

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

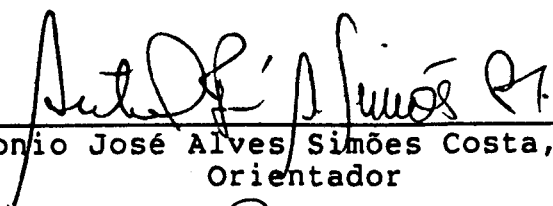
MÉTODOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE
PARÂMETROS DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA,
COM CAPACIDADE DE REJEIÇÃO DE
MEDIDAS ESPÚRIAS

Dissertação submetida à Universidade Federal de
Santa Catarina para a obtenção do título de
mestre em engenharia.

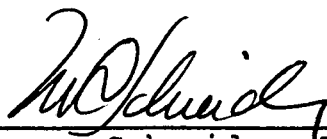
Autor: SÉRGIO LUIZ LAMY

Florianópolis - abril - 1988.

Esta dissertação foi julgada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA - especialidade ENGENHARIA ELÉTRICA - e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.

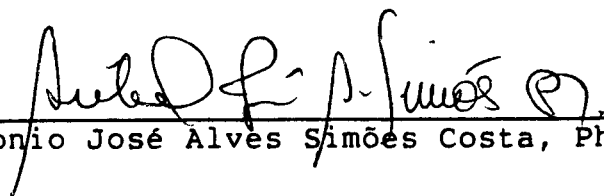


Antonio José Alves Simões Costa, Ph. D.
Orientador



Márcio Cherem Schneider, D. Sc.
Coordenador do curso de pós-graduação em
engenharia elétrica

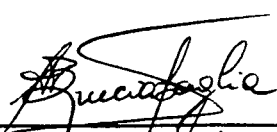
Apresentada perante a banca examinadora composta dos professores,



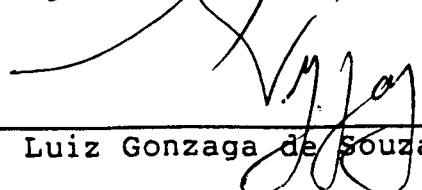
Antonio José Alves Simões Costa, Ph. D.



Hans Helmut Zürn, Ph. D.



Augusto Humberto Bruciapaglia, Dr. Ing.



Luiz Gonzaga de Souza Fonseca, D. Sc.

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de contribuir para o estudo do problema de identificação de parâmetros de funções de transferência, à luz da teoria dos mínimos quadrados, através do desenvolvimento de métodos computacionais dotados de capacidade de rejeição de medidas espúrias e da análise crítica do desempenho destes métodos comparativamente com um dos métodos usualmente utilizado nas empresas brasileiras.

Abstract

The purpose of this dissertation is to make a contribution to the study of transfer function parameters through the development of computational methods with bad data rejection, and by applying the least-squares theory as well as through a critical analysis of the behaviour of such methods as compared to one of the methods usually applied in Brazilian companies.

Notações utilizadas neste trabalho

Neste trabalho, em geral, as matrizes são denotadas por letras maiúsculas, os escalares por letras minúsculas e os vetores por letras minúsculas sublinhadas, excetuando-se os seguintes casos:

- $M(s)$, $H(s)$, $M(jw)$ e $H(jw)$ denotam funções de transferência com $s = jw$ e $j^2 = -1$. Nestes casos as letras minúsculas j e w representam a unidade imaginária e o valor da frequência em rad/s, respectivamente.
- $N(w)$ e $D(w)$ denotam números complexos.
- $R(w)$ e $A(w)$ ou R e A denotam as partes reais de números complexos.
- $I(w)$ e $B(w)$ ou I e B denotam as partes imaginárias de números complexos.
- S_h , T_h e U_h denotam somatórios de produtos de escalares, para $h = 0, 1, 2, 3 \dots$
- $N(0, R)$ denota uma distribuição normal com média zero e matriz de covariância R .
- $P\{x|y\}$ denota a probabilidade condicionada de x , dado y .
- W_{ii} denota o elemento diagonal correspondente às i -ésimas linha e coluna da matriz W .
- R_{ii} denota o elemento diagonal correspondente às i -ésimas linha e coluna da matriz R .

- D_{kk} denota o elemento diagonal correspondente às k -ésimas linha e coluna da matriz D .
- V_{ik} denota o elemento correspondente à i -ésima linha e à k -ésima coluna da matriz V .
- $\text{Im}\{.\}$ denota a parte imaginária de um número complexo.
- $\text{Re}\{.\}$ denota a parte real de um número complexo.
- $E\{.\}$ denota a expectância de uma variável.

Foram utilizadas também as seguintes notações:

- $||.\|$ denota a norma Euclidiana.
- O superescrito T representa "matriz transposta".
- \hat{x} representa o valor estimado de x .

ÍNDICE

CAPÍTULO I	INTRODUÇÃO	1
1.0	O problema de identificação via resposta de frequência	1
1.1	Motivação do trabalho	2
1.2	Métodos usualmente utilizados	3
1.3	Objetivo do trabalho	3
1.4	Métodos desenvolvidos	4
1.4.1	Modelagem dos erros de medição	4
1.4.2	Solução do problema	5
1.4.3	Rejeição de medidas espúrias	5
1.4.4	Métodos desenvolvidos	6
CAPÍTULO II	IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS	9
2.0	Introdução	9
2.1	Métodos dos mínimos quadrados ponderados	11
2.1.1	Método dos mínimos quadrados ponderados na forma linear	11
2.1.2	Método dos mínimos quadrados ponderados na forma não-linear	14
2.1.3	Considerações sobre a caracterização estatística	18
2.2	Método de Levy	23
2.2.1	Teoria básica de Levy	23
2.2.2	Técnica especial de Levy	26
2.2.3	Comentários sobre o método de Levy	34

2.3	Método sequencial ortogonal de Givens . . .	36
2.3.1	Fundamentos teóricos	36
2.3.2	Descrição dos princípios das rotações de Givens	40
2.3.3	Transformação do modelo de medição	46
2.3.4	Aplicação do método de Givens aos mínimos quadrados	48
2.4	Conclusão	50
CAPÍTULO III PROCESSAMENTO DE MEDIDAS ESPÚRIAS		51
3.0	Introdução	51
3.1	Conceitos estatísticos	52
3.1.1	Teste de hipóteses	52
3.1.2	Caracterização estatística de $J(x)$	55
3.2	Medidas espúrias pelo método da equação normal	56
3.2.1	Deteção de medidas espúrias	56
3.2.2	Identificação de medidas espúrias	59
3.2.3	Remoção de medidas espúrias	63
3.3	Processamento de medidas espúrias pelo método de Givens	64
3.3.1	Deteção de medidas espúrias	64
3.3.2	Identificação de medidas espúrias	66
3.3.3	Remoção de medidas espúrias	71
3.4	Processamento de medidas espúrias múltiplas	72
3.5	Conclusão	74

CAPÍTULO IV	MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA	75
4.0	Introdução	75
4.1	Modelo de medição na forma polar	76
4.1.1	Desenvolvimento do modelo	76
4.1.2	Caracterização estatística dos erros de medição	90
4.2	Modelo de medição na forma cartesiana	96
4.2.1	Desenvolvimento do modelo	96
4.2.2	Caracterização estatística aproximada	103
4.3	Conclusão.	119
CAPÍTULO V	RESULTADOS NUMÉRICOS	120
5.0	Introdução	120
5.1	Procedimento para simulação das medidas	123
5.1.1	Geração das medidas ideais	123
5.1.2	Introdução de erros de medição	124
5.1.3	Introdução de erros grosseiros	126
5.2	Procedimento para testes com medidas reais	126
5.3	Resultados de identificação de parâmetros.	127
5.3.1	Casos estudados com simulação de medidas	129
5.3.2	Casos estudados com medidas reais	145
5.4	Conclusão	149
CAPÍTULO VI	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	151
6.0	Conclusão	151
6.1	Sugestões para futuros trabalhos	153
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	154

C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO

1.0 O problema de identificação via resposta de freqüência

O problema de identificação de um sistema físico linear, monovariável e invariante no tempo, através do método de resposta de freqüência, é composto de três etapas: concepção do experimento, obtenção das medidas e consecução do modelo matemático que melhor represente o sistema. A primeira etapa consiste de uma criteriosa análise preliminar do sistema a fim de se observar características que dêem subsídios ao experimento de resposta de freqüência. É possível assim se obter valiosas informações sobre a ordem do sistema a ser identificado, faixas de freqüências mais adequadas para estimular o sistema, etc, a serem utilizadas na etapa de obtenção das medidas. A etapa de consecução do modelo matemático consiste na determinação da

topologia e na identificação dos parâmetros da função de transferência. Em alguns casos, as etapas de concepção do experimento e obtenção das medidas oferecem maiores dificuldades de realização do que a etapa de consecução do modelo matemático. Em outros casos, é nesta última etapa que se apresentam os problemas de solução mais difícil.

1.1 Motivação do trabalho

Durante a realização de um trabalho de identificação dos parâmetros das funções de transferência dos reguladores de velocidade da Usina Hidroelétrica Governador Bento Munhoz da Rocha Netto [1], de propriedade da Companhia Paranaense de Energia - COPEL, o autor deste trabalho verificou, que com os modernos recursos de equipamentos — analisadores digitais de sinais, geradores de funções, oscilógrafos e osciloscópios — e um certo conhecimento prévio do sistema, a obtenção dos diagramas de módulo e fase tornou-se fácil e rápida. A maior dificuldade do trabalho foi a identificação dos parâmetros das funções de transferência devido às deficiências dos métodos disponíveis.

1.2 Métodos usualmente utilizados

Os métodos normalmente utilizados para a identificação de parâmetros de funções de transferência a partir das medidas de módulo e fase em função da frequência são o método gráfico, utilizando-se o diagrama de Bode, e o método de Levy. O primeiro consiste no traçado de assíntotas no diagrama de módulo em dB, levando-se em conta que elas devem ser múltiplas de ± 20 dB/década [2] e [3]. A grande desvantagem desse método é a dificuldade de aplicá-lo quando se depara com um sistema, cuja função de transferência possui ordem elevada e não se tem possibilidade de dividi-lo em subsistemas. Além disso, ele apresenta a imprecisão de todo o método gráfico. O método de Levy é um recurso mais poderoso, pode ser aplicado a sistemas que possuem funções de transferência de ordem elevada e tem sido freqüentemente utilizado. No entanto, esse método, apresenta como desvantagens a grande sensibilidade a erros de medidas e a inexistência de rejeição de medidas espúrias, como será visto nesse trabalho.

1.3 Objetivo do trabalho

O objetivo deste trabalho é contribuir para o estudo de identificação de parâmetros de funções de transferência, através

do desenvolvimento de métodos computacionais de bom desempenho numérico e dotados de capacidade de rejeição automática de medidas espúrias, utilizando algoritmos matemáticos desenvolvidos e aplicados na teoria de Estimação de Estados em Sistemas de Potência.

1.4 Métodos desenvolvidos

1.4.1 Modelagem dos erros de medição

Os métodos desenvolvidos utilizam medidas de módulo e fase obtidas em experimentos de resposta de frequência, sendo que os erros de medição foram modelados como variáveis aleatórias com distribuição normal e expectância igual a zero. Considerou-se que os erros de medição de módulo e fase para uma mesma frequência possam ser correlacionados ou não-correlacionados. As medidas de módulo e fase foram modeladas nas formas polar e cartesiana.

1.4.2 Solução do problema

O Método dos Mínimos Quadrados Ponderados é a técnica utilizada para a solução do problema de identificação. A minimização da função objetiva foi obtida através da equação normal de Gauss e pela aplicação do método de Newton, na solução considerada clássica ou por meio da aplicação das rotações de Givens, na solução através de técnicas ortogonais.

Os valores dos parâmetros para a inicialização do processo são obtidos a partir do Método de Levy.

1.4.3 Rejeição de medidas espúrias

A esses métodos de identificação de parâmetros de funções de transferência foram acrescentadas as técnicas de detecção, identificação e rejeição de medidas espúrias pela aplicação da teoria estatística de teste de hipóteses e da distribuição do qui-quadrado, visando aumentar a precisão do processo de identificação.

1.4.4 Métodos desenvolvidos

Considerando as formas como as medidas foram modeladas e os métodos de solução adotados, foram desenvolvidos e estudados 2 (dois) programas computacionais de simulação de medidas e 8 (oito) métodos computacionais para a identificação de parâmetros de funções de transferência, a partir de medidas obtidas em experimentos de resposta de frequência, com capacidade de detecção, identificação e rejeição automática de medidas espúrias. Esses métodos de identificação serão relacionados a seguir:

Método 1

- Medidas correlacionadas
- Solução clássica
- Forma Polar

Método 2

- Medidas correlacionadas
- Solução clássica
- Forma Cartesiana

Método 3

- Medidas correlacionadas
- Solução ortogonal
- Forma Polar

Método 4

- Medidas correlacionadas
- Solução ortogonal
- Forma Cartesiana

Método 5

- Medidas não-correlacionadas
- Solução clássica
- Forma Polar

Método 6

- Medidas não-correlacionadas
- Solução clássica
- Forma Cartesiana

Método 7

- Medidas não-correlacionadas
- Solução ortogonal
- Forma Polar

Método 8

- Medidas não-correlacionadas
- Solução ortogonal
- Forma Cartesiana

C A P Í T U L O I I

IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

2.0 Introdução

O método dos mínimos quadrados se constitui, sem dúvida alguma, numa ferramenta poderosa para a solução do problema de estimação de parâmetros de funções de transferência e tem sido utilizado para tal fim. Os estimadores que utilizam o método dos mínimos quadrados podem ser do tipo "batch", onde as medidas são processadas todas de uma só vez, ou do tipo "seqüencial", onde as medidas são processadas individual e seqüencialmente.

Neste capítulo serão apresentadas 3 (três) formas distintas para a solução do problema dos mínimos quadrados. O método de Levy, que é uma modificação da filosofia dos mínimos quadrados [5], permite a solução do problema de uma forma

não-iterativa através de um sistema de equações algébricas lineares. As vantagens e as desvantagens desse método são, aqui, discutidas. Para a utilização dos métodos clássico de Gauss-Newton e ortogonal de Givens, é necessária a linearização do modelo de medição e a solução do problema é obtida de uma forma iterativa. A utilização do método clássico de Gauss-Newton é adequada para os estimadores do tipo "batch", já que nesse método as medidas são processadas todas de uma só vez, enquanto a utilização do método ortogonal de Givens é adequado para os estimadores do tipo "seqüencial", pois em tal método as medidas são processadas seqüencialmente.

Um problema comum na Estimação de Estados em Sistemas de Potência é o aproveitamento da característica de esparsidade das matrizes. Considerando-se que o escopo deste trabalho é a identificação de parâmetros de funções de transferência, onde as dimensões das matrizes são pequenas, não foi dada importância a tal problema.

A caracterização da matriz de covariância dos erros de medição depende do grau de correlação das medidas. Neste capítulo, considerar-se-á essa matriz nas formas diagonal e bloco diagonal, sendo os motivos dessas considerações esclarecidos no Capítulo IV.

2.1 Método dos Mínimos Quadrados Ponderados [4]

2.1.1 Método dos mínimos quadrados ponderados na forma linear

Considere-se o modelo de medição dado por

$$\underline{z} = \underline{z}_0 + \underline{\eta} \quad (2.1)$$

$$E \{ \underline{\eta} \} = \underline{0} \quad ; \quad E \{ \underline{\eta} \underline{\eta}^T \} = R \quad (2.2)$$

onde,

\underline{z} : vetor de medidas de dimensão $m \times 1$, sendo m o número de medidas

\underline{z}_0 : vetor com valores verdadeiros das quantidades medidas, de dimensão $m \times 1$

$\underline{\eta}$: vetor de variáveis aleatórias, com média zero e matriz de covariância R , representando os erros de medição, de dimensão $m \times 1$

R : matriz de covariância dos erros de medição

Supondo que as quantidades medidas se relacionam linearmente com os parâmetros a serem estimados:

$$\underline{z}_o = Q \underline{x} \quad (2.3)$$

Obtem-se o modelo de medição linear:

$$\underline{z} = Q \underline{x} + \underline{\eta} \quad (2.4)$$

$$E \{ \underline{\eta} \} = \underline{0} \quad ; \quad E \{ \underline{\eta} \underline{\eta}^T \} = R \quad (2.5)$$

onde,

Q : matriz de dimensão $m \times n$, relacionando os valores verdadeiros das quantidades medidas e os parâmetros a serem identificados.

\underline{x} : vetor dos parâmetros a serem identificados de dimensão $n \times 1$.

Aplicando-se o método dos mínimos quadrados ponderado, obtem-se a seguinte função objetiva:

$$J(\hat{\underline{x}}) = [\underline{z} - Q \hat{\underline{x}}]^T R^{-1} [\underline{z} - Q \hat{\underline{x}}] \quad (2.6)$$

Onde $\hat{\underline{x}}$ é uma estimativa do vetor de parâmetros \underline{x} , que minimiza a função objetiva $J(\hat{\underline{x}})$. Esta, por sua vez, é igual à soma ponderada dos quadrados dos resíduos de estimação.

A escolha da matriz de ponderação da soma dos quadrados dos resíduos é de fundamental importância. Considerando que a precisão de uma medida é inversamente proporcional à sua variância, uma forma adequada de ponderação é através da inversa da matriz de covariância dos erros de medição [4]. Além disso, a solução do problema de mínimos quadrados ponderados em que a matriz de ponderação é igual à matriz de covariância dos erros de medição fornece o melhor estimador linear não-tendencioso ("BEST LINEAR UNBIASED ESTIMATOR - BLUE") [43].

A condição necessária para o mínimo de $J(\hat{\underline{x}})$ na Eq. [2.6] é:

$$\frac{\partial J(\hat{\underline{x}})}{\partial \hat{\underline{x}}} = 2 \underline{Q}^T \underline{R}^{-1} (\underline{z} - \underline{Q} \hat{\underline{x}}) = \underline{0} \quad (2.7)$$

Isolando $\hat{\underline{x}}$ na Eq. [2.8], obtem-se a conhecida equação normal de Gauss:

$$\hat{\underline{x}} = (\underline{Q}^T \underline{R}^{-1} \underline{Q})^{-1} \underline{Q}^T \underline{R}^{-1} \underline{z} \quad (2.8)$$

2.1.2 Método dos mínimos quadrados ponderados na forma não-linear

Considere-se o modelo de medição dado pelas Eq [2.1] e [2.2] e fazendo

$$\underline{z}_0 = \underline{f}(\underline{x}) \quad (2.9)$$

obtem-se o modelo de medição não-linear

$$\underline{z} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{\eta} \quad (2.10)$$

$$E \{ \underline{\eta} \} = \underline{0} \quad ; \quad E \{ \underline{\eta} \underline{\eta}^T \} = R \quad (2.11)$$

onde \underline{z} , \underline{x} , $\underline{\eta}$ e R são definidos como na seção 2.1.1 e $\underline{f}(\cdot)$ é um vetor de funções não-lineares, relacionando os valores verdadeiros das quantidades medidas e os parâmetros identificados, de dimensão $m \times 1$.

Aplicando o método dos mínimos quadrados ponderados obtem-se a função-objetiva a ser minimizada

$$J(\hat{\underline{x}}) = [\underline{z} - \underline{f}(\hat{\underline{x}})]^T R^{-1} [\underline{z} - \underline{f}(\hat{\underline{x}})] \quad (2.12)$$

Onde, $\hat{\underline{x}}$ é uma estimativa do vetor de parâmetros \underline{x} , que minimiza a função-objetiva $J(\hat{\underline{x}})$.

Sendo \underline{r} o vetor de resíduos definido como:

$$\underline{r} \stackrel{\Delta}{=} \underline{z} - \underline{f}(\underline{\hat{x}}) \quad (2.13)$$

tem-se

$$J(\underline{\hat{x}}) = \underline{r}^T R^{-1} \underline{r} \quad (2.14)$$

O problema de minimização da Eq. [2.14] é um problema de Programação Não-Linear Sem Restrições, cuja solução pode ser obtida através da utilização dos métodos clássicos existentes.

O método usualmente utilizado em Estimação de Estados em Sistemas de Potência para resolver o problema dos mínimos quadrados para o modelo de medição não-linear é o método de Gauss-Newton, que pode ser obtido através da utilização do método de Newton na função-objetiva $J(\underline{\hat{x}})$ [4].

Uma forma didática de obtenção do método de Gauss-Newton será mostrada a seguir.

A condição necessária para a minimização da função objetiva $J(\underline{\hat{x}})$ da Eq. [2.14] é

$$\frac{\partial J(\underline{\hat{x}})}{\partial \underline{\hat{x}}} = 0 \quad (2.15)$$

sendo,

$$\frac{\partial J(\underline{\hat{x}})}{\partial \underline{\hat{x}}} = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{\hat{x}}} \right)^T \left(\frac{\partial J(\underline{\hat{x}})}{\partial \underline{r}} \right) \quad (2.16)$$

e

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{\hat{x}}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\hat{x}}} [\underline{z} - \underline{f}(\underline{\hat{x}})] = \frac{\partial \underline{z}}{\partial \underline{\hat{x}}} - \frac{\partial \underline{f}(\underline{\hat{x}})}{\partial \underline{\hat{x}}} = - \underline{F}(\underline{\hat{x}}) \quad (2.17)$$

Onde $\underline{F}(\underline{\hat{x}})$ é a matriz Jacobiana, definida como:

$$\underline{F} \triangleq \frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \quad (2.18)$$

Além disso,

$$\frac{\partial J(\underline{\hat{x}})}{\partial \underline{r}} = 2 \underline{R}^{-1} \underline{r} = 2 \underline{R}^{-1} [\underline{z} - \underline{f}(\underline{x})] \quad (2.19)$$

Pelas Eq. [2.15], [2.16], [2.17] e [2.19]

$$\underline{F}^T(\underline{\hat{x}}) \underline{R}^{-1} (\underline{z} - \underline{f}(\underline{\hat{x}})) = \underline{0} \quad (2.20)$$

A Eq. [2.20] representa um conjunto de equações não-lineares de difícil solução e uma forma adequada de solução do problema é através da linearização do modelo de medição.

Seja $\underline{\hat{x}}_k$ o ponto em relação ao qual o modelo será linearizado. Desenvolvendo a função $\underline{f}(\underline{x})$ em série de Taylor e fazendo o truncamento dos termos de ordem superior, tem-se:

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x}_k) + \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x} = \underline{x}_k} (\underline{x} - \underline{x}_k) \quad (2.21)$$

Definindo

$$\underline{\Delta x} \triangleq \underline{x} - \underline{x}_k \quad (2.22)$$

$$\underline{\Delta z} \triangleq \underline{z} - \underline{f}(\underline{x}_k) \quad (2.23)$$

obtém-se:

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x}_k) + F(\underline{x}_k) \underline{\Delta x} \quad (2.24)$$

onde $F(\underline{x}_k)$ é a matriz Jacobiana no ponto \underline{x}_k .

