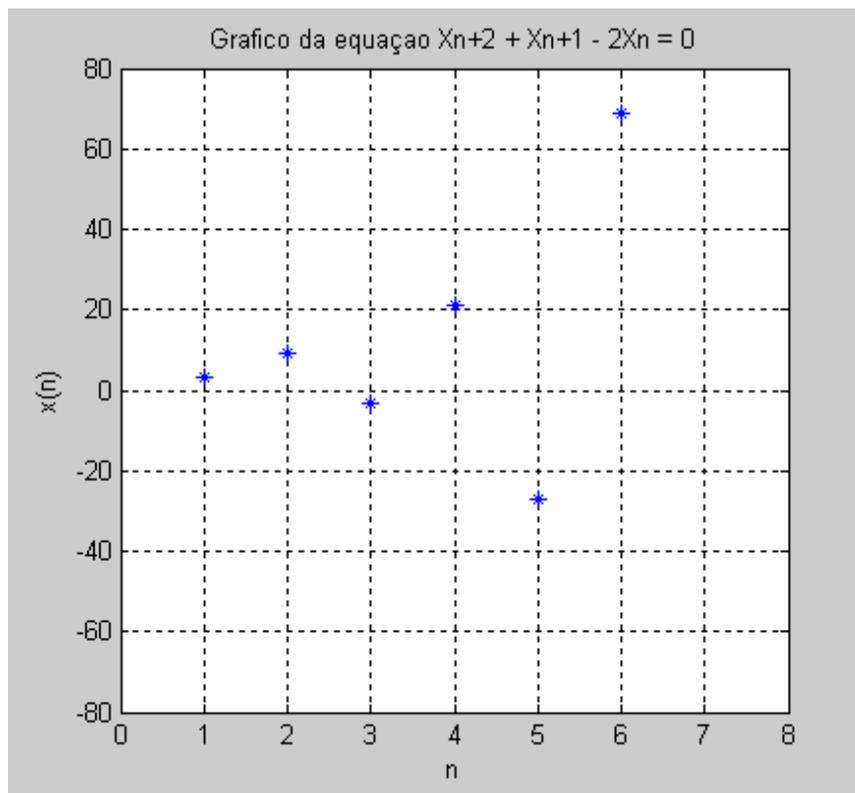
$$A_1 = 1 \quad e \quad A_2 = 5$$

Agora substituindo os valores encontrados de  $A_1$  e  $A_2$ , será encontrada a solução:

$$x_n = 1(-2)^n + 5(1)^n$$

$$x_n = (-2)^n + 5$$

Em seguida será apresentado o gráfico da equação de acordo com a Figura 4:



**Figura 4:** Gráfico da solução do exemplo a), com variação para  $n$  de 1 a 6.

**b)**  $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0; \quad y_0 = 8 \quad e \quad y_1 = 15$

Encontrando o polinômio característico e os autovalores:

$$D\lambda^{n+2} - 6D\lambda^{n+1} + 9D\lambda^n = 0 \quad (\div D\lambda^n)$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$disc = 36 - 36 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$\lambda = \lambda_{1,2} = \frac{6}{2} = 3$$

Neste caso tem-se a solução geral:

$$y_n = A_1(3)^n + nA_2(3)^n$$

$$y_n = 3^n(A_1 + nA_2)$$

Falta encontrar  $A_1$  e  $A_2$ :

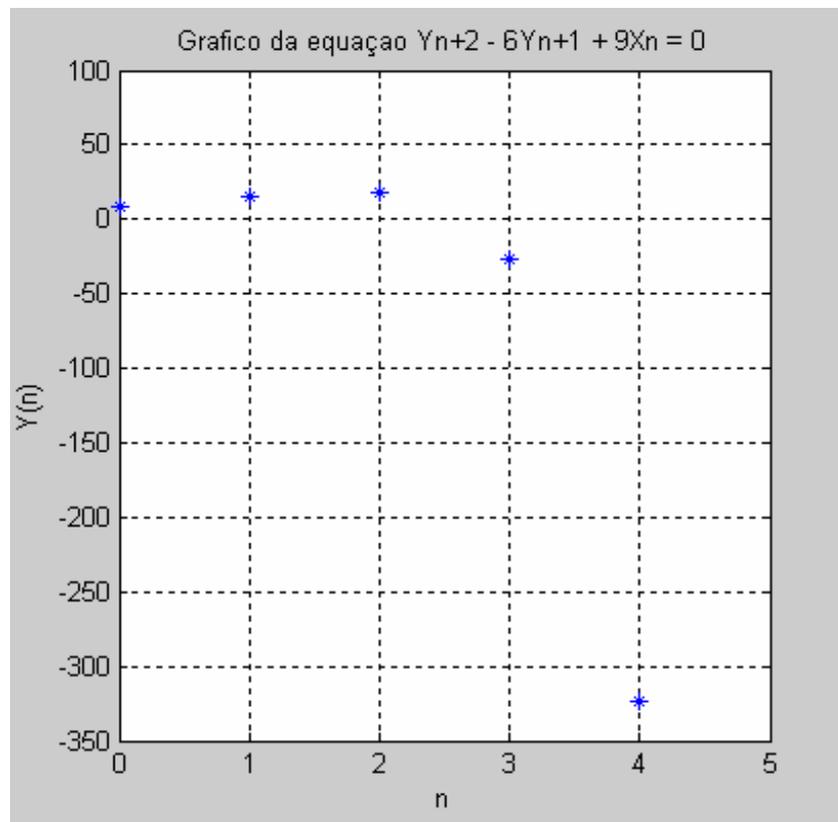
$$\begin{cases} y_0 = (A_1 + 0 \cdot A_2) \cdot 3^0 \\ y_1 = (A_1 + 1A_2) \cdot 3^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = A_1 \\ 15 = (A_1 + A_2) \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow A_1 = 8 \quad e \quad A_2 = -3$$

Substituindo valores de  $A_1$  e  $A_2$ :

$$y_n = (8 + n \cdot (-3)) \cdot 3^n$$

$$y_n = (8 - 3n) \cdot 3^n$$

A seguir o gráfico desta equação de acordo com a Figura 5:



**Figura 5:** Gráfico da solução do exemplo b), com variação para  $n$  de 1 a 4.

c)  $y_{n+2} + y_n = 0$ ;  $y_0 = 3$  e  $y_1 = 8$

Encontrando o polinômio característico e os autovalores:

$$D\lambda^2 + D\lambda = 0 \quad (\div D\lambda)$$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

Desta vez como foram encontrados autovalores complexos procede-se da maneira vista anteriormente para que tenha sentido a solução da equação.

Primeiramente observa-se que:  $\lambda_{1,2} = \pm i = t \pm ui \Rightarrow t = 0$  e  $u = 1$

$$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

Agora deve-se encontrar os valores de:

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{0}\right) \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

Substituindo os valores na expressão:

$$y_n = r^n (C_1 \cos(n\phi) + C_2 \operatorname{sen}(n\phi))$$

$$y_n = 1^n \left( C_1 \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

Tem-se:

$$y_n = C_1 \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

Agora falta encontrar a partir dos dados iniciais os valores de  $C_1$  e  $C_2$ :

$$y_0 = C_1 \cos\left(0 \frac{\pi}{2}\right) + C_2 \left(0 \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 3 = C_1 \cos(0) + C_2 \operatorname{sen}(0)$$

$$y_1 = C_1 \cos\left(1 \frac{\pi}{2}\right) + C_2 \left(1 \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 8 = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \\ 8 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} 3 = C_1 \\ 8 = C_2 \end{cases}$$

Logo a solução da equação é:  $y_n = 3 \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) + 8 \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right)$

### 2.3. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES

Por exemplo, considere um sistema de equação do tipo:

$$\begin{cases} x_n = ex_{n-1} + fy_{n-1} \\ y_n = gx_{n-1} + hy_{n-1} \end{cases} \quad (5)$$

Este sistema pode ser resolvido de duas formas:

1º) Fazer o sistema de duas equações de 1ª ordem tornarem-se uma equação de 2ª ordem para uma das variáveis, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ex_n + fy_n \\ x_{n+1} &= ex_n + f(gx_{n-1} + hy_{n-1}) \\ x_{n+1} &= ex_n + fgx_{n-1} + h(fy_{n-1}) \\ x_{n+1} &= ex_n + fgx_{n-1} + h(x_n - ex_{n-1}) \\ x_{n+1} &= ex_n + fgx_{n-1} + hx_n - hex_{n-1} \\ x_{n+1} - (e+h)x_n + (he - fg)x_{n-1} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Depois que foi encontrada a equação de 2ª ordem (6) em função da variável  $x_n$ , deve-se resolvê-la conforme foi especificado anteriormente.

2º) A outra maneira de se resolver o sistema de equações (5) é utilizando algumas técnicas de álgebra linear.

Reescrevendo o sistema (5) com notação matricial:

$$V_n = MV_{n-1}$$

Onde: 
$$M = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad V_{n-1} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Considerando como solução do sistema: 
$$V_n = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \lambda^n = \begin{pmatrix} A\lambda^n \\ B\lambda^n \end{pmatrix}$$

Será obtido: 
$$\begin{pmatrix} A\lambda^n \\ B\lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A\lambda^{n-1} \\ B\lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\lambda^n = eA\lambda^{n-1} + fB\lambda^{n-1} \\ B\lambda^n = gA\lambda^{n-1} + hB\lambda^{n-1} \end{cases} \quad (\div \lambda^{n-1})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = A(e - \lambda) + Bf \\ 0 = Ag + B(h - \lambda) \end{cases}$$

Que é equivalente à: 
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e - \lambda & f \\ g & h - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Logo existem duas possibilidades:

- Ou  $V = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , que é a solução trivial.

- Ou  $\det \begin{pmatrix} e - \lambda & f \\ g & h - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad eh - (e + h)\lambda + \lambda^2 - fg = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (e + h)\lambda + eh - fg = 0 \quad (7)$$

E então será encontrado novamente um polinômio característico em função de  $\lambda$ .

Ao reescrevermos (7) como:  $\lambda^2 - a\lambda + b = 0$

Onde:  $a = e + h = \text{Tr } M = \text{traço da matriz } M^4$

$$b = eh - fg = \det M = \text{determinante da matriz } M^5$$

Para efetuar a resolução do polinômio característico encontrado utilizam-se as mesmas técnicas relatadas anteriormente.

Nota-se que ambas as formas levam ao mesmo resultado final.

### 2.3.1. Exemplos

Resolução de um sistema de equação de 1ª ordem com valores numéricos.

a) 
$$\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema na forma matricial:  $V_n = MV_{n-1}$

Onde:  $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad V_{n-1} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$

Supondo que  $V_n = \begin{pmatrix} A\lambda^n \\ B\lambda^n \end{pmatrix}$  seja solução:

<sup>4</sup> O traço de uma matriz quadrada é a soma das entradas da diagonal principal.

<sup>5</sup> Determinante é um número que se associa a matrizes quadradas. O cálculo do determinante para matrizes de ordem 2x2 (estas que serão utilizadas neste trabalho) é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A\lambda^n \\ B\lambda^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A\lambda^{n-1} \\ B\lambda^{n-1} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} A\lambda^n = 3A\lambda^{n-1} + 2B\lambda^{n-1} \\ B\lambda^n = A\lambda^{n-1} + 4B\lambda^{n-1} \end{cases} & \quad (\div \lambda^{n-1}) \\ \Rightarrow \begin{cases} 0 = A(3 - \lambda) + 2B \\ 0 = A + B(4 - \lambda) \end{cases} \end{aligned}$$

Que é equivalente à:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

A solução trivial é fazer  $A=B=0$ , o que não é normalmente de grande interesse em situações práticas.

A solução procurada é então:  $\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$disc = 49 - 40 = 9 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 2$$

$$\therefore A \cdot 5^n + B \cdot 2^n$$

### 3. MODELOS BIOLÓGICOS: UMA APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES

É de interesse dos biólogos terem idéia de como será o comportamento a priori de certos processos, após algumas gerações, a partir de dados experimentais coletados. A modelagem é a tentativa de encontrar os modelos matemáticos mais realísticos possíveis que descrevem o processo em questão, de forma que se tenham condições de resolver estes modelos e avaliar-se que parâmetros podem intervir na continuidade do processo.

Já que nem todos os processos biológicos ocorrem em tempo contínuo então se faz necessário utilizar equações de diferenças. Por exemplo, a reprodução de certos animais acontece a cada seis meses, um ano, dois anos, etc. A colheita de plantas depende de período sazonal que pode ser medido em meses. Assim deve-se avaliar que unidade de tempo será mais adequada para ser considerada como geração.

