

**DELMAR BROGLIO CARVALHO**

**EQUALIZAÇÃO DE FASE**

**BASEADA NO ATRASO DE FASE**

**Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.**

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica,**

**Universidade Federal de Santa Catarina.**

**Orientador: Prof. Sidnei Noceti Filho, Dr.**

**Co-orientador: Prof. Rui Seara, Dr.**

**FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 1997**

# EQUALIZAÇÃO DE FASE BASEADA NO ATRASO DE FASE

CANDIDATO: DELMAR BROGLIO CARVALHO

Esta tese foi julgada para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA - ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA** e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós Graduação.



Prof. SIDNEI NOCETI FILHO, D. Sc.  
ORIENTADOR



Prof. RUI SEARA, Dr. Ing.  
CO-ORIENTADOR



Prof. ADROALDO RAIZER, Dr.  
COORDENADOR DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

BANCA EXAMINADORA:



Prof. SIDNEI NOCETI FILHO, D. Sc.  
PRESIDENTE



Prof. RUI SEARA, Dr. Ing



Prof. ANTONIO PETRAGLIA Ph.D.



Prof. CARLOS AURÉLIO FARIA DA ROCHA, D. Sc.

*Tenha tempo para trabalhar,  
é o preço do triunfo.  
Tenha tempo para pensar,  
é a fonte do poder.  
Tenha tempo para brincar,  
é o segredo da eterna juventude.  
Tenha tempo para ler,  
é a fonte da sabedoria.  
Tenha tempo para fazer amigos,  
é o caminho da felicidade.  
Tenha tempo para sonhar,  
é como viajar à uma estrela.  
Tenha tempo para amar e ser amado,  
é um privilégio divino.  
Tenha tempo para olhar a sua volta,  
o dia é demasiadamente curto para ser egoísta.  
Tenha tempo para rir,  
é a música da alma.*

*Antigo provérbio irlandês*

*A minha mãe Olga e  
minha irmã Zélia,  
pelo amor, coragem, esforço e dignidade.*



*A minha esposa Flávia e ao meu filho Pedro Henrique,  
pelo amor, carinho e amizade.*

## AGRADECIMENTOS

*Quero deixar registrado meus sinceros agradecimentos e homenagens:*

*Ao amigo e professor Francisco Polano (In memoriam) pelas orientações recebidas que me conduziram à carreira de Engenheiro Eletricista.*

*À Universidade Católica de Pelotas, em especial a Prof. Circe Cunha, que com sua determinação e coragem não mediu esforços para a formação de recursos humanos dentro desta universidade.*

*À Escola de Engenharia, em especial aos meus colegas do Curso de Engenharia Elétrica na pessoa do Prof. Gilberto Lopes.*

*À CAPES pelo apoio dado ao desenvolvimento científico neste país.*

*Aos meus colegas do Grupo de Pesquisa e Desenvolvimento em Instrumentação Biomédica da UCPel, na pessoa do Prof. Mauricio C. Tavares, cujo esforço e dedicação é exemplo de como fazer pesquisa com poucos recursos mas com muita qualidade.*

*Aos meus orientadores Prof. Sidnei Noceti Filho e Prof. Rui Seara, pela amizade, dedicação e pelo brilho com que conduziram esta dissertação.*

*Aos professores do LINSE, pela nobreza de seus conhecimentos e pela simplicidade que os mesmos usufruem na condução do aprendizado de seus alunos.*

*À banca examinadora pelas valiosas contribuições dada a este trabalho.*

*Aos funcionários do LINSE, Elton Luis Fontão e Walter Gontijo, pela sinceridade, amizade e dedicação ao trabalho tornando possível a realização deste.*

*Aos meus colegas do LINSE, Renato Faustini, Evânio Nicoleit, Orlando José Tobias, Oscar Gouveia, Carlos Ernando Guedes, Rodrigo O. Pinto, Ricardo Takase Gonçalves, Ronaldo Zampolo, Ana Isabela Acunha e Ana Cláudia, pelas valiosas discussões e conversas e que muito me honraram com sua amizade.*

*À minha querida mãe Olga Carvalho e a minha irmã Zélia, que com sua dedicação, carinho e amor, souberam conduzir-me dentro de um ideal de honestidade e trabalho, muitas vezes abdicando de seus próprios desejos e anseios.*

*À minha esposa Flávia e ao meu filho Pedro Henrique, pelos momentos de compreensão, pelo grande amor que me é devotado e pelos seus sorrisos me brindam com extrema felicidade.*

*À todos aqueles cujos nomes não me vieram à lembrança, mas que certamente contribuíram para a realização deste trabalho, meu muito obrigado.*

# SUMÁRIO

SUMÁRIO .....	viii
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xii
LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	xiv
LISTA DE TABELAS.....	xvi
RESUMO.....	xviii
ABSTRACT.....	xix
CAPÍTULO 1.....	1
INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 2.....	5
DISTORÇÃO E ATRASO EM SISTEMAS LINEARES .....	5
2.1 INTRODUÇÃO.....	5
2.2 A IMPORTÂNCIA DA FASE NO PROCESSAMENTO DE SINAIS.....	5
2.3 ATRASO EM SISTEMAS LINEARES .....	7
2.4 EQUALIZADORES DE FASE.....	10
2.4.1 Funções de transferência passa-tudo.....	10
2.4.2 Funções passa-tudo de 1ª e 2ª ordem.....	11
2.4.3 Fase para uma função passa-tudo de 2ª ordem.....	12
2.5 CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE ATRASO .....	15
2.5.1 Área sob a curva da função atraso de grupo.....	15

2.5.2 <i>Área sob a curva da função atraso de fase</i> .....	18
2.6 EFEITO DA EQUALIZAÇÃO SOBRE A RESPOSTA TRANSITÓRIA .....	20
2.7 MEDIDA DE MÉRITO DA FASE .....	20
2.8 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE EQUALIZAÇÃO .....	21
2.9 TÉCNICAS USUAIS DE EQUALIZAÇÃO .....	24
2.10 CONCLUSÕES .....	28
<b>CAPÍTULO 3.....</b>	<b>31</b>
<b>EQUALIZAÇÃO DO ATRASO DE FASE .....</b>	<b>31</b>
3.1 INTRODUÇÃO .....	31
3.2 POR QUE UMA NOVA MEDIDA?.....	31
3.3 O ATRASO DE FASE COMO FUNÇÃO A SER OTIMIZADA .....	32
3.4 DETERMINAÇÃO DO TEMPO DE PROPAGAÇÃO .....	33
3.4.1 <i>Tempo de propagação médio</i> .....	34
3.5 A FUNÇÃO CUSTO DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO .....	36
3.6 DESCRIÇÃO DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO .....	37
3.6.1 <i>Estratégia de otimização</i> .....	39
3.7 DETERMINAÇÃO DO NÚMERO MÍNIMO DE SEÇÕES .....	39
3.8 ESTUDO DAS FIGURAS DE MÉRITO.....	42
3.8.1 <i>Erro na simetria da resposta ao impulso</i> .....	42
3.8.2 <i>Erro na resposta à excitação colorida</i> .....	46
3.9 AVALIAÇÃO DAS FIGURAS DE MÉRITO .....	50
3.10 CONCLUSÕES .....	52
<b>CAPÍTULO 4.....</b>	<b>53</b>
<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>53</b>
4.1 INTRODUÇÃO.....	53

4.2	CARACTERÍSTICAS DOS FILTROS A SEREM EQUALIZADOS .....	53
4.3	ESPECIFICAÇÃO DAS DISPERSÕES ADMISSÍVEIS .....	54
4.4	FIGURAS DE MÉRITO .....	55
4.4	CARACTERÍSTICAS DOS FILTROS SEM EQUALIZAÇÃO .....	57
4.4.1	<i>Filtros Butterworth</i> .....	57
4.4.2	<i>Filtros Chebyshev</i> .....	58
4.4.3	<i>Filtros Elípticos</i> .....	60
4.5	RESULTADOS OBTIDOS APÓS A EQUALIZAÇÃO DA FASE .....	61
4.5.1	<i>Resultados das Equalizações para os filtros Butterworth</i> .....	62
4.5.2	<i>Resultados das Equalizações para os filtros Chebyshev</i> .....	67
4.5.3	<i>Resultados das Equalizações para os filtros Elípticos</i> .....	71
4.5.4	<i>Avaliação das equalizações realizadas</i> .....	76
4.6	DISTORÇÃO POR INTERCEPTAÇÃO DE FASE .....	77
4.7	CONCLUSÕES .....	86
<b>CAPÍTULO 5</b>	.....	<b>87</b>
<b>CONCLUSÕES</b>	.....	<b>87</b>
<b>APÊNDICE A</b>	.....	<b>89</b>
<b>RESULTADOS GERAIS DOS PROCEDIMENTOS DE EQUALIZAÇÃO</b>	.....	<b>89</b>
A.1	- RESULTADOS DA EQUALIZAÇÃO DOS FILTROS BUTTERWORTH.....	89
A.2	- RESULTADOS DA EQUALIZAÇÃO DOS FILTROS CHEBYSHEV. ....	90
A.3	- RESULTADOS DA EQUALIZAÇÃO DOS FILTROS ELÍPTICOS. ....	91
<b>APÊNDICE B</b>	.....	<b>93</b>
<b>COEFICIENTES DOS EQUALIZADORES</b>	.....	<b>93</b>
B.1	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP1 E EQUALIZADOR .....	93

B.2 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP2 E EQUALIZADOR .....	94
B.3 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP3 E EQUALIZADOR .....	94
B.4 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP4 E EQUALIZADOR .....	95
B.5 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP5 E EQUALIZADOR .....	95
B.6 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP6 E EQUALIZADOR .....	96
B.7 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP7 E EQUALIZADOR .....	96
B.8 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP8 E EQUALIZADOR .....	97
B.9 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP9 E EQUALIZADOR .....	97
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>99</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A_{max}$	- Máxima atenuação na banda passante	$Q$	- Fator de qualidade do filtro
$A\tau_p$	- Área sob a curva do atraso de fase	$s$	- Frequência complexa
$D_n$	- Polinômio característico	$t$	- Escala de tempo
$E(\omega)$	- Energia de um sinal	$T_0$	- Instante qualquer na escala de tempo
$E\tau_p$	- Procedimento de equalização baseado no atraso de fase	$T(\omega)$	- Resposta em frequência um filtro qualquer
$E\tau_g$	- Procedimento de equalização baseado no atraso de grupo	$ T(\omega) $	- Magnitude da resposta em frequência um filtro qualquer
$h(t)$	- Resposta ao impulso de um sistema	$v_i(t)$	- Tensão de entrada
$H(s)$	- Função de transferência	$v_o(t)$	- Tensão de saída
$H_0$	- Comportamento da função de transferência na origem	$V_i(s)$	- Transformada de Laplace da tensão de entrada
$H_{PB}$	- Função de transferência de um filtro passa-baixas	$V_o(s)$	- Transformada de Laplace da tensão de saída
$k$	- Variável de iteração	$X(\omega)$	- Magnitude da transformada de Fourier de um sinal de entrada
$K$	- Constante de ganho	$x, y$	- Coeficientes de um filtro passa-tudo
$L$	- Número de amostras de frequência	$\alpha$	- Ângulo formado pelo vetor $\omega_0$ com a abscissa
$n$	- ordem do filtro		
$N$	- Número de seções de 2ª ordem		



$\varepsilon$  - Função erro  
 $\varepsilon_A$  - Erro absoluto  
 $\varepsilon_h$  - Energia do erro de simetria da resposta ao impulso  
 $\varepsilon\tau_p$  - Energia do erro na aproximação do atraso de fase  
 $\varepsilon\mathfrak{R}$  - Energia do erro entre o sinal de saída e de entrada de um sistema  
 $\gamma$  - Parte imaginária de uma singularidade no plano  $s$   
 $\theta(\omega)$  - Função Fase  
 $\theta_x(\omega)$  - Fase da transformada de Fourier do sinal  $x(t)$   
 $\theta_T(\omega)$  - Fase da resposta em frequência de um filtro qualquer  
 $\theta_{EQ}(\omega)$  - Fase da resposta em frequência de um equalizador  
 $\sigma$  - Parte real de uma singularidade no plano  $s$   
 $\tau$  - Atraso  
 $\tau_g(\omega)$  - Atraso de grupo  
 $\bar{\tau}_g$  - Valor médio do atraso de grupo  
 $\tau_p(\omega)$  - Atraso de fase  
 $\bar{\tau}_p$  - Valor médio do atraso de fase  
 $\tau_{pE}$  - Atraso de fase de uma seção equalizadora  
 $\tau_{pF}$  - Atraso de fase de um filtro a ser equalizado