Substituindo $\underline{f}(\underline{x})$ na Eq. [2.20] tem-se,

$$F^T(\hat{\underline{x}}_k) R^{-1} [\underline{z} - \underline{f}(\underline{x}_k) - F(\hat{\underline{x}}_k) \underline{\Delta x}] = \underline{0} \quad (2.25)$$

Das Eq. [2.23] e [2.25],

$$F^T(\hat{\underline{x}}_k) R^{-1} [\underline{\Delta z} - F(\hat{\underline{x}}_k) \underline{\Delta x}] = \underline{0} \quad (2.26)$$

ou

$$[F^T(\hat{\underline{x}}_k) R^{-1} F(\hat{\underline{x}}_k)] \underline{\Delta \hat{x}} = F^T(\hat{\underline{x}}_k) R^{-1} \underline{\Delta z} \quad (2.27)$$

Obtém-se, portanto, $\underline{\Delta \hat{x}}$ a partir de $\hat{\underline{x}}_k$ e do sistema de equações lineares simultâneas da Eq [2.27].

A solução do problema é obtida através de um processo iterativo com critério de convergência

$$\| \underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k \| < \varepsilon \quad (2.28)$$

onde ε é um valor pré-definido de tolerância.

2.1.3 Considerações sobre a caracterização estatística

NÃO TENDENCIOSIDADE DAS ESTIMATIVAS

A propriedade mais importante dos estimadores baseados no método dos mínimos quadrados ponderados dados pelas Eq. [2.8] e [2.27] é a não-tendenciosidade das estimativas, ou seja,

$E(\hat{\underline{x}}) = \underline{x}$, para o método dos mínimos quadrados ponderados na forma linear.

$E(\Delta\hat{\underline{x}}) = \Delta\underline{x}$, para o método dos mínimos quadrados ponderados na forma não-linear.

A propriedade da não-tendenciosidade pode ser demonstrada através da aplicação do operador expectância em $\hat{\underline{x}}$ na Eq. [2.8] e em $\Delta\hat{\underline{x}}$ na Eq. [2.27]

$$E(\hat{\underline{x}}) = (Q^T R^{-1} Q)^{-1} Q^T R^{-1} E\{\underline{z}\} \quad (2.29)$$

$$E(\Delta\hat{\underline{x}}) = (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} E\{\Delta\underline{z}\} \quad (2.30)$$

Das Eq. [2.4] e [2.5]

$$E\{\underline{z}\} = Q \underline{x} \quad (2.31)$$

Substituindo $\underline{f}(\underline{x})$, obtido da Eq. [2.24], na Eq. [2.10] tem-se,

$$\Delta\underline{z} = F(\underline{x}_k) \Delta\underline{x} + \underline{\eta} \quad (2.32)$$

sendo

$$E\{\underline{\eta}\} = 0 \quad , \quad E\{\underline{\eta} \underline{\eta}^T\} = R \quad (2.33)$$

Das Eq. [2.32] e [2.33]

$$E\{\Delta\underline{z}\} = F \Delta\underline{x} \quad (2.34)$$

Das Eq. [2.29] e [2.31]

$$E(\hat{\underline{x}}) = \underline{x} \quad (2.35)$$

E das Eq. [2.30] e [2.34]

$$E(\Delta\hat{\underline{x}}) = \Delta\underline{x} \quad (2.36)$$

CARACTERIZAÇÃO ESTATÍSTICA DE $J(\Delta \hat{\underline{x}})$

Para se obter uma estimativa $\Delta \hat{\underline{x}}$ de $\Delta \underline{x}$ usando o método dos mínimos quadrados, a função-objetiva é dada pela soma ponderada dos quadrados dos resíduos.

$$J(\Delta \hat{\underline{x}}) = [\Delta \underline{z} - F(\underline{x}_k) \Delta \hat{\underline{x}}]^T R^{-1} [\Delta \underline{z} - F(\underline{x}_k) \Delta \hat{\underline{x}}] \quad (2.37)$$

A função $J(\Delta \hat{\underline{x}})$ da Eq. [2.37], soma ponderada dos quadrados dos resíduos, possui uma distribuição qui-quadrada desde que os erros de medição tenham média zero e distribuição normal [4]. O número de graus de liberdade da distribuição é igual à diferença entre o número de medidas e o número de parâmetros a serem estimados.

Essa característica será de fundamental importância no processamento de medidas espúrias a ser desenvolvido no Capítulo III.

MATRIZ DE COVARIÂNCIA DOS ERROS DE ESTIMAÇÃO

A matriz de covariância dos erros de estimação é definida como

$$C_{\underline{x}} = E \{ (\underline{\hat{x}} - \underline{x}) (\underline{\hat{x}} - \underline{x})^T \} \quad (2.38)$$

para a forma linear, e

$$C_{\underline{x}} = E \{ (\Delta \underline{\hat{x}} - \Delta \underline{x}) (\Delta \underline{\hat{x}} - \Delta \underline{x})^T \} \quad (2.39)$$

para a forma não linear.

Utilizando a Eq. [2.8] é possível escrever o vetor $(\underline{\hat{x}} - \underline{x})$ como segue

$$\begin{aligned} \underline{\hat{x}} - \underline{x} &= (Q^T R^{-1} Q)^{-1} Q^T R^{-1} \underline{z} - \underline{x} = \\ &= (Q^T R^{-1} Q)^{-1} Q^T R^{-1} (\underline{z} - Q \underline{x}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

então,

$$\begin{aligned} E \{ (\underline{\hat{x}} - \underline{x}) (\underline{\hat{x}} - \underline{x})^T \} &= (Q^T R^{-1} Q)^{-1} Q^T R^{-1} \\ &E \{ (\underline{z} - Q \underline{x}) (\underline{z} - Q \underline{x})^T \} R^{-1} Q (Q^T R^{-1} Q)^{-1} \end{aligned}$$

Pelas Eq. [2.4] e [2.5]

$$E \{ (\underline{z} - Q \underline{x}) (\underline{z} - Q \underline{x})^T \} = E \{ \underline{\eta} \underline{\eta}^T \} = R$$

Desta forma

$$\begin{aligned} E \{ (\underline{\hat{x}} - \underline{x}) (\underline{\hat{x}} - \underline{x})^T \} &= (Q^T R^{-1} Q)^{-1} Q^T R^{-1} R R^{-1} Q \\ &\quad (Q^T R^{-1} Q)^{-1} = \quad (2.41) \\ &= (Q^T R^{-1} Q)^{-1} \end{aligned}$$

Utilizando-se a Eq. [2.27] é possível escrever o vetor $\Delta \hat{\underline{x}} - \Delta \underline{x}$ como segue

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\underline{x}} - \Delta \underline{x} &= (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} \Delta \underline{z} - \Delta \underline{x} \\ &= (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} (\Delta \underline{z} - F \Delta \underline{x}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

então,

$$\begin{aligned} E \{(\Delta \hat{\underline{x}} - \Delta \underline{x}) (\Delta \hat{\underline{x}} - \Delta \underline{x})^T\} &= (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} \\ &E \{(\Delta \underline{z} - F \Delta \underline{x}) (\Delta \underline{z} - F \Delta \underline{x})^T\} R^{-1} F (F^T R^{-1} F)^{-1} \end{aligned}$$

Pelas Eq. [2.32] e [2.33]

$$E \{(\Delta \underline{z} - F \Delta \underline{x}) (\Delta \underline{z} - F \Delta \underline{x})^T\} = E \{\underline{\eta} \underline{\eta}^T\} = R$$

Desta forma

$$\begin{aligned} E \{(\Delta \hat{\underline{x}} - \Delta \underline{x}) (\Delta \hat{\underline{x}} - \Delta \underline{x})^T\} &= (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} R \\ &R^{-1} F (F^T R^{-1} F)^{-1} \quad (2.43) \\ &= (F^T R^{-1} F)^{-1} \end{aligned}$$

A grande vantagem da utilização da matriz de covariância dos erros de estimação é a possibilidade de se aferir os resultados da estimação.

2.2 Método de Levy

2.2.1 Teoria Básica de Levy [5]

O método de Levy permite o ajuste de curvas de resposta em frequência de um sistema representado pela Eq. [2.44]

$$M (S) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots} \quad (2.44)$$

Onde s é uma variável complexa definida por $s = jw$, e w representa o valor de frequência.

Separando-se as partes reais e imaginárias do numerador e do denominador

$$M (jw) = \frac{(b_0 - b_2 w^2 + \dots) + jw (b_1 - b_3 w^2 + \dots)}{(a_0 - a_2 w^2 + \dots) + jw (a_1 - a_3 w^2 + \dots)} \quad (2.45)$$

Onde $b_0, b_1, b_2, \dots, a_0, a_1, a_2 \dots$ representam números reais.

Fazendo,

$$\begin{aligned}\alpha &= b_0 - b_2 w^2 + b_4 w^4 - \dots \\ \beta &= b_1 - b_3 w^2 + b_5 w^4 - \dots \\ \nu &= a_0 - a_2 w^2 + a_4 w^4 - \dots \\ \tau &= a_1 - a_3 w^2 + a_5 w^4 - \dots\end{aligned}\tag{2.46}$$

tem-se,

$$M(jw) = \frac{\alpha + jw \beta}{\nu + jw \tau}\tag{2.47}$$

Fazendo,

$$N(w) = \alpha + jw \beta\tag{2.48}$$

$$D(w) = \nu + jw \tau\tag{2.49}$$

tem-se,

$$M(jw) = \frac{N(w)}{D(w)}\tag{2.50}$$

Supondo-se a existência de uma função $H(j\omega)$ que representa exatamente os dados obtidos do experimento de resposta de frequência.

$$H(j\omega) = R(\omega) + j I(\omega) \quad (2.51)$$

Para um determinado valor de frequência ω_k o erro no ajuste da curva será

$$\begin{aligned} e(\omega_k) &= H(j\omega_k) - M(j\omega_k) \\ &= H(j\omega_k) - \frac{N(\omega_k)}{D(\omega_k)} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Desta forma o problema a ser solucionado é a minimização desse erro em cada um dos pontos de amostragem da curva.

2.2.2 Técnica especial de Levy [5]

A solução do problema de minimização do erro em cada um dos pontos de amostragem da curva poderia ser obtida através da aplicação do método dos mínimos quadrados. Considerando-se que a solução do problema desta forma se torna difícil, Levy modificou a filosofia dos mínimos quadrados conforme segue [5]:

Multiplicando a Eq. [2.52] por $D(w_k)$, tem-se

$$D(w_k) e(w_k) = D(w_k) H(jw_k) - N(w_k) \quad (2.53)$$

Separando-se a Eq. [2.53] em partes reais e imaginárias

$$D(w_k) e(w_k) = A(w_k) + j B(w_k) \quad (2.54)$$

O módulo da Eq. [2.54] é:

$$|D(w_k) e(w_k)| = (A^2(w_k) + B^2(w_k))^{1/2} \quad (2.55)$$

A função da soma dos quadrados dos erros ponderados pode ser escrita

$$E' = \sum_{k=0}^m |D(w_k) e(w_k)|^2 = \sum_{k=0}^m [A^2(w_k) + B^2(w_k)] \quad (2.56)$$

Das Eq. [2.48], [2.49], [2.51], [2.53] e [2.54]

$$\begin{aligned}
 A(w_k) &= \text{parte real de } [D(w_k) H(jw_k) - N(w_k)] \\
 &= \text{Re} \{ (v_k + jw_k \tau_k) [R(w_k) + j I(w_k)] \\
 &\quad - (\alpha_k + jw_k \beta_k) \} \\
 &= v_k R_k - w_k \tau_k I_k - \alpha_k
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
 B(w_k) &= \text{parte imaginária de } [D(w_k) H(jw_k) - N(w_k)] \\
 &= \text{Im} \{ (v_k + jw_k \tau_k) [R(w_k) + j I(w_k)] \\
 &\quad - (\alpha_k + jw_k \beta_k) \} \\
 &= w_k \tau_k R_k + v_k I_k - w_k \beta_k
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

substituindo os valores de $A(w_k)$ da Eq. [2.57] e $B(w_k)$ da Eq. [2.58] na Eq. [2.56] tem-se

$$\begin{aligned}
 E' &= \sum_{k=0}^m [(v_k R_k - w_k \tau_k I_k - \alpha_k)^2 + \\
 &\quad (w_k \tau_k R_k + v_k I_k - w_k \beta_k)^2]
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

A equação [2.59] pode ser diferenciada em relação a cada um dos coeficientes $b_0, b_1, b_2, \dots, a_1, a_2, a_3, \dots$ e os resultados igualados a zero.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'}{\partial b_0} &= \sum_{k=0}^m 2 (\nu_k R_k - w_k \tau_k I_k - \alpha_k) (-1) = 0 \\ \frac{\partial E'}{\partial b_1} &= \sum_{k=0}^m 2 (w_k \tau_k R_k + \nu_k I_k - w_k \beta_k) (-w_k) = 0 \quad (2.60) \\ \frac{\partial E'}{\partial b_2} &= \sum_{k=0}^m 2 (\nu_k R_k - w_k \tau_k I_k - \alpha_k) (w_k^2) = 0 \\ \frac{\partial E'}{\partial b_3} &= \sum_{k=0}^m 2 (w_k \tau_k R_k + \nu_k I_k - w_k \beta_k) (w_k^3) = 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'}{\partial a_1} &= \sum_{k=0}^m 2 (\nu_k R_k - w_k \tau_k I_k - \alpha_k) (-w_k I_k) \\ &\quad + 2 (w_k \tau_k R_k + \nu_k I_k - w_k \beta_k) (w_k R_k) = 0 \\ \frac{\partial E'}{\partial a_2} &= \sum_{k=0}^m 2 (\nu_k R_k - w_k \tau_k I_k - \alpha_k) (-w_k^2 R_k) \\ &\quad + 2 (w_k \tau_k R_k + \nu_k I_k - w_k \beta_k) (-w_k^2 I_k) = 0 \quad (2.61) \\ \frac{\partial E'}{\partial a_3} &= \sum_{k=0}^m 2 (\nu_k R_k - w_k \tau_k I_k - \alpha_k) (w_k^3 I_k) \\ &\quad + 2 (w_k \tau_k R_k + \nu_k I_k - w_k \beta_k) (-w_k^3 R_k) = 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aplicando-se as seguintes transformações lineares

$$\begin{aligned}\alpha_k &= b_0 - \alpha'_k \\ \beta_k &= b_1 - \beta'_k \\ \nu_k &= a_0 - \nu'_k \\ \tau_k &= a_1 - \tau'_k\end{aligned}\tag{2.62}$$

onde,

$$\begin{aligned}a_0 &= 1 \\ \alpha'_k &= b_2 w_k^2 - b_4 w_k^4 + b_6 w_k^6 - \dots \\ \beta'_k &= b_3 w_k^2 - b_5 w_k^4 + b_7 w_k^6 - \dots \\ \nu'_k &= a_2 w_k^2 - a_4 w_k^4 + a_6 w_k^6 - \dots \\ \tau'_k &= a_3 w_k^2 - a_5 w_k^4 + a_7 w_k^6 - \dots\end{aligned}\tag{2.63}$$

Substituindo os valores α_k, β_k, ν_k e τ_k da Eq. [2.62] nas Eq. [2.60] e [2.61], obtêm-se:

$$\sum_{k=0}^m - 2 R_k (1 - \nu'_k) + 2 w_k I_k (a_1 - \tau'_k) + 2 (b_0 - \alpha'_k) = 0$$

$$\sum_{k=0}^m - 2 w_k^2 R_k (a_1 - \tau'_k) - 2 w_k I_k (1 - \nu'_k) + 2 w_k^2 (b_1 - \beta'_k) = 0 \quad (2.64)$$

$$\sum_{k=0}^m 2 w_k^2 R_k (1 - \nu'_k) - 2 w_k^3 I_k (a_1 - \tau'_k) - 2 w_k^2 (b_0 - \alpha'_k) = 0$$

$$\sum_{k=0}^m 2 w_k^4 R_k (a_1 - \tau'_k) + 2 w_k^3 I_k (1 - \nu'_k) - 2 w_k^4 (b_1 - \beta'_k) = 0$$

·
·
·

$$\sum_{k=0}^m - 2 w_k I_k R_k (1 - \nu'_k) + 2 w_k^2 I_k^2 (a_1 - \tau'_k) + 2 w_k I_k (b_0 - \alpha'_k) + 2 w_k^2 R_k^2 (a_1 - \tau'_k) + 2 w_k R_k I_k (1 - \nu'_k) - 2 w_k^2 R_k (b_1 - \beta'_k) = 0$$

$$\sum_{k=0}^m - 2 w_k^2 R_k^2 (1 - \nu'_k) + 2 w_k^3 R_k I_k (a_1 - \tau'_k) + 2 w_k^2 R_k (b_0 - \alpha'_k) - 2 w_k^3 I_k R_k (a_1 - \tau'_k) - 2 w_k^2 I_k^2 (1 - \nu'_k) + 2 w_k^3 I_k (b_1 - \beta'_k) = 0 \quad (2.65)$$

$$\sum_{k=0}^m - 2 w_k^3 I_k (b_0 - \alpha'_k) + 2 w_k^4 R_k (b_1 - \beta'_k) - 2 w_k^4 (R_k^2 + I_k^2) (a_1 - \tau'_k) = 0$$

·
·
·

Efetuando simplificações

$$\sum_{k=0}^m b_0 - \alpha'_k + R_k v'_k + w_k I_k (a_1 - \tau'_k) = \sum_{k=0}^m R_k$$

$$\sum_{k=0}^m w_k^2 (b_1 - \beta'_k) + w_k I_k v'_k - w_k^2 R_k (a_1 - \tau'_k) = \sum_{k=0}^m w_k I_k \quad (2.66)$$

$$\sum_{k=0}^m w_k^2 R_k v'_k + w_k^3 I_k (a_1 - \tau'_k) + w_k^2 (b_0 - \alpha'_k) = \sum_{k=0}^m w_k^2 R_k$$

$$\sum_{k=0}^m w_k^4 R_k (a_1 - \tau'_k) + w_k^3 I_k v'_k + w_k^4 (b_1 - \beta'_k) = \sum_{k=0}^m w_k^3 I_k$$

. . .

$$\sum_{k=0}^m w_k I_k (b_0 - \alpha'_k) - w_k^2 R_k (b_1 - \beta'_k) + w_k^2 (R_k^2 + I_k^2) (a_1 - \tau'_k) = 0$$

$$\sum_{k=0}^m w_k^2 R_k (b_0 - \alpha'_k) + w_k^3 I_k (b_1 - \beta'_k) + w_k^2 (R_k^2 + I_k^2) v'_k = \sum_{k=0}^m (R_k^2 + I_k^2) \quad (2.67)$$

$$\sum_{k=0}^m w_k^3 I_k (b_0 - \alpha'_k) - w_k^4 R_k (b_1 - \beta'_k) + w_k^4 (R_k^2 + I_k^2) (a_1 - \tau'_k) = 0$$

. . .

As Eq. [2.66] e [2.67] podem ser agora condensadas usando-se as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \lambda_h &= \sum_{k=0}^m w_k^h \\ S_h &= \sum_{k=0}^m w_k^h R_k \\ T_h &= \sum_{k=0}^m w_k^h I_k \\ U_h &= \sum_{k=0}^m w_k^h (R_k^2 + I_k^2) \quad , \quad h = 0, 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \tag{2.68}$$

Aplicando as definições de α'_k , β'_k , ν'_k e τ'_k comõ dadas nas Eq. [2.62] e [2.63], obtem-se o seguinte conjunto de equações algébricas lineares:

$$\begin{aligned} \lambda_0 b_0 - \lambda_2 b_2 + \lambda_4 b_4 - \lambda_6 b_6 + \dots \\ + T_1 a_1 + S_2 a_2 - T_3 a_3 - S_4 a_4 + T_5 a_5 + \dots &= S_0 \\ \lambda_2 b_1 - \lambda_4 b_3 + \lambda_6 b_5 - \lambda_8 b_7 + \dots \\ - S_2 a_1 + T_3 a_2 + S_4 a_3 - T_5 a_4 - S_6 a_5 + \dots &= T_1 \\ \lambda_2 b_0 - \lambda_4 b_2 + \lambda_6 b_4 - \lambda_8 b_6 + \dots \\ + T_3 a_1 + S_4 a_2 - T_5 a_3 - S_6 a_4 + T_7 a_5 + \dots &= S_2 \\ \lambda_4 b_1 - \lambda_6 b_3 + \lambda_8 b_5 - \lambda_{10} b_7 + \dots \\ - S_4 a_1 + T_5 a_2 + S_6 a_3 - T_7 a_4 - S_6 a_5 + \dots &= T_3 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \vdots & \end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned} T_1 b_0 - S_2 b_1 - T_3 b_2 + S_4 b_4 - \dots \\ + U_2 a_1 - U_4 a_3 + U_6 a_5 - U_8 a_7 + \dots = 0 \\ S_2 b_0 + T_3 b_1 - S_4 b_2 - T_5 b_3 + \dots \\ + U_4 a_2 - U_6 a_4 + U_8 a_6 - U_{10} a_8 + \dots = U_2 \\ T_3 b_0 - S_4 b_1 - T_5 b_2 + S_6 b_3 + \dots \\ + U_4 a_1 - U_6 a_3 + U_8 a_5 - U_{10} a_7 + \dots = 0 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Os valores numéricos dos parâmetros desconhecidos a_1 , a_2 , a_3 , ..., b_0 , b_1 , b_2 , ... podem agora ser determinados pela solução do conjunto de equações algébricas lineares da Eq. [2.69].

2.2.3 Comentários sobre o método de Levy

Como fica dito no Capítulo I, o método de Levy constitui-se numa ferramenta poderosa na identificação de parâmetros de funções de transferência a partir de medidas de módulo e fase obtidas em experimentos de resposta de frequência.

As suas vantagens são:

- Pode ser aplicado a funções de transferência de ordem elevada sem nenhuma dificuldade e dispensa a necessidade do conhecimento prévio da topologia da função de transferência.
- O método de solução do problema é um método não-iterativo exigindo, por isso, menor esforço computacional do que os métodos que utilizam processos iterativos.
- O fato da solução do problema ser obtida por um método não-iterativo exclui a obrigatoriedade do conhecimento de algum ponto próximo da solução para ser utilizado como valor inicial do processo, como é o caso dos métodos iterativos.

As suas desvantagens são:

- A ponderação dos erros de medição, através do denominador da Eq. (2.50), dificulta a interpretação estatística dos resultados e a utilização de técnicas de processamento de medidas espúrias.
- O processo de identificação de parâmetros através do método de Levy é consideravelmente sensível a erros de medição. Tal problema se torna mais grave devido à inexistência de técnicas de processamento de medidas espúrias associadas ao método.
- Não pondera as medidas em função do seu grau de confiança.
- Não oferece meios de se aferir o grau de precisão dos resultados.

2.3 Método seqüencial ortogonal de Givens

2.3.1 Fundamentos teóricos [6], [7]

Considere-se o seguinte modelo de medição linear,

$$\underline{y} = G \underline{x} + \underline{v} \quad (2.70)$$

$$E \{ \underline{v} \} = \underline{0} \quad (2.71)$$

onde,

y : vetor de medidas de dimensão $n \times 1$, sendo n o número de medidas.

x : vetor dos parâmetros a serem identificados também de dimensão $n \times 1$, sendo n o número de parâmetros.

G : matriz de observação, de dimensão $n \times n$.