Nos processos tratados neste capítulo far-se-ão algumas suposições para tornar possível a resolução destes problemas de uma forma simples através de equações de diferenças lineares. Estes modelos podem não ser os mais realísticos, mas mesmo assim através da análise de suas resoluções podem ser obtidas algumas informações interessantes. Conforme for aumentando o nível de estudo é possível se trabalhar com modelos mais elaborados, onde mais fatores são levados em consideração na sua modelagem.

Os modelos apresentados a seguir são sugestões de trabalhos e exercícios retirados dos livros que foram utilizados para estudar e compreender o assunto em questão neste trabalho.

#### 3.1. MODELO 1: UMA POPULAÇÃO DE INSETOS

Insetos geralmente têm mais que um estágio em seus ciclos de vida até chegarem à maturidade. O ciclo completo pode levar semanas, meses ou anos. Porém, é de costume utilizar somente uma geração como unidade básica de tempo quando se tenta descrever um modelo para o crescimento da população de insetos. Muitos estágios do ciclo de vida podem ser descritos por muitas equações de diferenças, mas freqüentemente o sistema de equações é reduzido para uma única equação com combinações de todos os parâmetros elementares que aparecem nas demais.

Neste exemplo será considerado o processo de reprodução de uma população de afídios<sup>6</sup>. As fêmeas desta espécie depositam uma secreção contendo ovos nas folhas dos poplares<sup>7</sup>. Todos os descendentes dos afídios estão contidos nesta secreção, mas somente alguma fração destes eclode e sobrevive até a fase adulta. Embora geralmente a capacidade de reprodução e a probabilidade de sobrevivência dependam das condições do ambiente, da qualidade do alimento, do tamanho da população, entre outros, momentaneamente estes detalhes serão ignorados para estudar um modelo simples onde todos os parâmetros são considerados constantes e assim pode-se modelar o problema usando equações de 1ª ordem.

Primeiramente serão denominadas as variáveis e os parâmetros:

- $a_n$  : número de fêmeas adultas de afídios na geração  $n$ ;
- $p_n$  : número de descendentes na geração  $n$ ;
- $f$  : número de descendentes por fêmea;
- $m$  : taxa de mortalidade;
- $r$  : razão de fêmeas pelo total de adultos afídios.

Agora utilizando estes parâmetros e variáveis serão representadas as sucessivas populações de afídios que serão utilizadas para obter uma expressão para o número de fêmeas adultas na  $n$ -ésima geração, supondo que existam inicialmente  $a_0$ <sup>8</sup> fêmeas.

A equação para o número de descendentes na geração  $n+1$  é igual ao número de descendentes de cada fêmea multiplicado pela quantidade de fêmeas adultas na geração  $n$ :

$$p_{n+1} = f \cdot a_n \quad (5)$$

Além disto, a fração de descendentes que sobrevivem até a fase adulta é de  $1-m$ , isto porque a fração de mortalidade é  $m$ . Conhecendo que a proporção de fêmeas no total de descendentes que chegam à fase adulta é  $r$  encontramos que o número total de fêmeas na geração  $n+1$  é igual a proporção de fêmeas multiplicadas pela fração de descendentes que sobrevivem até a fase adulta e ainda multiplicada pelos descendentes da geração  $n+1$ :

$$a_{n+1} = r \cdot (1 - m) \cdot p_{n+1} \quad (6)$$

Ao serem agrupadas as equações (5) e (6) numa única equação:

$$a_{n+1} = [r \cdot (1 - m) \cdot f] \cdot a_n \quad (7)$$

---

<sup>6</sup> Afídios: são insetos diminuídos que se alimentam da seiva de plantas. São exemplos de afídios os pulgões das plantas. Classificação científica: Reino: Animalia. Filo: Arthropoda. Classe: Insecta. Ordem: Hemíptera. Subordem: Homóptera. Superfamília: Aphidoidea. Informações no site <http://pt.wikipedia.org/wiki/Afídios> [12].

<sup>7</sup> Poplares: árvores que hospedam os descendentes dos afídios.

<sup>8</sup>  $a_0$  é natural e não nulo.

Observa-se que a expressão  $f \cdot r \cdot (1 - m)$  é o número de descendentes que chegam à fase adulta que cada fêmea produz.

Utilizando a metodologia vista no capítulo anterior é possível resolver a equação (7), onde é encontrada a solução para o número de fêmeas adultas na geração  $n$ , dada por:

$$a_n = [f \cdot r \cdot (1 - m)]^n \cdot a_0 \quad (8)$$

Vale ressaltar que pelo problema teórico que está sendo relatado as constantes  $f$ ,  $r$  e  $m$  terão valores positivos, e que  $a_0$  é o número inicial de fêmeas a partir do momento que se está considerando.

A partir da solução pode-se agora analisar se haverá crescimento ou decréscimo desta população de insetos. Têm-se as seguintes opções:

- Se  $f \cdot r \cdot (1 - m) = 1$ , a população se manterá constante já que teríamos  $a_{n+1} = 1^n a_0 = a_0$ ;
- Se  $f \cdot r \cdot (1 - m) < 1$ , a população irá decrescer até se extinguir;
- Se  $f \cdot r \cdot (1 - m) > 1$ , a população crescerá indefinidamente com o passar do tempo.

Outras questões que podem ser avaliadas são quando se utiliza alguns valores numéricos, como será visto nos seguintes exemplos:

Exemplo 1: Se a taxa de mortalidade de afídios é de 80% e a razão de fêmeas pelo número total de afídios é de 50%, qual é o número mínimo de descendentes exigidos para que se previna a extinção?

Para resolver este problema primeiramente denominam-se os valores dos parâmetros em questão:

$$m = 0,8 \quad r = 0,5$$

Então é preciso saber para quais valores de  $f$  não acontecerá a extinção da espécie, ou seja, precisamos saber qual a quantidade mínima de descendentes que cada fêmea deve ter para que não aconteça a extinção.

$$a_n = [f \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,8)]^n \cdot a_0$$

$$a_n = [f \cdot 0,5 \cdot 0,2]^n \cdot a_0$$

$$a_n = [0,1 \cdot f]^n \cdot a_0$$

Neste caso para que não haja extinção deve-se garantir que:

$$f \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,8) = f \cdot 0,1 \geq 1$$

$$f \geq 10$$

O resultado é independente do número inicial de fêmeas, já que  $f$  é o número de descendentes por cada fêmea não é preciso saber a quantidade inicial de fêmeas que existiam para que se encontre este valor.

Exemplo 2: Se os dados coletados forem que a taxa de mortalidade é de 95%, a razão de fêmeas pelo número total de afídios é de 40%, o número de descendentes por fêmea for igual a 100 e para serem obtidas certas comparações serão supostas as quantidades iniciais de fêmeas iguais a 15, 50 e 75. De acordo com estes dados pode-se esboçar o gráfico da continuação da população após algumas gerações.

Primeiramente denominam-se os valores dos parâmetros em questão:

$$m = 0,95 \quad r = 0,4 \quad f = 100 \quad a_0 = 15, 50, 75$$

Encontra-se a equação da solução substituindo os dados:

$$a_n = [f \cdot r \cdot (1 - m)]^n \cdot a_0$$

$$a_n = [100 \cdot 0,4 \cdot (1 - 0,95)]^n \cdot a_0$$

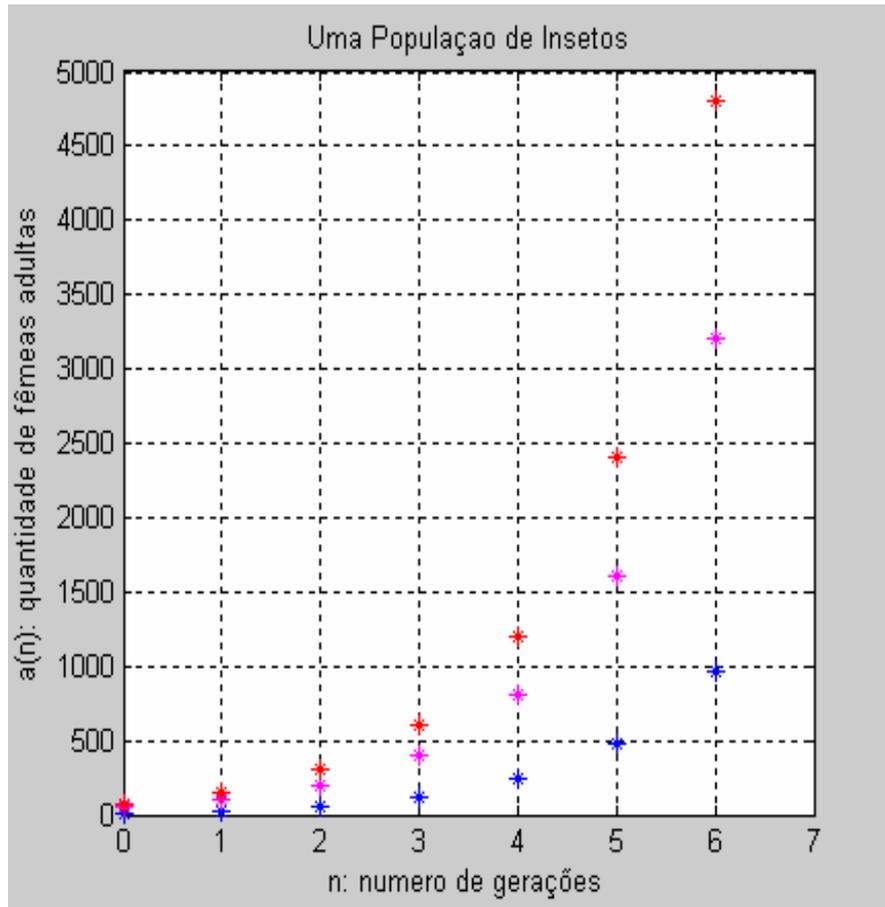
$$a_n = [40 \cdot 0,05]^n \cdot a_0$$

$$a_n = 15 \cdot 2^n \quad (8.1)$$

$$a_n = 50 \cdot 2^n \quad (8.2)$$

$$a_n = 75 \cdot 2^n \quad (8.3)$$

A partir das equações (8.1), (8.2) e (8.3) será feito o gráfico para que se possa avaliar o comportamento da população após algumas gerações, conforme a Figura 6:



**Figura 6:** Os pontos azuis correspondem à equação (8.1), os pontos rosa correspondem à equação (8.2) e os pontos vermelhos correspondem à equação (8.3). Este gráfico apresenta a quantidade de fêmeas no decorrer de 6 gerações para alguns dados iniciais diferentes, estes de acordo com os valores citados no Exemplo 2.

Observa-se, a partir da análise do gráfico, que com estes dados supostos a população de insetos irá crescer com maior ou menor intensidade no decorrer das gerações dependendo da quantidade inicial de fêmeas adultas  $a_0$ .

### 3.2. MODELO 2: ESQUEMATIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE GLÓBULOS VERMELHOS NO SANGUE

O seguinte problema lida com o número de glóbulos vermelhos que circulam no sangue. Através de uma aproximação é possível de apresentar este problema como um modelo discreto utilizando as equações de diferenças de 2ª ordem.

No sistema circulatório os glóbulos vermelhos estão constantemente sendo destruídos e substituídos, desde que as células que carregam oxigênio pelo corpo sejam suficientes para manter um nível estável. Assumindo que o baço destrói certa fração de células diariamente e que a medula produz um número de células proporcionais ao que foi perdido no dia anterior.

Para este problema serão consideradas as seguintes variáveis e parâmetros:

- $R_n$  : número de glóbulos vermelhos em circulação no dia  $n$ ;
- $M_n$  : número de glóbulos vermelhos produzidos pela medula no dia  $n$ ;
- $f$  : fração dos glóbulos vermelhos removidos pelo baço;
- $g$  : produção constante (número produzido por número perdido).

Disto seguem as seguintes equações:

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= (1-f) \cdot R_n + M_n \\ M_{n+1} &= g \cdot f \cdot R_n \end{aligned}$$

Segue que então:  $M_n = g \cdot f \cdot R_{n-1}$

Logo a equação para o número de glóbulos vermelhos em circulação no dia  $n+1$  pode ser escrita como:

$$R_{n+1} = (1-f) \cdot R_n + g \cdot f \cdot R_{n-1} \quad (9)$$

Onde  $(1-f) \cdot R_n$  significa as células que permanecem em circulação do dia anterior ( $n-1$ ) no dia atual ( $n$ ), e  $g \cdot f \cdot R_{n-1}$  são as células que foram produzidas no dia ( $n$ ).