$\bar{\tau}$  - Valor médio do atraso de fase resultante  
 $\omega$  - Frequência angular  
 $\omega_0$  - Distância de uma singularidade à origem  
 $\omega_p$  - Frequência limite da banda passante  
 $\omega_s$  - Frequência inferior da banda de rejeição  
 $\Delta\tau$  - Variação de um atraso  
 $\Delta\tau_p$  - Variação do atraso de fase  
 $\Delta\tau_g$  - Variação do atraso de grupo  
 $\mathfrak{R}_b$  - Ruído branco  
 $\mathfrak{R}_c$  - Ruído colorido  
 $\mathfrak{R}_e$  - Resposta de um sistema equalizado à um ruído colorido

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG. 2.1 - MODELO DE UM CANAL DE TRANSMISSÃO DE DADOS .....	6
FIG. 2.2 - TRANSMISSÃO SEM DISTORÇÃO ( $T_0 > 0$ ) .....	7
FIG. 2.3 - (a) <i>ATRASSO DE GRUPO</i> ; (b) <i>ATRASSO DE FASE</i> . FILTRO PASSA-BAIXAS DE 2ª ORDEM COM $\omega_0 = 0,5$ rad/s, .....	9
FIG. 2.4 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA EQUALIZAÇÃO DE FASE. ....	11
FIG. 2.5 - DIAGRAMAS PÓLO-ZERO DAS FUNÇÕES EQUALIZADORAS DE FASE. ....	12
FIG. 2.6 - FASE DE UM <i>PASSA-TUDO</i> . (a) $\omega_0$ CONSTANTE; (b) $Q$ CONSTANTE. ....	14
FIG. 2.7 - (a) <i>ATRASSO DE GRUPO</i> ; (b) <i>ATRASSO DE FASE</i> . SEÇÃO <i>PASSA-TUDO</i> DE 2ª ORDEM: .....	15
FIG. 2.8 - FASE PARA UM <i>PASSA-TUDO</i> DE 2ª ORDEM NORMALIZADO. ....	16
FIG. 2.9 - <i>ATRASSO DE GRUPO</i> PARA UM FILTRO <i>PASSA-TUDO</i> DE 2ª ORDEM. ....	17
FIG. 2.10 - ÁREA SOB AS CURVAS DE ATRASO EM FUNÇÃO DO FATOR $Q$ . ....	19
FIG. 2.11 - EXEMPLO DE EQUALIZAÇÃO DE UM <i>ATRASSO</i> ARBITRÁRIO .....	22
FIG. 2.12 - REPRESENTAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO BASEADA EM UM ATRASO PRÉ-DEFINIDO. ....	23
FIG. 3.1 - SUPERFÍCIE GERADA PELA FUNÇÃO $\epsilon\tau_p(x, y)$ NA EQUALIZAÇÃO DE UM FILTRO PASSA-BAIXAS. ....	37
FIG. 3.2 - CARACTERIZAÇÃO DA EQUALIZAÇÃO DO <i>ATRASSO DE FASE</i> . ....	39
FIG. 3.3 - COMPARAÇÃO DA FASE E DO <i>ATRASSO DE GRUPO</i> PARA UM FILTRO <i>PASSA-TUDO</i> DE 2ª ORDEM. ....	41
FIG. 3.4 - RESPOSTA AO IMPULSO IDEALMENTE SIMÉTRICA. ....	43
FIG. 3.5- COMPORTAMENTO ESPACIAL DA FUNÇÃO ERRO DE SIMETRIA. ....	44
FIG. 3.6- CONTORNOS DA SUPERFÍCIE DA FUNÇÃO ERRO DE SIMETRIA. ....	45
FIG. 3.7- REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA GERAÇÃO DO “RÚIDO COLORIDO”. ....	46
FIG. 3.8- GERAÇÃO DO “RÚIDO COLORIDO” .....	47
FIG. 3.9 - DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA DO RÚIDO LIMITANDO EM BANDA. ....	48
FIG. 3.10 - CONTORNOS DA SUPERFÍCIE GERADA PELA FUNÇÃO ERRO COLORIDO. ....	49
FIG. 3.11 - DETALHES DOS CONTORNOS SECUNDÁRIOS DA FUNÇÃO ERRO COLORIDO. ....	50
FIG. 4.1 - CARACTERÍSTICAS DO SINAL DE EXCITAÇÃO .....	56
FIG. 4.2 - FILTROS BUTTERWORTH SEM EQUALIZAÇÃO: (a) <i>ATRASSO DE FASE</i> , (b) <i>ATRASSO DE GRUPO</i> . ....	57
FIG. 4.3 - RESPOSTA AO IMPULSO PARA OS FILTROS BUTTERWORTH SEM EQUALIZAÇÃO. ....	58
FIG. 4.4 - FILTROS CHEBYSHEV SEM EQUALIZAÇÃO: (a) <i>ATRASSO DE FASE</i> , (b) <i>ATRASSO DE GRUPO</i> . ....	59
FIG. 4.5 - RESPOSTA AO IMPULSO PARA OS FILTROS CHEBYSHEV SEM EQUALIZAÇÃO .....	60
FIG. 4.6 - FILTROS ELÍPTICOS SEM EQUALIZAÇÃO: (a) <i>ATRASSO DE FASE</i> , (b) <i>ATRASSO DE GRUPO</i> .....	61
FIG. 4.7- RESPOSTA AO IMPULSO PARA OS FILTROS ELÍPTICO SEM EQUALIZAÇÃO .....	61
FIG. 4.8 - FILTRO BUTTERWORTH 4ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_p$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ (b) MÍNIMO $\epsilon h$ E $\epsilon\mathcal{R}$ . ....	63
FIG. 4.9 - FILTRO BUTTERWORTH 4ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_g$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ , (b) MÍNIMO $\epsilon h$ E (c) MÍNIMO $\epsilon\mathcal{R}$ . ....	63

FIG. 4.10 - FILTRO BUTTERWORTH 8ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_p$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ . E (b) MÍNIMO $\epsilon h$ E $\epsilon\mathfrak{R}$ .....	64
FIG. 4.11 - FILTRO BUTTERWORTH 8ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_g$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ E $\epsilon h$ , (b) MÍNIMO $\epsilon\mathfrak{R}$ .....	65
FIG. 4.12 - FILTRO BUTTERWORTH 10ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_p$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ E (b) MÍNIMO $\epsilon h$ E $\epsilon\mathfrak{R}$ .....	66
FIG. 4.13 - FILTRO BUTTERWORTH 10ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_g$ .....	66
FIG. 4.14 - FILTRO CHEBYSHEV 4ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_p$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ , (b) MÍNIMO $\epsilon h$ E $\epsilon\mathfrak{R}$ .....	67
FIG. 4.15 - FILTRO CHEBYSHEV 4ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_g$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ , (b) MÍNIMO $\epsilon h$ E (c) MÍNIMO $\epsilon\mathfrak{R}$ .....	68
FIG. 4.16 - FILTRO CHEBYSHEV 8ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_p$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ E $\epsilon h$ (b) MÍNIMO $\epsilon\mathfrak{R}$ .....	69
FIG. 4.17 - FILTRO CHEBYSHEV 8ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_g$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ E $\epsilon\mathfrak{R}$ (b) MÍNIMO $\epsilon h$ .....	69
FIG. 4.18 - FILTRO CHEBYSHEV 10ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_p$ .....	70
FIG. 4.19 - FILTRO CHEBYSHEV 10ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_g$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ , (b) MÍNIMOS $\epsilon h$ E $\epsilon\mathfrak{R}$ .....	71
FIG. 4.20 - FILTRO ELÍPTICO 4ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_p$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ , (b) MÍNIMO $\epsilon h$ E (c) MÍNIMO $\epsilon\mathfrak{R}$ .....	72
FIG. 4.21 - FILTRO ELÍPTICO 4ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_g$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ , (b) MÍNIMOS $\epsilon h$ E $\epsilon\mathfrak{R}$ .....	72
FIG. 4.22 - FILTRO ELÍPTICO 8ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_p$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ , (b) MÍNIMOS $\epsilon h$ E $\epsilon\mathfrak{R}$ .....	73
FIG. 4.23 - FILTRO ELÍPTICO 8ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_g$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ , (b) MÍNIMOS $\epsilon h$ E $\epsilon\mathfrak{R}$ .....	74
FIG. 4.24 - FILTRO ELÍPTICO 10ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_p$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ , (b) MÍNIMO $\epsilon h$ E (c) MÍNIMO $\epsilon\mathfrak{R}$ .....	75
FIG. 4.25 - FILTRO ELÍPTICO 10ª ORDEM EQUALIZADO VIA $E\tau_g$ . (a) MÍNIMO $\epsilon\tau_p$ , (b) MÍNIMOS $\epsilon h$ E $\epsilon\mathfrak{R}$ .....	75
FIG. 4.26 - COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES <i>ATRASSO DE GRUPO</i> E <i>ATRASSO DE FASE</i> PARA O FILTRO LP9.....	78
FIG. 4.27 - RESPOSTA AO IMPULSO PARA O FILTRO LP9 SEM EQUALIZAÇÃO.....	78
FIG. 4.28 - CARACTERÍSTICA TEMPORAL DO SINAL DE EXCITAÇÃO $x(t)$ .....	79
FIG. 4.29 - ESPECTRO DO PSEUDO-RUÍDO BRANCO E DO SINAL $x(t)$ .....	79
FIG. 4.30- DISTORÇÃO DE FASE PROVOCADA PELO FILTRO LP9 AO SINAL $x(t)$ .....	80
FIG. 4.31- <i>ATRASSO DE GRUPO</i> E <i>ATRASSO DE FASE</i> PARA O FILTRO LP9 COM EQUALIZAÇÃO PELO <i>ATRASSO DE GRUPO</i> .....	82
FIG. 4.32 - <i>ATRASSO DE GRUPO</i> E <i>ATRASSO DE FASE</i> PARA O FILTRO LP9 COM EQUALIZAÇÃO PELO <i>ATRASSO DE FASE</i> .....	82
FIG. 4.33 - CARACTERÍSTICA DOS SINAIS $x(t)$ E $y(t)$ PARA O FILTRO LP9 EQUALIZADO ATRAVÉS DO <i>ATRASSO DE GRUPO</i> . 83	
FIG. 4.34 - CARACTERÍSTICA DOS SINAIS $x(t)$ E $y(t)$ PARA O FILTRO LP9 EQUALIZADO ATRAVÉS DO <i>ATRASSO DE FASE</i> . ... 84	
FIG. 4.35 - RESPOSTA AO IMPULSO PARA O FILTRO LP9 EQUALIZADO ATRAVÉS DO <i>ATRASSO DE GRUPO</i> .....	85
FIG. 4.36 - RESPOSTA AO IMPULSO PARA O FILTRO LP9 EQUALIZADO ATRAVÉS DO <i>ATRASSO DE FASE</i> .....	85

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - COMPARAÇÃO DA ÁREA SOB A CURVA DO ATRASO DE GRUPO.....	42
TABELA 2 - COMPARAÇÃO DOS ERROS OBTIDOS NAS FIGURAS DE MÉRITO DA FASE .....	51
TABELA 3 - CARACTERÍSTICAS DOS FILTROS PASSA-BAIXAS. ....	54
TABELA 4 - ESPECIFICAÇÃO DA DISPERSÃO ADMISSÍVEL PARA AS FUNÇÕES <i>ATRASO DE GRUPO</i> E <i>ATRASO DE FASE</i> .....	55
TABELA 5 - FIGURAS DE MÉRITO PARA OS FILTROS BUTTERWORTH SEM EQUALIZAÇÃO.....	58
TABELA 6 - FIGURAS DE MÉRITO PARA OS FILTROS CHEBYSHEV SEM EQUALIZAÇÃO. ....	59
TABELA 7 - FIGURAS DE MÉRITO PARA OS FILTROS ELÍPTICOS SEM EQUALIZAÇÃO. ....	60
TABELA 8 - RESULTADO DA EQUALIZAÇÃO PARA O FILTRO BUTTERWORTH DE 4ª ORDEM.....	62
TABELA 9 - RESULTADO DA EQUALIZAÇÃO PARA O FILTRO BUTTERWORTH DE 8ª ORDEM.....	64
TABELA 10 - RESULTADO DA EQUALIZAÇÃO PARA O FILTRO BUTTERWORTH DE 10ª ORDEM.....	65
TABELA 11 - RESULTADO DA EQUALIZAÇÃO PARA O FILTRO CHEBYSHEV DE 4ª ORDEM. ....	67
TABELA 12 - RESULTADO DA EQUALIZAÇÃO PARA O FILTRO CHEBYSHEV DE 8ª ORDEM. ....	68
TABELA 13 - RESULTADO DA EQUALIZAÇÃO PARA O FILTRO CHEBYSHEV DE 10ª ORDEM.....	70
TABELA 14 - RESULTADO DA EQUALIZAÇÃO PARA O FILTRO ELÍPTICO DE 4ª ORDEM. ....	71
TABELA 15 - RESULTADO DA EQUALIZAÇÃO PARA O FILTRO ELÍPTICO DE 8ª ORDEM. ....	73
TABELA 16 - RESULTADO DA EQUALIZAÇÃO PARA O FILTRO ELÍPTICO DE 10ª ORDEM. ....	74
TABELA 17 - CARACTERÍSTICAS NUMÉRICAS DO FILTRO LP9. ....	80
TABELA 18 - RESULTADOS DA EQUALIZAÇÃO DO FILTRO LP9 ATRAVÉS DO <i>ATRASO DE GRUPO</i> . ....	81
TABELA 19 - RESULTADO DA EQUALIZAÇÃO DO FILTRO LP9 ATRAVÉS DO <i>ATRASO DE FASE</i> . ....	81
TABELA A1- FILTROS BUTTERWORTH EQUALIZADOS PELO <i>ATRASO DE GRUPO</i> . ....	89
TABELA A2 - FILTROS BUTTERWORTH EQUALIZADOS PELO <i>ATRASO DE FASE</i> . ....	90
TABELA A3 - FILTROS CHEBYSHEV EQUALIZADOS PELO <i>ATRASO DE GRUPO</i> . ....	90
TABELA A4 - FILTROS CHEBYSHEV EQUALIZADOS PELO <i>ATRASO DE FASE</i> . ....	91
TABELA A5 - FILTROS ELÍPTICOS EQUALIZADOS PELO <i>ATRASO DE GRUPO</i> . ....	91
TABELA A6 - FILTROS ELÍPTICOS EQUALIZADOS PELO <i>ATRASO DE FASE</i> . ....	92
TABELA B1 - COEFICIENTES DO FILTRO EQUALIZADOR PARA O FILTRO LP1 .....	93
TABELA B2 - COEFICIENTES DO FILTRO EQUALIZADOR PARA O FILTRO LP2 .....	94
TABELA B3 - COEFICIENTES DO FILTRO EQUALIZADOR PARA O FILTRO LP3 .....	94
TABELA B4 - COEFICIENTES DO FILTRO EQUALIZADOR PARA O FILTRO LP4 .....	95
TABELA B5 - COEFICIENTES DO FILTRO EQUALIZADOR PARA O FILTRO LP5 .....	95
TABELA B6 - COEFICIENTES DO FILTRO EQUALIZADOR PARA O FILTRO LP6 .....	96