Nesse modelo \underline{y} tem média zero. Por questão de conveniência considerar-se-á temporariamente que o número de medidas que estão sendo processadas é igual ao número de parâmetros a serem identificados, ou seja, a matriz de observação G é uma matriz quadrada.

Para se obter uma estimativa $\hat{\underline{x}}$ de \underline{x} usando o método dos mínimos quadrados, a função objetiva a ser minimizada é dada pela soma dos quadrados dos resíduos

$$J = [\underline{y} - G \hat{\underline{x}}]^T [\underline{y} - G \hat{\underline{x}}] \quad (2.72)$$

Seja \tilde{y}_1 uma nova medida a ser processada, a qual se relaciona com o vetor \underline{x} através da equação

$$\tilde{y}_1 = \underline{g}_1^T \underline{x} + \tilde{v} \quad (2.73)$$

Desta forma, levando-se em conta a nova medida, a função objetiva torna-se

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= J + (\tilde{y}_1 - \underline{g}_1^T \hat{\underline{x}})^2 \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} G \\ \underline{g}_1^T \end{bmatrix} \hat{\underline{x}} - \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \tilde{y}_1 \end{bmatrix} \right\}^T \left\{ \begin{bmatrix} G \\ \underline{g}_1^T \end{bmatrix} \hat{\underline{x}} - \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \tilde{y}_1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} G \\ \underline{g}_1^T \end{bmatrix} \hat{\underline{x}} - \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \tilde{y}_1 \end{bmatrix} \right\|^2 \end{aligned} \quad (2.74)$$

Sendo a norma Euclídiana invariante com relação a transformações ortogonais [6] e [7], pode-se achar uma transformação ortogonal Q , tal que

$$Q \begin{bmatrix} \underline{G} \\ \underline{T} \\ \underline{g}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \tilde{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \tilde{e}_1 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

onde,

\underline{U} : matriz triangular superior de dimensão $n \times n$

$\underline{0}$: vetor nulo de dimensão $1 \times n$

\underline{w} : vetor de dimensão $n \times 1$

\tilde{e}_1 : escalar

Sendo Q uma transformação ortogonal, então:

$$Q^T Q = Q Q^T = I \quad (2.76)$$

onde I representa a matriz identidade.

Utilizando-se a transformação ortogonal da Eq. (2.75) na Eq. (2.74), \tilde{J} pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \left\{ \begin{bmatrix} G \\ \frac{g_1^T}{g_1} \end{bmatrix} \underline{\hat{x}} - \begin{bmatrix} y \\ \tilde{y}_1 \end{bmatrix} \right\}^T Q^T Q \left\{ \begin{bmatrix} G \\ \frac{g_1^T}{g_1} \end{bmatrix} \underline{\hat{x}} - \begin{bmatrix} y \\ \tilde{y}_1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ Q \left\{ \begin{bmatrix} G \\ \frac{g_1^T}{g_1} \end{bmatrix} \underline{\hat{x}} - \begin{bmatrix} y \\ \tilde{y}_1 \end{bmatrix} \right\} \right\}^T \left\{ Q \left\{ \begin{bmatrix} G \\ \frac{g_1^T}{g_1} \end{bmatrix} \underline{\hat{x}} - \begin{bmatrix} y \\ \tilde{y}_1 \end{bmatrix} \right\} \right\} \quad (2.77) \\ &= \begin{bmatrix} U \underline{\hat{x}} - \underline{w} \\ -\tilde{e}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U \underline{\hat{x}} - \underline{w} \\ -\tilde{e}_1 \end{bmatrix} = [U \underline{\hat{x}} - \underline{w}]^T [U \underline{\hat{x}} - \underline{w}] + \tilde{e}_1^2 \end{aligned}$$

Então $\underline{\hat{x}}$ que minimiza \tilde{J} pode ser obtido resolvendo-se o sistema triangular

$$U \underline{\hat{x}} = \underline{w} \quad (2.78)$$

Pode-se observar da Eq. [2.77] que \tilde{e}_1^2 representa a soma dos quadrados dos resíduos para a solução pelos mínimos quadrados. A disponibilidade desse termo é de fundamental importância no estudo das técnicas de rejeição de medidas espúrias, como será visto no Capítulo III.

A transformação ortogonal das Eq. [2.75] e [2.77] é realizada para todas as medidas as quais se deseja processar. Isto consiste em uma nova triangularização da matriz de observação a cada medida processada e o valor armazenado na função-objetiva será a soma acumulada dos quadrados dos resíduos. Esse procedimento forma um algoritmo recursivo para o processamento seqüencial de medidas.

O passo mais importante da obtenção do algoritmo recursivo para o processamento seqüencial de medidas é a definição da transformação ortogonal Q das Eq. [2.75], [2.76] e [2.77]. Essa transformação ortogonal Q pode ser obtida do algoritmo de Givens, que possui a vantagem de se constituir num método seqüencial ortogonal que triangulariza a matriz de observação aumentada operando por linhas.

2.3.2 Descrição dos princípios das rotações de Givens [6]

O algoritmo de Givens consiste na realização de operações sucessivas entre os elementos de um vetor linha \underline{p} , que relaciona, com o vetor de parâmetros \underline{x} , a nova medida a ser processada, e as linhas de uma matriz triangular U até que todos os elementos de \underline{p} sejam completamente zerados. O processamento de um elemento do vetor \underline{p} representa uma rotação. A figura 2.1 é uma representação visual da aplicação sucessiva das rotações de

Givens, onde \tilde{U} e \tilde{p} representam a matriz U e o vetor p após as primeiras $(\ell-1)$ rotações.

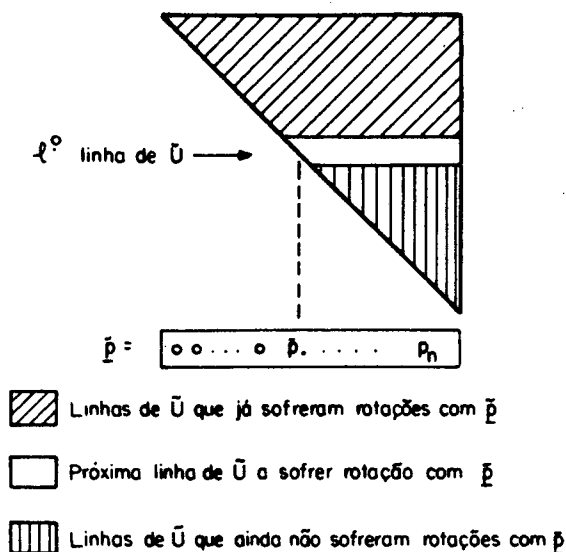


Fig. 2.1 Representação da aplicação sucessiva das rotações de Givens.

Após o processamento de todos os elementos do vetor \underline{p} , pode-se processar uma nova medida \tilde{y}_2 , que se relaciona com \underline{x} através do vetor linha \underline{g}_2^T , através da retriangularização da matriz aumentada $[\underline{U}^T \mid \underline{g}_2^T]^T$ utilizando as rotações de Givens, sendo U a matriz resultante da triangularização da matriz de observação G , conforme Eq. [2.75]. O aumento da matriz U e do vetor \underline{g}_2^T , respectivamente, por \underline{w} e \tilde{y}_2 implica numa rotação adicional, que fornecerá a contribuição \tilde{e}_2^2 da medida \tilde{y}_2 à soma dos quadrados dos resíduos.

Para descrever os princípios das rotações de Givens, deve-se considerar o vetor \underline{u} como a i -ésima linha da matriz triangular U aumentada pelo i -ésimo elemento do vetor \underline{w} e o vetor \underline{p} como uma nova linha da matriz de observação aumentada pela sua correspondente medida a ser processada.

$$\begin{aligned} \underline{u} &= [0 \dots 0 \ u_i \ \dots \ u_k \ \dots \ u_{n+1}] \\ \underline{p} &= [0 \dots 0 \ p_i \ \dots \ p_k \ \dots \ p_{k+1}] \end{aligned} \tag{2.79}$$

Uma rotação entre \underline{u} e \underline{p} pelo método de Givens anula o elemento de \underline{p} correspondente à rotação realizada. Desta forma, após a rotação os vetores linha serão

$$\begin{aligned} \underline{u}' &= [0 \dots 0 \ u'_i \ \dots \ u'_k \ \dots \ u'_{n+1}] \\ \underline{p}' &= [0 \dots 0 \ 0 \ \dots \ p'_k \ \dots \ p'_{n+1}] \end{aligned} \tag{2.80}$$

As rotações aplicadas aos vetores linha- \underline{u} e \underline{p} foram definidas como [9], [10]:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}' \\ \underline{p}' \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

onde $c^2 + s^2 = 1$

Os escalares c e s são determinados a partir do requisito $p_i' = 0$ e são dados por

$$c = u_i / (u_i^2 + p_i^2)^{1/2} \quad (2.82)$$

$$s = p_i / (u_i^2 + p_i^2)^{1/2}$$

O algoritmo de Givens pode, desta forma, ser operacionalizado através da inicialização da matriz triangular U com todos os seus elementos nulos e da triangularização da matriz de observação através do processamento de todas as suas linhas em seqüência.

A versão rápida das rotações de Givens, isenta do cálculo de raiz-quadrada, desenvolvida por Gentleman [9], aumenta a eficiência computacional do algoritmo. A modificação no algoritmo original consiste basicamente na decomposição da matriz triangular superior U no produto de uma matriz diagonal $D^{1/2}$ e uma matriz triangular superior unitária \bar{U} , ou seja

$$U = D^{1/2} \bar{U} \quad (2.83)$$

Os elementos da matriz $D^{1/2}$ são as raízes quadradas dos elementos correspondentes de outra matriz diagonal D . Na prática somente D necessita ser calculada.

De acordo com a decomposição da Eq [2.83] os vetores linha que sofrerão a rotação podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \underline{u} &= [0 \dots 0 (d)^{1/2} \dots (d)^{1/2} \bar{u}_k \dots (d)^{1/2} \bar{u}_{n+1}] \\ \underline{p} &= [0 \dots 0 (w)^{1/2} p_i \dots (w)^{1/2} p_k \dots (w)^{1/2} p_{n+1}] \end{aligned} \quad (2.84)$$

Nota-se que na Eq. [2.84] que o novo vetor \underline{p} está sendo ponderado por um fator $(w)^{1/2}$. Após a realização da rotação os vetores linha se tornam

$$\begin{aligned} \underline{u}' &= [0 \dots 0 (d')^{1/2} \dots (d')^{1/2} \bar{u}'_k \dots (d')^{1/2} \bar{u}'_{n+1}] \\ \underline{p}' &= [0 \dots 0 \quad 0 \quad \dots (w')^{1/2} p'_k \dots (w')^{1/2} p'_{n+1}] \end{aligned} \quad (2.85)$$

As equações que definem as transformações anteriores podem ser obtidas utilizando-se as novas definições de \underline{u} , \underline{p} , \underline{u}' e \underline{p}' nas Eq. [2.81] e [2.82], e são

$$\begin{aligned} d' &= d + w p_i^2 \\ w' &= d w/d' \\ \bar{c} &= d/d' \\ \bar{s} &= w p_i/d' \\ p'_k &= p_k - p_i \bar{u}_k \\ \bar{u}'_k &= \bar{c} \bar{u}_k + \bar{s} p_k \quad ; \quad k = i + 1, \dots, n + 1 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Pode-se observar comparando as Eq. [2.86] e as Eq. [2.82], que os cálculos das raízes quadradas foram eliminados pela utilização do artifício da Eq. [2.83]. Além das vantagens computacionais, devido a eliminação dos cálculos das raízes quadradas, a inclusão dos fatores de ponderação, torna o algoritmo particularmente interessante para a solução de problemas de mínimos quadrados ponderados.

Depois de todas as linhas da matriz de observação aumentadas com as medidas correspondentes terem sido processadas, a solução do problema de mínimos quadrados ponderados pode ser obtida através de um processo de substituição inversa. A matriz diagonal D é obtida com um elemento extra, que corresponde a soma dos quadrados resíduos. Essa é uma característica importante para o estudo das técnicas de rejeição de medidas espúrias, como será visto no Capítulo III. Outra característica importante do método de Givens que é muito útil para o estudo das técnicas de rejeição de medidas espúrias, é a possibilidade de remover o efeito de qualquer linha da matriz de observação e da sua medida associada depois delas já terem sido processadas. Isso pode ser conseguido através do reprocessamento da linha aumentada da medida associada com um peso correspondente ao negativo do peso original [9].

2.3.3 Transformação do modelo de medição [8].

Quando se considera um determinado grau de correlação entre as medidas de módulo e fase para um mesmo valor de frequência, a matriz de covariância dos erros de medição tem a forma bloco-diagonal. Esta forma a torna imprópria para ser utilizada como matriz de ponderação no método de Givens. Para contornar essa dificuldade é possível se realizar uma transformação do modelo de medição.

A transformação do modelo linearizado de medição das Eq. [2.32] e [2.33] permite a obtenção de um modelo, cujo vetor dos erros de medição apresenta matriz de covariância igual à matriz identidade. Sendo a matriz de covariância R uma matriz não-singular e positiva definida, é possível submetê-la à decomposição de CHOLESKY, que consiste em um produto de uma matriz triangular inferior, igual a raiz quadrada de R , e sua transposta. Seja $R^{1/2}$ a raiz quadrada de R , então

$$E \{ \underline{\eta} \underline{\eta}^T \} = R \triangleq R^{1/2} R^{T/2} \quad (2.87)$$

ou

$$E \{ (R^{-1/2} \underline{\eta}) (R^{-1/2} \underline{\eta})^T \} = I \quad (2.88)$$

Desta forma o vetor dos erros de medição modificado, $R^{-1/2} \underline{\eta}$ possui matriz de covariância igual à matriz identidade. Se a Eq. [2.32] for pré-multiplicada por $R^{-1/2}$, tem-se

$$\underline{\Delta y} = G(\underline{x}_k) \underline{\Delta x} + \underline{v} \quad (2.89)$$

$$E \{ \underline{v} \underline{v}^T \} = I \quad (2.90)$$

onde,

$$\begin{aligned} \underline{\Delta y} &\triangleq R^{-1/2} \underline{\Delta z} \\ G(\underline{x}_k) &\triangleq R^{-1/2} F(\underline{x}_k) \\ \underline{v} &\triangleq R^{-1/2} \underline{\eta} \end{aligned} \quad (2.91)$$

A função objetiva da Eq. [2.37] após a modificação se torna

$$\begin{aligned} J &= [\underline{\Delta y} - G(\underline{x}_k) \underline{\Delta x}]^T [\underline{\Delta y} - G(\underline{x}_k) \underline{\Delta x}] \\ &= ||\underline{\Delta y} - G(\underline{x}_k) \underline{\Delta x}||^2 \end{aligned} \quad (2.92)$$

2.3.4 Aplicação do método de Givens aos mínimos quadrados

Com a aplicação do método dos mínimos quadrados ponderados ao modelo de medição linearizado das Eq. [2.32] e [2.33] resultou na função objetiva da Eq. [2.37], cuja minimização fornece uma estimativa $\Delta \hat{x}$ de Δx .

Como foi visto anteriormente, a versão rápida do método de Givens considera que as linhas da matriz a ser triangularizada são ponderadas por um fator $(w)^{1/2}$.

A aplicação do método de Givens à solução do problema de mínimos quadrados ponderados pode ser realizada seguindo-se os seguintes procedimentos:

1. A matriz Jacobiana F da Eq. [2.37] pode ser triangularizada pelo uso das rotações de Givens, como uma matriz de observação.
2. O vetor Δz pode ser usado como uma coluna extra de F de modo a sofrer as mesmas transformações aplicadas àquela matriz.
3. O fator de ponderação w_i pode ser considerado igual ao elemento diagonal correspondente da matriz R^{-1} , para o caso em que a matriz R é uma matriz diagonal, de tal forma que

$$(w_i)^{1/2} = R_{ii}^{-1}$$

4. Para o caso em que a matriz R é uma matriz bloco diagonal, como será visto no Capítulo IV, o procedimento adequado é a aplicação da transformação do modelo linearizado para a obtenção da matriz de covariância igual à unidade, de tal forma que

$$(w_i)^{1/2} = 1$$

2.4 Conclusão

Nesse capítulo se viu a aplicação do método dos mínimos quadrados ponderados na solução do problema de estimação. Além disso, foram apresentadas 3 (três) formas distintas para a solução do problema dos mínimos quadrados.

O método clássico de Gauss-Newton é utilizado com estimadores do tipo "batch", que processam as medidas todas de uma só vez.

O método de Levy apresenta a vantagem de todo o método não-iterativo, porém apresenta como desvantagem a dificuldade da interpretação estatística dos resultados e a não utilização de técnicas de rejeição de medidas espúrias. Considerando que o método de Levy é muito sensível à grandeza dos erros de medição, tal desvantagem se agrava.

O método seqüencial ortogonal baseado nas rotações de Givens apresenta as propriedades de processamento seqüencial de medidas, reproprocessamento de medidas e disponibilidade da soma ponderada dos quadrados dos resíduos após o processamento de cada uma das medidas. Propriedades essas que serão muito úteis no estudo das técnicas de rejeição de medidas espúrias, conforme será visto no Capítulo III.

C A P Í T U L O I I I

PROCESSAMENTO DE MEDIDAS ESPÚRIAS

3.0 Introdução

As medidas espúrias ou erros grosseiros não estão contemplados no vetor dos erros de medição dos modelos estudados no Capítulo II, porque são erros incomuns e não possuem a caracterização estatística estabelecida. Esses erros tanto podem ser oriundos de sinais estranhos existentes no meio ambiente, como de falha do equipamento utilizado, ou do baixo grau de dependência do sinal de saída relativamente ao sinal de entrada, ou de falha na digitalização, quando utilizamos equipamentos digitais, etc.

A técnica utilizada neste trabalho para o processamento de medidas espúrias faz uso do teste de hipóteses da teoria

estatística. A opção por tal técnica se deve ao seu bom desempenho nas aplicações em Estimação de Estado de Sistemas de Potência [11].

O processamento de medidas espúrias através do teste de hipóteses é efetuado em 3 (três) etapas. A primeira delas, chamada de detecção, verifica se existe medida espúria entre as medidas que estão sendo processadas. Caso o teste de detecção confirme a existência de medida espúria, a segunda etapa, chamada de identificação, determina quais são as medidas espúrias. A terceira, chamada de remoção, elimina as medidas que foram anteriormente identificadas como espúrias.

3.1 Conceitos Estatísticos

3.1.1 Teste de hipóteses [16]

Uma hipótese estatística é uma conjectura sobre a distribuição de probabilidade de uma ou mais variáveis aleatórias.

Um teste de hipóteses serve para subsidiar decisões à luz da teoria estatística segundo o qual as hipóteses formuladas podem ser aceitas ou rejeitadas.

HIPÓTESES ESTATÍSTICAS

Para a maioria dos problemas de teste de hipóteses são formuladas duas hipóteses estatísticas. Uma delas denominada nula e representada por H_0 , que é a principal. A outra, denominada alternativa e representada por H_1 , que é a hipótese complementar da principal [35].

ERROS DO TIPO I e II

A teoria do teste de hipóteses reconhece dois tipos de erros. Se uma hipótese — quando verdadeira — for rejeitada, diz-se que foi cometido um erro do tipo I. Se, por outro lado, uma hipótese — quando falsa — for aceita, diz-se que foi cometido um erro do tipo II. Desta forma, tem-se

ERRO DO TIPO I: Rejeição de H_0 , quando ela é verdadeira.

ERRO DO TIPO II: Aceitação de H_0 , quando ela é falsa.

NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA

O nível de significância do teste, também chamado de probabilidade de falso alarme, é a probabilidade de ocorrência de um erro do tipo I. Essa probabilidade representada por α , é especificada antes da realização do teste de hipóteses.

A probabilidade de ocorrência de um erro do tipo II é representada por β .

Na prática, é usual a adoção de um nível de significância 0.05 ou 0.01, embora outros valores possam ser usados [34]. A adoção, por exemplo, de um nível de significância 0.01, ou 1%, no planejamento de um teste de hipóteses, conduz à existência de 1 possibilidade, em 100, da hipótese ser rejeitada, quando deveria ser aceita, ou seja, a confiança na decisão acertada é de 99%.

A quantidade $(1 - \beta)$ mede a probabilidade de rejeição de H_0 , quando ela é falsa e é chamada de função de potência do teste.

PROCEDIMENTO PARA A REALIZAÇÃO DO TESTE DE HIPÓTESES

Uma técnica prática para a realização do teste de hipóteses consiste em se encontrar uma função observável das variáveis aleatórias sob consideração, que se comporta de maneira distinta diante das duas hipóteses. A diferença de comportamento da função observável pode ser aproveitada na formulação do teste de hipóteses.

3.1.2 Caracterização Estatística de $J(\underline{x})$

Para usar a soma ponderada dos quadrados dos resíduos no teste de hipóteses, $J(\hat{\underline{x}})$ precisa estar caracterizada estatisticamente.

Considere-se que:

- $\underline{\eta} \sim N(0, R)$, ou seja, o vetor dos erros de medição está caracterizado estatisticamente por uma distribuição normal com média zero e matriz de covariância R .
- A topologia da função de transferência é conhecida.
- A linearização do modelo de medição foi obtida com relação a um ponto próximo da solução.

Por um lado, sob as condições descritas, $J(\hat{\underline{x}})$ tem distribuição qui-quadrada com $(m - n)$ graus de liberdade, em que m é igual ao número de medidas e n é igual ao número de parâmetros [4], [12]. Por outro, $J(\hat{\underline{x}})$ não terá distribuição qui-quadrada, quando houver presença de erro grosseiro, pois, neste caso, a caracterização estatística de $\underline{\eta}$ estará violada [12].

3.2 Medidas espúrias pelo método da equação normal

3.2.1 Detecção de medidas espúrias

Considere-se o modelo de medição linearizado discutido no Capítulo II

$$\underline{\Delta z} = F(\underline{x}_k) \underline{\Delta x} + \underline{\eta} \quad (3.1)$$

$$E \{ \underline{\eta} \} = \underline{0} \quad ; \quad E \{ \underline{\eta} \underline{\eta}^T \} = R \quad (3.2)$$

onde,

$$\underline{\Delta z} = \underline{z} - \underline{f}(\underline{x}_k) \quad (3.3)$$

$$\underline{\Delta x} = \underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k \quad (3.4)$$

$$F(\underline{x}_k) = \left. \frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x} = \underline{x}_k} = \text{matriz jacobiana} \quad (3.5)$$

sendo,

\underline{z} : vetor de medidas de dimensão $m \times 1$, sendo m o número de medidas.

x : vetor de parâmetros a serem identificados de dimensão $n \times 1$, sendo n o número de parâmetros.

f : vetor de funções não-lineares de dimensão $m \times 1$, que relaciona os valores reais das quantidades medidas e os parâmetros.

η : vetor de variáveis aleatórias de dimensão $m \times 1$ com média zero e matriz de covariância R , representando os erros de medição.