Resolvendo a equação (9) encontram-se os seguintes autovalores:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(1-f) \pm \sqrt{(1-f)^2 + 4 \cdot g \cdot f}}{2}$$

Serão analisadas as três possibilidades de solução para  $R_n$  :

1º) Se  $(1-f)^2 + 4 \cdot g \cdot f = 0$ , então:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1-f}{2} = \lambda$$

Neste caso a solução para  $R_n$  é:

$$\begin{aligned} R_n &= A \cdot \lambda^n + B \cdot n \cdot \lambda^n \\ R_n &= A \cdot \left(\frac{1-f}{2}\right)^n + B \cdot n \cdot \left(\frac{1-f}{2}\right)^n \quad (9.1) \end{aligned}$$

2º) Se  $(1-f)^2 + 4 \cdot g \cdot f > 0$ , então:

$$\lambda_1 = \frac{1-f + \sqrt{(1-f)^2 + 4 \cdot f \cdot g}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1-f - \sqrt{(1-f)^2 + 4 \cdot f \cdot g}}{2} \quad (9.2)$$

Neste caso a solução para  $R_n$  é:

$$R_n = A \cdot \lambda_1^n + B \cdot \lambda_2^n$$

$$R_n = A \cdot \left( \frac{1-f + \sqrt{(1-f)^2 + 4 \cdot f \cdot g}}{2} \right)^n + B \cdot \left( \frac{1-f - \sqrt{(1-f)^2 + 4 \cdot f \cdot g}}{2} \right)^n \quad (9.3)$$

3º) Se  $(1-f)^2 + 4 \cdot g \cdot f < 0$ , então:

$$\lambda_1 = \frac{1-f}{2} + \frac{\sqrt{-(1-f)^2 - 4 \cdot f \cdot g}}{2} \quad i = t + ui \quad (9.4)$$

$$\lambda_2 = \frac{1-f}{2} - \frac{\sqrt{-(1-f)^2 - 4 \cdot f \cdot g}}{2} \quad i = t - ui \quad (9.5)$$

Neste caso a solução para  $R_n$  é:

$$R_n = r^n [A \cdot \cos(n \cdot \alpha) + B \cdot \text{sen}(n \cdot \alpha)] \quad (9.6)$$

Onde  $r = \sqrt{t^2 + u^2}$  e  $\alpha = \text{arctg}\left(\frac{t}{u}\right)$ .

Em ambos os casos para saber os valores de  $A$  e  $B$  é preciso conhecer os valores de duas condições iniciais  $R_0$  e  $R_1$ .

Será trabalhada a questão do seguinte ponto de vista:

‘Para que ocorra a homeostase<sup>9</sup> deve-se ter que  $R_n$  seja constante. Um caminho para este resultado é se for feito  $\lambda_1 = 1$  na equação (9.2), assim deve-se chegar a alguma conclusão sobre os valores de  $g$  e  $\lambda_2$ .’

$$1 = \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{(1-f) + \sqrt{(1-f)^2 + 4 \cdot g \cdot f}}{2}$$

$$2 - 1 + f = \sqrt{(1-f)^2 + 4 \cdot g \cdot f}$$

$$(1+f)^2 = (1-f)^2 + 4 \cdot g \cdot f$$

$$4 \cdot f = 4 \cdot g \cdot f$$

$$\therefore g = 1$$

<sup>9</sup> Homeostase: é a propriedade de um sistema aberto, seres vivos especialmente, de regular o seu ambiente interno de modo a manter uma condição estável, mediante múltiplos ajustes de equilíbrio dinâmico controlados por mecanismos de regulação inter-relacionados.

Sendo que  $g = 1$ , segue que  $\lambda_2$  na equação (9.2) deve ser:

$$\lambda_2 = \frac{1 - f - \sqrt{(1 - f)^2 + 4 \cdot 1 \cdot f}}{2}$$

Resolvendo esta equação chega-se a conclusão que:

$$\lambda_2 = -f .$$

Para este caso, em que se deseja que ocorra a homeostase, tem-se que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e que  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{R}$ , portanto a solução para a equação (9) deve ser da forma:

$$\begin{aligned} R_n &= A \cdot (1)^n + B \cdot (-f)^n \\ R_n &= A + B \cdot (-f)^n \end{aligned} \quad (9.4)$$

Agora supondo dois valores diferentes para  $f$  e para cada um destes valores também serão supostas certas quantidades iniciais  $R_0$  e  $R_1$ . A seguir se fará a substituição destes dados na solução (9.4) e em seguida será feita a comparação do comportamento que irá surgir dependendo dos dados iniciais coletados<sup>10</sup>.

- a) Supondo que o baço remove 50% dos glóbulos vermelhos, que a quantidade de glóbulos vermelhos contabilizados no primeiro dia foi 100 e no dia seguinte 40.

Os dados coletados são:  $f = 0,5$        $R_0 = 100$        $R_1 = 40$

Com estes dados pode-se resolver um sistema para encontrar os valores de  $A$  e  $B$ .

$$\begin{cases} R_0 = A + B \cdot (-0,5)^0 = 100 \\ R_1 = A + B \cdot (-0,5)^1 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = 100 \\ A - 0,5B = 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 60 \quad B = 40$$

Portanto a solução para estes dados é:

$$R_n = 60 + 40 \cdot (-0,5)^n \quad (9.5)$$

- b) Agora supondo que o baço remova 80% dos glóbulos vermelhos, que a quantidade de glóbulos vermelhos contabilizados no primeiro dia foi 30 e no dia seguinte 84.

Os dados coletados são:  $f = 0,8$        $R_0 = 30$        $R_1 = 84$

O sistema que será resolvido assim que estes dados forem substituídos é:

<sup>10</sup> Os valores numéricos que são supostos neste problema não são dados reais. Em trabalhos posteriores espera-se ter acesso a coletas de dados de exames verídicos.

$$\begin{cases} R_0 = A + B \cdot (-0,8)^0 = 30 \\ R_1 = A + B \cdot (-0,5)^1 = 84 \end{cases}$$

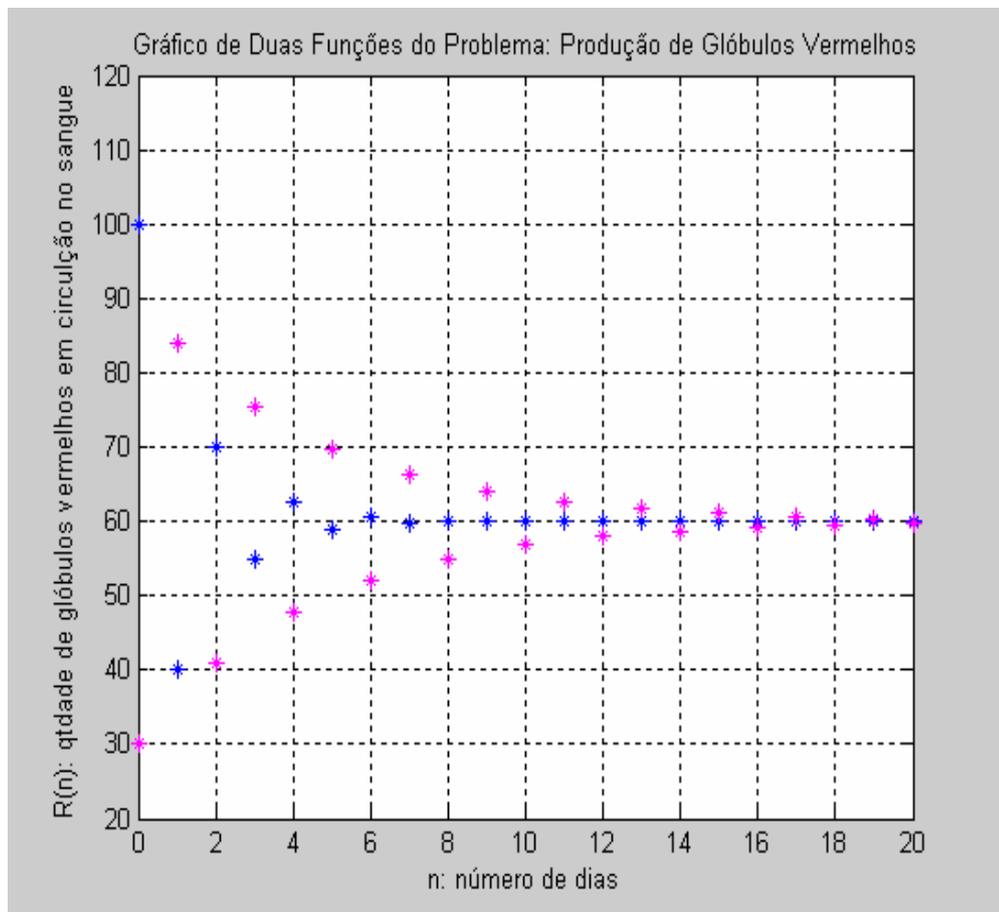
$$\begin{cases} A + B = 30 \\ A - 0,8B = 84 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 60 \quad B = -30$$

Portanto a solução para estes dados é:

$$R_n = 60 - 30 \cdot (-0,8)^n \quad (9.6)$$

Graficando juntamente as equações (9.5) e (9.6), será possível observar na Figura 7 que dependendo dos valores iniciais propostos o comportamento poderá estabilizar mais rapidamente.



**Figura 7:** Os pontos em azul correspondem à equação (9.5) e os pontos em rosa correspondem à equação (9.6). Gráfico do comportamento da produção de glóbulos vermelhos de acordo com os valores supostos nas letras **a)** e **b)**.

## 4. EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NÃO LINEARES

O que leva a estudar estas equações de diferenças não lineares é o fato de que a maioria dos processos biológicos são na verdade constituídos de funções não lineares.

Têm-se como exemplos de problemas que envolvem as equações de diferenças não lineares os modelos que envolvem a taxa de crescimento per capita de uma população, os modelos de dependência entre a população de presas e a população de predadores, a modelagem de ondas de doenças, entre outros.

Na biologia é de grande importância estudar o que pode vir a acontecer se ocorrerem perturbações em torno do equilíbrio, pois caso ocorra a instabilidade alguns problemas podem surgir, como a extinção de uma espécie, a homeostase pode ser interrompida, no balanço entre grupos que competem pode ser dada preferência a uns enquanto os outros podem ir se extinguindo, entre outros.

Neste capítulo serão estudadas as equações de diferenças não lineares através da análise qualitativa dos seus pontos de equilíbrio, como poderá ser visto a seguir.

### 4.1. FORMA DE UMA EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS NÃO LINEAR

Uma equação de diferenças não linear é uma equação da seguinte forma:

$$y_n = f(y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}, \dots) \quad (10),$$

onde  $y_n$  é um valor de  $y$  na geração  $n$  e a função  $f$  é uma expressão não linear dos argumentos, ou seja,  $f$  pode envolver potências, exponenciais, etc. A solução será uma fórmula geral que relaciona  $y_n$  com alguns valores inicialmente especificados, como por exemplo  $y_0$ ,  $y_1$  e assim por diante. Em poucos casos é possível se obter diretamente uma solução analítica quando a equação (10) é não linear; a seguir será estudado um procedimento qualitativo através da análise dos pontos de equilíbrio para solucionar problemas que envolvam estas equações.

**Definição 4:** Um ponto  $\bar{y}$  é denominado ponto de equilíbrio de uma função  $f(y)$  se  $f(\bar{y}) = \bar{y}$ .

Em termos da equação de diferenças  $y_{n+1} = f(y_n)$  a definição dada equivale a  $y_n = f(y_n) = \bar{y}$ , ou seja, quando a partir de um valor  $n$  não ocorre variação no valor  $y_n$  para o valor de  $f(y_n) = y_{n+1}$ , equivale a dizer que  $y_{n+1} - y_n = 0$ .

Exemplo: Encontrar os pontos de equilíbrio da função:  $f(x) = 2x^2 + x - 8$ :

Quer se encontrar para quais valores de  $\bar{x}$  que será verdadeira a afirmação  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ . Desta forma tem-se:

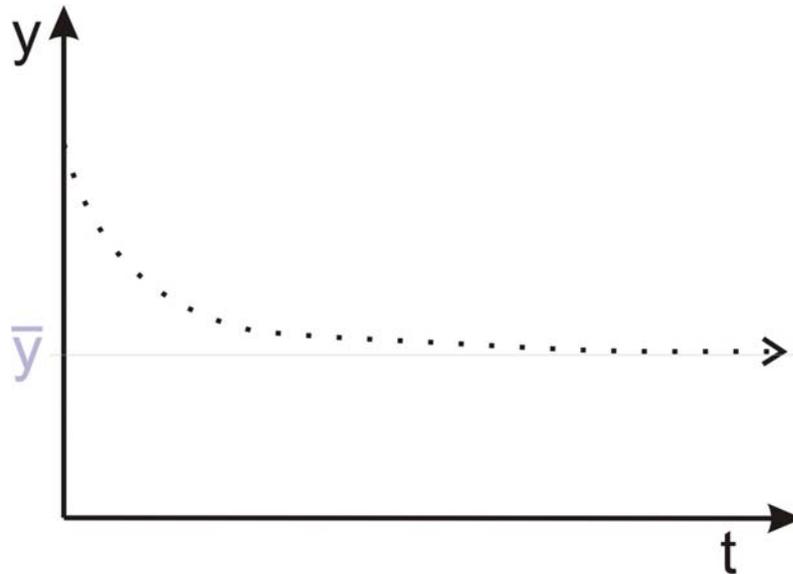
$$\begin{aligned}\bar{x} &= 2\bar{x}^2 + \bar{x} - 8 \\ 8 &= 2\bar{x}^2 \\ \sqrt{4} &= \sqrt{x^2} \\ \bar{x} &= \pm 2\end{aligned}$$

Sendo assim os pontos de equilíbrio desta equação são os valores de  $\bar{x} = \pm 2$ .