TABELA B7 - COEFICIENTES DO FILTRO EQUALIZADOR PARA O FILTRO LP7 .....	96
TABELA B8 - COEFICIENTES DO FILTRO EQUALIZADOR PARA O FILTRO LP8 .....	97
TABELA B9 - COEFICIENTES DO FILTRO EQUALIZADOR PARA O FILTRO LP9 .....	98

# EQUALIZAÇÃO DE FASE

## BASEADA NO ATRASO DE FASE

### RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma metodologia para a determinação de funções de transferência equalizadoras de fase, utilizando o *atraso de fase* ao invés do *atraso de grupo* normalmente utilizado. A principal vantagem deste procedimento é a ausência de distorção por interceptação de fase em todos os casos. Em adição, é apresentado um novo conceito na determinação do tempo de propagação, cuja vantagem é propiciar uma redução do número de seções equalizadoras. Conjuntamente é apresentado e discutido do uso de duas figuras de mérito para avaliar os processos de equalização. Este estudo será aplicado na correção das distorções de fase provocada pela ação de filtros seletores passa-baixas.

Palavras-chave:

- Equalizadores de fase
- Filtros de fase linear
- Equalização do *atraso de grupo*
- Equalização do *atraso de fase*
- Distorção por interceptação de fase

# **PHASE EQUALIZATION**

## **BASED ON PHASE DELAY FEATURE**

### **ABSTRACT**

This work presents a method on phase equalizer function determination using the phase delay instead of group delay. The main advantage of this procedure relies on the absence of phase-intercept distortion presents in every case. In addition, another way of determining the total time delay is shown and two merit figures to assess equalization process are used. This study is applied to correction of low-pass filters phase distortion.

**Key words:**

- Phase Equalizers
- Liner Phase Filters
- Group Delay Equalization
- Phase Delay Equalization
- Phase-intercept distortion

A correção das distorções causadas pela não linearidade da fase, em filtros projetados apenas para atender requisitos de magnitude, não apresenta uma forma explícita de solução. Em aplicações onde a linearidade da fase é imprescindível, o uso de filtros *equalizadores de fase* [1-3] é uma solução “aproximada” possível e a determinação das funções de transferência destes filtros, normalmente, é baseada em técnicas de otimização.

Em sistemas físicos a fase é uma função transcendental (*arco-tangente*), portanto mais difícil de avaliar e manipular analiticamente. Na literatura corrente tem sido apresentada diversas técnicas de equalização nas quais são usadas aproximações da função fase [4-7] para obter funções de transferências de fase linear ou a funções transformadas da função fase [8-15], de forma a obter uma solução analítica com menor grau de complexidade.

Neste ponto é conveniente fazer uma indagação a respeito de qual medida é mais adequada para equalizar a fase: a *fase* propriamente dita, o *atraso de grupo*, o *atraso de fase* ou uma outra medida? Primeiramente vamos analisar o uso da própria função fase. Entre as infinitas curvas de fase aproximadamente linear que poderiam ser obtidas por intermédio da equalização, qual deveria ser escolhida? Um critério razoável seria escolher a de menor inclinação. Porém este procedimento leva-nos à outra medida, uma vez que a inclinação da curva é o atraso de tempo associado ao sinal. Ainda cogitando em escolher uma das “retas” de equalização, quais seriam os



limites de variação que poderiam ser especificados, se os verdadeiros responsáveis pela distorção do sinal são os diferentes atrasos no tempo das componentes do sinal?

Muitas técnicas de determinação das funções equalizadoras de fase fazem uso do *atraso de grupo* no processo de otimização [8-15]. Um dos argumentos utilizado para justificar o uso desta função é que esta é uma função real e racional da frequência. Esta condição é adequada quando são usados algoritmos que utilizam derivadas parciais da função objetivo para determinar a direção da pesquisa do ponto ótimo.

Outra justificativa é a necessidade de utilizar funções com reduzida complexidade matemática de forma que, em uma etapa posterior, seja reduzido o custo computacional. No entanto essa justificativa torna-se irrelevante se forem utilizados outros métodos de otimização, como por exemplo o método *curve matching* [16], onde o processo é baseado simplesmente sobre os valores numéricos da função ou sobre um conjunto de dados numéricos coletados.

Alguns autores justificam ainda a utilização do *atraso de grupo* ao invés do *atraso de fase* ou da *fase* para corrigir distorções introduzidas por esta última, tomando por base sistemas de modulação AM e FM [1]. Onde, nestes casos, se a fase for linear apenas na banda do sinal modulado (não passando pela origem), o *atraso de grupo* será constante nesta banda e após a desmodulação, o sinal modulante não sofrerá distorção, somente será atrasado.

No entanto, para o caso geral, se a fase for linear em uma determinada banda de frequências, o *atraso de grupo* será constante nesta banda. Porém a princípio, isto não é uma garantia para que não se tenha distorção de fase, pois se o *atraso de fase* não for constante na referida banda, sinais de frequências diferentes sofrerão atrasos diferentes. Assim, se a fase não

passa pela origem ou por um múltiplo de  $\pi$  radianos em  $\omega = 0$ , tem-se a chamada *distorção por interceptação de fase* [1].

Em sistemas nos quais a fase é linear, o *atraso de grupo* e o *atraso de fase* são numericamente iguais e igual ao tempo de atraso provocado pelo sistema. De outra forma, em sistemas nos quais a fase não é linear, o conceito de medida de atraso fica sem sentido, pois o sinal de saída não é uma réplica atrasada do sinal de entrada. Nestes casos o atraso provocado pelo sistema pode ser estimado por diferentes critérios de medidas [1].

Neste trabalho é introduzida a função *atraso de fase*, como função desejada no processo de otimização e é feito um estudo comparativo com os métodos baseados no *atraso de grupo*. Além disso, é proposto um novo método para a determinação do tempo total de propagação a ser adotado, sobre o qual é definida a função objetivo dentro do processo de otimização.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2 é feita uma revisão conceitual do atraso provocado em sistemas lineares, procurando-se identificar algumas particularidades das medidas utilizadas. É também realizada uma breve revisão das metodologias utilizadas na equalização de fase que utilizam o *atraso de grupo* como função desejada no processo de síntese das funções equalizadoras.

No Capítulo 3 é apresentada a metodologia de determinação das funções equalizadoras de fase, onde o algoritmo de otimização é baseado nas características da função *atraso de fase*. É proposto um novo conceito de obtenção do tempo total de propagação, com vistas a minimizar o número de seções do equalizador. É também realizado um estudo sobre a utilização de figuras de mérito com vistas a avaliar as características das funções equalizadoras.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados comparativos das técnicas de equalização de fase aplicados à correção dos atrasos em filtros passa-baixas. Uma discussão sobre os resultados obtidos com ambas as técnicas de equalização, assim como, sobre a utilização de diferentes figuras de mérito são também realizadas.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## **2.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo é apresentada uma revisão dos principais conceitos relativos às funções *atraso de grupo* e *atraso de fase*, procurando-se identificar as características destas duas grandezas que permitem avaliar o tempo de propagação de um sinal através de uma rede e a distorção provocada pela mesma. É apresentada também uma breve revisão das técnicas usuais de equalização de fase.

## **2.2 A IMPORTÂNCIA DA FASE NO PROCESSAMENTO DE SINAIS**

Observações importantes sobre a característica de fase dos sinais têm sido feitas em diferentes contextos e aplicações. Em alguns casos, certas características importantes dos sinais somente são preservadas se as características originais da fase são mantidas. Em aplicações de processamento de imagens, por exemplo, tem sido mostrado que algumas das informações mais importantes nas imagens, para a percepção pelo sistema visual humano, estão contidas nas bordas e regiões de alto contraste. Estas informações estão contidas na característica de fase da Transformada de Fourier bi-dimensional [17,18]. Portanto, uma operação de filtragem que resulte em uma não linearidade da fase na banda passante do sinal, implicará em degradação da imagem.

Outro exemplo da importância da linearidade da fase pode ser verificada nos sistemas de transmissão de dados digitais, onde as informações são transmitidas através de pulsos. Os filtros seletores, que introduzem distorções não lineares da fase, podem dificultar a interpretação dos níveis lógicos no processo de desmodulação do sinal na recepção.

Em um sistema qualquer a distorção sofrida por um sinal ao percorrer tal sistema pode ser caracterizada pela magnitude e pela fase de sua função de transferência. Quando estamos interessados apenas no atraso provocado pelo sistema devemos considerar apenas distorções provocadas pelas variações não lineares da fase.

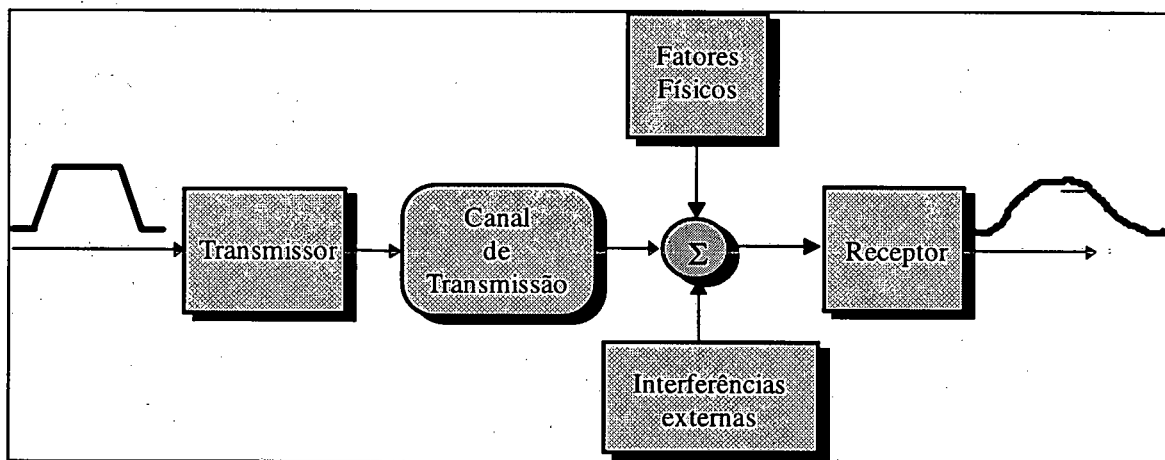


Fig. 2.1 - Modelo de um canal de transmissão de dados

A distorção de fase não está vinculada à presença de um filtro seletor propriamente dito. Consideremos, por exemplo, um sistema de transmissão digital entre duas estações geograficamente afastadas e interligadas através de um canal de transmissão (Fig. 2.1). O meio de transmissão, que pode ser, por exemplo, um cabo coaxial, um par trançado ou ainda um enlace de transmissão via rádio, pode sofrer a influência de fatores externos como campos magnéticos,

campos elétricos, temperatura, etc.. Assim estes fatores físicos, sob certas condições, podem vir a comprometer a integridade dos dados quando estes passam pelo canal de transmissão [19].

### 2.3 ATRASO EM SISTEMAS LINEARES

Quando um sinal é aplicado a um sistema linear, invariante no tempo, a resposta não é imediatamente observável em sua saída, mas em um instante de tempo posterior. Em alguns casos, torna-se necessário avaliar o atraso provocado pelo sistema como também seu comportamento com a frequência.