Para se obter uma estimativa $\Delta \hat{x}$ de Δx usando o método dos mínimos quadrados, a função objetiva a ser minimizada é dada pela soma dos quadrados dos resíduos.

$$J(\Delta \hat{x}) = [\Delta z - F \Delta \hat{x}]^T R^{-1} [\Delta z - F \Delta \hat{x}] \quad (3.6)$$

Como se viu na seção anterior, uma técnica adequada para o teste de hipóteses consiste na obtenção de uma função observável das variáveis aleatórias sob consideração, que se comporta de maneira distinta diante das duas hipóteses. Viu-se também que a soma ponderada dos quadrados dos resíduos, desde que caracterizada estatisticamente, tem distribuição qui-quadrada na ausência de erros grosseiros e não tem distribuição qui-quadrada na presença de erros grosseiros. A caracterização estatística do

vetor dos erros de medição dada pela Eq. [3.2] não é suficiente para o propósito de detecção de medidas espúrias, havendo necessidade de se caracterizar também a sua distribuição de probabilidades.

Considere-se que $J(\Delta\hat{x})$ esteja caracterizado estatisticamente, conforme item 3.1.2. da seção anterior. Desta maneira, podemos formular o seguinte teste de hipóteses:

Hipótese nula, H_0 : $J(\Delta\hat{x})$ tem distribuição qui-quadrada.

Hipótese alternativa, H_1 : $J(\Delta\hat{x})$ não tem distribuição qui-quadrada.

Sendo α_0 um valor pré-definido para a probabilidade de falso alarme, é possível determinar, através da definição de probabilidade do falso alarme, um valor limite k tal que

$$P \{ J(\Delta\hat{x}) > k \mid J(\Delta\hat{x}) \text{ é } \chi_{m-n}^2 \} = \alpha_0 \quad (3.7)$$

onde

$\chi_{m-n, (1-\alpha_0)}^2$: representa o percentil $(1-\alpha_0)$ da distribuição qui-quadrada com $(m-n)$ graus de liberdade, sendo m o número de medidas e n o número de parâmetros.

Em função das considerações anteriores, os procedimentos para o teste de hipóteses aplicado à detecção de medidas espúrias são definidos da seguinte forma:

- a) Define-se $\alpha = \alpha_0$, sendo α_0 um valor baixo (entre 0,01 e 0,1 por exemplo) [4].
- b) Obtem-se um limiar $K = \chi_{m-n}^2(1-\alpha_0)$.
- c) Compara-se os valores de $J(\Delta\hat{x})$ e K .

Se $J(\Delta\hat{x}) > k$; conclui-se que existe medida espúria.

Se $J(\Delta\hat{x}) < k$; conclui-se que não existe medida espúria.

3.2.2 Identificação de medidas espúrias [4], [28]

Caso o processo de detecção de medidas espúrias tenha confirmado a existência desse tipo de medida, torna-se necessário determinar quais são essas medidas. O processo de identificação deve realizar tal trabalho.

A identificação de medidas espúrias requer uma análise individual do valor dos resíduos. Uma possível técnica de identificação poderia ser obtida através da determinação do maior resíduo em valor absoluto, que poderia corresponder a uma medida espúria. No entanto, tal correspondência não se faz necessariamente verdadeira pelas seguintes razões:

- a) As medidas têm diferentes precisões e as variâncias podem ser significativamente diferentes.
- b) Os resíduos podem ser correlacionados. Assim sendo, o resíduo de uma medida espúria pode afetar os resíduos das outras medidas.

Uma técnica mais adequada de identificação de medidas espúrias pode ser obtida através da determinação do maior resíduo normalizado. A normalização dos resíduos pode ser efetuada conforme fica demonstrado a seguir.

Considere-se a função objetiva do modelo de medição linearizado da Eq. [2.37]

$$J(\Delta\hat{x}) = [\Delta z - F \Delta\hat{x}]^T R^{-1} [\Delta z - F \Delta\hat{x}] \quad (3.8)$$

sendo

$$\underline{r} \triangleq [\Delta z - F \Delta\hat{x}] \quad (3.9)$$

Considere-se ainda o sistema de equações lineares simultâneas da Eq. [2.27]

$$(F^T R^{-1} F) \Delta\hat{x} = F^T R^{-1} \Delta z \quad (3.10)$$

Da Eq. [3.10] pode-se obter

$$\underline{\Delta x} = (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} \underline{\Delta z} \quad (3.11)$$

Da Eq. [2.43] sabe-se que

$$C_x = (F^T R^{-1} F)^{-1} \quad (3.12)$$

onde C_x é a matriz de covariância dos erros de estimação (ver Eqs. [2.39] e [2.43]).

Desta forma a Eq. [3.11] se torna

$$\underline{\Delta x} = C_x F^T R^{-1} \underline{\Delta z} \quad (3.13)$$

Substituindo-se o vetor $\underline{\Delta x}$ da Eq. [3.13] na Eq. [3.9], ter-se-á:

$$\underline{r} = [\underline{\Delta z} - F C_x F^T R^{-1} \underline{\Delta z}] \quad (3.14)$$

$$\underline{r} = [R - F C_x F^T] R^{-1} \underline{\Delta z} \quad (3.15)$$

Definindo

$$W \triangleq R - F C_x F^T \quad (3.16)$$

tem-se

$$\underline{r} = W R^{-1} \Delta z \quad (3.17)$$

e pode-se fazer

$$S \triangleq W R^{-1} \quad (3.18)$$

Sendo S a matriz de sensibilidade dos resíduos de ordem $m \times m$, idempotente e singular, cujo posto é igual a $(m - n)$ [4]. A sua i -ésima coluna mostra como o erro grosseiro da medida \underline{z}_i está distribuído entre os resíduos. Portanto, a contaminação dos resíduos por uma medida espúria pode ser investigada através da observação dos elementos da coluna correspondente à medida espúria, na matriz de sensibilidade dos resíduos.

Da Eq. [3.9], a matriz de covariância dos resíduos pode ser obtida da seguinte forma

$$\begin{aligned} E \{ \underline{r} \underline{r}^T \} &= E \{ \Delta z \Delta z^T \} - F E \{ \Delta \hat{x} \Delta \hat{x}^T \} F^T \\ &= R - F C_x F^T = W \end{aligned} \quad (3.19)$$

Portanto w define a matriz de covariância dos resíduos, e a normalização é obtida da seguinte forma:

$$r_{nk} = \frac{r_k}{(w_{kk})^{1/2}} \quad (3.20)$$

onde

r_k : resíduo da medida k .

w_{kk} : k° elemento diagonal da matriz de covariância dos resíduos.

r_{nk} : resíduo normalizado da medida k .

3.2.3 Remoção de medidas espúrias

O próximo passo, após o processo de identificação, é a eliminação ou remoção das medidas espúrias identificadas. A remoção dessas medidas permite a repetição do processo de estimação ou identificação de parâmetros com medidas de boa qualidade, melhorando significativamente a qualidade da estimação.

A solução pelo método da equação normal, associada a estimadores do tipo "batch", apresenta a desvantagem de não

permitir a eliminação do efeito de medidas espúrias durante o processo de estimação. Nesse método a remoção das medidas espúrias ocorre após o processo de estimação, o que invalida os resultados obtidos e demanda um novo processamento do estimador.

3.3 Processamento de medidas espúrias pelo método de Givens

3.3.1 Detecção de medidas espúrias [7], [12]

O procedimento para detecção de medidas espúrias usado com o método de Givens é uma variante do teste do qui-quadrado — utilizado com os métodos tipo "batch" clássicos — e tira proveito da disponibilidade da soma ponderada dos quadrados dos resíduos acumulada após o processamento de cada medida. Isto equivale a um teste de detecção após a completa anulação dos elementos de cada linha do Jacobiano (aumentada pelo elemento correspondente do vetor Δz). Uma das vantagens dessa abordagem é restringir a busca da medida com erro grosseiro apenas ao conjunto de medidas processadas até o ponto em que o teste for positivo.

O exame da soma ponderada dos quadrados dos resíduos (SPQR) após o processamento de uma determinada medida pode revelar que:

- a) O valor da SPQR permaneceu inalterado.
- b) O valor da SPQR aumentou.

É evidente que não há nenhum objetivo que justifique a aplicação do teste de detecção para o caso (a). A medida processada é chamada de medida básica. O fato da SPQR não se alterar após o processamento de uma medida básica implica que, até aquele ponto, nenhuma medida redundante com a medida básica foi processada. As medidas básicas são as primeiras n medidas, cujas rotações, das linhas aumentadas da matriz Jacobiana correspondentes, produzem o preenchimento da diagonal da matriz $D^{1/2}$ da Eq. [2.83], sendo n o número de parâmetros.

O limiar usado no teste de detecção para o método de Givens é o mesmo do teste do qui-quadrado ($k = \chi^2_{(m-n), (1-\alpha_0)}$), com a diferença de que o número de graus de liberdade é agora uma variável que depende da ordem da medida cujo processamento antecedeu ao teste.

PROCEDIMENTO PARA A DETECÇÃO USADO COM O MÉTODO DE GIVENS

Seja i a ordem da linha aumentada da matriz Jacobiana que acabou de ser processada:

- a) Verifica-se a SPQR, com respeito ao seu valor anterior.
- b) Se a SPQR não aumentou, nenhum teste é realizado e passa-se ao processamento da linha seguinte.
- c) Se a SPQR aumentou, incrementa-se de 1 o número de graus de liberdade do qui-quadrado e em seguida compara-se a nova SPQR com $\chi^2_{(m-n), (1-\alpha_0)}$.
- d) Se a SPQR for maior do que $\chi^2_{(m-n), (1-\alpha_0)}$ significa que ao menos uma medida grosseira foi processada até aquele ponto, e se a SPQR for menor do que $\chi^2_{(m-n), (1-\alpha_0)}$ passa-se ao processamento da linha seguinte.

3.3.2 Identificação de medidas espúrias [7], [12]

Se o teste de detecção for positivo, torna-se necessário identificar as medidas portadoras de erros grosseiros.

Supondo-se que o teste de detecção tenha acusado a presença de medida espúria após o processamento da medida de ordem ℓ , isto não significaria que o erro grosseiro estivesse contido necessariamente na última medida processada, mas que o erro grosseiro tanto pode estar contido na medida ℓ , quanto em outra medida processada anteriormente que seja redundante com a

medida λ . Desta forma, todas as medidas processadas até o ponto em que o teste de detecção foi positivo são medidas suspeitas.

O procedimento para identificação de medidas grosseiras utilizado com o método de Givens, assim como no caso dos métodos convencionais, é baseado na busca do máximo resíduo normalizado. No entanto, como acontece com o teste de detecção, é possível tirar proveito do caráter seqüencial do método de Givens para aumentar a eficiência do procedimento de identificação.

É sabido que a maior dificuldade na obtenção dos resíduos normalizados é o cálculo dos fatores de normalização e que, para obtê-los, torna-se necessário calcular os elementos diagonais da matriz de covariância dos resíduos dada por:

$$W = R - F C_x F^T = R - F (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T \quad (3.21)$$

Da Eq. [3.21] pode-se notar que é necessário o cálculo explícito da inversa C_x , o que requer um considerável esforço computacional. Os problemas computacionais associados com a equação acima são sensivelmente minorados, quando o método do máximo resíduo normalizado é utilizado com as rotações de Givens.

As características das rotações de Givens permitem que:

- a) O cálculo da matriz C_x , e conseqüentemente de W , seja facilitado expressando-se C_x em termos das matrizes D e \bar{U} da Eq. [2.83].

- b) Haja necessidade de se obter apenas os primeiros l elementos diagonais de W , onde l é a ordem da medida após a qual o teste de obtenção foi positivo.

Com referência ao item a), deve-se observar que as matrizes D e \bar{U} já estão disponíveis, uma vez que são obtidas do processamento das linhas de F através das rotações de Givens.

A matriz W pode ser obtida da seguinte forma:

Da Eq. [2.91]

$$G = R^{-1/2} F \quad (3.22)$$

então,

$$\begin{aligned} G^T G &= (R^{-1/2} F)^T (R^{-1/2} F) \\ &= F^T (R^{-1/2})^T R^{-1/2} F \\ &= F^T R^{-1} F \end{aligned} \quad (3.23)$$

Desta forma

$$C_x = (G^T G)^{-1} \quad (3.24)$$

Utilizando-se a transformação ortogonal Q da Eq. [2.75],

$$\begin{aligned} C_x &= (G^T G)^{-1} Q Q^T \\ &= [(Q^T G^T) (Q G)]^{-1} \\ &= [(Q G)^T (Q G)]^{-1} \\ &= [U^T U]^{-1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Das Eq. [3.21] e [3.25] tem-se,

$$\begin{aligned} W &= R - F [U^T U]^{-1} F^T \\ &= R - (F U^{-1}) (F U^{-1})^T \end{aligned} \quad (3.26)$$

Da Eq. [2.83]

$$U = D^{1/2} \bar{U} \quad (3.27)$$

Das Eq. [3.26] e [3.27]

$$W = R - [F (D^{1/2} \bar{U})^{-1}] [F (D^{1/2} \bar{U})^{-1}]^T \quad (3.28)$$

Definindo,

$$V \triangleq F \bar{U}^{-1} \quad (3.29)$$

Das Eq. [3.28] e [3.29] tem-se,

$$\begin{aligned} W &= R - (D^{-1/2} V) (D^{-1/2} V)^T = R - V^T (D^{-1/2})^T D^{-1/2} V \\ &= R - V^T D^{-1} V \end{aligned} \quad (3.30)$$

E o i-ésimo elemento diagonal de W será,

$$W_{ii} = R_{ii} - \sum_{k=1}^n \frac{V_{ik}^2}{D_{kk}} ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.31)$$

O cálculo da matriz v requer a inversa da matriz triangular unitária \bar{U} . A J -ésima coluna de \bar{U}^{-1} pode ser obtida como o vetor solução de um problema de substituição inversa cuja matriz de coeficientes é \bar{U} e cujo lado direito é a J -ésima coluna da matriz identidade.

O item b) decorre do procedimento já descrito anteriormente em que, se ℓ é a ordem da última medida processada pelo método de Givens, antes do teste do qui-quadrado ser positivo, então basta examinar os resíduos normalizados das medidas 1, 2, ..., ℓ . O resultado é uma redução do esforço computacional, já que a matriz F na equação $V = F \bar{U}^{-1}$ passa a ser a sub-matriz do Jacobiano formado por suas ℓ primeiras linhas e W_{ii} passa a ser calculada apenas para $i = 1, 2, \dots, \ell$. As vantagens propiciadas por tal procedimento serão tanto maiores quanto mais próxima a medida espúria estiver do início da lista de medidas.

Embora a presença de um erro grosseiro possa ser detectada muito antes do processamento do último elemento do conjunto de medidas, a identificação deve ser realizada após o processamento de todas as medidas, afim de que a redundância utilizada seja a máxima possível. Observa-se, contudo, que o fato de a detecção ter ocorrido antes ainda é de muita valia, pois restringe o conjunto de medidas passíveis de serem portadoras de erro grosseiro, conforme descrito anteriormente.

A identificação, assim como as outras etapas do processamento de medidas espúrias, deve ser realizada em uma iteração previamente selecionada do processo iterativo. A iteração selecionada não deve ser a primeira, onde ainda há a

possibilidade da presença de desvios de linearização significativos. Tampouco é desejável que a iteração selecionada seja próxima à convergência, pois uma possível medida espúria poderia conduzir o processo a uma outra solução. Na maioria dos testes apresentados nesse trabalho o processamento de medidas espúrias é realizado na segunda ou na quarta iterações.

3.3.3 Remoção de medidas espúrias [7], [12]

No método da equação normal, a detecção de um erro grosseiro entre as medidas processadas pelo estimador invalida os resultados da estimação, já que esses estão contaminados pelos efeitos da(s) medida(s) espúria(s).

Quando se utiliza o método de Givens, é possível lançar-se mão de um procedimento que permite a remoção dos erros grosseiros sobre as matrizes \bar{U} e D tão logo a medida portadora do erro grosseiro tenha sido identificada. Fato que decorre da ortogonalidade do método.

O procedimento para se remover o efeito de um conjunto de medidas sobre as matrizes \bar{U} e D consiste simplesmente em se reprocessar essas medidas, com pesos que são agora iguais aos valores dos pesos originais multiplicados por (-1) .

Uma consequência imediata da remoção dos efeitos de uma medida espúria sobre as matrizes \bar{U} e D é que a SPQR sofre

imediatamente um decréscimo do valor inicialmente afetado pela presença do erro grosseiro para o valor que existiria se a medida não houvesse sido processada.

Como resultado da remoção de um erro grosseiro, torna-se agora possível aproveitar os cálculos já executados para a obtenção de estimativas, até a iteração na qual se realizou a detecção, identificação e remoção da medida espúria. Além disso, essa medida pode ser eliminada do conjunto de medidas a serem processadas nas iterações subseqüentes.

3.4 Processamento de medidas espúrias múltiplas [13]

O caso mais simples de processamento de medidas espúrias é o da ocorrência de uma única medida afetada por erro grosseiro. No entanto, nas situações reais, é comum ocorrer o caso de múltiplas medidas afetadas por erros grosseiros. A forma mais simples para o processamento de erros múltiplos pode ser obtida através da repetição de algum algoritmo desenvolvido para o processamento de um único erro, porém os erros grosseiros múltiplos podem ser interativos e tal procedimento pode trazer resultado insatisfatório. Isto porque os resíduos de medição são combinações lineares dos erros de medição e, portanto, não existe uma correspondência biunívoca entre os resíduos normalizados de maiores magnitudes e os maiores erros de medição.

O problema da interação entre as medidas é importante na Estimação de Estados em Sistemas de Potência. No caso da Estimação de Parâmetros de Funções de Transferência verificou-se que esse problema não possui grande importância e que a repetição do algoritmo desenvolvido para o processamento de um único erro grosseiro apresentou resultados satisfatórios.

3.5 Conclusão

A presença de erros grosseiros entre as medidas obtidas para a identificação de parâmetros de funções de transferência implica na necessidade de se detectar, identificar e remover tais medidas. A não-eliminação de tais medidas prejudica o processo de estimação e compromete os resultados obtidos.

A possibilidade de caracterizar estatisticamente os erros de medição e a soma ponderada dos quadrados dos resíduos é de fundamental importância para o desenvolvimento dos algoritmos de processamento de medidas espúrias tanto pelo método de equação normal, quanto pelo método seqüencial ortogonal de Givens.

O método seqüencial ortogonal de Givens possui diversas características que o tornam vantajoso para a detecção e identificação de medidas espúrias. Além disso, tal método permite a remoção dos efeitos das medidas espúrias sem a necessidade de se reiniciar o processo de estimação.

No caso de identificação de parâmetros de funções de transferência, o processamento de erros grosseiros múltiplos pela repetição do algoritmo para o processamento de um único erro grosseiro mostrou resultados satisfatórios, conforme mostram os resultados numéricos do Capítulo V.

C A P Í T U L O I V

MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA

4.0 Introdução

A modelagem matemática do problema foi obtida de duas formas distintas. Na primeira delas o modelo de medição foi desenvolvido na forma polar, enquanto na segunda, o referido modelo foi desenvolvido na forma cartesiana. Essas duas formas de abordagem do problema possibilitaram o desenvolvimento de estimadores distintos.

Como se viu nos capítulos anteriores, os estimadores desenvolvidos utilizam o método dos mínimos quadrados ponderados para a obtenção da função objetiva e soluções via equação normal de Gauss ou método de Givens. Além disso, tais estimadores foram dotados de capacidade de rejeição de medidas espúrias.

Nesse capítulo serão vistos o desenvolvimento e as características das duas formas distintas de modelagem do problema. Será analisada também a importância do grau de correlação entre as medidas.

4.1 Modelo de medição na forma polar

4.1.1 Desenvolvimento do modelo

MODELO DE MEDIÇÃO LINEARIZADO

Considere-se o modelo de medição linearizado discutido no Capítulo II,

$$\underline{\Delta z} = F(\underline{x}_k) \underline{\Delta x} + \underline{\eta} \quad (4.1)$$

$$E \{ \underline{\eta} \} = \underline{0} \quad ; \quad E \{ \underline{\eta} \underline{\eta}^T \} = R \quad (4.2)$$

onde,

$$\underline{\Delta z} = \underline{z} - \underline{f}(\underline{x}_k) \quad (4.3)$$

$$\underline{\Delta x} = \underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k \quad (4.4)$$

$$F(\underline{x}_k) = \left. \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x} = \underline{x}_k} = \text{matriz jacobiana} \quad (4.5)$$

- e,
- z : vetor de medidas de dimensão $m \times 1$, sendo m o número de medidas.
- x : vetor dos parâmetros a serem identificados de dimensão $n \times 1$, sendo n o número de parâmetros.
- f : vetor de funções não-lineares de dimensão $m \times 1$, que relaciona os valores reais das quantidades medidas e os parâmetros.
- η : vetor de variáveis aleatórias de dimensão $m \times 1$ com média zero e matriz de covariância R , representando os erros de medição.

OBTENÇÃO DO VETOR $f(\underline{x})$

Considere-se agora a forma generalizada de uma função de transferência representada pela Eq. [4.6],

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots} \quad (4.6)$$

onde s é uma variável complexa definida por $s = j\omega$ e ω representa o valor da frequência,

$$H(j\omega) = \frac{(b_0 - \omega^2 b_2 + \omega^4 b_4 - \omega^6 b_6 + \dots) + j(\omega b_1 - \omega^3 b_3 + \omega^5 b_5 - \dots)}{(a_0 - \omega^2 a_2 + \omega^4 a_4 - \omega^6 a_6 + \dots) + j(\omega a_1 - \omega^3 a_3 + \omega^5 a_5 - \dots)} \quad (4.7)$$

Fazendo,

$$\begin{aligned} r_1 &= b_0 - \omega^2 b_2 + \omega^4 b_4 - \omega^6 b_6 + \dots \\ i_1 &= \omega b_1 - \omega^3 b_3 + \omega^5 b_5 - \omega^7 b_7 + \dots \\ r_2 &= a_0 - \omega^2 a_2 + \omega^4 a_4 - \omega^6 a_6 + \dots \\ i_2 &= \omega a_1 - \omega^3 a_3 + \omega^5 a_5 - \omega^6 a_6 + \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde,

$$a_0 = 1$$

então,

$$H(j\omega) = \frac{r_1 + j i_1}{r_2 + j i_2} \quad (4.9)$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador,

$$H(j\omega) = \frac{(r_1 r_2 + i_1 i_2) + j(-r_1 i_2 + i_1 r_2)}{r_2^2 + i_2^2} \quad (4.10)$$

Separando as partes reais e imaginárias,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{H(j\omega)\} &= \frac{r_1 r_2 + i_1 i_2}{r_2^2 + i_2^2} \\ \operatorname{Im} \{H(j\omega)\} &= \frac{-r_1 i_2 + i_1 r_2}{r_2^2 + i_2^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Transformando a função de transferência $H(j\omega)$ para a forma polar temos,

$$m = \left[\left(\frac{r_1 r_2 + i_1 i_2}{r_2^2 + i_2^2} \right)^2 + \left(\frac{-r_1 i_2 + i_1 r_2}{r_2^2 + i_2^2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.12)$$

$$f_a = \text{arc tag} \left(\frac{-r_1 i_2 + i_1 r_2}{r_1 r_2 + i_1 i_2} \right) \quad (4.13)$$

Assim sendo, o vetor de funções não-lineares \underline{f} pode ser montado da seguinte forma:

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} m_1 \\ f_{a_1} \\ m_2 \\ f_{a_2} \\ m_3 \\ f_{a_3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

onde,

m_k : valor do módulo calculado para a frequência k , conforme Eq. [4.12].

f_{a_k} : valor da fase calculada para a frequência k , conforme Eq. [4.13].