**Definição 5** - (Definição para Estabilidade em  $\mathfrak{R}^1$ ): Um ponto de equilíbrio  $\bar{y}$  é considerado estável se dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que  $y_n$  de acordo com a equação (10) satisfaça  $\|\bar{y} - y_n\| < \varepsilon$ , para todo  $n \geq n_0$ .

Observe que  $y_n$  pode ser considerado como uma seqüência de números assim a definição acima quer dizer que para todo  $y_n$ , tal que  $n \geq n_0$ , a distância entre  $y_n$  e o ponto de equilíbrio  $\bar{y}$  será sempre menor que certa medida dada  $\varepsilon$ , ou seja, que a partir de certo valor  $y_{n_0}$  os demais valores  $y_{n_0+1}, y_{n_0+2}, y_{n_0+3}, \dots$  se manterão sempre bem próximos do ponto de equilíbrio.

A seguir apresenta-se uma ilustração da definição 5 dada pela figura 8:



**Figura 8:** A figura acima ilustra um comportamento estável monótono, onde os pontos  $y_n$  tendem ao ponto de equilíbrio  $\bar{y}$ .

#### 4.2. ESTUDO DA ESTABILIDADE DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NÃO LINEARES DE 1ª ORDEM

Uma equação de diferenças não linear de 1ª ordem é da forma:

$$y_{n+1} = f(y_n) \quad (11)$$

Estas equações serão analisadas através de seus pontos de equilíbrio. Para as equações de diferenças tem-se a estabilidade do processo quando não acontecem variações entre o estágio  $n$  para o estágio  $n+1$ , ou seja, quando:

$$y_{n+1} = y_n = \bar{y} \quad (12.1).$$

Um ponto de equilíbrio ocorre quando:

$$\bar{y} = f(\bar{y}) \quad (12.2),$$

dessa forma pode-se observar que  $\bar{y}$  é ponto fixo<sup>11</sup> da função  $f$ .

Será dado início a um procedimento que permitirá analisar estas equações, mesmo sabendo que soluções matematicamente exatas não são facilmente encontradas, informações qualitativas sobre a ocorrência de mudanças são de grande importância. Supondo, para iniciar este procedimento, que ocorram pequenas perturbações próximas ao ponto do equilíbrio e em

<sup>11</sup> Ver maiores informações sobre ponto fixo no Apêndice.

seguida deve ser feita a análise de como será o comportamento da solução após estas perturbações.

Assuma que já tenha sido determinado  $\bar{y}$ , um ponto de equilíbrio de acordo com a equação (12.2). Para explorar a estabilidade será utilizada a seguinte pergunta: ‘Dado  $n_0$  suficientemente grande e  $n \geq n_0$ , o valor  $y_n$  irá tender para o ponto de equilíbrio  $\bar{y}$ , ou para longe dele?’

Os passos que serão mostrados a seguir reduzirão o problema para uma equação de diferenças linear onde se podem aplicar alguns métodos apresentados nos capítulos anteriores.

Supondo que  $y_n'$  seja uma pequena perturbação do ponto de equilíbrio  $\bar{y}$ , e que seja dada a solução:

$$y_n = \bar{y} + y_n' \quad (13).$$

Utilizando as equações (11), (12.1) e (12.2) e se a seguinte perturbação  $y_n'$  satisfizer a equação (13), pode-se encontrar que  $y_{n+1}'$  é igual a:

$$y_{n+1}' = y_{n+1} - \bar{y} = f(y_n) - \bar{y} = f(\bar{y} + y_n') - \bar{y} \quad (14)$$

Esta equação ainda não está escrita de forma onde as informações estejam claras, já que não é conhecido o valor da função  $f$  avaliada para  $\bar{y} + y_n'$ . Mas o valor de  $f$  pode ser aproximado ao ser explorado o fato de que  $y_n'$  é uma pequena quantidade, o que é bastante utilizado na resolução de muitos problemas não lineares. Sendo assim, escrevendo através da expansão da série de Taylor<sup>12</sup>, encontra-se que:

$$f(\bar{y} + y_n') = f(\bar{y}) + \left( \frac{df}{dy} \Big|_{\bar{y}} \right) y_n' + O(y_n'^2) \quad (15)$$

O termo  $O(y_n'^2)$  possui um valor muito pequeno e pode ser desconsiderado. Agora substituindo as informações encontradas em (15) na expressão encontrada em (14), tem-se:

$$y_{n+1}' \cong f(\bar{y} + y_n') - \bar{y} = f(\bar{y}) + \left( \frac{df}{dy} \Big|_{\bar{y}} \right) y_n' - \bar{y}.$$

Lembrando que se esta supondo conhecido o ponto de equilíbrio onde  $\bar{y} = f(\bar{y})$  e então  $f(\bar{y}) - \bar{y} = 0$ , conclui-se que:

<sup>12</sup> Ver maiores informações sobre séries de Taylor no Apêndice.

$$y'_{n+1} = \left( \frac{df}{dy} \Big|_{\bar{y}} \right) y'_n \quad (16.1).$$

Definindo que  $\lambda = \left( \frac{df}{dy} \Big|_{\bar{y}} \right)^{13}$ , a equação (16.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$y'_{n+1} = \lambda \cdot y'_n \quad (16.2)$$

Desta forma para pequenas perturbações a equação não linear (11) tornou-se uma equação linear vista na equação (16.2) que descreve o que acontece próximo de algum ponto de equilíbrio. Agora que o valor de  $\lambda$  é conhecido pode-se analisar se haverá crescimento ou decrescimento em conseqüências desses pequenos desvios em torno do ponto de equilíbrio, para isso serão usados os métodos que foram apresentados no primeiro capítulo.

Para descobrir como é o comportamento destes desvios devemos analisar a seguinte equação que define o comportamento das perturbações:

$$y'_n = \lambda^n \quad (17)$$

Sendo assim, conclui-se que as condições para se obter ou não a estabilidade são colocadas a seguir nos critérios de estabilidade.

#### 4.2.1. Critérios de estabilidade para funções discretas não lineares<sup>14</sup>

- Se  $|\lambda| < 1$  as perturbações irão se extinguir com o decorrer do tempo e tenderão ao ponto de equilíbrio, ou seja, irão convergir para  $\bar{y}$ . Neste caso é dito que  $\bar{y}$  é um ponto de equilíbrio **estável**, e ainda se  $0 < \lambda < 1$  tem-se convergência monótona e se  $-1 < \lambda < 0$  tem-se convergência oscilatória.
- Se  $|\lambda| > 1$  as perturbações irão aumentar indefinidamente com o decorrer do tempo e se afastarão do ponto de equilíbrio. Neste caso é dito que  $\bar{y}$  é um ponto de equilíbrio **instável** ou repulsor.

<sup>13</sup> Nota: Se faz um abuso de linguagem ao utilizar os símbolos de derivadas para definir autovalores, ao invés do símbolo de variações ( $\Delta$ ). Isto acontece já que na maioria dos livros usados como referência os autovalores das equações de diferenças também são definidos através do cálculo de derivadas, mas isto não afetará o trabalho, pois como será mostrado numa aplicação no próximo capítulo as derivadas e as variações levam aos mesmos resultados para este tipo de equações.

<sup>14</sup> Parâmetros encontrados no livro [1] das referências.

- Se  $|\lambda|=1$  as perturbações continuarão com mesma intensidade com o passar do tempo. Neste caso é dito que  $\bar{y}$  é um ponto de equilíbrio **neutramente estável**. Isto significa que a seqüência  $y_n$ , a partir de algum  $n$ , oscila em torno do ponto  $\bar{y}$ .

#### 4.2.2. Exemplos

a) Seja dada a seguinte equação de diferenças não linear:

$$x_{n+1} = \frac{K}{K_1 + \frac{K_2}{x_n}} = \frac{K \cdot x_n}{K_1 \cdot x_n + K_2} \quad (18.1),$$

onde  $K$ ,  $K_1$  e  $K_2$  são constantes. Sabe-se que os pontos de equilíbrio são os estados em que não ocorrem variações com a mudança de geração, ou seja, deve-se fazer que  $x_{n+1} = x_n = \bar{x}$ , agora se faz esta substituição na equação (18.1):

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{K\bar{x}}{K_1\bar{x} + K_2} \\ \bar{x}(K_1\bar{x} + K_2) &= K\bar{x} \\ \bar{x}(K_1\bar{x} + K_2 - K) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto existem dois pontos de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \bar{x}' = 0 \quad \text{ou} \quad K_1\bar{x}'' + K_2 - K = 0 \\ \Rightarrow \bar{x}'' = \frac{K - K_2}{K_1}, \text{ para } K_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Desta forma o ponto de equilíbrio não trivial é igual à:

$$\bar{x}'' = \frac{K - K_2}{K_1}, \text{ para } K_1 \neq 0. \quad (18.2)$$

Observação 2: Este tipo de equação como o da letra **a)** representa modelos biológicos de presa-predador, hospedeiro-parasita que utilizam a distribuição Binomial normal para sua resolução.

b) Seja dada a equação de diferenças não linear:

$$y_n = \frac{1}{2 + y_{n-1}},$$

Para encontrar os seus pontos de equilíbrio deve-se fazer:

$$\begin{aligned}\bar{y} = \frac{1}{2 + \bar{y}} &\Rightarrow \bar{y}^2 + 2\bar{y} - 1 = 0 \\ \Rightarrow \bar{y} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ \bar{y}' = -1 + \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \bar{y}'' = -1 - \sqrt{2}\end{aligned}$$

Agora que foram encontrados os pontos de equilíbrios, pode-se analisar se os mesmos são ou não estáveis através do cálculo do autovalor  $\lambda = \left( \frac{df}{dy} \Big|_{\bar{y}} \right)$ . A função desta equação é

$f(y) = \frac{1}{2 + y}$  agora se deve encontrar a derivada em relação ao ponto de equilíbrio:

$$\lambda = \left( \frac{df}{dy} \Big|_{\bar{y}} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{2 + y} \Big|_{\bar{y}} \right) = \frac{-1}{(2 + \bar{y})^2}$$

- Sendo  $\bar{y} = \bar{y}' = -1 + \sqrt{2}$ , tem-se:

$$\lambda = \frac{-1}{(2 + \bar{y})^2} = \frac{-1}{(2 - 1 + \sqrt{2})^2} = \frac{-1}{3 + 2\sqrt{2}} \cong -0,171572875$$

Neste caso  $-1 < \lambda \cong -0,171572875 < 0$ , logo este é um ponto de equilíbrio estável com convergência oscilatória.

- Sendo  $\bar{y} = \bar{y}'' = -1 - \sqrt{2}$ , tem-se:

$$\lambda = \frac{-1}{(2 + \bar{y})^2} = \frac{-1}{(2 - 1 - \sqrt{2})^2} = \frac{-1}{3 - 2\sqrt{2}} \cong -5,828427125$$

Neste caso  $|\lambda| = |-5,828427125| = 5,828427125 > 1$ , logo este é um ponto de equilíbrio oscilante instável.

### 4.3. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NÃO LINEARES DE ORDEM 2

Nesta parte do trabalho será apresentado um procedimento de como se analisar a estabilidade de um sistema de duas equações de diferenças não lineares.