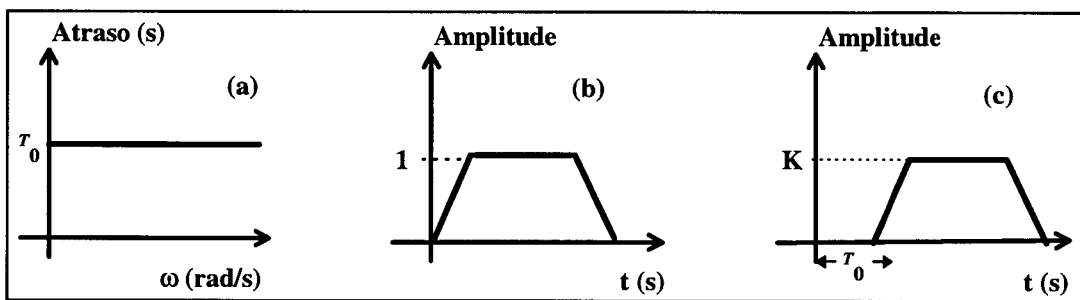


Fig. 2.2 - Transmissão sem distorção ( $T_0 > 0$ )

Para ilustrar, vamos supor um sistema que apresente uma característica ideal de atraso constante  $T_0$  para toda a banda de frequências (Fig. 2.2(a)). Um pulso (Fig. 2.2(b)) passando por este sistema não apresentará distorções mas será atrasado de  $T_0$  segundos (Fig. 2.2(c)).

Matematicamente a situação ideal, mencionada acima, pode ser descrita por:

$$v_o(t) = K v_i(t - T_0), \quad (2.3-1)$$

cuja transformada de Laplace é:

$$V_o(s) = K V_i(s) e^{-sT_0} \quad (2.3-2)$$

A razão entre a transformada de Laplace da resposta e a transformada de Laplace da excitação, com as condições iniciais nulas, define a função de transferência,

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = K e^{-sT_0} \quad (2.3-3)$$

Fazendo  $s = j\omega$ ,

$$H(j\omega) = K e^{-j\omega T_0} \quad (2.3-4)$$

A partir da equação acima podemos obter as expressões para magnitude e fase da forma:

$$|H(j\omega)| = K \quad (2.3-5)$$

$$\theta(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\omega T_0 \quad (2.3-6)$$

Como pode ser observado, a função idealizada apresenta uma amplitude constante e a fase é uma função linear da frequência. Observe que o tempo de propagação  $T_0$  proporcionado pelo sistema, pode ser obtido por dois modos: primeiro, pela diferenciação da função fase  $\theta(\omega)$  em relação a  $\omega$  e segundo, simplesmente pela razão entre a fase  $\theta(\omega)$  e a frequência  $\omega$ . Assim, definem-se duas grandezas com dimensão de tempo, relacionadas com o atraso da resposta de um sistema, que são: o *atraso de grupo* e o *atraso de fase*, definidos pelas seguintes relações:

$$\text{atraso de grupo: } \tau_g(\omega) \stackrel{\Delta}{=} \frac{-d}{d\omega}(\theta(\omega)) \quad (2.3-7)$$

$$\text{atraso de fase: } \tau_p(\omega) \triangleq \frac{-\theta(\omega)}{\omega} \quad (2.3-8)$$

As funções definidas pelas equações (2.3-7) e (2.3-8) estão relacionadas com o atraso da resposta de um sistema linear a uma dada excitação, e também, com a distorção de fase introduzida no sinal. Estas expressões são utilizadas como medidas da característica de fase  $\theta(\omega)$  de um sistema linear.

De uma forma geral, para uma grande parte dos sistemas físicos o atraso provocado não é constante, uma vez que a fase de sistemas físicos é uma função *arco tangente* que proporciona atrasos variáveis com a frequência.

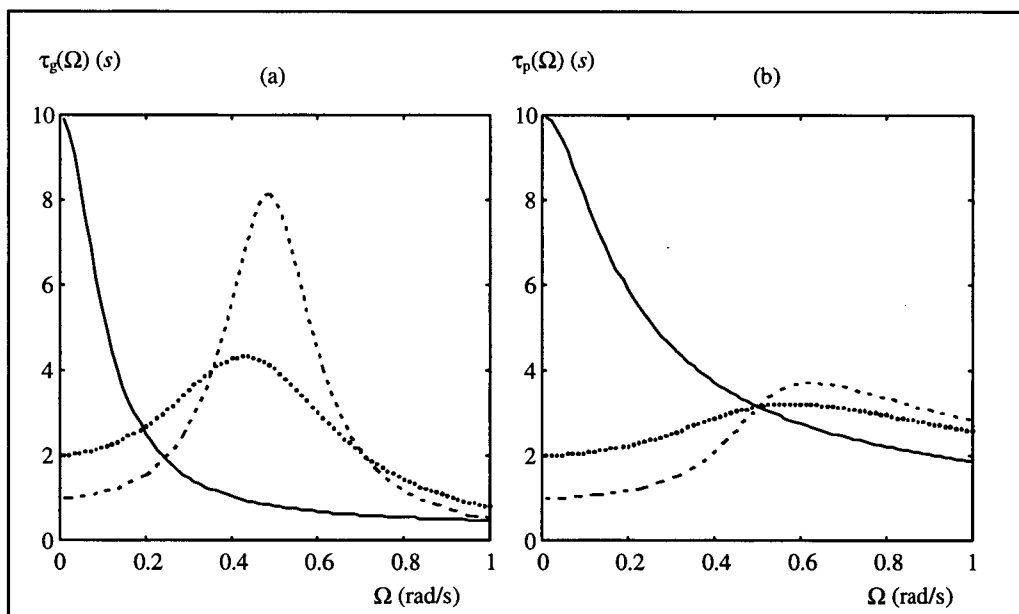


Fig. 2.3 - (a) *Atraso de grupo*; (b) *Atraso de fase*. Filtro passa-baixas de 2ª ordem com  $\omega_0 = 0,5$  rad/s,

(—)  $Q = 0,2$ , (.....)  $Q = 1$  e (- · - ·)  $Q = 2$ .

A Fig. 2.3 esboça o *atraso de grupo* e o *atraso de fase* de três filtros passa-baixas de 2ª ordem, normalizados em frequência, com diferentes valores de fatores  $Q$ . Como pode ser observado neste exemplo, devido à não linearidade da fase, o *atraso de grupo* e o *atraso de fase*



apresentam valores e comportamentos completamente distintos. Uma das formas de compensar estas distorções não lineares de fase em sistemas físicos é cascatear estes sistemas com equalizadores de fase. Assim, através do ajuste dos parâmetros do equalizador, procura-se obter uma aproximação para a fase linear do sistema global.

## 2.4 EQUALIZADORES DE FASE

A determinação das funções de transferência dos equalizadores de fase é realizada através de um processo de otimização que pode admitir, a princípio, como função desejada as funções relacionadas com o atraso provocado pelo sistema: o *atraso de grupo* ( $\tau_g$ ) ou do *atraso de fase* ( $\tau_p$ ).

O propósito da seção equalizadora é introduzir atrasos variáveis de modo que o atraso total provocado ( filtro + equalizador ) seja o mais plano possível. A ação do filtro equalizador não deve alterar as características de perda do filtro original [1,3]. Portanto, uma escolha natural é por funções de transferências do tipo passa-tudo.

### 2.4.1 Funções de transferência passa-tudo

Devido às funções *passa-tudo* constituírem-se numa classe particular, dentro das funções de transferências de fase não-mínima, seu emprego tem se tornado bastante difundido para atuarem como *equalizadores de fase* [1]. Para funções de transferência passa-tudo (de fase não-mínima) as funções fase e magnitude apresentam uma certa independência. A função de transferência que representa um equalizador de ordem  $n$  é do tipo:

$$H_n(s) = \frac{H_0 D_n(-s)}{D_n(s)} \quad (2.4-1)$$

de tal forma que  $|H_n(\omega)| = |H_0|$  para qualquer  $\omega$ .

Na Fig. 2.4, como  $\theta_T$  é não linear, tem-se como objetivo fazer com que  $\theta_T + \theta_{EQ}$  seja proporcional a  $\omega$ , ou seja, fazer com que  $\theta_T + \theta_{EQ} \cong \omega T_0$ .

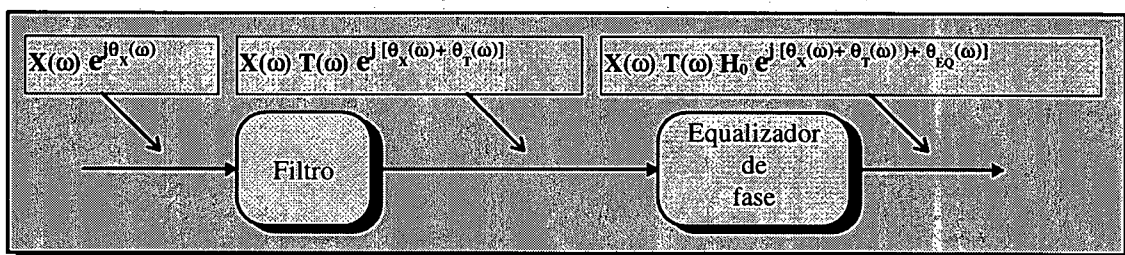


Fig. 2.4 - Representação esquemática da Equalização de fase.

### 2.4.2 Funções passa-tudo de 1ª e 2ª ordem

As funções dos equalizadores são geralmente implementadas por blocos de 2ª ordem ( $n$  par) ou ainda acrescentadas de um bloco de 1ª ordem ( $n$  ímpar). As equações (2.4-2) e (2.4-3) apresentam a forma geral das funções de 1ª e 2ª ordem para  $H_0 = 1$ . Na Fig. 2.5 são mostrados os respectivos diagramas pólo - zero, e na Fig. 2.6 é mostrada a fase para funções de 2ª ordem com variação do fator  $Q$  e da frequência do pólo  $\omega_0$ .

$$H_1(s) = \frac{-s + \sigma_0}{s + \sigma_0} \quad (2.4-2)$$

$$H_{2i}(s) = \frac{s^2 - \left(\frac{\omega_{0i}}{Q_i}\right)s + \omega_{0i}^2}{s^2 + \left(\frac{\omega_{0i}}{Q_i}\right)s + \omega_{0i}^2} \quad (2.4-3)$$

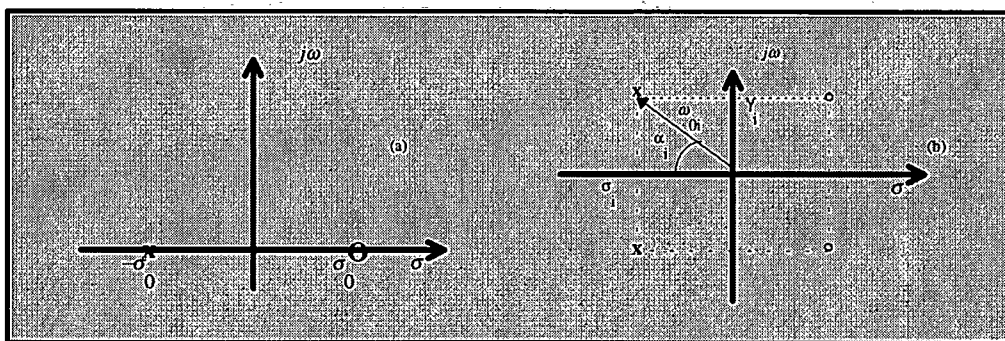


Fig. 2.5 - Diagramas pólo-zero das funções equalizadoras de fase.

(a)  $n = 1$ , (b)  $n = 2$ ,  $Q_i = 1/(2\cos \alpha_i)$

Os parâmetros  $\omega_{0i}$  e  $\alpha_i$  são determinados pelas seguintes relações:

$$\omega_{0i} = \sqrt{\sigma_i^2 + \gamma_i^2} \quad (2.4-4)$$

$$\alpha_i = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\gamma_i}{\sigma_i} \right) \quad (2.4-5)$$

Onde  $\omega_{0i}$  representa a distância de uma singularidade até a origem. A proximidade dos pólos e dos zeros em relação ao eixo  $j\omega$  é determinada pelo fator  $Q_i$ , que é expresso em função do ângulo  $\alpha_i$  mostrado na Fig. 2.5(b) da forma:

$$Q_i = \frac{1}{2 \cos \alpha_i} \quad (2.4-6)$$

### 2.4.3 Fase para uma função passa-tudo de 2ª ordem

Neste estudo apenas consideraremos seções equalizadoras compostas de filtros passa-tudo de 2ª ordem. Esta escolha dá-se principalmente pelo fato de que para a implementação de filtros ativos de 1ª ordem, empregando-se estruturas de 2ª ordem, o custo é

praticamente o mesmo.