OBTENÇÃO DO VETOR DE MEDIDAS

Por analogia ao vetor de funções não-lineares \underline{f} , o vetor de medidas \underline{z} pode ser montado da seguinte forma:

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} z_{m_1} \\ z_{fa_1} \\ z_{m_2} \\ z_{fa_2} \\ z_{m_3} \\ z_{fa_3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

onde,

z_{m_k} : valor do módulo da medida obtida na frequência k .

z_{fa_k} : valor da fase da medida obtida na frequência k .

OBTENÇÃO DA MATRIZ JACOBIANA F

É sabido que,

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(m_i, fa_i)$$

$$m_i = m_i(r_1, r_2, r_3, r_4)$$

$$fa_i = fa_i(r_1, r_2, r_3, r_4)$$

$$r_1 = r_1(b_i, w_i)$$

(4.16)

$$i_1 = i_1(b_i, w_i)$$

$$r_2 = r_2(a_i, w_i)$$

$$i_2 = i_2(a_i, w_i)$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots, (m/2)$, sendo m o número de medidas.

Das Eq. [4.5] e [4.14]

$$F(\underline{x}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial b_0} & \frac{\partial m_1}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial m_1}{\partial a_1} & \frac{\partial m_1}{\partial a_2} & \dots \\ \frac{\partial fa_1}{\partial b_0} & \frac{\partial fa_1}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial fa_1}{\partial a_1} & \frac{\partial fa_1}{\partial a_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial m_k}{\partial b_0} & \frac{\partial m_k}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial m_k}{\partial a_1} & \frac{\partial m_k}{\partial a_2} & \dots \\ \frac{\partial fa_k}{\partial b_0} & \frac{\partial fa_k}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial fa_k}{\partial a_1} & \frac{\partial fa_k}{\partial a_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Considerando que as funções m_i e fa_i são funções de várias variáveis, faz-se necessário efetuar uma derivação em cadeia [14],

$$\frac{\partial m_i}{\partial b_{(j-1)}} = \frac{\partial m_i}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial b_{(j-1)}} + \frac{\partial m_i}{\partial i_1} \frac{\partial i_1}{\partial b_{(j-1)}} + \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial b_{(j-1)}} + \frac{\partial m_i}{\partial i_2} \frac{\partial i_2}{\partial b_{(j-1)}}$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial a_\ell} = \frac{\partial m_i}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial a_\ell} + \frac{\partial m_i}{\partial i_1} \frac{\partial i_1}{\partial a_\ell} + \frac{\partial m_i}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial a_\ell} + \frac{\partial m_i}{\partial i_2} \frac{\partial i_2}{\partial a_\ell} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial f a_i}{\partial b_{(j-1)}} = \frac{\partial f a_i}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial b_{(j-1)}} + \frac{\partial f a_i}{\partial i_1} \frac{\partial i_1}{\partial b_{(j-1)}} + \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial f a_i}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial b_{(j-1)}} + \frac{\partial f a_i}{\partial i_2} \frac{\partial i_2}{\partial b_{(j-1)}}$$

$$\frac{\partial f a_i}{\partial a_\ell} = \frac{\partial f a_i}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial a_\ell} + \frac{\partial f a_i}{\partial i_1} \frac{\partial i_1}{\partial a_\ell} + \frac{\partial f a_i}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial a_\ell} + \frac{\partial f a_i}{\partial i_2} \frac{\partial i_2}{\partial a_\ell} \quad (4.21)$$

onde,

$i : 1, 2, \dots, (m/2)$; sendo m o número de medidas.

$j : 1, 2, \dots, (q+1)$; sendo q a ordem do numerador da Eq. [4.6].

$\ell : 1, 2, \dots, r$; sendo r a ordem do denominador da Eq. [4.6].

Considerando as Eq. [4.16] é possível simplificar as Eq. [4.18], [4.19], [4.20] e [4.21],

$$\frac{\partial m_i}{\partial b_{(j-1)}} = \frac{\partial m_i}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial b_{(j-1)}} + \frac{\partial m_i}{\partial i_1} \frac{\partial i_1}{\partial b_{(j-1)}} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial a_\ell} = \frac{\partial m_i}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial a_\ell} + \frac{\partial m_i}{\partial i_2} \frac{\partial i_2}{\partial a_\ell} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial f_{a_i}}{\partial b_{(j-1)}} = \frac{\partial f_{a_i}}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial b_{(j-1)}} + \frac{\partial f_{a_i}}{\partial i_1} \frac{\partial i_1}{\partial b_{(j-1)}} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial f_{a_i}}{\partial a_\ell} = \frac{\partial f_{a_i}}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial a_\ell} + \frac{\partial f_{a_i}}{\partial i_2} \frac{\partial i_2}{\partial a_\ell} \quad (4.25)$$

onde,

$i : 1, 2, \dots, (m/2)$; sendo m o número de medidas.

$j : 1, 2, \dots, (q+1)$; sendo q a ordem do numerador da Eq. [4.6].

$\ell : 1, 2, \dots, r$; sendo r a ordem do denominador da Eq. [4.6].

Fazendo,

$$u_1 = \left(\frac{r_1 r_2 + i_1 i_2}{r_2^2 + i_2^2} \right) \quad (4.26)$$

$$u_2 = \left(\frac{-r_1 i_2 + i_1 r_2}{r_2^2 + i_2^2} \right) \quad (4.27)$$

$$u = u_1^2 + u_2^2 \quad (4.28)$$

$$v = \frac{-r_1 i_2 + i_1 r_2}{r_1 r_2 + i_1 i_2} \quad (4.29)$$

têm-se,

$$m_i = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} = u^{1/2} \quad (4.30)$$

$$fa_i = \text{arc tag } (v) \quad (4.31)$$

Os termos que compõem as Eq. [4.22], [4.23], [4.24] e [4.25] podem então ser determinados da seguinte forma:

$$\frac{\partial m_i}{\partial r_1} = \frac{u^{-1/2}}{r_2^2 + i_2^2} (u_1 r_2 + u_2 (-i_2)) \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial b_{(j-1)}} = w^{(j-1)} (-1)^{(j-1)/2} \quad , \text{ para } j \text{ ímpar} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial b_{(j-1)}} = 0 \quad , \text{ para } j \text{ par} \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial i_1} = \frac{u^{-1/2}}{r_2^2 + i_2^2} (u_1 i_2 + u_2 r_2) \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial i_1}{\partial b_{(j-1)}} = 0 \quad , \text{ para } j \text{ ímpar} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial i_1}{\partial b_{(j-1)}} = w^{(j-1)} (-1)^{(j+2)/2} \quad , \text{ para } j \text{ par} \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial r_2} = \frac{u^{-1/2}}{r_2^2 + i_2^2} [u_1 (r_1 - 2u_1 r_2) + u_2 (i_1 - 2u_2 r_2)] \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial a_\ell} = 0 \quad , \text{ para } \ell \text{ ímpar} \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial a_\ell} = w^\ell (-1)^{\ell/2} \quad , \text{ para } \ell \text{ par} \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial i_2} = \frac{u^{-1/2}}{r_2^2 + i_2^2} [u_1(i_1 - 2u_1 i_2) + u_2(-r_1 - 2u_2 i_2)] \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial i_1}{\partial a_\ell} = w^\ell (-1)^{(\ell-1)/2} \quad , \text{ para } j \text{ ímpar} \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial i_2}{\partial a_\ell} = 0 \quad , \text{ para } j \text{ par} \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial f a_i}{\partial r_1} = \frac{1}{(1 + v^2)(r_1 r_2 + i_1 i_2)} (-i_2 - v r_2) \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial f a_i}{\partial i_1} = \frac{1}{(1 + v^2)(r_1 r_2 + i_1 i_2)} (r_2 - v i_2) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial f a_i}{\partial r_2} = \frac{1}{(1 + v^2)(r_1 r_2 + i_1 i_2)} (i_1 - v r_1) \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial f a_i}{\partial i_2} = \frac{1}{(1 + v^2)(r_1 r_2 + i_1 i_2)} (-r_1 - v i_1) \quad (4.47)$$

onde,

$i : 1, 2, 3, \dots, (m/2)$; sendo m o número de medidas.

$j : 1, 2, 3, \dots, (q+1)$; sendo q a ordem do numerador da Eq. [4.6].

$\ell : 1, 2, 3, \dots, r$; sendo r a ordem do denominador da Eq. [4.6].

NECESSIDADE DE CONVERSÃO DOS ÂNGULOS DE FASE

As Eq. [4.20] e [4.21] representam a derivação em cadeia em relação aos parâmetros a_i e b_i da Eq. [4.13]. A derivada da função da Eq. [4.13] é dada por

$$\frac{d}{dx} \text{arc tag } v = \frac{1}{1 + v^2} \frac{dv}{dx} ; [-\pi/2 < \text{arc tag } v < \pi/2] \quad (4.48)$$

A Eq. [4.48] mostra que a derivação da função trigonométrica inversa é válida para arc tag no primeiro e no quarto quadrantes. Essa restrição implica na necessidade de conversão dos valores fa_i da Eq. [4.14] e dos valores zfa_i da Eq. [4.15]. Tal procedimento pode, em determinadas condições, diminuir a magnitude de um erro grosseiro em uma medida de fase.

4.1.2 Caracterização estatística dos erros de medição

A escolha da matriz de ponderação da soma dos quadrados dos resíduos é fundamental para as propriedades estatísticas do estimador.

Considerando que a precisão de uma medida é inversamente proporcional à sua variância, uma forma adequada de ponderação da soma dos quadrados dos resíduos é através da matriz inversa da matriz de covariância dos erros de medição. Além disso, como já mencionado no Capítulo II, a solução do problema de mínimos quadrados ponderados em que a matriz de ponderação é igual à matriz de covariância dos erros de medição, fornece o melhor estimador linear não-tendencioso [43].

Considerando as Eq. [4.14] e [4.15], o vetor dos erros de medição deve ser montado da seguinte forma:

$$[\underline{z} - \underline{f}(\underline{x})] = \begin{bmatrix} z_{m_1} - m_1 \\ z_{fa_1} - fa_1 \\ z_{m_2} - m_2 \\ z_{fa_2} - fa_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Considerando a maneira como o vetor dos erros de medição da Eq. [4.49] é montado, a matriz de covariância dos erros de medição deve ser da seguinte forma:

$$R = \begin{bmatrix} (v_{m_1}^2) & (r_{12} v_{m_1} v_{f_1}) & (r_{13} v_{m_1} v_{m_2}) \cdot \cdot \cdot \\ (r_{21} v_{f_1} v_{m_1}) & (v_{f_1}^2) & (r_{23} v_{f_1} v_{m_2}) \cdot \cdot \cdot \\ (r_{31} v_{m_2} v_{m_1}) & (r_{32} v_{m_2} v_{f_1}) & (v_{m_2}^2) \cdot \cdot \cdot \\ (r_{41} v_{f_2} v_{m_1}) & (r_{42} v_{f_2} v_{f_1}) & (r_{43} v_{f_2} v_{m_2}) \cdot \cdot \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

onde,

v_{mi}^2 : variância da medida do módulo na frequência i .

v_{fi}^2 : variância da medida da fase na frequência .

r_{ij} : coeficiente de correlação entre as medidas i e j ,
 $-1 \leq r_{ij} \leq +1$.

i : 1, 2, 3, ..., $(m/2)$, sendo o número de medidas.

j : 1, 2, 3, ..., $(m/2)$.

O coeficiente de correlação é uma medida do grau de linearidade entre as duas variáveis em questão. Valores de próximos de +1 ou -1 indicam um alto grau de correlação, enquanto os valores próximos de zero indicam falta de correlação. Valores positivos de r mostram que uma variável tende a crescer com o crescimento da outra, ao passo que valores negativos de r mostram que uma variável tende a decrescer com valores crescentes da outra. Um valor de r próximo de zero indica apenas a ausência de relação linear entre as duas variáveis e não elimina a possibilidade de alguma relação não-linear [15].

O coeficiente de correlação é definido pela Eq. [4.51], [15]

$$r = \frac{v_{xy}}{(v_x^2 v_y^2)^{1/2}} \quad (4.51)$$

onde,

v_{xy} : covariância das variáveis x e y.

v_x^2 : variância da variável x.

v_y^2 : variância da variável y.

As variâncias das variáveis x e y são definidas como, [16]

$$v_x^2 = E \{(x - E(x))^2\} \quad (4.52)$$

$$v_y^2 = E \{(y - E(y))^2\} \quad (4.53)$$

A covariância das variáveis x e y é definida como, [36]

$$v_{xy} = E \{(x - E(x))(y - E(y))\} \quad (4.54)$$

Se x e y são variáveis aleatórias independentes, a covariância de x e y é nula, logo o coeficiente de correlação r também é nulo. A recíproca não é verdadeira, ou seja, sendo r nulo não significa que as variáveis x e y sejam independentes [16].

Considerando-se, por um lado, que todos os erros de medição estão correlacionados entre si, a matriz de covariância se torna uma matriz cheia como representado na Eq. [4.50]. No entanto, considerando-se, por outro lado, que os erros de medição para medidas de frequências distintas não estão correlacionados, a matriz de covariância R se torna uma matriz bloco-diagonal, onde cada bloco é uma matriz quadrada de ordem 2×2 , conforme indicam as Eq. [4.55] e [4.55.a].

$$R = \text{Diag} \{R_1, R_2, \dots, R_{m/2}\} \quad (4.55)$$

sendo,

$$R_i = \begin{bmatrix} v_{mi}^2 & (r_{mifi} v_{mi} v_{fi}) \\ (r_{mifi} v_{fi} v_{mi}) & v_{fi}^2 \end{bmatrix} \quad (4.55.a)$$

Onde v_{mi}^2 , v_{fi}^2 , r_{mifi} e m são definidos na Eq. [4.50].

Se, por outro lado, for considerado que os erros de medição das medidas de módulo e fase para uma mesma frequência também não estão correlacionados, a matriz de covariância R se torna uma matriz diagonal, conforme Eq. [4.56].

$$R = \begin{bmatrix} v_{m1}^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & v_{f1}^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & v_{m2}^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & v_{f2}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

As medidas de um experimento de resposta de freqüência são, em geral, obtidas com os mesmos instrumentos de medição, o que pode criar algum grau de correlação entre os erros de medição. Através de uma análise das fontes de erros de medição verifica-se que muitas delas dependem da freqüência. Isto pode significar um grau de correlação maior entre os erros de medição de módulo e fase para uma mesma freqüência, do que para medidas de freqüências distintas. O coeficiente de correlação entre as variáveis envolvidas no processo depende do experimento em questão. Desta forma, existem coeficientes diferentes para experimentos diferentes. Durante alguns experimentos em laboratório, foram construídos os diagramas de dispersão, objetivando avaliar qualitativamente a grandeza do coeficiente de correlação e verificou-se que, para os casos testados, as correlações entre os erros de medição foram praticamente nulas tanto para freqüências iguais quanto para freqüências distintas. Em todo caso, o efeito da correlação entre as medidas efetuadas

na mesma freqüência, será posteriormente avaliado, através de simulação.

4.2 Modelo de medição na forma cartesiana

4.2.1 Desenvolvimento do Modelo

OBTENÇÃO DO VETOR $f(x)$

Considere-se a forma generalizada de uma função de transferência dada pela Eq. [4.7],

$$H(jw) = \frac{(b_0 - w^2 b_2 + w^4 b_4 - \dots) + j(wb_1 - w^3 b_3 + \dots)}{(a_0 - w^2 a_2 + w^4 a_4 - \dots) + j(wa_1 - w^3 a_3 + \dots)} \quad (4.57)$$

sendo,

$$\begin{aligned} r_1 &= b_0 - w^2 b_2 + w^4 b_4 - w^6 b_6 + \dots \\ i_1 &= wb_1 - w^3 b_3 + w^5 b_5 - w^7 b_7 + \dots \\ r_2 &= a_0 - w^2 a_2 + w^4 a_4 - w^6 a_6 + \dots \\ i_2 &= wa_1 - w^3 a_3 + w^5 a_5 - w^7 a_7 + \dots \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde,

$$a_0 = 1$$

então,

$$H(j\omega) = \frac{r_1 + j i_1}{r_2 + j i_2} \quad (4.59)$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador e separando as partes reais e imaginárias,

$$\text{Re} \{H(j\omega)\} = \text{re} = \frac{r_1 r_2 + i_1 i_2}{r_2^2 + i_2^2} \quad (4.60)$$

$$\text{Im} \{H(j\omega)\} = \text{im} = \frac{-r_1 i_2 + i_1 r_2}{r_2^2 + i_2^2} \quad (4.61)$$

Assim sendo, o vetor de funções não-lineares , pode ser montado da seguinte forma:

$$\underline{f(x)} = \begin{bmatrix} re_1 \\ im_1 \\ re_2 \\ im_2 \\ re_3 \\ im_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

onde,

re_k : valor da parte real da função de transferência, calculado para a frequência k , conforme Eq. [4.60].

im_k : valor da parte imaginária da função de transferência, calculada para a frequência k , conforme Eq. [4.61].

OBTENÇÃO DO VETOR DE MEDIDAS

Como se pode observar, os elementos do vetor $\underline{f(x)}$ foram obtidos na forma cartesiana. Por analogia ao vetor de funções não-lineares $\underline{f(x)}$, os elementos do vetor de medidas \underline{z} devem

ser obtidos na forma cartesiana. Para isto faz-se mudanças de variáveis conforme segue:

$$\begin{aligned}zre_i &= zm_i \cos (zfa_i) \\zim_i &= zm_i \operatorname{sen} (zfa_i) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, (m/2)\end{aligned}\tag{4.63}$$

Portanto,

$$\underline{z} = \begin{bmatrix}zre_1 \\zim_1 \\zre_2 \\zim_2 \\zre_3 \\zim_3 \\\cdot \\\cdot \\\cdot\end{bmatrix}\tag{4.64}$$

OBTENÇÃO DA MATRIZ JACOBIANA F

Na seção anterior verificou-se que os elementos da matriz Jacobiana F da Eq. [4.17] foram obtidos das Eq.[4.22], [4.23], [4.24] e [4.25].

Considerando a nova forma dos elementos do vetor de funções $\underline{f(x)}$ os termos das Eq.[4.22], [4.23], [4.24] e [4.25], que compõe a matriz Jacobiana F, podem ser determinados da seguinte forma:

$$\frac{\partial \text{re}_i}{\partial r_1} = \frac{r_2}{(r_2^2 + i_2^2)} \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial b_{(j-1)}} = w^{(j-1)} (-1)^{(j-1)/2}, \quad \text{para } j \text{ ímpar} \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial b_{(j-1)}} = 0, \quad \text{para } j \text{ par} \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial \text{re}_i}{\partial i_1} = \frac{i_2}{(r_2^2 + i_2^2)} \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial i_1}{\partial b_{(j-1)}} = 0, \quad \text{para } j \text{ ímpar} \quad (4.69)$$

$$\frac{\partial i_1}{\partial b_{(j-1)}} = w^{(j-1)} (-1)^{(j+2)/2}, \quad \text{para } j \text{ par} \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial \text{re}_i}{\partial r_2} = \frac{r_1}{r_2^2 + i_2^2} - \frac{2 r_2 (r_1 r_2 + i_1 i_2)}{(r_2^2 + i_2^2)^2} \quad (4.71)$$

Da Eq. [4.26],

$$\frac{\partial \operatorname{re}_i}{\partial r_2} = \frac{r_1 - 2 r_2 u_1}{(r_2^2 + i_2^2)} \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial a_\ell} = 0 \quad , \text{ para } \ell \text{ ímpar} \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial a_\ell} = w^\ell (-1)^{\ell/2} \quad , \text{ para } \ell \text{ par} \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial \operatorname{re}_i}{\partial i_2} = \frac{i_1}{r_2^2 + i_2^2} - \frac{2 i_2 (r_1 r_2 + i_1 i_2)}{(r_2^2 + i_2^2)^2} \quad (4.75)$$

Da Eq. [4.26],

$$\frac{\partial \operatorname{re}_i}{\partial i_2} = \frac{i_1 - 2 i_2 u_1}{r_2^2 + i_2^2} \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial i_2}{\partial a_\ell} = w^\ell (-1)^{(\ell-1)/2} \quad , \text{ para } \ell \text{ ímpar} \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial i_2}{\partial a_\ell} = 0 \quad , \text{ para } \ell \text{ par} \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial \operatorname{im}_i}{\partial r_1} = \frac{-i_2}{r_2^2 + i_2^2} \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial \text{im}_i}{\partial i_1} = \frac{r_2}{r_2^2 + i_2^2} \quad (4.80)$$

$$\frac{\partial \text{im}_i}{\partial r_2} = \frac{i_2}{r_2^2 + i_2^2} - \frac{2 r_2 (-r_1 i_2 + i_1 r_2)}{(r_2^2 + i_2^2)^2} \quad (4.81)$$

Da Eq. [4.27],

$$\frac{\partial \text{im}_i}{\partial r_2} = \frac{i_2 - 2 r_2 u_2}{(r_2^2 + i_2^2)} \quad (4.82)$$

$$\frac{\partial \text{im}_i}{\partial i_2} = \frac{-r_1}{r_2^2 + i_2^2} - \frac{2 i_2 (-r_1 i_2 + i_1 r_2)}{(r_2^2 + i_2^2)^2} \quad (4.83)$$

Da Eq. [4.27],

$$\frac{\partial \text{im}_i}{\partial i_2} = \frac{-r_1 - 2 i_2 u_2}{(r_2^2 + i_2^2)} \quad (4.84)$$

onde,

$i : 1, 2, 3, \dots, (m/2)$; sendo m o número de medidas.

$j : 1, 2, 3, \dots, (q+1)$; sendo q a ordem do numerador da Eq. [4.57].

$l : 1, 2, 3, \dots, r$; sendo r a ordem do denominador da Eq. [4.57].

As vantagens da utilização da forma cartesiana estão na maior facilidade de cálculo dos termos da matriz Jacobiana F e no fato de que, nesta forma, não há necessidade de conversão dos ângulos de fase em função das restrições de derivação. A desvantagem está na dificuldade de caracterização estatística do vetor dos erros de medição devida às mudanças de variáveis efetuadas na Eq. [4.63].

4.2.2 Caracterização estatística aproximada

No Capítulo II os erros de medição foram caracterizados estatisticamente pela Eq. [2.2], tendo média zero e matriz de covariância R . No Capítulo III verificou-se a necessidade de ampliar a caracterização estatística dos erros de medição, definindo a sua distribuição de probabilidades igual à distribuição normal.