Assumindo que duas variáveis independentes  $x_n$  e  $y_n$  estejam dispostas num sistema de equações como o que segue:

$$\begin{aligned}x_n &= f(x_n, y_n) \\y_n &= g(x_n, y_n)\end{aligned}\quad (19.1),$$

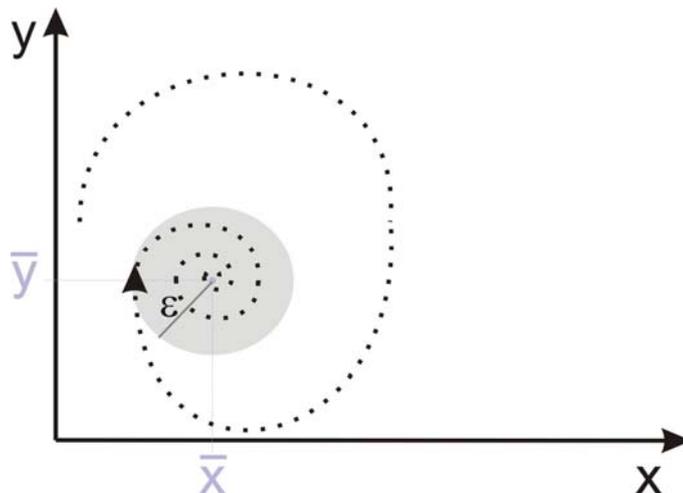
onde  $f$  e  $g$  são funções não lineares e que os pontos de equilíbrio  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  satisfaçam o seguinte:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= f(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{y} &= g(\bar{x}, \bar{y})\end{aligned}\quad (19.2).$$

**Definição 6** - (Estabilidade de um sistema de ordem 2): Um ponto de equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{y})$  é considerado estável se dado um círculo  $C$  com centro em  $(\bar{x}, \bar{y})$  e raio  $\varepsilon$ , com  $\varepsilon > 0$ , existe um  $n_0$  tal que  $(x_n, y_n) \in C$ , para todo  $n \geq n_0$ .

Esta definição quer dizer que a partir do ponto  $(x_{n_0}, y_{n_0})$  os demais pontos  $(x_{n_0+1}, y_{n_0+1}), (x_{n_0+2}, y_{n_0+2}), \dots$ , permanecerão bem próximos do ponto de equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{y})$ , ou seja, se manterão dentro do círculo  $C$ .

A seguir será apresentada uma ilustração da definição 6 dada na figura 9:



**Figura 9:** Esta figura apresenta um comportamento estável onde os pontos  $(x_n, y_n)$  convergem para o ponto de equilíbrio  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Para estudar a estabilidade nos pontos de equilíbrios será usado o fato de ocorrerem pequenos desvios nestes pontos, e como anteriormente para ser efetuada esta análise o sistema de equações de diferenças não lineares deverá ser linearizado para as pequenas perturbações  $x'_n$  e  $y'_n$ . Usando o mesmo raciocínio desenvolvido no caso com uma única variável encontra-se o seguinte:

$$\begin{aligned}x'_n &= \varphi_{11}x'_{n-1} + \varphi_{12}y'_{n-1} \\y'_n &= \varphi_{21}x'_{n-1} + \varphi_{22}y'_{n-1}\end{aligned}\quad (20),$$

onde:  $\varphi_{11} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}$ ,  $\varphi_{12} = \left. \frac{df}{dy} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}$ ,  $\varphi_{21} = \left. \frac{dg}{dx} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}$  e  $\varphi_{22} = \left. \frac{dg}{dy} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}$ .

A matriz constituída destes quatro coeficientes:  $M = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$ , é chamada de Jacobiano do sistema de equações (19.1).

Agora falta determinar se os pontos de equilíbrios são ou não estáveis, aqui serão relatadas duas maneiras de analisarmos a ocorrência da estabilidade.

- Uma forma seria a de encontrar a equação característica de (20) que é dada por:

$$\begin{aligned}\det[M - \lambda I] &= 0 \\ \det \left[ \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] &= \det \begin{pmatrix} \varphi_{11} - \lambda & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

O resultado será o polinômio característico:

$$\lambda^2 - a\lambda + b = 0 \quad (21),$$

Onde:  $a = \varphi_{11} + \varphi_{22} = \text{Tr } M = \text{traço da matriz } M$

$$b = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21} = \det M = \text{determinante da matriz } M$$

Utilizam-se os mesmos critérios denominados para  $\lambda$  como no caso de uma única variável, só que agora para ambos os  $\lambda$  encontrados, como por exemplo, para que o ponto de equilíbrio seja estável é necessário que ambas as raízes da equação (21) sejam em módulo menores que um, ou seja, os autovalores  $|\lambda_1| < 1$  e  $|\lambda_2| < 1$ .

**Propriedade:** Uma condição suficiente para que seja garantida a estabilidade de um ponto de equilíbrio para o caso de sistema de ordem 2 é:

$$2 > 1 + b > |a| \quad (22),$$

onde  $a$  é o traço da matriz  $M$  e  $b$  é o determinante da matriz  $M$ .

Prova: Para encontrar este resultado parti-se da pergunta: ‘Quais são as condições para o traço e o determinante da matriz  $M$  para que seja obtida a estabilidade?’

Lembrando que para um ponto de equilíbrio ser estável este deve satisfazer que  $|\lambda| < 1$ , como no caso de um sistema de ordem 2 existem dois  $\lambda$  é necessário garantir que ambos sejam menores que um, ou seja,  $|\lambda_1| < 1$  e  $|\lambda_2| < 1$  que é equivalente a  $-1 < \lambda_1 < 1$  e  $-1 < \lambda_2 < 1$ .

Para encontrar esta condição serão feitas as análises das raízes do polinômio característico, equação (21). Estas raízes são:

$$\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Observa-se que  $\lambda_1, \lambda_2$  são eqüidistantes ao valor  $\frac{a}{2}$ , ou seja,  $\frac{a}{2}$  é o ponto médio entre os valores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Como o que se deseja é que  $\lambda_1, \lambda_2 \in (-1, 1)$ , então sendo  $\frac{a}{2}$  o seu ponto médio, logo  $\frac{a}{2} \in (-1, 1)$ , ou seja:

$$\left| \frac{a}{2} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|a|}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad |a| < 2 \quad (23),$$

esta é uma condição encontrada para que haja estabilidade.

Dividindo a análise através do estudo em três casos:

- 1) Quando  $a^2 - 4b = 0$ ;
- 2) Quando  $a^2 - 4b > 0$ ;
- 3) Quando  $a^2 - 4b < 0$ .

Analisando o caso **1)** onde  $a^2 - 4b = 0$  sabe-se que as raízes da equação serão:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2},$$

e, portanto para que ocorra a estabilidade basta somente satisfazer a condição (23) já que os  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  não dependem do valor de  $b$ .

Analisando o caso **2)** onde  $a^2 - 4b > 0$ , tem-se duas raízes reais distintas como solução do polinômio característico (21). Para ambos os casos já se têm uma condição dada

por (23), além disso, neste caso necessariamente à distância  $\frac{a}{2}$  até uma ou outra raiz será menor que a distância até o último ponto do intervalo, isto implica que:

$$1 - \frac{|a|}{2} > \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

Como ambos os lados da desigualdade são maiores que zero ( $>0$ ), pode-se elevar ao quadrado mantendo o sinal de desigualdade:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{|a|}{2}\right)^2 &> \left(\frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow 1 - |a| + \frac{a^2}{4} &> \frac{a^2}{4} - \frac{4b}{4} \\ \Rightarrow 1 - |a| &> -b \\ \therefore 1 + b &> |a| \quad (24.1) \end{aligned}$$

E ainda pela condição (23) se  $|a| < 2$  então  $a^2 < 4$ . Juntando isto com a condição deste caso que é  $a^2 - 4b > 0 \Rightarrow a^2 > 4b$ , tem-se:

$$\begin{aligned} 4b < a^2 < 4 &\Rightarrow b < \frac{a^2}{4} < 1 \\ \therefore b &< 1 \end{aligned}$$

Sendo assim:

$$b < 1 \Rightarrow 1 + b < 1 + 1 \Rightarrow 1 + b < 2 \quad (24.2)$$

Juntando (24.1) e (24.2) encontra-se a condição desejada para que ocorra estabilidade:

$$2 > 1 + b > |a| \quad (22).$$

Analisando agora o caso **3**) observa-se que as raízes serão complexas:  $\lambda_1 = t + ui$  e  $\lambda_2 = t - ui$ , onde  $t = \frac{a}{2}$  e  $u = \frac{\sqrt{-a^2 + 4b}}{2}$ . Nesta situação para que se garanta a estabilidade é necessário que o módulo seja menor que um, ou seja:

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 + u^2} < 1 &\Rightarrow \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4b}{4} - \frac{a^2}{4}} < 1 \Rightarrow \sqrt{b} < 1 \\ \therefore |b| &< 1 \quad (25.1) \end{aligned}$$

E  $a^2 - 4b < 0 \Rightarrow a^2 < 4b$ , como  $a^2 > 0$  e  $4 > 0$  então  $b > 0$ , sendo assim o módulo pode ser retirado de (25.1):

$$b < 1 \Rightarrow 1 + b < 1 + 1 \Rightarrow 1 + b < 2 \quad (25.2)$$

E ainda:

$$a^2 - 4b < 0 \Rightarrow a^2 < 4b = 2b + 2b$$

Se  $0 < b < 1 \Rightarrow 1 + b^2 \geq 2b$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} a^2 &< 2b + 2b \leq 2b + 1 + b^2 \\ \Rightarrow a^2 &< b^2 + 2b + 1 \end{aligned}$$

Pode-se tirar a raiz mantendo a desigualdade já que ambos os lados da inequação acima são maiores que zero ( $>0$ ), logo:

$$|a| < b + 1 \quad (25.3)$$

Agora se pode observar que das condições (25.2) e (25.3) foi encontrada a condição esperada (22):

$$2 > 1 + b > |a| \quad (22).$$

#### 4.3.1. Exemplo

Através de um exercício proposto no livro KESHET, L. E. *Mathematical Models in Biology* [2], página 63, número 11<sup>15</sup>, serão analisadas quais as condições necessárias para que os pontos de equilíbrio do seguinte sistema sejam estáveis.

$$\begin{aligned} H_{t+1} &= f(H_t, P_t) = mH_t \left( 1 + l \frac{P_t}{k} \right) \\ P_{t+1} &= g(H_t, P_t) = H_t - \frac{H_{t+1}}{m} \end{aligned}$$

onde as constantes  $k, l, m$  são positivas.

Os pontos de equilíbrio deste sistema são encontrados ao se fazer:

$$\begin{aligned} H_{t+1} &= H_t = \bar{H} \\ P_{t+1} &= P_t = \bar{P} \end{aligned}$$

<sup>15</sup> Este é um exercício que possui um modelo utilizado para modelar sistemas de hospedeiro-parasita. Encontrado também em May (1978), Host-parasitoid in patchy environments: a phenomenological model. *J. Anim. Ecol.*, 47, 883-843.

$$\begin{aligned}\bar{H} &= m\bar{H}\left(1 + l\frac{\bar{P}}{k}\right) \Rightarrow \frac{1}{m} = 1 + l\frac{\bar{P}}{k} \Rightarrow \bar{P} = \frac{k}{l}\left(m^{1/k} - 1\right) \\ \bar{P} &= \bar{H} - \frac{\bar{H}}{m} \Rightarrow \bar{H}\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \bar{P} \Rightarrow \bar{H}\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{k}{l}\left(m^{1/k} - 1\right) \Rightarrow \bar{H} = \frac{km}{l}\left(\frac{m^{1/k} - 1}{m - 1}\right)\end{aligned}$$

Agora é possível encontrar a matriz Jacobiana:  $M = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$ , onde:  $\varphi_{11} = \left.\frac{df}{dH}\right|_{\bar{H}, \bar{P}}$ ,

$$\varphi_{12} = \left.\frac{df}{dP}\right|_{\bar{H}, \bar{P}}, \quad \varphi_{21} = \left.\frac{dg}{dH}\right|_{\bar{H}, \bar{P}} \quad \text{e} \quad \varphi_{22} = \left.\frac{dg}{dP}\right|_{\bar{H}, \bar{P}}.$$

$$\text{Desta forma: } \varphi_{11} = 1, \quad \varphi_{12} = -k \frac{m\left(m^{1/k} - 1\right)}{m^{1/k}(m - 1)}, \quad \varphi_{21} = \frac{m - 1}{m}, \quad \varphi_{22} = 0.$$

Neste caso para se garantir a estabilidade será levado em consideração a seguinte condição:  $2 > 1 + b > |a|$ , onde  $a = \varphi_{11} + \varphi_{22} = \text{Tr } M$  e  $b = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21} = \det M$ .

Para este sistema tem-se que:

$$a = \varphi_{11} + \varphi_{22} = 1 + 0 = 1$$

$$b = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21} = 1 \cdot 0 + \left[-k \frac{m\left(m^{1/k} - 1\right)}{m^{1/k}(m - 1)}\right] \cdot \left[\frac{m - 1}{m}\right] = -k \frac{\left(m^{1/k} - 1\right)}{m^{1/k}} = k \left(\frac{1}{m^{1/k}} - 1\right)$$

Agora aplicando a condição para que haja estabilidade nos valores deste sistema obtêm-se:

$$2 > 1 + k \left(\frac{1}{m^{1/k}} - 1\right) > |1| = 1$$

Assim observa-se que a estabilidade não depende do valor da constante  $l$ . E que as demais variáveis devem satisfazer a seguinte inequação:  $1 > k \left(\frac{1}{m^{1/k}} - 1\right) > 0$ .