Com base na equação (2.4-3), que define a função de transferência para um filtro passatudo de 2ª ordem e fazendo-se  $s = j\omega$ , determina-se a função fase como:

$$\theta_i(\omega) = \theta_{n_i} - \theta_{d_i} = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{\omega_{0i}\omega}{Q_i(\omega_{0i}^2 - \omega^2)}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega_{0i}\omega}{Q_i(\omega_{0i}^2 - \omega^2)}\right) \quad (2.4-7)$$

$$\theta_i(\omega) = -2 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega_{0i}\omega}{Q_i(\omega_{0i}^2 - \omega^2)}\right) \quad (2.4-8)$$

Fazendo as seguintes substituições:

$$x_i = \frac{\omega_{0i}}{Q_i} \quad (2.4-9a)$$

$$y_i = \omega_{0i}^2, \quad (2.4-9b)$$

podemos expressar a função fase como combinação destas duas variáveis, assim,

$$\theta_i(\omega) = -2 \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x_i\omega}{y_i - \omega^2}\right) \quad (2.4-10)$$

Na Fig. 2.6 é traçado o comportamento da fase a partir da equação (2.4-8). Duas situações são impostas:

- i) mantém-se  $\omega_{0i}$  igual a 1 rad/s e faz-se uma variação do fator  $Q_i$  (Fig. 2.6-a);
- ii) mantém-se o fator  $Q_i$  constante, neste caso igual a 2, e faz-se uma variação em  $\omega_{0i}$  (Fig. 2.6-b).

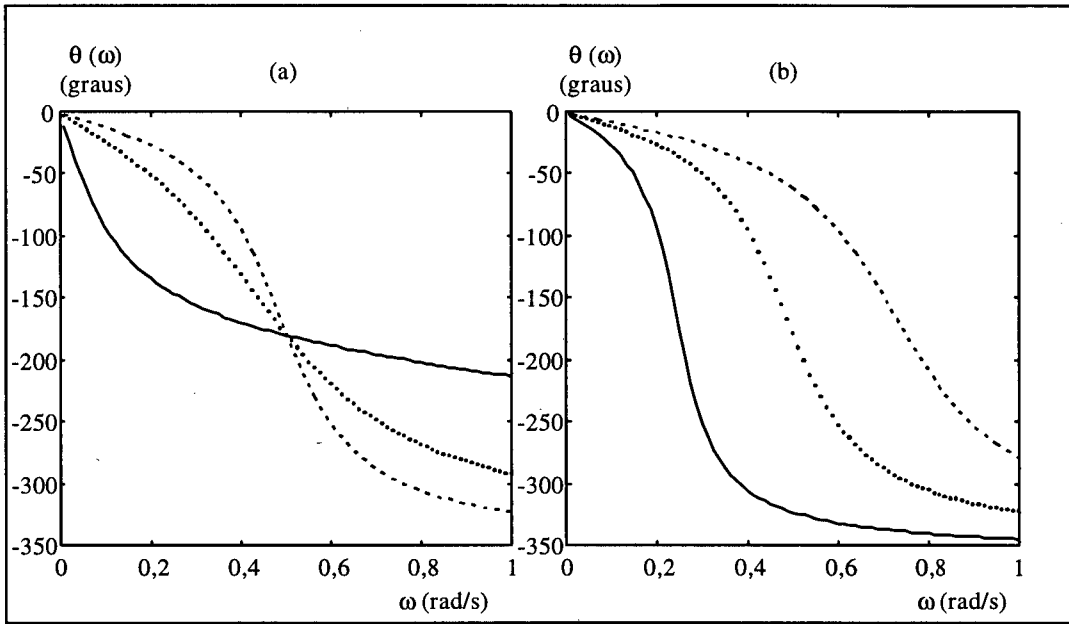


Fig. 2.6 - Fase de um *passa-tudo*. (a)  $\omega_0$  constante; (b)  $Q$  constante.

A combinação entre os parâmetros  $\omega_{0i}$  e  $Q_i$  pode ser feita independentemente de modo a obter-se as mais variadas formas de curvas de *atraso de grupo* e *atraso de fase*. Isto permite, admitindo um certo erro, equalizar o atraso dos vários tipos de funções seletoras.

Quando trabalha-se com uma frequência normalizada  $\bar{\omega} = \omega / \omega_0$ , para qualquer  $\omega_0$  tem-se:

$$\tau_g(\bar{\omega}) = \frac{-d\theta(\bar{\omega})}{\omega_0 d\bar{\omega}} \quad (2.4-11)$$

$$\tau_p(\bar{\omega}) = \frac{-\theta(\bar{\omega})}{\omega_0 \bar{\omega}} \quad (2.4-12)$$

Por isso, é comum apresentar-se (Fig. 2.7) o *atraso de grupo* e o *atraso de fase* normalizados:

$$\bar{\tau}_g(\bar{\omega}) = \omega_0 \tau_g(\bar{\omega}) = \frac{-d\theta(\bar{\omega})}{d\bar{\omega}} \quad (2.4-13)$$

$$\bar{\tau}_p(\bar{\omega}) = \omega_0 \tau_p(\bar{\omega}) = \frac{-\theta(\bar{\omega})}{\bar{\omega}} \quad (2.4-14)$$

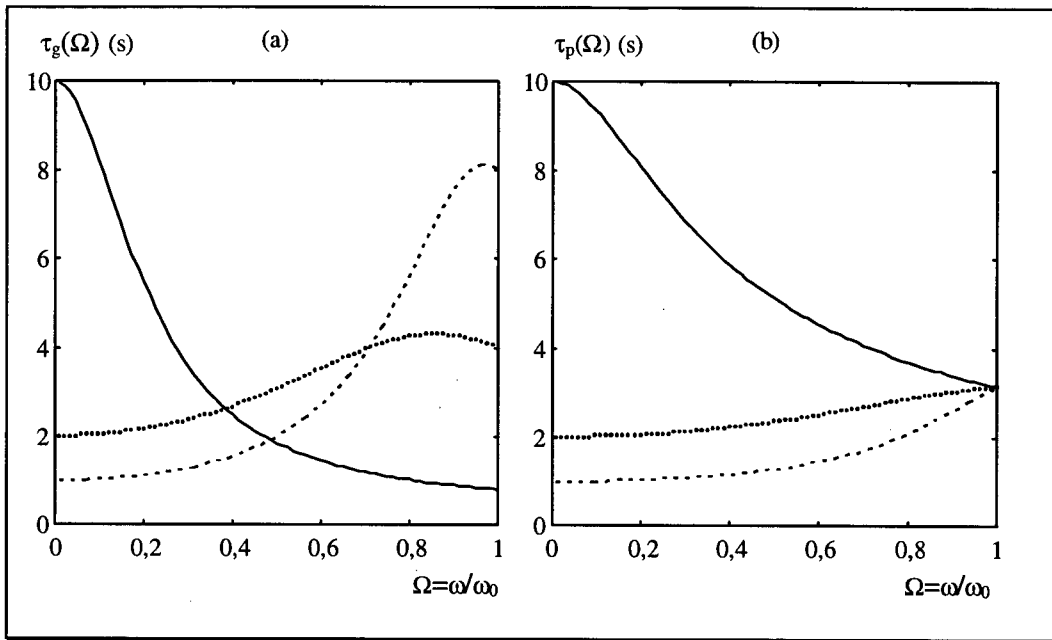


Fig. 2.7 - (a) Atraso de grupo; (b) Atraso de fase. Seção passa-tudo de 2ª ordem:  
 (—)  $Q = 0,2$ , (·····)  $Q = 1$  e (---)  $Q = 2$ .

## 2.5 CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE ATRASO

### 2.5.1 Área sob a curva da função *atraso de grupo*

A função fase  $\theta(\omega)$ , especificada em função do *atraso de grupo*  $\tau_g(x)$ , é da forma:

$$\theta(\omega) = \int_0^{\omega} \tau_g(x) dx + \theta(0), \quad (2.5-1)$$

fazendo  $\omega \rightarrow \infty$ , resulta em:

$$\theta(\infty) = \int_0^{\infty} \tau_g(x) dx + \theta(0), \quad (2.5-2)$$

isolando o termo correspondente a integral de área sob a curva de atraso temos:

$$\int_0^{\infty} \tau_g(x) dx = [\theta(\infty) - \theta(0)], \quad (2.5-3)$$

indicando que a área sob a curva da função *atraso de grupo*, correspondente a uma dada função de transferência, é constante, dependente apenas das assíntotas da fase e não sobre os valores particulares dos coeficientes da função de transferência [2].

Utilizando a equação da fase para a função passa-tudo de 2ª ordem, obtida em (2.4-7), e assumindo  $\theta(\infty) = \theta(\omega_0) = \pi$  quando  $\omega \rightarrow \omega_0$  e  $\theta(0) = 0$ , determina-se o valor numérico da equação (2.5-3).

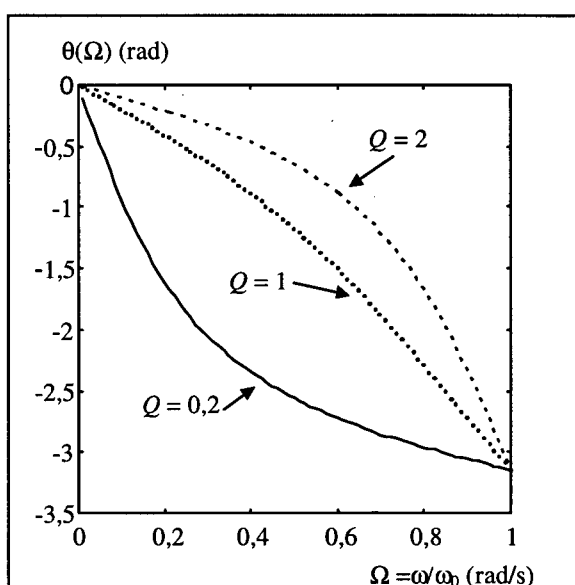


Fig. 2.8 - Fase para um *passa-tudo* de 2ª ordem normalizado.

A Fig. 2.8 apresenta o gráfico da função fase para uma seção passa-tudo de 2ª ordem, submetida à variação do fator  $Q$ . Como pode ser observado, tanto na origem quanto em  $\omega = \omega_0$  a fase apresenta os mesmos valores, mesmo quando o parâmetro  $Q$  é modificado. Conseqüentemente, a área sob a curva do *atraso de grupo* permanece constante e igual a  $\pi$ , independente do fator  $Q$  (Fig. 2.9).

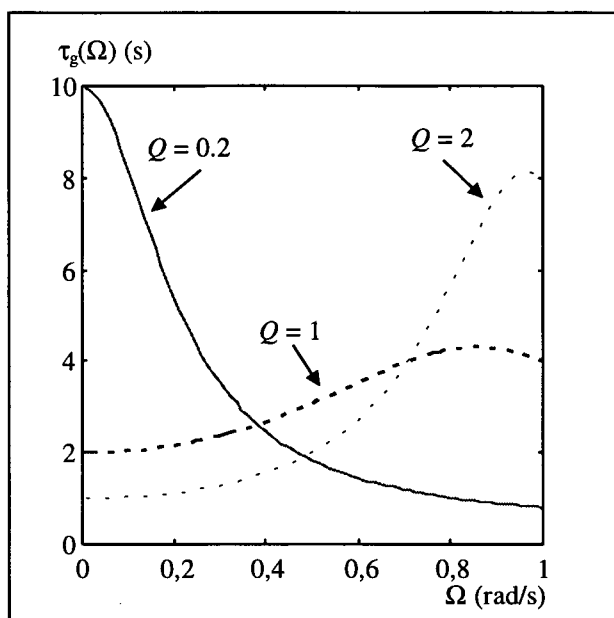


Fig. 2.9 - Atraso de grupo para um filtro passa-tudo de 2ª ordem

A implicação desta característica fica clara quando pensamos em aproximar um tempo de propagação arbitrário a partir do *atraso de grupo*, mantendo-se constante a relação  $\omega/\omega_0$ . Como o objetivo é minimizar o erro entre o atraso desejado e o atraso obtido, dentro da banda de interesse, necessita-se incluir um determinado número de seções de filtros passa-tudo ( $n$  seções de 2ª ordem). Desta forma estaremos adicionando, geometricamente, para cada seção do equalizador, uma área sob a curva do *atraso de grupo* constante e igual a  $\pi$ .

Se as especificações de dispersão do erro forem muito exigentes, a consequência é um aumento do tempo de propagação decorrente do aumento da ordem do equalizador. No seção 2.4.3 foi mostrado o comportamento da fase de uma seção passa-tudo de 2ª ordem. Como comentado, poder-se-ia afirmar a existência de infinitas combinações entre os dois parâmetros  $(\omega_0, Q)$  para realizar a função de transferência do equalizador. Com os resultados obtidos nesta seção pode-se concluir que, para a equalização baseada no *atraso de grupo* apenas um parâmetro



é determinante da área sob a curva, no caso ( $\omega_0$ ). Portanto, fica evidenciado que a forma que a curva do *atraso de grupo* assume está ligada ao parâmetro  $Q$ .