As mudanças de variáveis efetuadas nas Eq. [4.63] descaracterizaram estatisticamente o vetor dos erros de medição conforme será demonstrado neste item.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS [17]

Sejam \bar{z} e \bar{w} representações das variáveis z e w e \bar{x} e \bar{y} representações das variáveis x e y das Eq. [4.63]

$$\bar{z} = g(\bar{x}, \bar{y}) \quad (4.85)$$

$$\bar{w} = h(\bar{x}, \bar{y}) \quad (4.86)$$

A função densidade da probabilidade conjunta $f_{\bar{z}\bar{w}}(z, w)$ das novas variáveis z e w será dada pela Eq. [4.87], [17].

$$f_{\bar{z}\bar{w}}(z, w) = \frac{f_{\bar{x}\bar{y}}(x_1, y_1)}{\det J'(x_1, y_1)} + \dots + \frac{f_{\bar{x}\bar{y}}(x_n, y_n)}{\det J'(x_n, y_n)} + \dots \quad (4.87)$$

onde,

$f_{\bar{z}\bar{w}}(z, w)$: função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias \bar{z} e \bar{w} .

$f_{\bar{x}\bar{y}}(x_i, y_i)$: função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias \bar{x} e \bar{y} .

(x_i, y_i) : soluções reais das Eq. [4.85] e [4.86].

$\det J'(x_i, y_i)$: determinante da matriz Jacobiana das transformações.

Considerando as variáveis aleatórias \bar{x} e \bar{y} tendo distribuição normal, as funções de densidade de probabilidade $f_{\bar{x}}(x)$ e $f_{\bar{y}}(y)$ dessas variáveis são dadas pelas Eq. [4.88] e [4.89], [17].

$$f_{\bar{x}}(x) = \frac{1}{(2 \pi \sigma_x^2)^{1/2}} e^{-(x - E\{x\})^2 / 2 \sigma_x^2} \quad (4.88)$$

$$f_{\bar{y}}(y) = \frac{1}{(2 \pi \sigma_y^2)^{1/2}} e^{-(y - E\{y\})^2 / 2 \sigma_y^2} \quad (4.89)$$

A matriz Jacobiana $J'(x, y)$ das transformações das Eq. [4.85] e [4.86] é dada pela Eq. [4.90], [17].

$$J'(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Considerando as variáveis aleatórias \bar{x} e \bar{y} independentes, a função de densidade de probabilidade conjunta $f_{\bar{x}\bar{y}}(x,y)$ será dada pela Eq. [4.91], [17].

$$f_{\bar{x}\bar{y}}(x,y) = f_{\bar{x}}(x) f_{\bar{y}}(y) \quad (4.91)$$

O cálculo aproximado da expectância de $g(\bar{x},\bar{y})$ poderá ser obtido da Eq.[4.92], [17].

$$E \{g(\bar{x}, \bar{y})\} \simeq g(E \{x\}, E \{y\}) + \frac{1}{2} \left(\mu_{20} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2 \mu_{11} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \mu_{02} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) \quad (4.92)$$

Onde μ_{ij} é o momento central conjunto dado por,

$$\mu_{ij} = E \{(\bar{x} - E \{x\})^i (\bar{y} - E \{y\})^j\} \quad (4.93)$$

O cálculo aproximado da variância de $g(\bar{x},\bar{y})$ poderá ser obtido da Eq. [4.94], [17].

$$v_{g(\bar{x}, \bar{y})}^2 \simeq \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 \mu_{20} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 \mu_{02} + 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \mu_{11} \quad (4.94)$$

DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES DO CASO EM ESTUDO

Sejam \bar{x} e \bar{y} os erros de medição. A formulação cartesiana implica na mudança de variáveis das Eq. [4.95] e [4.96],

$$\bar{z} = \bar{x} \cos \bar{y} \quad (4.95)$$

$$\bar{w} = \bar{x} \sin \bar{y} \quad (4.96)$$

Desta forma pela Eq. [4.90],

$$\begin{aligned} \det J' (x, y) &= \begin{vmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{vmatrix} \\ &= x \cos^2 y + x \sin^2 y \\ &= x (\cos^2 y + \sin^2 y) \\ &= x \end{aligned} \quad (4.97)$$

sendo,

$$x = (z^2 + w^2)^{1/2} \quad (4.98)$$

$$y = \arctag \frac{w}{z} \quad (4.99)$$

Considerando as Eq. [4.87], [4.98] e [4.99] a função de densidade de probabilidade conjunta $f_{\frac{z}{w}}(z,w)$, será:

$$f_{\frac{z}{w}}(z,w) = \frac{f_{\frac{z}{w}}((z^2 + w^2)^{1/2}, \text{arc tag } \frac{w}{z})}{|(z^2 + w^2)^{1/2}|} \quad (4.100)$$

Considerando ainda que as variáveis aleatórias \bar{x} e \bar{y} são independentes e as Eq. [4.88], [4.89], [4.91] e [4.100],

$$f_{\frac{z}{w}}(z,w) = k_1 e^{k_2 - k_3}$$

Onde,

$$k_1 = \frac{1}{2 \pi \sqrt{\frac{z}{x}} \sqrt{\frac{z}{y}} |(z^2 + w^2)^{1/2}|} \quad (4.101)$$

$$k_2 = \frac{(-(z^2 + w^2)^{1/2} - E \{(z^2 + w^2)^{1/2}\})^2}{2 \sqrt{\frac{z}{x}}}$$

$$k_3 = \frac{(\text{arc tag } w/z - E \{\text{arc tag } w/z\})^2}{2 \sqrt{\frac{z}{y}}}$$

Como se pode verificar a Eq. [4.101] não representa uma distribuição de probabilidades normal.

**EXPECTÂNCIA DO ERRO DA PARTE REAL DA FUNÇÃO DE
TRANSFERÊNCIA**

Seja $H_v(j\omega)$ a função que representa os dados verdadeiros da função de transferência,

$$H_v(j\omega) = m e^{j\phi} \quad (4.102)$$

Seja $H_m(j\omega)$ a função que representa os dados medidos da função de transferência. A parte real de $H_m(j\omega)$, representada por $\text{Re}(H_m(j\omega))$, é dada por,

$$\text{Re}(H_m(j\omega)) = g_r(\bar{m}, \bar{\rho}) = \bar{m} \cos \bar{\rho} \quad (4.103)$$

onde,

\bar{m} : valor medido de m

$\bar{\rho}$: valor medido de ϕ

As expectâncias e variâncias de \bar{m} e $\bar{\rho}$ são dadas por,

$$E\{\bar{m}\} = m, \quad E\{(\bar{m} - E\{\bar{m}\})\} = \sqrt{\frac{2}{m}} \quad (4.104)$$

$$E\{\bar{\rho}\} = \phi, \quad E\{(\bar{\rho} - E\{\bar{\rho}\})\} = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \quad (4.105)$$

Da Eq. [4.92],

$$\begin{aligned}
 E \{g_r(\bar{m}, \bar{\rho})\} \approx g_r(E\{\bar{m}\}, E\{\bar{\rho}\}) + \frac{1}{2} (\mu_{20} \left. \frac{\partial^2 g_r}{\partial \bar{m}^2} \right|_{\substack{E\{\bar{m}\}, \\ E\{\bar{\rho}\}}}) \\
 + 2 \mu_{11} \left. \frac{\partial g_r}{\partial \bar{m} \partial \bar{\rho}} \right|_{\substack{E\{\bar{m}\}, \\ E\{\bar{\rho}\}}} + \mu_{02} \left. \frac{\partial^2 g_r}{\partial \bar{\rho}^2} \right|_{\substack{E\{\bar{m}\}, \\ E\{\bar{\rho}\}}} \quad (4.106)
 \end{aligned}$$

onde,

$$g_r(E\{\bar{m}\}, E\{\bar{\rho}\}) = m \cos \phi \quad (4.107)$$

$$\left. \frac{\partial^2 g_r}{\partial \bar{m}^2} \right|_{\substack{E\{\bar{m}\}, \\ E\{\bar{\rho}\}}} = 0 \quad (4.108)$$

$$\left. \frac{\partial^2 g_r}{\partial \bar{\rho}^2} \right|_{\substack{E\{\bar{m}\}, \\ E\{\bar{\rho}\}}} = -m \cos \bar{\rho} \quad \left. \right|_{\substack{E\{\bar{m}\}, \\ E\{\bar{\rho}\}}} = -m \cos \phi \quad (4.109)$$

$$\mu_{20} = v_{\bar{m}}^2 \quad (4.110)$$

$$\mu_{02} = v_{\bar{\rho}}^2 \quad (4.111)$$

E, considerando as variáveis \bar{m} e $\bar{\rho}$ não correlacionadas,

$$\mu_{11} = 0 \quad (4.112)$$

Desta forma a Eq. [4.106], se torna,

$$E \{g_r(\bar{m}, \bar{\rho})\} \simeq m \cos \phi - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho}} m \cos \phi \quad (4.113)$$

sendo,

\bar{m} : valor medido do módulo da função de transferência.

$\bar{\rho}$: valor medido da fase da função de transferência.

$\bar{\eta}_m$: erro de medição do módulo.

$\bar{\eta}_r$: erro da parte real do valor medido.

η_ρ : erro de medição da fase.

\bar{r}_m : parte real do valor medido de $H_v(j\omega)$.

r_v : parte real do valor verdadeiro de $H_v(j\omega)$.

então,

$$\bar{m} = m + \bar{\eta}_m \quad (4.114)$$

$$r_v = m \cos \phi \quad (4.115)$$

$$\bar{r}_m = r_v + \bar{\eta}_r \quad (4.116)$$

$$E \{\bar{r}_m\} = r_v + E \{\bar{\eta}_r\} \quad (4.117)$$

$$E \{\bar{r}_m\} = m \cos \phi + E \{\bar{\eta}_r\} \quad (4.118)$$

Comparando as Eq. [4.113] e [4.118] tem-se,

$$E \{\bar{\eta}_r\} = - 1/2 \sqrt{\frac{2}{\rho}} m \cos \phi \quad (4.119)$$

A Eq. [4.119] representa a expectância do erro da parte real do valor medido da função de transferência. Como se pode verificar a média não é, em geral, zero.

EXPECTÂNCIA DO ERRO DA PARTE IMAGINÁRIA DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

A parte imaginária de $H_m(j\omega)$, representada por $\text{Im}\{H_m(j\omega)\}$, é dada por,

$$\text{Im}(H_m(j\omega)) = g_i(\bar{m}, \bar{\rho}) = \bar{m} \text{ sen } \bar{\rho} \quad (4.120)$$

Da Eq. [4.92]

$$E\{g_i(\bar{m}, \bar{\rho})\} = g_i(E\{\bar{m}\}, E\{\bar{\rho}\}) + \frac{1}{2} (\mu_{20} \left. \frac{\partial^2 g_i}{\partial \bar{m}^2} \right|_{\substack{E\{\bar{m}\}, \\ E\{\bar{\rho}\}}}) \quad (4.121)$$

$$+ 2 \mu_{11} \left. \frac{\partial^2 g_i}{\partial \bar{m} \partial \bar{\rho}} \right|_{\substack{E\{\bar{m}\}, \\ E\{\bar{\rho}\}}} + \mu_{02} \left. \frac{\partial^2 g_i}{\partial \bar{\rho}^2} \right|_{\substack{E\{\bar{m}\}, \\ E\{\bar{\rho}\}}})$$

onde,

$$g_i(E\{\bar{m}\}, E\{\bar{\rho}\}) = m \text{ sen } \phi \quad (4.122)$$

$$\left. \frac{\partial^2 g_i}{\partial \bar{m}^2} \right|_{\substack{E\{\bar{m}\}, \\ E\{\bar{\rho}\}}} = 0 \quad (4.123)$$

$$\frac{\partial^2 g_i}{\partial \rho^2} \left| \begin{array}{l} = - \bar{m} \text{ sen } \bar{\rho} \\ E\{\bar{m}\}, \\ E\{\bar{\rho}\} \end{array} \right| = - m \text{ sen } \phi \left| \begin{array}{l} E\{\bar{m}\}, \\ E\{\bar{\rho}\} \end{array} \right| \quad (4.124)$$

$$\mu_{20} = \sqrt{\frac{2}{\bar{m}}} \quad (4.125)$$

$$\mu_{02} = \sqrt{\frac{2}{\bar{\rho}}} \quad (4.126)$$

E, considerando as variáveis \bar{m} e $\bar{\rho}$ não correlacionadas,

$$\mu_{11} = 0 \quad (4.127)$$

Desta forma a Eq. [4.121] se torna,

$$E \{g_i(\bar{m}, \bar{\rho})\} \approx m \text{ sen } \phi - 1/2 m \sqrt{\frac{2}{\bar{\rho}}} \text{ sen } \phi. \quad (4.128)$$

sendo,

$$i_v = m \text{ sen } \phi \quad (4.129)$$

$$\bar{i}_m = \bar{m} \text{ sen } \bar{\rho} \quad (4.130)$$

$$\bar{i}_m = i_v + \bar{\eta}_i \quad (4.131)$$

onde,

i_v : parte imaginária do valor verdadeiro de $H_v(jw)$.

\bar{i}_m : parte imaginária do valor medido de $H_v(jw)$.

$\bar{\eta}_i$: erro da parte imaginária do valor medido.

Tem-se

$$\begin{aligned} E \{ \bar{i}_m \} &= i_v + E \{ \bar{\eta}_i \} \\ &= m \text{ sen } \phi + E \{ \bar{\eta}_i \} \end{aligned} \quad (4.132)$$

Comparando as Eq. [4.128] e [4.132],

$$E \{ \bar{\eta}_i \} = 1/2 \sqrt{\frac{2}{\rho}} m \text{ sen } \phi \quad (4.133)$$

A Eq. [4.133] representa a expectância do erro da parte imaginária do valor medido da função de transferência. Novamente verifica-se que a média não é, em geral, igual a zero.

VARIÂNCIA DA PARTE REAL DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Definindo,

$$\sqrt{\frac{2}{r_m}} \triangleq \sqrt{g_r}(\bar{m}, \bar{\rho}) \quad (4.134)$$

Da Eq. [4.94]

$$v_{r_m}^2 \approx \left(\frac{\partial g_r}{\partial \bar{m}} \right)^2 \left| \begin{array}{c} \mu_{20} + \left(\frac{\partial g_r}{\partial \bar{\rho}} \right)^2 \\ m, \Phi \end{array} \right| \mu_{02} + 2 \frac{\partial g_r}{\partial \bar{m}} \frac{\partial g_r}{\partial \bar{\rho}} \left| \begin{array}{c} \mu_{11} \\ m, \Phi \end{array} \right| \quad (4.135)$$

onde,

$$\frac{\partial g_r}{\partial \bar{m}} \left| \begin{array}{c} = \cos \bar{\rho} \\ m, \Phi \end{array} \right| = \cos \Phi \quad (4.136)$$

$$\frac{\partial g_r}{\partial \bar{\rho}} \left| \begin{array}{c} = - \bar{m} \text{ sen } \bar{\rho} \\ m, \Phi \end{array} \right| = - m \text{ sen } \Phi \quad (4.137)$$

$$\mu_{20} = v_{\bar{m}}^2 \quad (4.138)$$

$$\mu_{02} = v_{\bar{\rho}}^2 \quad (4.139)$$

Considerando as variáveis \bar{m} e $\bar{\rho}$ não correlacionadas,

$$\mu_{11} = 0 \quad (4.140)$$

Desta forma, a variância do erro da parte real da função de transferência será,

$$v_{r_m}^2 \approx v_m^2 \cos^2 \phi + v_{\rho}^2 m^2 \sin^2 \phi \quad (4.141)$$

VARIÂNCIA DA PARTE IMAGINÁRIA DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Definindo,

$$v_{i_m}^2 \triangleq v_{g_i}^2(\bar{m}, \bar{\rho}) \quad (4.142)$$

Da Eq. [4.94]

$$v_{i_m}^2 \approx \left(\frac{\partial g_i}{\partial \bar{m}} \right)^2 \left|_{\bar{m}=\bar{m}, \bar{\rho}=\bar{\rho}} \mu_{20} + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \bar{\rho}} \right)^2 \left|_{\bar{m}=\bar{m}, \bar{\rho}=\bar{\rho}} \mu_{02} + 2 \frac{\partial g_i}{\partial \bar{m}} \frac{\partial g_i}{\partial \bar{\rho}} \left|_{\bar{m}=\bar{m}, \bar{\rho}=\bar{\rho}} \mu_{11} \quad (4.143)$$

onde,

$$\frac{\partial g_i}{\partial \bar{m}} = \sin \bar{\rho} \quad (4.144)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial \bar{\rho}} = m \cos \bar{\rho} \quad (4.145)$$

$$\mu_{20} = \frac{v^2}{\bar{m}} \quad (4.146)$$

$$\mu_{02} = \frac{v^2}{\bar{p}} \quad (4.147)$$

Considerando as variáveis \bar{m} e \bar{p} não correlacionadas,

$$\mu_{11} = 0 \quad (4.148)$$

Desta forma, a variância do erro da parte imaginária da função de transferência será,

$$v_{i_m}^2 \approx \frac{v^2}{\bar{m}} \text{sen}^2 \phi + \frac{v^2}{\bar{p}} \bar{m}^2 \text{cos}^2 \phi \quad (4.149)$$

4.3 Conclusão

A formulação compatível com a forma das medidas obtidas em um experimento de resposta de frequência é o modelo de medição na forma polar. Essa formulação traz maior dificuldade na obtenção dos elementos da matriz Jacobiana, além da necessidade de conversão das medidas para o primeiro e o quarto quadrantes.

A formulação cartesiana do modelo de medição evita as dificuldades citadas, mas não permite a caracterização estatística desejável do modelo de medição. A rigor os erros de medição não têm distribuição normal e também não têm média zero, como mostrado na subseção 4.2.2. Apesar disso, o desenvolvimento de um estimador baseado na formulação cartesiana do modelo, usado na obtenção de resultados no Capítulo V, leva em conta uma caracterização estatística aproximada do modelo de medição, onde a existência de tendenciosidade das partes real e imaginária é ignorada.

As considerações feitas sobre o grau de correlação entre as medidas definem a esparsidade da matriz de covariância dos erros de medição. Na modelagem matemática considerou-se apenas os casos de correlação entre as medidas de módulo e fase de mesma frequência ou de ausência total de correlação entre todas as medidas.

C A P Í T U L O V

RESULTADOS NUMÉRICOS

5.0 Introdução

O desempenho de cada um dos métodos desenvolvidos foi testado através da comparação dos seus resultados numéricos com os obtidos pelo método de LEVY, utilizando-se os mesmos valores de medidas de módulo e fase. Para a realização desses testes foram elegidas 3 (três) funções de transferência, com diferentes graus de complexidade. Essas funções foram obtidas nos trabalhos de identificação dos parâmetros das funções de transferência de módulos dos reguladores de velocidade da usina hidroelétrica Governador Bento Munhoz da Rocha Netto.

A escolha do método de LEVY como referência de desempenho é devida à sua ampla utilização e também aos seus bons resultados na identificação de parâmetros de funções de transferência. Os testes de desempenho foram desenvolvidos em 3 (três) etapas. Nas 2 (duas) primeiras foram utilizadas medidas simuladas através de programas computacionais, elaborados especialmente para este fim. Na terceira, foram utilizadas medidas reais de experimentos de resposta de frequência. A primeira e a segunda etapas diferem entre si, quanto à correlação das medidas. Na primeira etapa as medidas foram consideradas não-correlacionadas, enquanto na segunda as medidas foram supostas correlacionadas e com diferentes coeficientes de correlação. Para os testes com medidas simuladas e supostas correlacionadas, foi escolhida apenas 1 (uma) das 3 (três) funções de transferência citadas anteriormente.

Para as 2 (duas) primeiras funções de transferência testadas, a faixa de frequências utilizada foi de 0.05 Hz a 5.85 Hz, com intervalos de 0.2 Hz entre os valores das frequências nas quais foram feitas as medições, o que corresponde a um número de 60 (sessenta) medidas. Para a terceira função de transferência testada a faixa de frequências utilizada foi de 0.05 Hz a 7.85 Hz, com intervalos de 0.2 Hz entre os valores das frequências nas quais foram feitas as medições, o que corresponde a um número de 80 (oitenta) medidas. Considerando que o número de medidas utilizadas foi bem maior que o necessário, não houve maior preocupação quanto à distribuição em frequência dessas medidas. Uma distribuição mais adequada

poderia entretanto ser obtida através da escolha dos valores de frequência nos quais as medidas são efetuadas, baseada no conhecimento prévio dos modos do sistema.

Quando uma medida de módulo é identificada como espúria, além da própria medida, é removida também a medida de fase para o mesmo valor de frequência e, reciprocamente, quando uma medida de fase é identificada como espúria remove-se também a medida de módulo correspondente. Esse procedimento é necessário para o caso em que as medidas de módulo e fase, para uma mesma frequência são correlacionadas, e dispensável para o caso em que todas as medidas são não-correlacionadas.

5.1 Procedimento para simulação das medidas

5.1.1 Geração das medidas ideais

A partir dos valores reais dos parâmetros das funções de transferência estudadas calculou-se, de forma análoga ao desenvolvimento do item 4.1.1 do Capítulo IV, o valor verdadeiro das medidas. Desta forma, tendo-se os parâmetros reais b_0, b_1, b_2, \dots e a_1, a_2, \dots as partes real e imaginária da função de transferência são

$$\operatorname{Re} \{H(jw)\} = \frac{r_1 r_2 + i_1 i_2}{r_2^2 + i_2^2} \quad (5.1)$$

$$\operatorname{Im} \{H(jw)\} = \frac{-r_1 i_2 + r_2 i_1}{r_2^2 + i_2^2} \quad (5.2)$$

onde,

$$\begin{aligned} r_1 &= b_0 - w^2 b_2 + w^4 b_4 - \dots \\ i_1 &= w b_1 - w^3 b_3 + w^5 b_5 - \dots \\ r_2 &= 1 - w^2 a_2 + w^4 a_4 - \dots \\ i_2 &= w a_1 - w^3 a_3 + w^5 a_5 - \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.1.2 Introdução de erros de medição

Após o cálculo das medidas ideais, se faz necessária a introdução de erros de medição a fim de simular as condições reais de um experimento. Para tanto, foram utilizadas sub-rotinas computacionais de geração de desvios aleatórios com distribuição normal. No caso em que as medidas foram consideradas não-correlacionadas, utilizou-se uma sub-rotina de geração de desvios aleatórios monovariável, introduzindo-se os desvios individualmente em cada uma das medidas de módulo e fase. No caso em que as medidas de módulo e fase, para uma mesma frequência, foram supostas correlacionadas, utilizou-se uma sub-rotina de geração de desvios aleatórios multivariável, sendo tais desvios introduzidos simultaneamente nessas duas medidas, considerando-se um determinado coeficiente de correlação.

Os valores das variâncias das medidas utilizadas nas sub-rotinas foram calculadas a partir do conceito de precisão de um instrumento de medição. Da norma P-NB-278/73 da Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT - foi obtida a definição de precisão, conforme segue:

"Precisão: característica de um instrumento de medição, determinada através de um processo estatístico de medições, que exprime o afastamento mútuo entre as diversas medidas obtidas de uma grandeza dada, em relação à média aritmética dessas medidas".

O índice de precisão de um instrumento é comumente dado em função do desvio padrão sobre a média dos valores medidos [18]. Desta forma tem-se

$$p \leq \frac{v}{\bar{m}} \quad (5.4)$$

onde,

p : precisão de um conjunto de medidas ou aparelho de medição.

v : desvio padrão do conjunto de medidas.