## 5. MODELOS BIOLÓGICOS: UMA APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NÃO LINEARES

O embasamento matemático apresentado no capítulo anterior será agora utilizado para efetuar o procedimento de modelagem de certos problemas biológicos. Por exemplo, a dinâmica populacional de organismos que possuem períodos de procriação e ciclos de vida por estágios, muito comum em insetos e outros artrópodes.

Nos processos biológicos tratados neste capítulo serão feitos alguns supostos para tornar possível a resolução destes problemas através de equações de diferenças não lineares. A modelagem de problemas através de equações de diferenças não lineares já pode levar mais condições em consideração do que os modelos lineares vistos nos primeiros capítulos deste trabalho.

Os modelos apresentados neste capítulo são exemplos modificados e exercícios propostos retirados dos livros que estão descritos na bibliografia.

### 5.1. MODELO 1: MODELO PARA POPULAÇÕES DE PEIXES

Frequentemente para modelar a dinâmica populacional dos peixes são usadas as informações empíricas. A modelagem é feita utilizando a equação de Ricker, ou também conhecida como *Ricker equation*, que é mostrada a seguir:

$$N_{t+1} = \alpha \cdot N_t \cdot e^{-B \cdot N_t} \quad (26).$$

Nesta equação  $\alpha$  é a taxa máxima de crescimento do organismo e  $B$  é a taxa de inibição de crescimento causada pelo excesso de população.

Para que se possa encontrar um dos pontos de equilíbrio desta equação faz-se:

$$\bar{N} = N_t = N_{t+1}$$

Em seguida é feita a substituição na equação (26):

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \alpha \cdot \bar{N} \cdot e^{-B \cdot \bar{N}} & \Rightarrow & \frac{\bar{N}}{\alpha \cdot \bar{N}} = e^{-B \cdot \bar{N}} \\ \alpha^{-1} = e^{-B \cdot \bar{N}} & \Rightarrow & \alpha^1 = e^{B \cdot \bar{N}} & \Rightarrow & \ln \alpha = B \cdot \bar{N} \cdot \ln e \end{aligned}$$

E, portanto chega-se em um ponto de equilíbrio igual à:

$$\bar{N} = \frac{\ln \alpha}{B} \quad (26.1)$$

Agora se deve analisar qual ou quais são as condições que garantem que o ponto de equilíbrio encontrado em (26.1) seja estável. Como  $f(N) = \alpha \cdot N \cdot e^{-B \cdot N}$  então se encontra o autovalor em relação ao ponto de equilíbrio:

$$\lambda = \left( \frac{df}{dN} \Big|_{\bar{N}} \right) = \frac{d}{dN} \left( \alpha \cdot N \cdot e^{-B \cdot N} \Big|_{\bar{N}} \right) = \alpha \cdot e^{-B \cdot \bar{N}} - \alpha \cdot B \cdot \bar{N} \cdot e^{-B \cdot \bar{N}}$$

O valor de  $\bar{N}$  é dado na equação (26.1), ao substituírmos no autovalor, tem-se:

$$\lambda = \alpha \cdot e^{-B \cdot \bar{N}} - \alpha \cdot B \cdot \bar{N} \cdot e^{-B \cdot \bar{N}} = \alpha \cdot e^{-B \cdot \bar{N}} (1 - B \cdot \bar{N})$$

$$\lambda = \alpha \cdot e^{-B \left( \frac{\ln \alpha}{B} \right)} \left[ 1 - B \frac{\ln \alpha}{B} \right] = \alpha \cdot e^{-\ln \alpha} (1 - \ln \alpha)$$

$$\lambda = \alpha \frac{1}{e^{\ln \alpha}} - \alpha \frac{1}{e^{\ln \alpha}} \ln \alpha = \alpha \frac{1}{\alpha} - \alpha \frac{1}{\alpha} \ln \alpha$$

$$\therefore \lambda = 1 - \ln \alpha$$

De acordo com os critérios de estabilidade, para que o ponto de equilíbrio seja estável deve se ter que  $|\lambda| < 1$ , assim a condição para que ocorra a estabilidade para o ponto de equilíbrio (26.1) da equação (26) é:

$$|1 - \ln \alpha| < 1 \quad (26.2)$$

Resolvendo a inequação:

$$\begin{array}{ll} 0 < 1 - \ln \alpha < 1 & -1 < \ln \alpha - 1 < 0 \\ -1 < -\ln \alpha < 0 & \text{e} \quad 0 < \ln \alpha < 1 \\ 0 < \ln \alpha < 1 & 1 < \alpha < e \end{array}$$

$$\therefore 1 < \alpha < e \quad (26.3)$$

### Comentários sobre o resultado obtido

Para que o crescimento populacional de certa espécie de peixe não ultrapasse o nível de equilíbrio o valor de  $\alpha$ , que é a taxa de crescimento do organismo, deve ser maior que um e menor que  $e \cong 2,71828\dots$ , ou seja,  $1 < \alpha < e$ .

## 5.2. MODELO 2: DENSIDADE POPULACIONAL

Um modelo para densidade dependente de populações como a de insetos é dado por Hassell (1975) pela equação:

$$N_{t+1} = r \cdot N_t \cdot (1 + a \cdot N_t)^{-b} \quad (27),$$

onde  $r$ ,  $a$  e  $b$  são constantes positivas.

Se forem feitas certas modificações na equação (27), observa-se que esta equação de diferenças se assemelha a equação resolvida como exemplo na seção 4.2.2. na letra **a**), e então pode-se usar os valores calculados lá para descobrir o ponto de equilíbrio deste problema.

$$N_{t+1} = \frac{r \cdot N_t}{(1 + aN_t)^b}$$

Pode-se tirar a raiz da equação com relação à  $b$ , ou seja, elevar a equação à potência  $\frac{1}{b}$ :

$$(N_{t+1})^{1/b} = \frac{r^{1/b} \cdot (N_t)^{1/b}}{1 + aN_t} \quad (27.1)$$

É fácil reparar que a equação (27.1) é semelhante à equação (18.1), onde:  $N_t = x_n$ ,  $r^{1/b} = K$ ,  $a = K_1$  e  $1 = K_2$ . Vale ressaltar que por  $N_{t+1}$  e  $N_t$  estarem elevados à mesma potência  $\frac{1}{b}$  não acontecerá modificações no resultado não trivial do ponto de equilíbrio encontrado em (18.2), pois para que o ponto de equilíbrio seja calculado é considerado que não ocorram variações do estágio  $N_t$  para o estágio  $N_{t+1}$ , logo teremos que  $\bar{N} = N_t = N_{t+1}$ , e assim eles se anularão da mesma forma que acontece no exemplo da seção 4.2.2. na letra **a**).

No exemplo citado foi encontrado como ponto de equilíbrio não trivial:

$$\bar{x} = \frac{K - K_2}{K_1}, \text{ para } K_1 \neq 0 \quad (18.2)$$

Ao serem feitas as substituições para os valores deste problema na equação (18.2) é encontrado o ponto de equilíbrio da equação (27):

$$\bar{N} = \frac{r^{1/b} - 1}{a} \quad (27.2).$$

Para analisar qual ou quais são as condições necessárias para que se garanta a estabilidade deste ponto de equilíbrio faz-se de forma similar a desenvolvida na seção 4.1., só que considerando  $f(N) = rN(1 + aN)^{-b}$  e então se encontra o autovalor  $\lambda$ :

$$\lambda = \left( \frac{df}{dN} \Big|_{\bar{N}} \right) = \left[ r(1 + aN)^{-b} - rabN(1 + aN)^{-b-1} \right]_{\bar{N}}$$

$$\lambda = r(1 + aN)^{-b} \left[ 1 - abN(1 + aN)^{-1} \right]_{\bar{N}}$$

O valor de  $\bar{N}$  é dado na equação (27.2), ao substituírmos na última expressão, tem-se:

$$\lambda = r \left( 1 + a \left( \frac{r^{1/b} - 1}{a} \right) \right)^{-b} \cdot \left[ 1 - ab \left( \frac{r^{1/b} - 1}{a} \right) \cdot \left( 1 + a \left( \frac{r^{1/b} - 1}{a} \right) \right)^{-1} \right]$$

$$\lambda = r \left( 1 + r^{1/b} - 1 \right)^{-b} \cdot \left[ 1 - b \left( r^{1/b} - 1 \right) \cdot \left( 1 + r^{1/b} - 1 \right)^{-1} \right]$$

$$\lambda = r \cdot r^{-1} \cdot \left[ 1 + \left( b - br^{1/b} \right) \cdot r^{-1/b} \right]$$

$$\lambda = 1 \cdot \left[ 1 + \frac{b - br^{1/b}}{r^{1/b}} \right] = 1 - b + br^{-1/b}$$

$$\therefore \lambda = 1 + b \left( r^{-1/b} - 1 \right) \quad (27.3)$$

Como visto anteriormente para que o ponto de equilíbrio seja estável deve se ter que  $|\lambda| < 1$ , assim a condição para que ocorra a estabilidade para o ponto de equilíbrio (27.2) da equação (27) é:

$$\left| 1 + b \left( r^{-1/b} - 1 \right) \right| < 1 \quad (27.4)$$

Hassell et al. (1976) fornece estimativas para os parâmetros  $r$  e  $b$  da equação (27) para algumas populações de insetos, estes parâmetros serão apresentados na Tabela 1. Utilizando estes dados fornecidos na tabela pode ser realizado o cálculo do autovalor, através da substituição dos parâmetros na expressão para o autovalor já encontrada em (27.4), e a partir daí usa-se os resultados para determinar se cada uma das espécies terá um ponto de equilíbrio estável, ou seja, que mantenha o nível da população num certo padrão.

	Espécie	$b$	$r$
1	Mariposa/ Traça: <i>Zeiraphera diniana</i>	0,1	1,3
2	Besouro: <i>Leptoterma dolobrata</i>	2,1	2,2
3	Mosquito: <i>Aedes aegypti</i>	1,9	10,6
4	Besouro batata: <i>Leptinotarsa decemlineata</i>	3,4	75,0
5	Vespa parasita: <i>Bracon hebetor</i>	0,9	54,0

**Tabela 1:** Os valores que compõem esta tabela foram retirados do livro do KESHET, L. E. Mathematical Models in Biology [2].

Usando as condições fornecidas no critério de estabilidade, pode-se concluir para cada população de insetos o seguinte:

$$1) \text{ Mariposa/ Traça: } \left| 1 + 0.1 \left( 1.3^{-\frac{1}{0.1}} - 1 \right) \right| = |0.907 \dots| < 1.$$

Logo uma população de Mariposa/ Traça de acordo com os parâmetros citados na tabela possui um nível populacional estável.

$$2) \text{ Besouro: } \left| 1 + 2.1 \left( 2.2^{-\frac{1}{2.1}} - 1 \right) \right| = |0.3426 \dots| < 1.$$

Logo uma população de Besouro de acordo com os parâmetros citados na tabela possui um nível populacional estável.

$$3) \text{ Mosquito: } \left| 1 + 1.9 \left( 10.6^{-\frac{1}{1.9}} - 1 \right) \right| = |-0,35157 \dots| < 1.$$

Logo uma população de Mosquito de acordo com os parâmetros citados na tabela possui um nível populacional estável, com convergência oscilante.

$$4) \text{ Besouro batata: } \left| 1 + 3.4 \left( 75^{-\frac{1}{3.4}} - 1 \right) \right| = |-1,445 \dots| > 1.$$

Logo uma população de Besouro batata de acordo com os parâmetros citados na tabela possui um nível populacional instável oscilante.

$$5) \text{ Vespa parasita: } \left| 1 + 0.9 \left( 54^{-\frac{1}{0.9}} - 1 \right) \right| = |0.110699 \dots| < 1.$$

Logo uma população de Vespa parasita de acordo com os parâmetros citados na tabela possui um nível populacional estável.

#### Comentário sobre os resultados obtidos

Dentre estas espécies e com os parâmetros fornecidos apenas o besouro apresenta uma dinâmica populacional instável. Já o mosquito apresenta uma dinâmica populacional estável, mas com certas oscilações que irão diminuir assim que a densidade populacional se aproxima do valor de equilíbrio.

### 5.3. MODELO 3: ONDAS DE DOENÇAS

Num artigo que apareceu na “Nova Ciência” (New Scientist), Anderson e May (1982)<sup>16</sup> sugerem um modelo discreto simples para o controle de doenças que mostram como são os ciclos de infecção que podem surgir numa população. Tomar-se-á como unidade de tempo o período médio de infecção. As equações foram escritas para o número de casos de doença  $C_t$  e o número de indivíduos suscetíveis  $S_t$  no intervalo de tempo  $t$ .