Outro ponto a ser considerado é que os procedimentos de equalização que estipulam um número mínimo de seções para aproximar um determinado tempo de propagação [5,8-12,15,24], levam em conta esta área constante, não proporcionarão a minimização do número de seções do equalizador, fator este determinante do tempo total de propagação do sistema equalizado.

### 2.5.2 Área sob a curva da função atraso de fase

Na seção 2.5.1 foi demonstrado a relação biunívoca entre a função fase e a função *atraso de grupo*:  $\theta(\omega) \leftrightarrow \tau_g(\omega)$ , e a independência da área sob a curva do *atraso de grupo* em relação aos coeficientes da função de transferência, desde que mantida constante a relação  $\omega/\omega_0$ , cabe portanto, realizar o mesmo estudo para a função *atraso de fase*.

A partir da equação (2.4-8) que representa a função fase para uma seção passa-tudo de 2ª ordem, pode-se determinar a função *atraso de fase*, definida por (2.3-8):

$$\tau_{pi}(\omega) = \frac{2}{\omega} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\omega_{oi} \omega}{Q_i (\omega_{oi}^2 - \omega^2)} \right). \quad (3.2-1)$$

Portanto, a área sob a curva do *atraso de fase* pode ser determinada por:

$$A_{\tau_p} = \int_0^{\omega_0} \tau_{pi}(\omega) d\omega \quad (3.2-2)$$

Para realizar uma comparação entre este resultado e o resultado obtido na seção anterior, pode-se obter numericamente os resultados da equação (3.2-2).

A Fig. 2.10 mostra o comportamento da área (em  $\pi$  unidades) sob a curva do *atraso de fase* e do *atraso de grupo* de uma seção *passa-tudo* de 2ª ordem normalizada. Neste exemplo comparativo faz-se uma variação do fator de qualidade  $Q$  mantendo-se  $\omega_0$  constante.

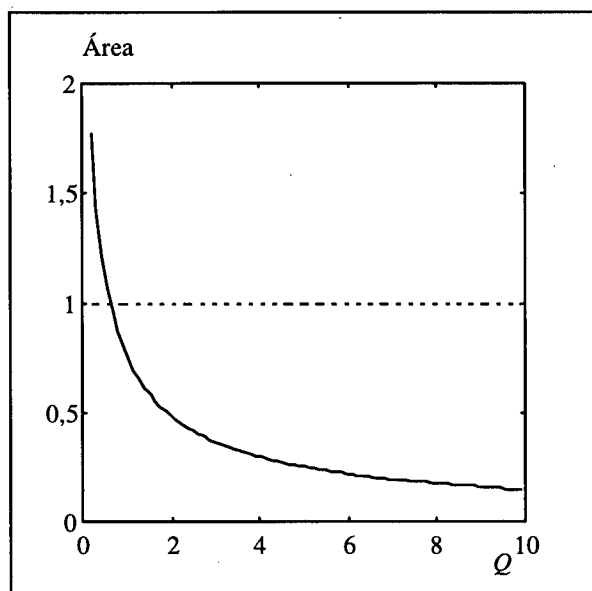


Fig. 2.10 - Área sob as curvas de atraso em função do fator  $Q$ .

(—) Área  $\tau_p$  e (----) Área  $\tau_g$ .

Pode-se verificar a dependência existente da área sob a curva do *atraso de fase* com o fator de qualidade  $Q$ . Esta característica é muito importante quando pensamos em aproximar um *tempo de propagação* arbitrário através da função *atraso de fase*. A possibilidade de obtenção de áreas variáveis sob a curva do *atraso de fase* permite que uma seção equalizadora de mesma ordem possa atender requisitos de equalização distintos, apenas atuando sobre um dos parâmetros da função de transferência.

O *atraso de fase* mostra uma característica importante quando é feita uma redução do fator  $Q$ , ou seja, tem-se um aumento da área sob a curva do *atraso de fase*. Desta forma é possível equalizar grandes áreas sob a curva de atraso total, com seções que apresentem baixo

fator  $Q$ . Esta é uma característica importante quando se pensa na implementação do filtro. Por outro lado, se a equalização for realizada utilizando o *atraso de grupo* para o mesmo problema, as seções equalizadoras apresentarão pólos de altos fatores  $Q$  [9].

## 2.6 EFEITO DA EQUALIZAÇÃO SOBRE A RESPOSTA TRANSITÓRIA

Fase não linear, a qual traduz-se em atraso não constante, aumenta os picos de sobrepassamento da resposta ao degrau e da resposta ao impulso comparados com aqueles obtidos quando a fase é linear. Assim, linearizando a fase deve-se reduzir significativamente os picos de sobrepassamento. Conseqüentemente, a resposta ao impulso deve tornar-se mais simétrica quando a fase tende a linearidade. O grau de simetria da resposta ao impulso é uma maneira segura pela qual pode-se medir a linearidade da fase de um filtro [1]. Estas considerações servem para consolidar a resposta à uma indagação sobre qual deve ser a ordem ideal para uma seção equalizadora. Poder-se-ia conjecturar que, se a ordem do equalizador tendesse ao infinito poderia eliminar-se completamente os picos de sobrepassamento da resposta transitória. Isto na verdade não ocorre, devido ao fato de que tanto a magnitude quanto a fase são responsáveis por tais picos. Assim, linearizando a fase estaríamos minimizando apenas uma parcela na composição total da resposta transitória.

## 2.7 MEDIDA DE MÉRITO DA FASE

Na seção anterior foi discutida a influência da linearidade da fase no comportamento da resposta transitória. Uma medida adotada para avaliação da linearidade da fase, quando estamos

interessados apenas na degradação do sinal provocada pelas não linearidades da fase, é a simetria da resposta ao impulso.

O resultado do processo de linearização da fase de um sistema qualquer, utilizando para tal o cascadeamento de seções passa-tudo, é sempre aproximado. Assim sendo, a característica de simetria da resposta ao impulso, após o processo de linearização da fase, também será aproximada. Portanto, a medida da energia do erro de simetria da resposta ao impulso poderá funcionar como uma figura de mérito para a avaliação da linearidade da fase.

A aplicação desta medida será utilizada neste trabalho para avaliar e comparar a qualidade das equalizações realizadas pela técnica convencional e pela técnica do *atraso de fase* que é a principal contribuição desta dissertação.

## 2.8 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE EQUALIZAÇÃO

Com o objetivo de caracterizar melhor o problema da equalização da fase faremos uma breve descrição a respeito do tratamento dado pelas principais metodologias ao problema de equalização. A fim de melhorar a interpretação mencionaremos um *atraso* não específico, arbitrário, o qual pode ser interpretado como *atraso de grupo* ou *atraso de fase*. Este estudo refere-se apenas ao problema da equalização da fase em filtros ou funções que atendam primeiramente um gabarito de magnitude pré-estabelecido. Portanto, o equalizador de ordem  $n$  a ser empregado é do tipo descrito por (2.4-1) onde  $|H_0|=1$  para toda banda de frequência de interesse.

Cumprida a etapa de síntese da função seletora deve-se obter as características de atraso desta função como mostrado na Fig. 2.11 (a).

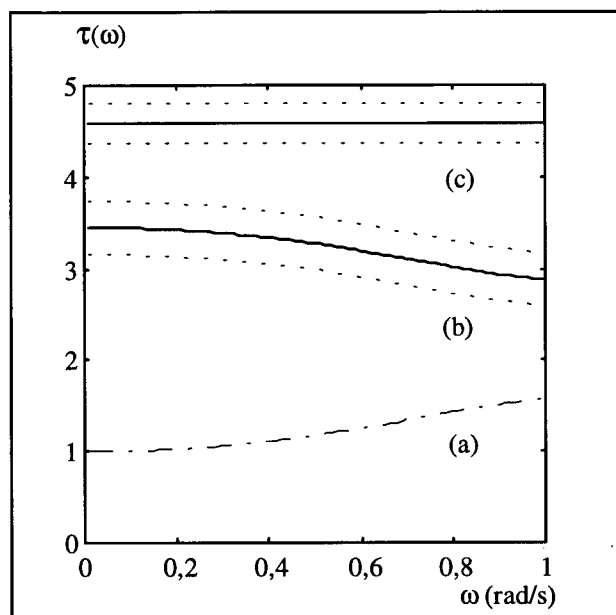


Fig. 2.11 - Exemplo de equalização de um *atraso* arbitrário

O problema passa a ser, com base nesta figura, encontrar uma característica de atraso do equalizador (Fig. 2.11 (b)), que somada à característica de atraso da função original (Fig. 2.11 (a)), resulta no comportamento global idealmente mostrado na Fig. 2.11 (c).

O processo com o qual estamos trabalhando é um processo aproximado, portanto há necessidade de especificar os limites para as variações, representados pelas linhas tracejadas na Fig. 2.11 (b) e (c).

Alguns autores [8-12,15] condicionam a determinação do atraso devido ao equalizador (Fig. 2.11 (b)), à determinação inicial do atraso representado pela Fig. 2.11 (c), sendo que esta determinação é empírica em alguns casos e heurística em outros. Este procedimento pode induzir

a um aumento do número de seções do equalizador, uma vez que, a obtenção do atraso está vinculado ao atraso individual provocado pelas seções do equalizador. Como o procedimento visa atingir o atraso pré-definido, o algoritmo de otimização pode descartar uma solução ótima do ponto de vista da dispersão do erro ( $\Delta\tau$ ), em virtude da mesma apresentar a magnitude do erro absoluto ( $\epsilon_A$ ) muito elevada. O erro absoluto é a diferença entre o valor médio do atraso obtido (filtro + equalizador) e o valor pré-definido como mostrado na Fig. 2.12 .

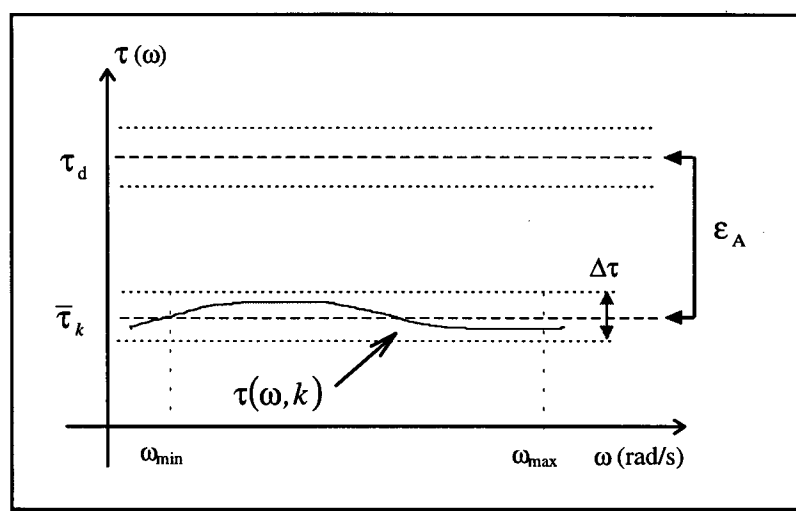


Fig. 2.12 - Representação da otimização baseada em um atraso pré-definido.

Como uma característica maximamente plana não é possível de ser obtida analiticamente, deve-se usar um procedimento iterativo para aproximar a solução desejada. A técnica de aproximação mais utilizada é denominada de “casamento de curva” (*curve matching*). A idéia básica é encontrar os valores dos coeficientes de uma determinada função, cujo comportamento deve ser “casado” com um conjunto de dados especificados que definem uma curva em função de uma variável independente.

As qualidades desta técnica foram descritas por Huelsman [16], que destaca a grande

gama de aplicabilidade e sua característica de não necessitar de uma relação explícita da função a ser otimizada, sendo apenas necessário um conjunto de valores numéricos para ser usado no algoritmo computacional.

## 2.9 TÉCNICAS USUAIS DE EQUALIZAÇÃO

Nesta seção faremos uma breve revisão das principais técnicas que utilizam-se das funções transformadas da função fase para realizar o processo de equalização.

Devido a fase ser uma função transcendental ( $tg^{-1}$ ) e portanto, mais difícil de avaliar analiticamente, diversos procedimentos foram desenvolvidos com o objetivo de aproximá-la através de funções cuja solução analítica ou numérica apresente complexidade mais reduzida.