\bar{m} : valor médio das medidas.

Os valores de precisão utilizados nos testes foram da ordem de 5%

5.1.3 Introdução de erros grosseiros

Para testar o desempenho dos métodos desenvolvidos, quanto ao processamento de medidas espúrias, foram introduzidos, propositalmente, erros grosseiros de 30 v nas medidas de número 26 (vinte e seis) e 50 (cinquenta) das 3 (três) funções de transferência testadas. A introdução proposital desses erros grosseiros visa forçar a existência de tal tipo de erro, embora esse evento possa se dar também durante o processo do item anterior.

5.2 Procedimento para testes com medidas reais

Os testes de desempenho com medidas reais foram realizados a partir dos valores das medidas obtidas em ensaios de campo — durante os trabalhos de identificação dos parâmetros dos módulos dos reguladores de velocidade das unidades geradoras da usina Governador Bento Munhoz da Rocha Netto —, utilizando-se uma analisadora digital de sinais de dois canais - modelo HP5420 de fabricação da HEWLETT-PACKARD. Pelo fato de não ter havido, quando da realização dos ensaios de campo, repetição das medições de módulo e fase para um mesmo valor de freqüência, o conhecimento do valor das variâncias das medidas ficou

comprometido. Para contornar essa dificuldade foi montado em laboratório um circuito elétrico, simulando um dos módulos dos reguladores de velocidade e, através do mesmo instrumento de medição dos ensaios de campo, foram realizados experimentos de resposta de frequência com repetição das medições de módulo e fase para um mesmo valor de frequência. Os resultados desses experimentos permitiram a adoção de um valor aproximado de variância para ser utilizado nos testes com medidas reais. Com os valores das medidas obtidas nesse experimento de laboratório foram traçados gráficos de dispersão, os quais permitiram observar que praticamente não existe correlação entre tais medidas. Com base em tal observação os erros de medição das medidas reais foram considerados não correlacionados.

5.3 Resultados de identificação de parâmetros

Os resultados dos testes de identificação de parâmetros de funções de transferência utilizando medidas simuladas e reais estão apresentados nas tabelas 5.1 a 5.15.

Tais tabelas mostram, para cada um dos testes realizados, os valores dos parâmetros identificados das funções de transferência, os números de iterações ocorridas, os valores dos elementos diagonais das matrizes de covariância dos erros de

estimação e os números das medidas espúrias identificadas e removidas.

As tabelas estão dispostas da seguinte forma:

a) Coluna "Método".

As linhas desta coluna especificam os métodos de identificação de parâmetros utilizados nos testes. No caso das tabelas 5.7 a 5.12 foram realizadas duas simulações para cada um dos métodos, sendo uma com a matriz de ponderação na forma diagonal e a outra com tal matriz na forma bloco-diagonal.

b) Colunas "Parâmetros"

As linhas dessas colunas mostram os valores dos parâmetros identificados das funções de transferência. Os parâmetros b_0 , b_1 , $b_2 \dots$ e a_1 , a_2 , $a_3 \dots$ devem ser considerados de acordo com a topologia da Eq. [5.5].

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots} \quad (5.5)$$

c) Colunas "Números de iterações":

c.1) Caso dos Métodos Clássicos

Os dígitos mostrados nessa coluna representam os números de iterações até a convergência, sendo que, com excessão do último, em cada uma dessas convergências houve detecção, identificação e remoção de medidas espúrias.

c.2) Caso dos Métodos Ortogonais

O primeiro dígito, que está entre parênteses, representa o número da iteração onde se fez a detecção, identificação e remoção das medidas espúrias. O segundo dígito representa o número total de iterações até a convergência.

d) Colunas "Elementos diagonais da matriz de covariância dos erros de estimação".

As linhas dessas colunas mostram os elementos diagonais da matriz de covariância dos erros de estimação correspondentes a cada um dos parâmetros identificados e dispostos na mesma ordem dos parâmetros.

e) Coluna "Medidas espúrias processadas"

Os dígitos dessa coluna representam os números das medidas espúrias removidas. Quando uma medida espúria for detectada e identificada, faz-se a remoção de tal medida e da sua medida correspondente no mesmo valor de freqüência.

5.3.1 Casos estudados com simulação de medidas

Os resultados dos testes de identificação de parâmetros de funções de transferência utilizando medidas simuladas e

considerando os erros de medição não-correlacionados estão apresentados nas tabelas 5.1 a 5.6.

As tabelas 5.1 a 5.3 apresentam resultados de testes de identificação de parâmetros, sem introdução proposital de erros grosseiros, para cada uma das 3 (três) funções de transferência estudadas. Nesses testes, quanto à exatidão dos parâmetros identificados, os métodos desenvolvidos apresentam resultados superiores aos obtidos com o método de Levy. O método Clássico-Polar apresenta números de iterações significativamente maiores do que os demais métodos. Os métodos ortogonais apresentam maior sensibilidade na detecção de erros grosseiros. Embora sem introdução proposital de erros grosseiros, as medidas 01, 02, 03 e 04 apresentam erros da ordem de 5 (cinco) desvios padrões.

As tabelas 5.4 e 5.6 apresentam resultados de testes de identificação de parâmetros, com introdução proposital de erros grosseiros de 30 (trinta) desvios padrões nas medidas de número 26 (vinte e seis) e 50 (cinqüenta), para cada uma das 3 (três) funções de transferência estudadas. Nesses testes, quanto à exatidão dos parâmetros identificados, o método de Levy apresenta resultados insatisfatórios, enquanto que os métodos desenvolvidos apresentam bons resultados. Os métodos clássicos apresentam maiores números de iterações, principalmente o método Clássico-Polar. Os métodos ortogonais novamente apresentam maior sensibilidade na detecção de erros grosseiros. As medidas 01 e 02 apresentam erros da ordem de 5 (cinco) desvios padrões.

METODO	PARAMETROS		NUMERO DE ITERACOES	ELEMENTOS DIAGONAIS DA MATRIZ DE COVARIANCIA DOS ERROS DE ESTIMACAO	MEDIDAS IDENTIFICADAS COMO ESPURIAS
	B0	A1			
LEVY	0,7865	0,3165			
CLASSICO POLAR	0,8491	0,3470	3	-3 0,3026±10 0,5412±10	-4
CLASSICO CARTESIANO	0,8382	0,3421	3	-3 0,2849±10 0,5339±10	-4
ORTOGONAL POLAR	0,8815	0,3572	(2)-5	-3 0,2499±10 0,4917±10	-4 01/02
ORTOGONAL CARTESIANO	0,8499	0,3465	(2)-5	-3 0,2248±10 0,4578±10	-4 01/02

TABELA 5.1 - RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICACAO DOS PARAMETROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA COM TOPOLOGIA 80/(1+5.A1) .

ONDE B0=0,859 e A1=0,346, SEM INTRODUCAO PROPOSTAL DE ERRO GROSSEIRO.

METODO	PARAMETROS			NUMERO DE ITERACOES	ELEMENTOS DIAGONAIS DA MATRIZ DE COVARIANCIA DOS ERROS DE ESTIMACAO						MEDIDAS IDENTIFICADAS COMO ESTIRIAS			
	B0	B1	A1		A2	-2	-2	-4	-4	-6				
LEVY	-5,7375	-1,4830	0,1847	0,0152	////	////	////	////	////	////	////	////		
CLASSICO POLAR	-0,0268	-5,243	0,4642	0,0524	9	-2	-2	-4	-4	-6	0,4474e10	0,4333e10	0,4125e10	0,3756e10
CLASSICO CARTESIANO	-0,0703	-5,158	0,4582	0,0517	5	-2	-2	-4	-4	-6	0,3566e10	0,8657e10	0,8587e10	0,8205e10
ORTOGONAL POLAR	-0,1789	-5,378	0,4767	0,0537	(2)-6	-2	-2	-4	-4	-6	0,4736e10	0,4714e10	0,4478e10	0,4290e10
ORTOGONAL CARTESIANO	-0,0703	-5,158	0,4582	0,0517	(2)-6	-2	-2	-4	-4	-6	0,3566e10	0,8657e10	0,8587e10	0,8204e10

TABELA 5.2 - RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICACAO DOS PARAMETROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA COM TOPOLOGIA (B0+B1)/(1+0,81)/(1+0,81+A1+A2),
 ONDE B0= 0,0; B1= -5,22; A1= 0,461; A2= 0,0522, SEM INTRODUCAO PROPOSTAL DE ERRO GROSSEIRO.

METODO	PARAMETROS				NUMERO DE ITERACOES	ELEMENTOS DIAGONAIS DA MATRIZ DE COVARIANCA DOS ERROS DE ESTIMACAO				MEDIDAS IDENTIFICADAS COMO ESPURIAS				
	B0	B1	A1	A2		A3	A4	A5	A6					
LEVY	1.7248	0.4556	0.0979	0.0064	11.5849x10 ⁻⁶									
CLASSICO POLAR	-0.4428	0.9394	0.1770	0.0112	3.078x10 ⁻⁴	3.059x10 ⁻⁶	16-16-5-3	0.3999x10 ⁻²	0.1225x10 ⁻³	0.5214x10 ⁻⁵	0.1076x10 ⁻⁷	0.1747x10 ⁻¹⁰	0.4507x10 ⁻¹⁴	01/02-02/04-37/40
CLASSICO CARTESIANO	-0.0124	0.9247	0.1757	0.0112	3.058x10 ⁻⁴	3.052x10 ⁻⁶	4	0.8444x10 ⁻⁴	0.1262x10 ⁻³	0.6605x10 ⁻⁴	0.3961x10 ⁻⁵	0.4678x10 ⁻⁸	0.9992x10 ⁻¹¹	0.3308x10 ⁻¹⁴
ORTOGONAL POLAR	-0.0428	0.9394	0.1770	0.0112	3.078x10 ⁻⁴	3.059x10 ⁻⁶	(4)-7	0.1262x10 ⁻³	0.5796x10 ⁻⁴	0.2833x10 ⁻⁵	0.4487x10 ⁻⁸	0.8620x10 ⁻¹¹	0.3631x10 ⁻¹⁴	03/04-37/40-01/02
ORTOGONAL CARTESIANO	-0.0123	0.9346	0.1757	0.0112	3.058x10 ⁻⁴	3.052x10 ⁻⁶	(4)-6	0.8444x10 ⁻⁴	0.6603x10 ⁻⁴	0.3960x10 ⁻⁵	0.4677x10 ⁻⁸	0.9989x10 ⁻¹¹	0.3307x10 ⁻¹⁴	01/02

TABELA 5.3 - RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICACAO DOS PARAMETROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA COM TOPOLOGIA (B0+s.B1)/(1+s.A1+s.A2+s.A3+s.A4) , SEM INTRODUCAO PROPOSTAL DE ERRO GROSSEIRO .

ONDE B= 0,00; B1= 0,94; A1= 0,17636; A2= 0,0112; A3= 3,89472x10⁻⁶; A4= 2,99304x10⁻⁴

METODO	PARAMETROS		NUMERO DE ITERACOES	ELEMENTOS DIAGONAIS DA MATRIZ DE COVARIANCIA DOS ERROS DE ESTIMACAO	MEDIDAS IDENTIFICADAS COMO ESPURIAS
	B0	A1			
LEVY	0,2394	0,06272	//////	//////	//////
CLASSICO POLAR	0,8515	0,3481	7-3-3	-4 0,3081±10 0,5551±10	49/50-25/26
CLASSICO CARTESIANO	0,8397	0,3430	6-3-3	-3 0,2880±10 0,5479±10	25/26-49/50
ORTOGONAL POLAR	0,8849	0,3587	(4)-7	-3 0,2114±10 0,4956±10	01/02-25/26-49/50
ORTOGONAL CARTESIANO	0,8309	0,3498	(4)-7	-3 0,2259±10 0,4947±10	01/02-25/26-49/50

TABELA 5.4 - RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICACAO DOS PARAMETROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA COM TOPOLOGIA B0/(1±s.A1) ,

ONDE B0=0,859 e A1=0,346, COM INTRODUCAO PROPOSITAL DE ERRO GROSSEIRO.

METODO	PARAMETROS			NUMERO DE ITERACOES	ELEMENTOS DIAGONAIS DA MATRIZ DE COVARIANCIA DOS ERROS DE ESTIMACAO			MEDIDAS IDENTIFICADAS COMO ESPURIAS				
	B0	B1	A2		B0	A1	A2					
LEVY	-6,5469	-0,1122	0,0637	0,0017	////////////////////			////////////////////				
CLASSICO POLAR	-0,0287	-5,24	0,4637	0,0524	11-6-4	-2	0,4471e10	0,4333e10	0,4131e10	0,3966e10	-6	25/26-49/50
CLASSICO CARTESIANO	-0,2579	-5,388	0,4784	0,0538	9-3-4-4	-1	0,1046	0,3651e10	0,3051e10	0,3335e10	-3	49/50-01/02-25/26
ORTOGONAL POLAR	-0,2276	-5,37	0,4757	0,0536	(6)-9	-2	0,4722e10	0,4737e10	0,4489e10	0,4309e10	-6	01/02-49/50-25/26
ORTOGONAL CARTESIANO	-0,0401	-5,247	0,481	0,0505	(6)-11	-2	0,3571e10	0,7388e10	0,9817e10	0,8265e10	-6	01/02-25/26-49/50

TABELA 5.5 - RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICACAO DOS PARAMETROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA COM TOPOLOGIA (B0 vs. B1)/(1 vs. A1 vs. A2), ONDE B0= 0,0; B1= -5,22; A1= 0,461; A2= 0,0522, COM INTRODUCAO PROPOSITAL DE ERRO GROSSO. 2

MÉTODO	PARÂMETROS				NÚMERO DE ITERAÇÕES	ELEMENTOS DIAGONAIS DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA DOS ERROS DE ESTIMAÇÃO				MEDIDAS IDENTIFICADAS COMO ESPURIAS			
	B0	B1	A1	A2		A3	A4						
LEVY	0,3734	0,2141	0,4562	0,0038	0,7313x10 ⁻⁴	0,8339x10 ⁻⁶	////////////////////						
CLASSICO POLAR	0,0429	0,9394	0,1770	0,0112	3,078x10 ⁻⁴	3,044x10 ⁻⁶	-2	-3	-5	-7	-10	-14	01/02-03/04-37/00-25/26-07/50
CLASSICO CARTESIANO	0,0571	0,9455	0,1780	0,0113	3,099x10 ⁻⁴	3,061x10 ⁻⁶	-2	-3	-5	-8	-10	-14	01/02-25/26-07/50
ORTOGONAL POLAR	0,0402	0,9473	0,1792	0,0113	3,109x10 ⁻⁴	3,047x10 ⁻⁶	-3	-4	-5	-8	-11	-14	15/16-37/00-07/50-01/02-25/26
ORTOGONAL CARTESIANO	0,0164	0,9488	0,1816	0,0108	3,066x10 ⁻⁴	2,79x10 ⁻⁶	-4	-4	-5	-8	-10	-14	01/02-25/26-07/50

TABELA 5.6 - RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA COM TOPOLOGIA (B0+s.B1)/(1+s.A1+s.A2+s.A3+s.A4), COM INTRODUÇÃO PROPOSTAL DE ERRO GROSSEIRO.
 ORDE B= 0,00; B1= 0,94; A1= 0,17636; A2= 0,0112; A3= 3,09472x10⁻⁴; A4= 2,99204x10⁻⁶

Os resultados dos testes de identificação de parâmetros de funções de transferência utilizando medidas simuladas e considerando os erros de medição correlacionados, com coeficientes de correlação entre as medidas de módulo e fase para uma mesma frequência de 0,1; 0,6 e 0,8 estão apresentados nas tabelas 5.7 a 5.12.

As tabelas 5.7 a 5.9 apresentam resultados de testes de identificação de parâmetros, sem introdução proposital de erros grosseiros, para uma das 3 (três) funções de transferência estudadas. Além disso, apresentam simulações com formas distintas da matriz de ponderação, sendo a primeira na forma diagonal e a segunda na forma bloco-diagonal. Nesses testes, quanto à exatidão dos parâmetros identificados, todos os métodos apresentam bons resultados, sendo que o método Ortogonal-Polar apresenta resultados melhores. O método Ortogonal-Polar com matriz de ponderação na forma bloco-diagonal apresenta maior número de iterações e maior sensibilidade na detecção de erros grosseiros. À medida que o coeficiente de correlação aumenta, a utilização da matriz de ponderação na forma bloco-diagonal se torna mais importante e apresenta melhores resultados. Embora sem introdução proposital de erros grosseiros as medidas 01 e 02 apresentam erros da ordem de 5 (cinco) desvios padrões.

As tabelas 5.10 a 5.12, apresentam resultados de testes de identificação de parâmetros, com a introdução proposital de erros grosseiros de 30 (trinta) desvios padrões nas medidas de número 26 (vinte e seis) e 50 (cinquenta), para uma das 3 (três) funções de transferência estudadas. Nesses testes, quanto à

exatidão dos parâmetros identificados, o método de Levy apresenta resultados insatisfatórios, enquanto que os métodos desenvolvidos apresentam bons resultados, sendo que o método Ortogonal-Polar apresenta resultados melhores. Os métodos Clássicos apresentam maiores números de iterações. O método Ortogonal-Cartesiano é o que apresenta a maior sensibilidade na detecção de erros grosseiros, enquanto que o método Clássico-Polar é o que apresenta a menor sensibilidade. Os métodos Polares, com excessão do método Ortogonal-Polar com matriz de ponderação na forma bloco-diagonal, nos casos das tabelas 5.11 e 5.12, não identificam as medidas de fase com erros grosseiros, devido à conversão dessas medidas para o primeiro quadrante. À medida que o coeficiente de correlação aumenta, a utilização da matriz de ponderação na forma bloco-diagonal se torna mais importante e apresenta melhores resultados. As medidas 01 e 02 apresentam erros da ordem de 5 (cinco) desvios padrões.

M E T O D O	P A R A M E T R O S		N U M E R O D E I T E R A C O E S	E L E M E N T O S D I A G O N A I S D A M A T R I Z D E C O V A R I A N C I A D O S E R R O S D E E S T I M A C A O	M E D I D A S I D E N T I F I C A D A S C O M O E S P U R T A S
	B 0	A 1			
LE V Y	0,7650	0,3074			
CL ASS I C O	-1 R , D I A G O N A L : 0,7724	0,3160	3	-2 : 0,2930+10 ; 0,3871+10	-3
P O L A R	-1 R , B L O C O D I A G O N A L : 0,7751	0,3160	3	-2 : 0,1935+10 ; 0,3849+10	-3
CL ASS I C O	-1 R , D I A G O N A L : 0,7519	0,3048	3	-2 : 0,1818+10 ; 0,3529+10	-3
C A R T E S I A N O	-1 R , B L O C O D I A G O N A L : 0,7519	0,2988	4	-3 : 0,5150+10 ; 0,9692+10	-4
ORT O G O N A L	-1 R , D I A G O N A L : 0,6571	0,3425	3	-2 : 0,2480+10 ; 0,5064+10	-3
P O L A R	-1 R , B L O C O D I A G O N A L : 0,6560	0,3424	(4)-6	-2 : 0,2232+10 ; 0,5312+10	-3 01/02
ORT O G O N A L	-1 R , D I A G O N A L : 0,7519	0,3048	3	-2 : 0,1885+10 ; 0,4110+10	-3
C A R T E S I A N O	-1 R , B L O C O D I A G O N A L : 0,7891	0,3156	(2)-6	-3 : 0,6274+10 ; 0,1475+10	-3 01/02

TABELA 5.7 - RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICACAO DOS PARAMETROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA COM TOPOLOGIA 80/(1+5-A1)

ONDE B0=0,659 e A1=0,346, SEM INTRODUCAO PROVISORIAL DE ERRO GROSSEIRO E COM COEFICIENTE DE CORRELACAO IGUAL

A 0.1.

METODO	PARAMETROS		NUMERO DE ITERACOES	ELEMENTOS DIAGONAIS DA MATRIZ DE COVARIANCIA DOS ERROS DE ESTIMACAO	MEDIDAS IDENTIFICADAS COMO ESPURIAS
	B0	A1			
LEVY	0,7638	0,3068			
CLASSICO	-1				
	R, DIAGONAL	0,7814	3	-2 : 0,2064E+0 -3 : 0,4028E+0	
POLAR	-1				
	R, BLOCO DIAGONAL	0,8122	3	-2 : 0,1957E+0 -3 : 0,2612E+0	
CLASSICO	-1				
	R, DIAGONAL	0,7734	3	-2 : 0,1937E+0 -3 : 0,3830E+0	
CARTESTIANO	-1				
	R, BLOCO DIAGONAL	0,7869	3	-3 : 0,5685E+0 -3 : 0,1604E+0	
ORTOGONAL	-1				
	R, DIAGONAL	0,8537	3	-2 : 0,2463E+0 -3 : 0,5012E+0	
POLAR	-1				
	R, BLOCO DIAGONAL	0,8475	(4)-6	-2 : 0,1371E+0 -3 : 0,4314E+0	01/02
ORTOGONAL	-1				
	R, DIAGONAL	0,7734	3	-2 : 0,2005E+0 -3 : 0,4450E+0	
CARTESTIANO	-1				
	R, BLOCO DIAGONAL	0,8192	3	-3 : 0,6818E+0 -3 : 0,1608E+0	

TABELA 5.8 - RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICACAO DOS PARAMETROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA COM TOPOLOGIA 80/(1+...A1)
ONDE B0=0,859 e A1=0,346, SEM INTRODUCAO PROPOSTAL DE ERRO GROSSEIRO E COM COEFICIENTE DE CORRELACAO IGUAL

M E T O D O	P A R A M E T R O S		N U M E R O D E I T E R A C O E S	E L E M E N T O S D I A G O N A I S D A M A T R I Z D E C O M P A R I A N C I A D O S E R R O S D E E S T I M A C A O	M E D I D A S I D E N T I F I C A D A S C O M O E S P U R I A S
	B 0	A 1			
LE V Y	0,7631	0,3065			
CLASSICO	-1		3	-2	-3
R , D I A G O N A L	0,7856	0,3243		0,2110e10	0,4102e10
P O L A R	-1		3	-3	-3
R , B L O C O D I A G O N A L	0,8323	0,3376		0,5581e10	0,1556e10
CLASSICO	-1		3	-2	-3
R , D I A G O N A L	0,7790	0,3166		0,1979e10	0,3926e10
C A R T E S I A N O	-1		3	-3	-3
R , B L O C O D I A G O N A L	0,7984	0,3194		0,5788e10	0,1130e10
ORTOGONAL	-1		3	-2	-3
R , D I A G O N A L	0,8524	0,3400		0,2457e10	0,4991e10
P O L A R	-1		(4)-6	-2	-3
R , B L O C O D I A G O N A L	0,8457	0,3375		0,1763e10	0,2377e10
ORTOGONAL	-1		3	-2	-3
R , D I A G O N A L	0,7790	0,3166		0,2047e10	0,4573e10
C A R T E S I A N O	-1		3	-3	-3
R , B L O C O D I A G O N A L	0,8289	0,3328		0,7032e10	0,1661e10

TABELA 5.9 - RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICACAO DOS PARAMETROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA COM TOPOLOGIA 80/(1+s.61)

ONDE B0=0,859 e A1=0,346, SEM INTRODUCAO PROPOSITAL DE ERRO GROSSEIRO E COM COEFICIENTE DE CORRELACAO IGUAL

A 0,8 .