Para modelar o problema foram feitas as seguintes suposições:

- O número de novos casos no tempo  $t+1$  é alguma fração do produto de casos correntes do tempo  $t$ ,  $C_t$ , e dos suscetíveis que existiam no tempo  $t$ ,  $S_t$ ;
- Um caso finaliza somente por um único período de tempo;
- O número corrente de suscetíveis aumenta a cada período de tempo por um número fixado de nascimento  $B$  e diminui pelo número de novos casos, ( $B > 0$ );
- Indivíduos que se recuperam da doença são imunes.

Baseada nestas informações pode-se escrever que o número de casos  $C_{t+1}$  (em  $t+1$ ) é igual a uma fração  $f$  do número de casos existentes no tempo  $t$ ,  $C_t$ , pelo número de suscetíveis no tempo  $t$ ,  $S_t$ . Isto é:

$$C_{t+1} = f \cdot C_t \cdot S_t \quad (28.1).$$

Por outro lado o número de suscetíveis no tempo  $t+1$ ,  $S_{t+1}$ , é igual ao número de suscetíveis no tempo  $t$ ,  $S_t$ , menos o número de indivíduos infectados no tempo  $t+1$ ,  $C_{t+1}$ , mais o número de nascimentos fixado  $B$ . Assim sendo, tem-se a equação:

$$S_{t+1} = S_t - f \cdot C_t \cdot S_t + B \quad (28.2).$$

O sistema modelado desta forma é dado por:

$$\begin{cases} C_{t+1} = f \cdot C_t \cdot S_t \\ S_{t+1} = S_t - f \cdot C_t \cdot S_t + B \end{cases}$$

Encontrando os pontos de equilíbrio:

$$C_{t+1} = C_t = \bar{C} \quad \text{e} \quad S_{t+1} = S_t = \bar{S}$$

---

<sup>16</sup> Foi tomado conhecimento deste artigo através do exercício 16, página 65 do livro *Mathematical Models in Biology* de KESHET, L. E. [2].

Substituindo primeiramente em (28.1):

$$\begin{aligned}\bar{C} &= f \cdot \bar{C} \cdot \bar{S} \quad \Rightarrow \quad 1 = f \cdot \bar{S} \\ \bar{S} &= \frac{1}{f}\end{aligned}\quad (29.1)$$

E então substituindo em (28.2) e utilizando o valor de  $\bar{S}$  encontrado em (29.1), tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \bar{S} - f \cdot \bar{C} \cdot \bar{S} + B \\ 0 &= B - f \cdot \bar{C} \cdot \bar{S} \\ f \cdot \bar{C} \cdot \left(\frac{1}{f}\right) &= B \\ \therefore \bar{C} &= B\end{aligned}\quad (29.2).$$

O sistema em questão neste problema, que é composto pelas equações (28.1) e (28.2) pode ser escrita também da seguinte forma:

$$\begin{aligned}C_{t+1} &= g(C_t, S_t) \\ S_{t+1} &= h(C_t, S_t)\end{aligned}\quad (30).$$

Onde:  $g(C_t, S_t) = f \cdot C_t \cdot S_t$  e  $h(C_t, S_t) = S_t - f \cdot C_t \cdot S_t + B$ .

Para que se faça a análise da estabilidade o sistema em questão será linearizado para pequenas perturbações  $C'$  e  $S'$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned}C'_t &= \varphi_{11} C'_{t-1} + \varphi_{12} S'_{t-1} \\ S'_t &= \varphi_{21} C'_{t-1} + \varphi_{22} S'_{t-1}\end{aligned}$$

Onde  $\varphi_{11} = \left. \frac{\partial g}{\partial C} \right|_{\bar{C}, \bar{S}} = \left. \frac{\Delta g}{\Delta C} \right|_{\bar{C}, \bar{S}}$ ,  $\varphi_{12} = \left. \frac{\partial g}{\partial S} \right|_{\bar{C}, \bar{S}} = \left. \frac{\Delta g}{\Delta S} \right|_{\bar{C}, \bar{S}}$ ,  $\varphi_{21} = \left. \frac{\partial h}{\partial C} \right|_{\bar{C}, \bar{S}} = \left. \frac{\Delta h}{\Delta C} \right|_{\bar{C}, \bar{S}}$  e

$$\varphi_{22} = \left. \frac{\partial h}{\partial S} \right|_{\bar{C}, \bar{S}} = \left. \frac{\Delta h}{\Delta S} \right|_{\bar{C}, \bar{S}}.$$

Agora calculando os valores de  $\lambda$ :

$$\varphi_{11} = \left. \frac{\partial g}{\partial C} \right|_{\bar{C}, \bar{S}} = \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \left. \frac{g(C + \Delta C, S) - g(C, S)}{\Delta C} \right|_{\bar{C}, \bar{S}} = \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \left. \frac{f \cdot C \cdot S + f \cdot \Delta C \cdot S - f \cdot C \cdot S}{\Delta C} \right|_{\bar{C}, \bar{S}}$$

$$\varphi_{11} = f \cdot S \Big|_{\bar{C}, \bar{S}} = f \cdot \frac{1}{f} = 1$$

$$\varphi_{12} = \left. \frac{\partial g}{\partial S} \right|_{\bar{C}, \bar{S}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left. \frac{g(C, S + \Delta S) - g(C, S)}{\Delta S} \right|_{\bar{C}, \bar{S}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left. \frac{f \cdot C \cdot S + f \cdot C \cdot \Delta S - f \cdot C \cdot S}{\Delta S} \right|_{\bar{C}, \bar{S}}$$

$$\varphi_{12} = f \cdot C \Big|_{\bar{C}, \bar{S}} = f \cdot B$$

$$\begin{aligned}\varphi_{21} &= \left. \frac{\partial h}{\partial C} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} = \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \left. \frac{h(C + \Delta C, S) - h(C, S)}{\Delta C} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} = \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \left. \frac{S - f(C + \Delta C)S + B - S + f \cdot C \cdot S - B}{\Delta C} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} \\ \varphi_{11} &= \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \left. \frac{-f \cdot (C + \Delta C - C) \cdot S}{\Delta C} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} = -f \cdot S \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} = -f \cdot \frac{1}{f} = -1 \\ \varphi_{22} &= \left. \frac{\partial h}{\partial S} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left. \frac{h(C, S + \Delta S) - h(C, S)}{\Delta S} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left. \frac{(S + \Delta S) - fC(S + \Delta S) + B - S + fCS - B}{\Delta S} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} \\ \varphi_{12} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left. \frac{\Delta S - f \cdot C \cdot \Delta S}{\Delta S} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} = 1 - f \cdot C \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} = 1 - f \cdot B\end{aligned}$$

E neste exemplo serão apresentadas através da demonstração dos cálculos que as taxas de variações nos casos discretos são equivalentes as derivadas parciais nos casos contínuos.<sup>17</sup>

$$\begin{aligned}\left. \frac{\Delta g}{\Delta C} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} &= \left. \frac{g(C + \Delta C, S) - g(C, S)}{\Delta C} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} = \left. \frac{g(C + 1, S) - g(C, S)}{1} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} = f \cdot (C + 1) \cdot S - f \cdot C \cdot S \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} \\ \left. \frac{\Delta g}{\Delta C} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} &= f \cdot (C + 1 - C) \cdot S \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} = f \cdot S \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} = f \cdot \frac{1}{f} = 1 = \left. \frac{\partial g}{\partial C} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} \\ \left. \frac{\Delta g}{\Delta S} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} &= \left. \frac{g(C, S + \Delta S) - g(C, S)}{\Delta S} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} = \left. \frac{g(C, S + 1) - g(C, S)}{1} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} = f \cdot C \cdot (S + 1) - f \cdot C \cdot S \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} \\ \left. \frac{\Delta g}{\Delta S} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} &= f \cdot C \cdot (S + 1 - S) \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} = f \cdot C \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} = f \cdot B = \left. \frac{\partial g}{\partial S} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} \\ \left. \frac{\Delta h}{\Delta C} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} &= \left. \frac{h(C + \Delta C, S) - h(C, S)}{\Delta C} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} = \left. \frac{h(C + 1, S) - h(C, S)}{1} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} \\ \left. \frac{\Delta h}{\Delta C} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} &= S - f(C + 1)S + B - S + fCS - B \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} = -f \cdot (C + 1 - C) \cdot S \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} = f \cdot S \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} \\ \left. \frac{\Delta h}{\Delta C} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} &= -f \cdot \frac{1}{f} = -1 = \left. \frac{\partial h}{\partial C} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} \\ \left. \frac{\Delta h}{\Delta S} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} &= \left. \frac{h(C, S + \Delta S) - h(C, S)}{\Delta S} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} = \left. \frac{g(C, S + 1) - g(C, S)}{1} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} \\ \left. \frac{\Delta h}{\Delta S} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} &= (S + 1) - f \cdot C \cdot (S + 1) + B - S + f \cdot C \cdot S - B \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} = 1 - f \cdot C \cdot (S + 1 - S) \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} \\ \left. \frac{\Delta h}{\Delta S} \right|_{\bar{c}, \bar{s}} &= 1 - f \cdot C \Big|_{\bar{c}, \bar{s}} = 1 - f \cdot B = \left. \frac{\partial h}{\partial S} \right|_{\bar{c}, \bar{s}}\end{aligned}$$

<sup>17</sup> Por abuso da linguagem, em qualquer situação usamos notação de derivadas parciais como no capítulo anterior.

Assim conclui-se que os valores dos  $\varphi$  são:  $\varphi_{11}=1$ ,  $\varphi_{12}=f \cdot B$ ,  $\varphi_{21}=-1$  e  $\varphi_{22}=1-f \cdot B$ , estes que formam a matriz Jacobiana  $M = \begin{pmatrix} 1 & f \cdot B \\ -1 & 1-f \cdot B \end{pmatrix}$ , e agora para encontrar o polinômio característico faz-se:

$$\det[M - \lambda I] = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} 1 & f \cdot B \\ -1 & 1-f \cdot B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & f \cdot B \\ -1 & 1-f \cdot B - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Donde se encontra o polinômio característico:

$$\lambda^2 - (2 - f \cdot B)\lambda + 1 = 0 \quad (31),$$

Assim:  $a = 2 - f \cdot B = \text{Tr } M = \text{traço da matriz } M$

$b = 1 = \det M = \text{determinante da matriz } M$

Por exemplo, supondo que  $f = \frac{2}{B}$ , que conclusões poderiam se obter?

O polinômio característico será da seguinte forma:

$$\lambda^2 - \left(2 - \frac{2}{B} \cdot B\right)\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - (2 - 2)\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda = \pm i$$

$$\therefore |\lambda| = 1 \quad (31.1)$$

De acordo com o resultado encontrado em (31.1) chega-se a conclusão que se  $f = \frac{2}{B}$  então o ponto de equilíbrio (29.2) possui um comportamento neutramente estável. Este resultado significa que o número de casos da doença se manterá num nível constante, não chegando a extinguir o número de casos e nem a se transformar numa epidemia.

### 5.3.1. Analisando o comportamento do modelo de ondas de doenças para alguns valores supostos

A idéia agora é de utilizar um programa computacional, neste caso será utilizado o MATLAB 6.5, para construir o gráfico da função para alguns valores supostos<sup>18</sup> e então se tentará fazer uma análise a partir dos resultados obtidos.

Primeiramente supondo que:

- A quantidade inicial de suscetíveis seja  $S_0 = 56680000 = 5,6680000 \cdot 10^7$  ;
- A quantidade inicial de casos da doença seja  $C_0 = 5668 = 0,005668 \cdot 10^6$  ;
- O número fixado de nascimentos seja  $B = 680160$  ;
- A fração de propagação da doença seja  $f = 0,3 \cdot 10^{-7}$  .

Assim o sistema composto pela equação (28.1) e (28.2) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} C_{t+1} = 0,3 \cdot 10^{-7} \cdot C_t \cdot S_t \\ S_{t+1} = S_t - 0,3 \cdot 10^{-7} \cdot C_t \cdot S_t + 680160 \end{cases} \quad (32).$$

Para obter-se alguma idéia do que pode vir a acontecer com o número de casos da doença e de suscetíveis com o decorrer de algum tempo foi programado no MATLAB 6.5 o sistema (32) para interagir trinta vezes, que resultou no gráfico que pode ser visualizado na Figura 10:

---

<sup>18</sup> Os valores que estão sendo utilizados na modelagem deste problema foram inventados, não são dados experimentais. Em trabalhos posteriores pretende-se utilizar os conhecimentos deste trabalho para modelar problemas reais.