Diversos trabalhos têm sido apresentados na literatura com a finalidade de obtenção de funções de rede, isoladas ou em cascata com funções originais, que apresentem como principal característica a linearidade da fase. A maior parte destes algoritmos são baseados nas características da função *atraso de grupo*. A seguir faremos uma breve descrição das principais técnicas de equalização da fase:

- A proposta de Fall [5] é aproximar a função fase do filtro original e as seções equalizadoras, constituídas de funções *passa-tudo*, através da série polinomial de Chebyshev. Embora o algoritmo trabalhe diretamente com a função fase é necessário determinar inicialmente um conjunto de condições ótimas que atendam um determinado *atraso de grupo* dentro de uma banda de interesse de forma que o erro relativo à função fase esteja dentro de um limite pré-estabelecido;

- Crane [8] utiliza a teoria de aproximação MINIMAX por intermédio de uma função racional da frequência, no caso o *atraso de grupo*, para aproximar o atraso desejado em seu algoritmo de equalização. Crane define uma função relativa ao atraso (*tempo de propagação*), que contempla a contribuição do *atraso de grupo* de seções *passa-tudo*, que podem ser de ordem par ou ímpar. O método é de fácil implementação computacional, mas recai sobre as características da função *atraso de grupo*;
- A determinação dos parâmetros da ou das funções de transferências da etapa equalizadora, na maioria dos casos, são feitos de maneira iterativa e, conseqüentemente, podem apresentar uma melhor ou pior convergência, dependendo das condições iniciais. Com a finalidade de gerar um conjunto de valores que se aproximem do ponto ótimo, Gregorian e Temes [9] propuseram uma técnica de síntese baseada nas características de *atraso de grupo*, aplicada tanto para filtros digitais como para filtros contínuos. A técnica consiste em estimar pólos de alto fator  $Q$  em torno de  $k$  pontos de frequência, distribuídos dentro de uma banda de interesse. O passo seguinte, consiste em perturbar estes pólos sistematicamente de forma a atender as características preestabelecidas de *atraso de grupo*. O atraso inicial, aproximado por  $N$  seções, apresenta pólos de alto fator  $Q$ , que poderão ou não, no decorrer do processo, serem alterados. Devido ao fato do algoritmo considerar o *atraso de grupo* como função para aproximar o *tempo de propagação*, os coeficientes encontrados para as funções passa-tudo, no caso de aproximar uma grande área sob a curva de atraso, conduzirão a pólos de alto fator  $Q$ . Do ponto de vista da implementação digital, um filtro de fator  $Q$  elevado, pode ser implementado, levando



em conta as particularidades do sistema digital. Do ponto de vista analógico, o fator  $Q$  de um filtro está intimamente ligado com o fator  $Q$  dos componentes que o compõe, que é imposto pelas limitações físicas dos mesmos. Esta é uma limitação que deve ser considerada quando da implementação do filtro. Outra característica relevante do algoritmo, é que a determinação do atraso, para o qual é feita a aproximação, recai sobre as propriedades de área discutidas na seção 2.5.

- Quando da utilização de filtros equalizadores, associa-se a isso a necessidade de corrigir eventuais distorções provocadas pela ação do filtro original, seja em magnitude ou fase. Quando a equalização é realizada sobre a resposta de fase, parte-se do princípio que a magnitude apresente as características desejadas para as necessidades do projetista. A proposta de Wilson e Papamichael [10] é sintetizar funções nas quais o *atraso de grupo* é aproximado para um valor nominal. O erro na aproximação é minimizado através da técnica do mínimo erro quadrático, baseado no algoritmo LMS (*Least-Mean-Square Algorithm*). Os autores fornecem um conjunto de tabelas normalizadas com os coeficientes das funções de transferência que atendem a diversas ordens e erros percentuais. Como as tabelas representam uma função global, composta de funções passa-tudo e de funções passa-baixas, o projetista, com base na ordem e no erro percentual desejado, faz a escolha dentre os coeficientes tabelados, podendo encontrar para as suas especificações uma função que não atenda os requisitos preestabelecidos de magnitude, cuja consequência é a realização de uma nova rodada de pesquisa nas tabelas para encontrar outros valores de erro e ordem;
- Sanchez [11] desenvolveu uma ferramenta para auxiliar no desenvolvimento de

projetos de filtros seletores. Uma das opções disponíveis é a aproximação de características arbitrárias de *atraso de grupo* através de seções passa-tudo. Para obter as estimativas iniciais é utilizada a técnica proposta por Temes [9] e, se necessário, para refinar o processo de busca dos coeficientes, de forma a atender um determinado gabarito, é utilizado o algoritmo RDRS (*Random Direction and Radial Search*) [22]. O inconveniente do procedimento é o fato de que o projetista deve estimar um *atraso de grupo* total de forma a acomodar o *atraso de grupo* do equalizador, que deverá ser atendido no processo de otimização;

- Hellerstein [12] desenvolveu uma técnica de síntese sistemática para aproximar uma característica arbitrária de *atraso de grupo* com um determinado erro pré-estabelecido. A técnica utiliza a série polinomial de Chebyshev para aproximar o *atraso de grupo* das funções passa-tudo. Embora haja uma preocupação em reduzir o número de seções do equalizador, fica implícita a dependência com relação às características da função *atraso de grupo* que devem ser atendidas;
- Valland [13,14] sintetiza funções com o objetivo de obter atrasos lineares. Embora estas funções não representem uma solução ideal, elas podem ser utilizadas como ponto de partida para outros algoritmos de refinamento. Como a preocupação principal é a obtenção de atrasos, as respostas de magnitude podem resultar em comportamentos inadequados, sendo necessário a inclusão de equalizadores de magnitude;
- Thiep et al. [15] apresentam uma técnica que minimiza o erro entre o *atraso de grupo* estimado e o *atraso de grupo* resultante do equalizador associado à função original.

Partindo do princípio de que a função *atraso de grupo* é uma função par e assumindo que os atrasos provocados por pólos de alto fator  $Q$  se concentram em torno das frequências dos pólos, é proposto reduzir a busca apenas à parte real relativa à posição do pólo no plano  $s$ . Isto tem como consequência uma substancial redução da complexidade computacional do processo. Como a função *atraso de fase* é uma função ímpar não pode-se adotar diretamente o mesmo procedimento de pólos igualmente espaçados.

- Filtros seletivos de fase linear podem constituir-se de um filtro projetado em magnitude cascadeado com um filtro equalizador. Alternativamente, pode ser realizado um projetado para atender a fase linear e em seguida equalizá-lo em magnitude ou ainda, buscar formas de atender simultaneamente ambos os requisitos. Rhodes [21] apresenta uma técnica numérica de síntese para projetar funções de transferência de fase não-mínima com características de fase linear e magnitude eqüiripple. A linearidade da fase é avaliada através da minimização do erro entre o *atraso de grupo* das funções sintetizadas e um atraso preestabelecido. Novamente, o *atraso de grupo* é contemplado como única forma de avaliar as distorções provocadas pelas não linearidades da fase.

## 2.10 CONCLUSÕES

Segundo Temes [9], se uma seção equalizadora de baixa ordem for utilizada para aproximar as características de *atraso de grupo* com uma grande área sob a curva de atraso,

todos os pólos irão possuir altos fatores  $Q$ . Este fato resulta no surgimento de picos agudos nas frequências centrais, dado que, pólos com altos fatores  $Q$  contribuem menos para o atraso fora destas frequências. Além do mais, o processo de convergência é rápido, porém, poderá apresentar grandes erros entre dois pontos de frequências adjacentes. Por outro lado, se a ordem da seção equalizadora é elevada, os pólos irão ter baixos fatores  $Q$  e portanto contribuir mais nas frequências adjacentes. Isto causará provavelmente um erro menor na curva, porém um processo de convergência mais lento do algoritmo de otimização.

A partir destas proposituras, das discussões da seção 2.5 e tomando por base o *atraso de fase*, podemos elencar algumas conclusões importantes a respeito da equalização de fase:

- assumindo que o comportamento global da fase (função original + equalizador) seja linear com a frequência, pode-se assumir sem perda de generalidade que este conjunto apresenta um único atraso, o qual podemos denominar de *tempo de propagação* do sinal através da rede;
- o problema de equalização passa a ser de como aproximar o *tempo de propagação*: através do *atraso de grupo* ou através do *atraso de fase*;
- a determinação arbitrária do *tempo de propagação* não permite uma otimização do número de seções do equalizador;
- a consideração de pólos com altos fatores  $Q$  em alguns algoritmos, como forma de equalizar grandes áreas sob a curva de atraso, não é uma solução adequada, do ponto de vista analógico, haja vista a sensibilidade da função de transferência global em relação a localização dos pólos;

- quando a fase é não-linear o *atraso de grupo* e o *atraso de fase* apresentam comportamentos distintos;

Com base no que foi discutido, apresentaremos a seguir a função o *atraso de fase* como um caminho alternativo para a equalização de fase. Será ainda apresentada uma nova concepção para a determinação do *tempo de propagação*, cujo objetivo é tornar o procedimento de equalização também ótimo no que diz respeito ao número de seções equalizadoras.

### **3.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo apresentaremos um procedimento de equalização no qual a função *atraso de fase* é utilizada como função objetivo. Outro aspecto abordado é a respeito do *tempo total de propagação*, que sofre influência direta do número de seções de 2ª ordem do equalizador. Sobre este tempo é realizada a minimização do erro no procedimento de equalização. Será proposto um método que proporcionará uma redução do número de filtros passa-tudo de 2ª ordem que compõe a seção equalizadora. Conjuntamente apresentaremos algumas figuras de mérito da fase, com vistas a auxiliar na determinação do “melhor conjunto de coeficientes” das funções de transferências do equalizador.

### **3.2 POR QUE UMA NOVA MEDIDA?**

Com o avanço dos algoritmos computacionais, das técnicas de otimização e com o aumento de desempenho dos processadores digitais, pode-se utilizar qualquer tipo de função ou conjunto de funções na solução de problemas de natureza não linear, como é o caso dos problemas relativos à determinação das funções equalizadoras de fase.

A literatura contempla o *atraso de grupo* com uma extensa gama de procedimentos de equalização, de forma que o mesmo tem se consolidado como medida do tempo de propagação de um sinal através de um sistema. Como mencionado na introdução deste trabalho, se a fase for linear, ambas as medidas, o *atraso de fase* e o *atraso de grupo*, apresentarão os mesmos valores e ainda, mesmo que o *atraso de grupo* seja constante em uma determinada banda de frequência de interesse, não existe garantia de que o sistema não apresente distorção, pois se o *atraso de fase* não for constante na referida banda, sinais de frequências diferentes sofrerão atrasos diferentes. Portanto, em nosso entendimento existe a necessidade de caracterizar melhor as diferenças entre estas duas medidas e mensurar as qualidades de ambos os procedimentos de equalização.

### 3.3 O ATRASO DE FASE COMO FUNÇÃO A SER OTIMIZADA

Admitindo que um equalizador seja composto de  $N$  ( $n/2$ ) seções de 2ª ordem, podemos reescrever a função de transferência descrita por (2.4-3) da forma:

$$H_E(s) = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{m_i s^2 + c_i s + d_i}{n_i s^2 + a_i s + b_i} \quad (3.3-1)$$

No procedimento proposto é necessário garantir a simetria pólo-zero, minimizar o número de coeficientes e ainda manter  $|H_E| = 1$ .

Para atender estes requisitos, podemos restringir alguns parâmetros, como:  $a_i = x_i$ ,  $c_i = -x_i$ ,  $d_i = b_i = y_i$  e  $m_i = n_i = 1$ , de forma que a equação (3.3-1) fica:

$$H_E(s) = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{s^2 - x_i s + y_i}{s^2 + x_i s + y_i} \quad (3.3-2)$$

A função *atraso de fase* do equalizador, definida em (2.3-8), pode ser agora reescrita em função destes novos parâmetros, como:

$$\tau_{pE}(\omega) = \frac{2}{\omega} \sum_{i=1}^{n/2} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{x_i \omega}{y_i - \omega^2} \right) \quad (3.3-3)$$

A restrição imposta para a equação acima, de forma a garantir que os zeros permaneçam no semi-plano lateral direito e os pólos no semi-plano lateral esquerdo, do plano  $s$ , é que os coeficientes da equação (3.3-2) sejam reais e positivos.

A equação (3.3-3) evidencia o problema de equalização, ou seja, encontrar um conjunto de coeficientes  $\{x_i, y_i\}$  que conduza a um determinado *atraso de fase* da seção equalizadora de fase, para que este somado ao *atraso de fase* do filtro original, satisfaça a condição de fase aproximadamente linear.

A busca isolada destes coeficientes não é por si só uma formulação completa do problema. Outro ponto que deve ser levado em conta é a natureza da função (*arco-tangente*). Esta função é essencialmente não linear, o que nos leva a uma formulação mais elaborada do problema de equalização. Pode-se adotar como ponto de partida os preceitos apresentados na seção 2.8, onde se faz necessário a estimação de um *tempo de propagação* a ser alcançado.

### 3.4 DETERMINAÇÃO DO TEMPO DE PROPAGAÇÃO

Nos procedimentos baseados em uma dispersão de erro pré-estabelecida, por exemplo:



*tempo de propagação*  $\pm 0,5\%$ , o algoritmo de otimização busca atender unicamente esta especificação. Durante o processo de otimização a dispersão estipulada poderia ser atendida para um outro valor menor de *tempo de propagação* e esta solução seria descartada devido à condição inicial fixada (Fig. 2.12). Com vistas a eliminar este problema e também minimizar o número de seções do equalizador vamos estabelecer um novo conceito para a determinação deste tempo, o qual poderá ser aplicado aos dois procedimentos de equalização.