M E T O D O	P A R A M E T R O S		N U M E R O D E I T E R A C O E S	E L E M E N T O S D I A G O N A I S D A M A T R I Z D E C O V A R I A N C I A D O S E R R O S D E E S T I M A C A O	M E D I D A S I D E N T I F I C A D A S C O M O E S P U R I A S
	B 0	A 1			
L E V Y				////////////////////	////////////////////
	:0,1280	:0,0115		////////////////////	////////////////////
-1					
R , D I A G O N A L	:0,7621	:0,3097	7-4	-2 : :0,1985+10 :0,3722+10	-3 : 49/50
C L A S S I C O					
-1					
R , B L O C O D I A G O N A L	:0,7647	:0,3101	7-4	-2 : :0,1889+10 :0,3678+10	-3 : 49/50
P O L A R					
-1					
R , D I A G O N A L	:0,7517	:0,3043	8-4-4	-2 : :0,1830+10 :0,3607+10	-3 : 49/50-25/26
C L A S S I C O					
-1					
R , B L O C O D I A G O N A L	:0,7519	:0,2981	8-4-4	-3 : :0,5164+10 :0,9896+10	-4 : 49/50-25/26
C A R T E S I A N O					
-1					
R , D I A G O N A L	:0,8408	:0,3340	(4)-7	-2 : :0,2398+10 :0,4813+10	-3 : 01/02-49/50
O R T O G O N A L					
-1					
R , B L O C O D I A G O N A L	:0,8378	:0,3319	(4)-7	-2 : :0,2156+10 :0,5089+10	-3 : 01/02-49/50
P O L A R					
-1					
R , D I A G O N A L	:0,7727	:0,2982	(4)-9	-2 : :0,1856+10 :0,3677+10	-3 : 01/02-49/50-25/26
O R T O G O N A L					
-1					
R , B L O C O D I A G O N A L	:0,7912	:0,3196	(4)-8	-3 : :0,6333+10 :0,1536+10	-3 : 01/02-49/50-25/26
C A R T E S I A N O					

TABELA 5.10- RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICACAO DOS PARAMETROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA COM TOPOLOGIA 80/(1+5.A1)

ONDE B0=0,659 e A1=0,346, COM INTRODUCAO PROPOSTAL DE ERRO GROSSOIRO E COM COEFICIENTE DE CORRELACAO IGUAL

METODO	PARAMETROS		NUMERO DE ITERACOES	ELEMENTOS DIAGONAIS DA MATRIZ DE COVARIANCA DOS ERROS DE ESTIMACAO	MEDIDAS IDENTIFICADAS COMO ESPURIAS
	B0	A1			
LEVY	:0,1282	:0,8115			
CLASSICO	-1				
IR , DIAGONAL	:0,7789	:0,3152	7-4	-2 : :0,2634+10 ; :0,3672+10	49/50
POLAR	-1				
IR , BLOCO DIAGONAL	:0,7799	:0,3256	7-4	-2 : :0,1036+10 ; :0,2588+10	49/50
CLASSICO	-1				
IR , DIAGONAL	:0,7733	:0,3137	7-4-4	-2 : :0,1958+10 ; :0,3916+10	49/50-25/26
CARTESIANO	-1				
IR , BLOCO DIAGONAL	:0,787	:0,3136	8-3-4	-3 : :0,5619+10 ; :0,1107+10	49/50-25/26
ORTOGONAL	-1				
IR , DIAGONAL	:0,8375	:0,3323	(4)-7	-2 : :0,2282+10 ; :0,4764+10	61/62-49/50
POLAR	-1				
IR , BLOCO DIAGONAL	:0,8491	:0,3392	(4)-7	-2 : :0,1371+10 ; :0,4311+10	61/62-49/50-25/26
ORTOGONAL	-1				
IR , DIAGONAL	:0,7937	:0,3068	(4)-6	-2 : :0,1969+10 ; :0,3961+10	61/62-49/50-25/26
CARTESIANO	-1				
IR , BLOCO DIAGONAL	:0,8225	:0,3335	(4)-7	-3 : :0,6899+10 ; :0,1681+10	61/62-49/50-25/26

TABELA 5.11 -RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICACAO DOS PARAMETROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA COM TOPOLOGIA 80/(1+5-A1)

ONDE B0=0,859 e A1=0,346, COM INTRODUCAO PROPOSTAL DE ERRO GROSSEIRO E COM COEFICIENTE DE CORRELACAO IGUAL

M E T O D O	P A R A M E T R O S		N U M E R O D E I T E R A C O E S	E L E M E N T O S D I A G O N A I S D A M A T R I Z D E C O V A R I A N C I A D O S E R R O R S D E E S T I M A C A O	M E D I D A S I D E N T I F I C A D A S C O M O E S P U R I A S
	B 0	A 1			
LE V Y	0,1283	0,0115			
CLASSICO	-1 R , D I A G O N A L : 0,7750	0,3178	7-4	-2 -3 0,2057e10 0,3942e10	49/50
P O L A R	-1 R , B L O C O D I A G O N A L : 0,8171	0,3370	7-4	-3 0,5464e10 0,1550e10	49/50
CLASSICO	-1 R , D I A G O N A L : 0,7787	0,3162	7-4-4	-2 -3 0,1991e10 0,4624e10	49/50-25/26
C A R T E S I A N O	-1 R , B L O C O D I A G O N A L : 0,7985	0,3188	7-3-4	-3 0,5803e10 0,1154e10	49/50-25/26
ORTOGONAL	-1 R , D I A G O N A L : 0,8361	0,3316	(4)-7	-2 -3 0,2375e10 0,4743e10	01/02-49/50
P O L A R	-1 R , B L O C O D I A G O N A L : 0,8471	0,3375	(4)-8	-2 -3 0,1762e10 0,2376e10	01/02-49/50-25/26
ORTOGONAL	-1 R , D I A G O N A L : 0,7989	0,3099	(4)-8	-2 -3 0,2060e10 0,4461e10	01/02-49/50-25/26
C A R T E S I A N O	-1 R , B L O C O D I A G O N A L : 0,8325	0,3379	(4)-7	-3 0,7125e10 0,1739e10	01/02-49/50-25/26

TABELA 5.12 -RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICACAO DOS PARAMETROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA COM TOPOLOGIA 80/(11+5.A1)

ONDE B0=0,859 e A1=0,346, COM INTRODUCAO PROPOSITAL DE ERRO GROSSO E COM COEFICIENTE DE CORRELACAO IGUAL

5.3.2 Casos estudados com medidas reais

Os resultados dos testes de identificação de parâmetros de funções de transferência utilizando medidas reais estão apresentados nas tabelas 5.13 a 5.15. Nos testes da tabela 5.13 o método Ortogonal-Cartesiano não apresentou resultados satisfatórios. Os demais métodos desenvolvidos apresentaram resultados levemente superiores aos resultados obtidos com o método de Levy. Nos testes das tabelas 5.14 e 5.13 tanto os métodos desenvolvidos, quanto o método de Levy apresentaram bons resultados. Somente nos testes da tabela 5.13 ocorreu a presença de medidas espúrias, que foram detectadas, identificadas e removidas corretamente por todos os métodos desenvolvidos.

METODO	PARAMETROS		NUMERO DE ITERACOES	ELEMENTOS DIAGONAIS DA MATRIZ DE COVARIANCIA DOS ERROS DE ESTIMACAO	MEDIDAS IDENTIFICADAS COMO ESPURIAS
	B0	A1			
LEVY	0,6263	0,2441		////////// ////////// //////////	
CLASSICO POLAR	0,8959	0,3231	9-4	-2 0,4842±10 -3 0,5463±10	01/02
CLASSICO CARTESIANO	0,8894	0,3302	14-6	-2 0,5637±10 -3 0,7972±10	01/02
ORTOGONAL POLAR	0,8959	0,3231	(3)-7	-2 0,3294±10 -3 0,4928±10	01/02
ORTOGONAL CARTESIANO	0,3721	0,1961	(3)-15	-2 0,1303±10 -3 0,3763±10	01/02

TABELA 5.13 -RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICACAO DOS PARAMETROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA COM TOPOLOGIA 80/(1+s.A1) ,

ONDE B0=0,859 e A1=0,346, COM MEDIDAS REAIS.

METODO	PARAMETROS			NUMERO DE ITERACOES	ELEMENTOS DIAGONAIS DA MATRIZ DE COVARIANCA DOS ERROS DE ESTIMACAO						MEDIDAS IDENTIFICADAS COMO ESPURAS			
	B0	B1	A1 A2		-1	-2	-3	-4	-5	-6				
LEVY	-0,1932	-5,129	0,4659 0,054											
CLASSICO POLAR	-0,1423	-5,089	0,4605 0,0538	4	-1	-2	-3	-4	-5	-6				
CLASSICO CARTESIANO	-0,1098	-5,199	0,4695 0,0549	3	-1	-1	-3	-3	-5					
ORTOGONAL POLAR	-0,1423	-5,089	0,4605 0,0538	4	-1	-2	-4	-4	-6					
ORTOGONAL CARTESIANO	-0,1098	-5,199	0,4695 0,0549	3	-1	-1	-3	-3	-5					

TABELA 5.14 - RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICACAO DOS PARAMETROS DA FUNCAO DE TRANSFERENCIA COM TOPOLOGIA (B0+5.B1)/(1+5.A1+5.A2),
 ONDE B0= 0,0; B1= -5,22; A1= 0,461; A2= 0,0522, COM MEDIDAS REAIS.

MÉTODO	PARÂMETROS				NÚMERO DE ITERAÇÕES	ELEMENTOS DIAGONAIS DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA DOS ERROS DE ESTIMAÇÃO				MEDIDAS IDENTIFICADAS COMO ESPURIAS						
	B0	B1	A1	A2		A3	A4	A3	A4							
LEVY	-1	0,5589±10	0,9227	0,1690	0,0104	2,7363±10	2,5942±10	-4	-6	////////////////////	////////////////////					
CLASSICO POLAR	-2	0,3625±10	0,9492	0,1732	0,0106	2,813±10	2,592±10	-4	-6	0,8347±10	0,3427±10	0,1316±10	0,2694±10	0,4694±10	0,2531±10	-13
CLASSICO CARTESIANO	-2	0,1466±10	0,9389	0,1721	0,0105	2,792±10	2,614±10	-4	-6	0,9394±10	0,7866±10	0,2996±10	0,6814±10	0,8989±10	0,2531±10	-13
ORTOGONAL POLAR	-2	0,3625±10	0,9492	0,1732	0,0106	2,813±10	2,592±10	-4	-6	0,8347±10	0,3427±10	0,1316±10	0,2694±10	0,4694±10	0,2531±10	-13
ORTOGONAL CARTESIANO	-2	0,1466±10	0,9389	0,1721	0,0105	2,792±10	2,614±10	-4	-6	0,9394±10	0,7866±10	0,2996±10	0,6814±10	0,8989±10	0,2531±10	-13

TABELA 5.15 - RESUMO DOS RESULTADOS DE IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA COM TOPOLOGIA (B0+s.B1)/(1+s.A1+s.A2+s.A3+s.A4), COM MEDIDAS REAIS, ONDE B= 0,00; B1= 0,94; A1= 0,17636; A2= 0,0112; A3= 3,894721x10⁻⁶; A4= 2,99384x10⁻⁶

2 3 4

5.4 Conclusão

CASOS ESTUDADOS COM MEDIDAS SIMULADAS

Os métodos desenvolvidos apresentam de forma geral, quanto à exatidão dos parâmetros identificados, desempenhos equivalentes, quando comparados entre si e, desempenhos superiores, quando comparados com o método de Levy, principalmente nos casos de existência de medidas espúrias. Considerando-se como parâmetro de avaliação de desempenho o número de iterações, os métodos ortogonais, pela sua forma seqüencial de processamento das medidas, levam vantagem principalmente quando medidas espúrias estão presentes no processo.

A detecção, identificação e remoção de medidas espúrias se deu de modo satisfatório em todos os métodos, porém os métodos ortogonais mostraram-se mais sensíveis à detecção dessas medidas.

À medida em que se considera o coeficiente de correlação maior, entre as medidas de ganho e fase para uma mesma freqüência, a utilização da matriz de covariância dos erros de medição na forma bloco diagonal se torna mais necessária.

Os elementos diagonais da matriz de covariância dos erros de estimação fornecem uma importante avaliação da qualidade da estimação, porém tal avaliação não é rigorosamente precisa.

CASOS ESTUDADOS COM MEDIDAS REAIS

Os métodos desenvolvidos apresentam, quanto à exatidão dos parâmetros identificados, desempenhos equivalentes, quando comparados entre si e com o método de LEVY, no caso de inexistência de medida espúria. No caso em que medidas espúrias estão presentes, estes métodos, com excessão do método Ortogonal-Cartesiano, apresentam desempenhos superiores ao método de Levy. O método Ortogonal-Cartesiano não mostrou bom desempenho na estimação dos parâmetros da função de transferência na tabela 5.13. É possível que a presença da medida espúria tenha conduzido o processo para um mínimo local. Em novo processamento com diminuição do valor da ponderação das medidas 01 e 02 de apenas 10 vezes do valor original, tal método mostrou bom desempenho, com os seguintes resultados: $b = 0.7448$; $a = 0.2928$; número de iterações = 10. Esse fato vem comprovar a fundamental importância de uma ponderação adequada das medidas.

C A P Í T U L O V I

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

6.0 Conclusão

Para a utilização dos métodos desenvolvidos é necessário o conhecimento prévio da topologia da função de transferência, bem como de algum ponto próximo da solução. A aplicação desses métodos em conexão com o método de LEVY contorna estas dificuldades. Esses métodos possuem a vantagem da existência de ponderação das medidas ou dos erros de medição, de técnicas de processamento de medidas espúrias e de possibilidade de avaliação da qualidade da estimação. O desempenho de tais métodos mostrou-se superior ao do método de LEVY, principalmente nos casos de ocorrência de medidas espúrias.

A caracterização estatística aproximada adotada para as medidas na forma cartesiana mostrou-se satisfatória, considerando-se o desempenho dos métodos que utilizam esta formulação. Os métodos de solução adotados apresentam desempenhos equivalentes, porém os métodos ortogonais mostraram vantagens no processamento de medidas espúrias.

As medidas espúrias são, muitas vezes, visíveis quando se obtêm as medidas de módulo e fase, a partir de um experimento de resposta de frequência, e os procedimentos atuais de análise da qualidade das medidas baseiam-se principalmente numa verificação do grau de variação da magnitude destas medidas. Este trabalho utiliza um procedimento estatístico e de maior confiabilidade para o processamento de medidas espúrias. Um tratamento estatístico para o processamento de medidas espúrias, além de ser mais confiável, permite a automatização do processo.

As vantagens e o desempenho dos métodos desenvolvidos justificam sua utilização, em conexão com o método de LEVY, nos trabalhos de identificação de parâmetros de funções de transferência.

6.1 Sugestões para futuros trabalhos

A experiência obtida com a realização desta dissertação permite apresentar as seguintes sugestões para futuros trabalhos:

- Estudar o problema da correlação das medidas obtidas a partir de ensaios de resposta de frequência à luz de experimentos estatísticos.
- Analisar, para o caso de identificação de parâmetros de funções de transferência, o desempenho de métodos para processamento de erros grosseiros múltiplos desenvolvidos na área de Estimação de Estados de Sistemas de Potência.
- Com a utilização de conversores analógico-digitais, acoplados a um gerador de funções e a um computador digital, desenvolver um estimador automático, para a identificação de parâmetros de funções de transferência. Tal estimador deve automatizar o processo de identificação desde a etapa de obtenção das medidas até à de consecução do modelo matemático da função de transferência, utilizando um dos métodos desenvolvidos em conexão com o método de LEVY.

Referências Bibliográficas

- 1- Dosso, Ricardo G. & Minku, Nelson R. & Mikami, Léo. "Identificação de Parâmetros do Regulador de Velocidade da Usina Governador Bento Munhoz da Rocha Netto", I Simpósio de Especialistas em Planejamento da Operação Elétrica, GCOI/ELETROBRÁS, 1987.
- 2- D'Azzo, John J. & Houpis, Constantine H. "Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares", Editora Guanabara Dois S.A., 1978.
- 3- Dorf, Richard C. "Modern Control Systems", Addison-Wesley series in Electrical Engineering, 1980.
- 4- Simões Costa, Antonio J. A. "Power System State Estimation: Orthogonal Methods for Estimation and Bad Data Processing, and Techniques for Topological Observability", Tese de Doutorado, University of Waterloo, 1981.
- 5- Chen, Chih-Fan. & Haas, I. John. "Elements of Control Systems Analysis - Classical and Modern Approaches", Prentice - Hall Series, 1968.

- 6- Simões Costa, Antonio J. A. & Quintana, V. H. "An Orthogonal Row Processing Algorithm for Power System Sequential State Estimation", IEEE Trans. on P.A.S., Vol. PAS-100, nº 8, 1981, pp. 3791-3800.

- 7- Simões Costa, Antonio J. A. & Salgado, Roberto. "Técnicas de Processamento de Erros Grosseiros para Estimadores de Estado Seqüenciais Ortogonais em Sistemas de Potência", Anais do 4º Congresso Brasileiro de Automática, Campinas - SP., 1982, pp. 467-472.

- 8- Simões Costa, Antonio J. A. & Quintana, V. H. "A Robust Numerical Technique for Power System State Estimation", IEEE Trans. on P.A.S., Vol. Pas-100, nº 2, 1981, pp. 691-698.

- 9- Glentleman, W. M. "Least - Squares Computations by Givens Transformations Without Square Routs", Journal of the Inst. Math. Applics., 12 (1973), pp. 329-336.

- 10- Hammarling, S. "A Note on Modifications to the Givens Plane Rotations", Journal of the Inst. Math. Applics., 13 (1974), pp. 215-218.

- 11- Mili, L. & Van Cutsem, Th. & Pavella, M. Ribbens. "Bad Data Identification Methods in Power System State Estimation - A Comparative Study", IEEE Trans. on P.A.S., Vol. Pas-104, nº 11, 1985, pp. 3037-3049.

- 12- Quintana, V. H. & Simões Costa, A. & Mier, M. "Bad Data Detection And Identification Techniques Using Estimation Orthogonal Methods", IEEE Trans. on P.A.S, Vol. PAS-100, nº 9, 1982, pp. 3356-3364.

- 13- Amaral, S. & Simões Costa, A. "Métodos para Processamento de Erros Grosseiros Múltiplos em Estimadores de Estado Seqüenciais Ortogonais", Anais do 6º Congresso Brasileiro de Automática, Belo Horizonte, 1986, pp. 24-30.

- 14- Kreyszig, Erwin. "Matemática Superior", Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 1972.

- 15- Meyer, Paul L. "Probabilidade Aplicações à Estatística", Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1982.

- 16- Spiegel, Murray R. "Probabilidade e Estatística", Editora Mc Graw-Hill do Brasil, Ltda., 1979.

- 17- Papoulis, Athanasios. "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", Mc Graw-Hill Kogakusha, Ltd., 1965.
- 18- Medeiros Filho, Solon de. "Fundamentos de Medidas Elétricas, Editora Universitária da Universidade Federal de Pernambuco, 1979.
- 19- Distefano, Joseph J. & Stubberud, Allen R. & Williams, Ivan J. "Sistemas de Retroação e Controle", Editora Mc Graw-Hill do Brasil, 1981.
- 20- Himmelblau, David M. "Applied Nonlinear Programming", Mc Graw-Hill Book Company, 1972.
- 21- Luenberger, David G. "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley Publishing Company, 1973.
- 22- Ralston, Anthony. & Wilf, Herbert S. "Mathematical Methods for Digital Computers", Vol. I e II, John Wiley & Sons, Inc., 1960.
- 23- Schweppe, Fred C. & Handschin, Edmund J. "Static State Estimation in Electric Power Systems", IEEE Trans. on P.A.S., Vol. 62, nº 7, 1974, pp. 972-982.

- 24- Schweppe, Fred C. & Wildes, J. "Power System Static - State Estimation, Part I: Exact Model", IEEE Trans. on P.A.S., Vol. Pas-89, 1970, pp. 120-125.
- 25- Schweppe, Fred C. & Rom, Douglas B. "Power System Static - State Estimation, Part II: Approximate Model", IEEE Trans. on P.A.S., Vol. Pas-89, 1970, pp. 125-130.
- 26- Schweppe, Fred C. "Power System Static - State Estimation, Part III: Implementation", IEEE Trans. on P.A.S., Vol. Pas-89, 1970, pp. 130-135.
- 27- Handschin, E. & Schweppe, F.C. & Kohlas, J. & Fiechter, A. "Bad Data Analysis for Power System State Estimation", IEEE Trans. on P.A.S., Vol. Pas-94, n° 2, 1975.
- 28- Mili, L. & Van Cutsem, Th. & Pavella, M. Ribbens. "Hypothesis Testing Identification: A New Method for Bad Data Analysis in Power State Estimation", IEEE Trans. on P.A.S., Vol. Pas-103, n° 11, 1984.
- 29- Zhuang, Fulin & Balasubramanian, R. "Bad Data Processing in Power System State Estimation by Direct Data Deletion and Hypothesis Tests.", IEEE Trans. on P.A.S., Vol. PWRs-2, n° 2, 1987.

- 30- Hewlett Packard Application Note 240-0. "Digital Signal Analysis - Time and Frequency Domain Measurements", Hewlett Packard Company, 1977.
- 31- Hewlett Packard Application Note 240-1. "Digital Signal Analysis - Feedback Control System Measurements", Hewlett Packard Company.
- 32- Hewlett Packard Application Note 140-2. "Feedback Loop And Servomechanism Measurements Using HP Fourier Analyzers", Hewlett Packard Company, 1971.
- 33- Simões Costa, A. & Quintana, V. H. "Power System State Estimation: Computer Program Documentation for Estimation Methods and Observability Techniques", Internal Report Department of Electrical Engineering University of Waterloo, 1981.
- 34- Spiegel, Murray R. "Estatística", Editora Mac Graw-Hill do Brasil, Ltda, 1974.
- 35- Simon da Fonseca, J. "Curso de Estatística", Editora Atlas S.A., 1981.
- 36- Wonnacott, Thomaz H. & Wonnacott, Ronald J. "Introdução à Estatística", Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1980.

- 37- Stark, Peter A. "Introdução aos Métodos Numéricos", Editora Interciência, 1984.
- 38- Dorn, William S. & MacCracken, Daniel D. "Cálculo Numérico com Estudos de Casos em Fortram IV", Editora Campus Ltda, 1981.
- 39- Lipschutz, Seymour "Álgebra Linear", Editora Mc Graw-Hill do Brasil Ltda, 1972.
- 40- Piskunov, N. "Cálculo Diferencial e Integral", Editorial Mir. Moscou, 1969.
- 41- Chen, C.T. "Introduction to Linear System Theory", Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970.
- 42- Hadley, G. "Linear Álgebra", Addison-Wesley Publishing Company, 1973.
- 43- Goodwin, Graham C. & Payne, Robert L. "Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis", Academic Press, Inc., 1977.