**Figura 10:** O gráfico expressa o comportamento do sistema (32). Vale ressaltar que as graduações estão elevadas a potências de 10, por isto, apesar de parecer que no início e no final das interações o número de casos é aparentemente zero, na realidade este valor não chegar a zerar, só é um número pequeno multiplicado por  $10^6$ .

Observa-se neste gráfico que acontecerá primeiramente um grande aumento do número de casos da doença e diminuição do número de suscetíveis e após algumas interações começam a diminuir o número de casos da doença e a aumentar o número de suscetíveis.

#### 5.4. COMENTÁRIOS

Como é possível observar neste capítulo os critérios de estabilidade aplicados a modelagem de problemas biológicos auxiliam no fornecimento de dados que ajudam a prever como será a continuidade dos processos se forem mantidos certos parâmetros, e com bases nos resultados encontrados podem ser tomadas algumas medidas necessárias. Por exemplo, como evitar a extinção de algumas espécies, como controlar ondas de doenças para que não se

tornem epidemias, entre outros problemas que podem ser discutidos e modelados através de modelos discretos.<sup>19</sup>

Para estudos posteriores e a quem se interessa por assuntos nesta área serão citados alguns artigos encontrados que utilizam na sua composição algumas idéias que foram abordadas neste trabalho. Entre eles encontram-se os seguintes artigos que serão citados a seguir:

Uma citação de trabalho que trata de populações de salmões e que utiliza a equação de Ricker, intitulado ‘Phaser Module: Ricker Salmon Model’<sup>20</sup>.

Um artigo que fala de um estudo de Presa-Predador através de um modelo discreto, mas que utiliza mais informações que as vistas neste trabalho, como Efeito Allee e Rede de Mapas Acoplados, este intitulado por ‘Formação de Padrões em um Modelo Presa-Predador Discreto’<sup>21</sup>, publicação de pesquisadores da UFSM, Santa Maria/RS.

Outro artigo muito interessante que fala sobre um estudo de controle biológico, intitulado ‘Modelagem Matemática Aplicada ao Controle Biológico de *Ceratitis capitata* Wiedemann (Díptera: Tephritidae) por *Diachasmimorpha longicaudata* Ashmed (Hymenoptera: Braconidae) em *Citrus*’, de autoria de pesquisadores das universidades UNESP, USP e UNICAMP<sup>22</sup>.

Outro resumo encontrado é de um pesquisador do *Institute of Systematics and Animal Ecology* de Novosibirsk, Rússia, intitulado ‘Application of parasite-host-fodder plant system dynamics to the description of larch bud moth population cycles’, que trabalha com séries temporais e também utiliza alguns critérios estatísticos.<sup>23</sup>

Um outro artigo interessante é o que modela as doenças intersticiais pulmonares, onde se considera as estruturas torácicas como pontos de controle e as ramificações pulmonares foram calculadas considerando a distribuição do fluxo, este artigo é intitulado ‘Modelagem Computacional das Doenças Intersticiais Pulmonares’, de autoria de cinco pesquisadores de três universidades de São Paulo, USP, UMC, UNESP e do Hospital do Servidor Público de São Paulo.<sup>24</sup>

---

<sup>19</sup> Há muitos trabalhos nesta direção usando modelos contínuos que fazem parte de outra teoria não abordada neste texto.

<sup>20</sup> O endereço do site onde se encontra o documento citado consta nas Referências [11].

<sup>21</sup> A fonte de onde se retirou informações sobre este artigo se encontra nas Referências [5].

<sup>22</sup> O endereço do site onde foi encontrado tal artigo está citado nas Referências [3].

<sup>23</sup> A fonte deste material se encontra citada nas Referências [7].

<sup>24</sup> Este artigo se encontra disponível no endereço citado nas Referências [4].

Estas são apenas algumas sugestões de artigos que trabalham com modelagem de problemas biológicos, foram citados só alguns trabalhos dos vários que podemos encontrar publicados.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo e a pesquisa necessários para a realização deste trabalho contribuíram no aprendizado de conceitos e técnicas matemáticas sobre funções discretas que até então eu não conhecia devidamente, e também me levou a compreender alguns processos biológicos, onde pude constatar como os conhecimentos matemáticos são importantes para a execução de pesquisas em outras áreas.

Quanto à parte de conceitos matemáticos devo ressaltar que aprender sobre o que é e como se resolvem as equações de diferenças foi um trabalho muito interessante e gratificante. E que após compreender realmente a diferença entre funções contínuas e discretas começo a observar em quantas outras pesquisas e trabalhos este material pode ser utilizado.

Os critérios de estabilidade que foram relatados e analisados no decorrer deste trabalho figuram como um dos pontos principais do mesmo, já que usualmente quando temos um problema procuramos encontrar quais são os fatores relevantes para que se obtenha a estabilidade ou instabilidade do ponto de equilíbrio.

O interessante de utilizar a modelagem em processos biológicos é o fato de que com a resolução dos modelos podem ser analisados como os dados coletados auxiliam o processo para que seja obtido o equilíbrio ou desequilíbrio da situação.

Agora mencionarei uma das principais dificuldades encontradas, que é falta de material didático em português e também sem muitos materiais mesmo em outras línguas disponíveis sobre este conteúdo para os alunos na biblioteca. Mas, para contornar esta situação utilizei como bibliografia alguns livros em inglês, cedidos pela orientadora do meu trabalho e complementei o estudo com os livros disponíveis na biblioteca que possuem material relevante ao assunto. Outra fonte da minha pesquisa foram artigos e sites disponíveis na internet, que também deram sua contribuição ao trabalho.

Este material além de ser um trabalho de conclusão de curso é um relato do início do meu trabalho de pesquisa na área de modelagem de problemas biológicos através de funções discretas que utilizam equações de diferenças, e por ter-se um tempo delimitado para a entrega do trabalho de conclusão de curso aqui foram abordados somente os temas teóricos essenciais sobre o conteúdo em questão e todos os modelos apresentados são propostos nos livros citados e não modelados a partir de dados experimentais, desta forma a maioria dos resultados comentados são teóricos.

Pretendo com o decorrer da pesquisa continuar em busca de mais conhecimentos matemáticos que me permitam posteriormente modelar algum processo biológico que tenha relevância para alguma região do estado de Santa Catarina, e quando for resolvido e analisado os resultados do modelo que seja possível chegar a conclusões úteis para melhorarmos o andamento do processo dado, ressaltando a importância da Matemática através da sua utilização em processos práticos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo, Contexto. 2002.
- [2] EDELSTEIN – KESHET, Leah. **Mathematical models in biology**. New York, Random House. 1988.
- [3] FREIRE, R.M.; PREGNOLATTO, S.; WALDER, J.M.M; VON ZUBEN, C.J. **Modelagem Matemática Aplicada ao Controle Biológico de *Ceratitis capitata* Wiedemann (Díptera: Tephritidae) por *Diachasmimorpha longicaudata* Ashmed (Hymenoptera: Braconidae) em Citrus**. Universidade de Campinas. 2005. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1519-566X2005000200016&script=sci\\_pdf](http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1519-566X2005000200016&script=sci_pdf)>. Acesso em 06 de novembro de 2007.
- [4] FRERE, A. F.; MARQUES, M. A.; NASCIMENTO, A. V.; NASCIMENTO, M. Z.; NEVES, L. A. **Modelagem Computacional das Doenças Intersticiais Pulmonares**. Disponível em <[www.sbis.org.br/cbis9/arquivos/644.pdf](http://www.sbis.org.br/cbis9/arquivos/644.pdf)>. Acesso em 11 de novembro de 2007.
- [5] MISTRO, Dilmar C.; RODRIGUES, Luiz A. D.; SEIDEL, Denílson J. **Formação de Padrões em Modelo Presa-Predador Discreto**. *Biomatemática* 16, XXIX CNMAC, Campinas, SP, IMECC – UNICAMP. 2006.
- [6] MURRAY, James D. **Mathematical biology**, 2<sup>nd</sup> edition. Washington, Springer. 1993.
- [7] NEDOREZOV, Lev V. **Application of parasite-host-fodder plant system dynamics to the description of larch bud moth population cycles**. II Conference on Computational and Mathematical Population Dynamics, Campinas, SP. 2007.
- [8] PALOMINO BEAN, Sonia. **Matemática Elementar para Biocientistas**. (no prelo)
- [9] RIBEIRO, André L.M. **Estabilidade Assintótica de uma classe de equações diferenças**. Instituto de Matemática e Estatística – Campus de Rialma. 2003. Disponível em: <[http://www.mat.ufg.br/cursos/rialma/2003/rel\\_almr.pdf](http://www.mat.ufg.br/cursos/rialma/2003/rel_almr.pdf)>. Acesso em 03 de novembro de 2007.
- [10] ROUGHGARDEN, Joan. **Primer of ecological theory**. New Jersey, Prentice Hall. 1998.

[11] **Phaser Module: Ricker Salmon Model.** Disponível em: <[www.phaser.com/modules/students/salmon/salmon.pdf](http://www.phaser.com/modules/students/salmon/salmon.pdf)>. Acesso em 30 de outubro de 2007.

[12] Wikipédia – Enciclopédia on-line. **Afídios.** Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Afídio>>. Acesso em 02 de novembro de 2007.

## APÊNDICE

### Ponto Fixo de uma função

O ponto fixo é definido como o ponto que não é alterado por uma aplicação, ou seja, se  $f$  é uma função  $f : A \rightarrow A$  e  $f$  é contínua, um ponto fixo de  $f$  é todo ponto  $x^* \in A$  tal que:

$$f(x^*) = x^* .$$

#### Observações:

- Toda aplicação linear possui um ponto fixo trivial, o vetor nulo.
- Toda função polinomial nos números complexos de grau  $n > 1$ ,  $P(x)$ , possui pontos fixos. Isto equivale a termos,  $P(x) = x$  ou investigar a equação polinomial  $P(x) - x = 0$ , que possui solução pelo teorema fundamental da álgebra.

### Séries de Taylor

Dada uma função  $F(x)$  contínua e infinitamente derivável, a série de Taylor sobre  $x_0$  é uma expressão que envolve potências de  $(x - x_0)$ , onde  $x_0$  é um ponto de  $F$  e todas as suas derivadas são conhecidas, que pode ser escrita como segue:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (33),$$

esta expressão também é chamada de série de potências. A equação (33) faz sentido somente para valores de  $x$  para qual o somatório infinito seja igual a algum número finito, ou seja, quando a série converge.

Supondo que  $T(x)$  é uma série de potências que converge sempre que  $(x - x_0) < r$ , onde  $r$  é conhecido como o raio de convergência, tem-se que:

$$F(x) = T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n ,$$

desde que os coeficientes  $a_n$  sejam dados da seguinte forma:  $a_0 = F(x_0)$ ,  $a_1 = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0}$ ,

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x_0}, \dots, a_n = \frac{1}{n!} \cdot \left. \frac{d^n F}{dx^n} \right|_{x_0}, \text{ onde estas expressões são derivadas de } F \text{ evoluídas}$$

para o ponto  $x_0$ .

A série de Taylor para uma função de uma variável pode ser escrita como:

$$F(x) = F(x_0) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 F}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 F}{dx^3} \right|_{x_0} (x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n F}{dx^n} \right|_{x_0} (x - x_0)^n$$

Quando  $(x - x_0)$  é uma quantidade muito pequena, o termo  $(x - x_0)^k$ , para  $k > 1$ , pode usualmente ser negligenciado, contanto que a função  $F$  não tenha mudanças bruscas. Desta forma:

$$F(x) \cong F(x_0) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots + (\text{termo negligenciado}).$$

Agora considerando uma função de duas variáveis  $F(x, y)$  que possua derivadas parciais de todas as ordens com respeito à  $x$  e  $y$  para algum ponto  $(x_0, y_0)$  tal que  $P_1 = F(x_0, y_0)$ . Então o valor de  $F$  para um ponto  $P_2 = F(x, y)$  próximo de  $P_1$  pode ser calculado utilizando a expansão por séries de Taylor para  $F$ , desde que esta expressão converge para o valor da função, da seguinte forma:

$$F(x, y) \cong F(x_0, y_0) + (x - x_0) \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} + (y - y_0) \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{x_0, y_0}.$$

### Comentário:

No contexto do nosso trabalho onde levamos em consideração não termos variações instantâneas e sim taxas de variação  $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ . O desenvolvimento das séries de Taylor que foi

utilizado neste texto é uma adaptação onde  $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{\Delta F}{\Delta x} \right|_{(x_0, y_0)}$  e  $\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{\Delta F}{\Delta y} \right|_{(x_0, y_0)}$ , como

colocado no desenvolvimento do modelo 3 do capítulo 5.