### 3.4.1 Tempo de propagação médio

Blinchikoff [1] em seu estudo sobre as funções passa-tudo de 2ª ordem propõe a adoção de um atraso médio baseado nas assíntotas da fase. Como discordamos da adoção do comportamento assintótico da fase dentro do processo de otimização, principalmente devido ao fato de que estamos trabalhando com um processo dinâmico, ou seja, a cada iteração é obtido um novo conjunto de coeficientes sobre os quais não se pode, a princípio, afirmar qual é o comportamento da área sob a curva do *atraso de grupo* ou do *atraso de fase*. Com base nestas considerações, faremos uma generalização do método em questão, o qual pode ser empregado tanto na equalização do *atraso de fase* quanto do *atraso de grupo*.

Assumindo que a soma do *atraso de fase* da função original com o *atraso de fase* do equalizador de ordem  $n$  ( $N$  seções de segunda ordem), dentro de uma determinada banda de interesse ( $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$ ), define o *atraso de fase total* da  $k$ -ésima iteração, podemos escrever que:

$$\tau(\omega, k) = \tau_{pF}(\omega) + \left( \frac{2}{\omega} \sum_{i=1}^{n/2} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{x_i(k)\omega}{y_i(k) - \omega^2} \right) \right) \quad (3.4-1)$$

onde:

$\tau(\omega, k)$  - representa o *atraso de fase total* calculado na  $k$ -ésima iteração;

$\tau_{pF}(\omega)$  - representa o *atraso de fase* do filtro a ser equalizado;

$\omega$  - representa uma frequência na banda de interesse no intervalo ( $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$ );

$n$  - ordem do equalizador;

$\{x_i(k), y_i(k)\}$  - coeficientes da  $i$ -ésima seção passa-tudo na  $k$ -ésima iteração.

O comportamento do *atraso de fase* da equação (3.4-1) pode ser interpretado como sendo um valor constante sobre o qual existe uma dispersão. Este valor constante é o valor médio do *atraso de fase* da  $k$ -ésima iteração, expresso da seguinte forma:

$$\bar{\tau}_k = \frac{1}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} [\tau_{pF}(\omega) + \tau_{pE}(\omega, k)] d\omega \quad (3.4-2)$$

Como o processo de otimização, com o qual iremos trabalhar é um processo discreto onde os atrasos envolvidos estão discretizados em  $L$  amostras de frequência, a equação (3.4-2) deve ser reescrita como:

$$\bar{\tau}_k = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \tau_{pF}(\omega_i) + \tau_{pE}(\omega_i, k) \quad (3.4-3)$$

A equação (3.4-3) representa uma maneira formal de prever o *atraso de fase* resultante a cada iteração e assim, torna-se natural construir um algoritmo que minimize apenas a dispersão em torno deste valor, levando a um número mínimo de seções.

### 3.5 A FUNÇÃO CUSTO DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO

Através da equação (3.4-1) pode-se então admitir a existência de um conjunto de coeficientes  $\{x, y\}$  que minimize a função erro descrita por:

$$\varepsilon(\omega, k) = \bar{\tau}_k - (\tau_{pF}(\omega) + \tau_{pE}(\omega, k)) \quad (3.5-1)$$

Uma equalização ideal seria aquela onde o erro ou resíduo  $\varepsilon(\omega, k)$  fosse igual a zero. A minimização pura e simples deste erro apresenta o problema de cancelamento entre erros positivos e erros negativos, prejudicando o processo de otimização. Para evitar tal inconveniente utiliza-se o critério de minimização de erros quadráticos, que apresenta um tratamento matemático simples. Desta forma, o procedimento de otimização deverá determinar o conjunto de coeficientes do equalizador que minimiza a energia da função (3.5-1).

A função custo do processo de otimização será a energia do erro, na aproximação do *atraso de fase*, em um dado intervalo ( $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$ ), para  $i = 1, \dots, L$ , definida por:

$$\varepsilon \tau_p = \sum_{i=1}^L \varepsilon^2(\omega_i, k) \quad (3.5-2)$$

A Fig. 3.1 mostra o comportamento da função erro ( $\varepsilon \tau_p$ ), como resultado da equalização de uma função passa-baixas de 2ª ordem, normalizada, com  $\omega_0 = 1, Q = 0,707$  e com banda de frequência entre 0 e 1 rad/s. A equalização foi realizada com uma única seção passa-tudo de 2ª ordem.

Como pode ser visto a superfície resultante da função erro apresenta pontos de sela, que podem levar a falsos mínimos, podendo acarretar um custo computacional elevado para sua identificação.

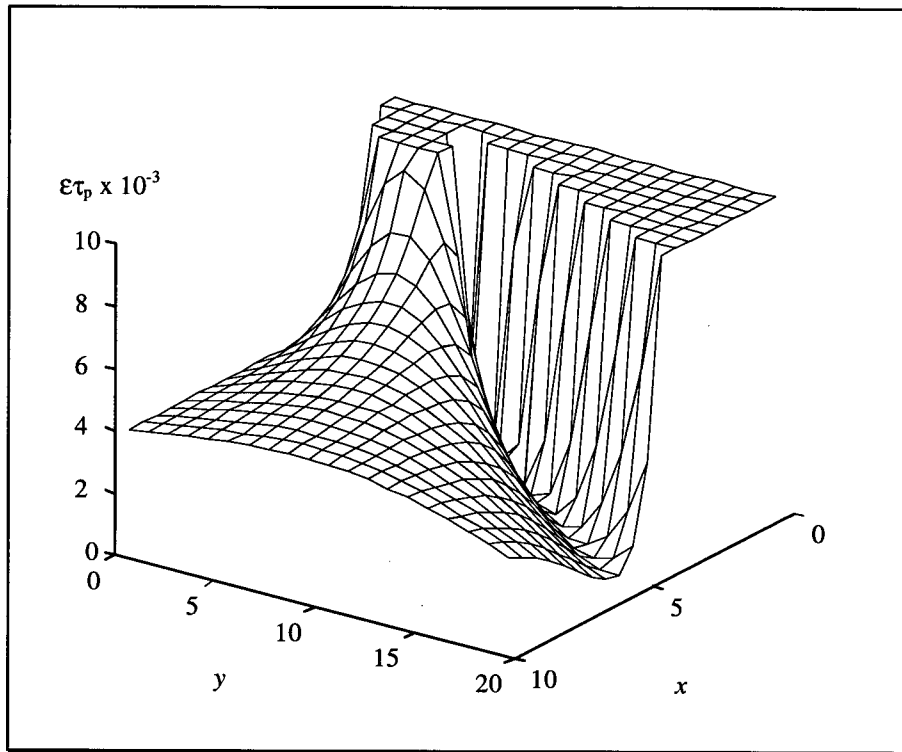


Fig. 3.1 - Superfície gerada pela função  $\varepsilon\tau_p(x,y)$  na equalização de um filtro passa-baixas.

### 3.6 DESCRIÇÃO DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO

Abaixo descrevemos as etapas do processo de otimização com vistas a obtenção dos coeficientes da função equalizadora de fase:

- i) dada uma determinada função, deve-se escolher o intervalo de frequência ( $\omega_{\min}, \omega_{\max}$ ) sobre o qual deve-se realizar a equalização de fase;
- ii) arbitra-se uma dispersão que será admitida sobre o atraso médio. Esta dispersão é determinante dos limites inferior ( $\tau_{\min}$ ) e superior ( $\tau_{\max}$ ), a fim de que sirvam como critério de parada do algoritmo. Além do mais, como as diferenças de tempos, entre

frequências distintas, são as responsáveis pelas distorções, deve-se atentar para a escolha destes limites considerando a aplicação desejada;

- iii) obtém-se um conjunto de estimativas iniciais, no caso apenas os coeficientes referentes à uma única seção;
- iv) a cada iteração obtém-se o *atraso de fase* resultante  $\tau(\omega, k)$ , o qual é a soma do *atraso de fase* da função original ( $\tau_{pF}$ ) mais o *atraso de fase* do equalizador ( $\tau_{pE}$ ), cujos coeficientes da função de transferência são os resultados obtidos do processo de otimização;
- v) como o objetivo principal é a minimização da dispersão, extrai-se o valor médio do *atraso de fase* resultante ( $\bar{\tau}_k$ ) e faz-se a geração do erro de aproximação do atraso;
- vi) o processo é repetido até que o *atraso de fase* resultante atenda a dispersão pré-estabelecida;
- vii) se não forem atendidas as especificações de dispersão e/ou se o conjunto dos erros gerados formarem um padrão, dentro da tolerância especificada, incrementa-se o número de seções e volta-se o passo iv);

A Fig. 3.2 ilustra a caracterização do processo de equalização da função *atraso de fase* em uma iteração.

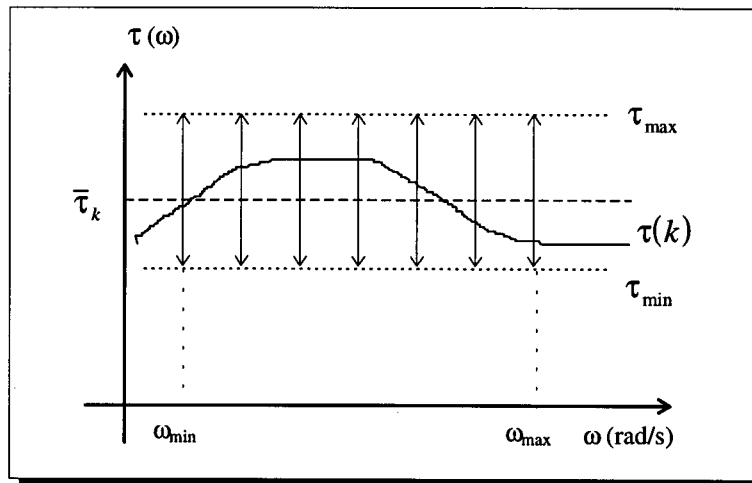


Fig. 3.2 - Caracterização da equalização do *atraso de fase*.

### 3.6.1 Estratégia de otimização

A estratégia de otimização a ser utilizada é a “*Pattern Search*” [16], onde o objetivo é determinar um padrão de discrepâncias da função objetivo devidas ao conjunto de estimativas. Um algoritmo de fácil implementação computacional desta estratégia foi desenvolvido por Nelder e Mead [24], denominado de “*flexible polyhedron search*”. O método minimiza uma função de  $u$  variáveis independentes, usando  $(u+1)$  vértices de um poliedro flexível no  $R^n$ . Cada vértice pode ser definido por um vetor  $x$ . O vértice que leva a função objetivo  $f(x)$  a apresentar o mais alto valor é projetado na direção do centróide dos vértices restantes. A minimização da função  $f(x)$  é determinado pelas sucessivas substituições dos pontos, nos quais a função  $f(x)$  apresenta os valores mais elevados.

## 3.7 DETERMINAÇÃO DO NÚMERO MÍNIMO DE SEÇÕES

Os procedimentos de equalização de fase até aqui estudados [8-12,15] tem por objetivo aproximar um *atraso de propagação* apenas baseado nas características do *atraso de grupo*.

Segundo estas referências, o atraso estipulado previamente é o principal determinante do número de seções que irão compor o equalizador.

Nos estudos de equalização que realizamos, a ordem do equalizador obtida através da função *atraso de fase* apresentou valores diferentes daqueles obtidos quando a equalização era realizada através da função *atraso de grupo*. Outro ponto que merece destaque é o fato de que a equalização realizada através da função *atraso de fase* conduz à uma minimização da função *atraso de grupo* simultaneamente o que pode não ocorrer para o caso inverso.

Estas observações mostraram que existe um conjunto de coeficientes, diferentes daqueles obtidos quando usada a função *atraso de grupo*. Frente a isto, passou-se a analisar e confrontar os algoritmos e procedimentos da literatura.

Assim, verificou-se o que segue:

- inicialmente deveria ser especificado um valor para o *atraso de grupo*, o qual deveria ser atingido;
- a especificação do número de seções do equalizador baseava-se na diferença entre o atraso estimado e o atraso do filtro original;
- a relação descrita acima baseia-se nas características da área sob a curva de *atraso de grupo*, discutida na seção 2.5;

Esta última observação nos permite questionar a validade da determinação do número de seções baseado em um atraso obtido de forma arbitrária. Se o procedimento de otimização modifica os parâmetros  $\{x, y\}$  na busca do menor erro, então a área sob a curva de atraso total

também é modificada a cada iteração. Esta variação da área sob a curva está principalmente ligada à relação existente entre a frequência limite da banda de interesse e a frequência central do filtro. No caso quando estas duas frequências são coincidentes é que pode-se afirmar que a área sob a curva da função *atraso de grupo* é independente dos valores particulares dos coeficientes da função de transferência. Porém, esta é uma consideração muito forte para que seja adotada como determinante do número de seções. A Fig. 3.3 mostra o comportamento da fase  $\theta(\omega)$  e do *atraso de grupo*  $\tau_g(\omega)$  para uma seção passa-tudo de 2ª ordem submetida a três situações que poderiam ocorrer durante o processo de otimização.

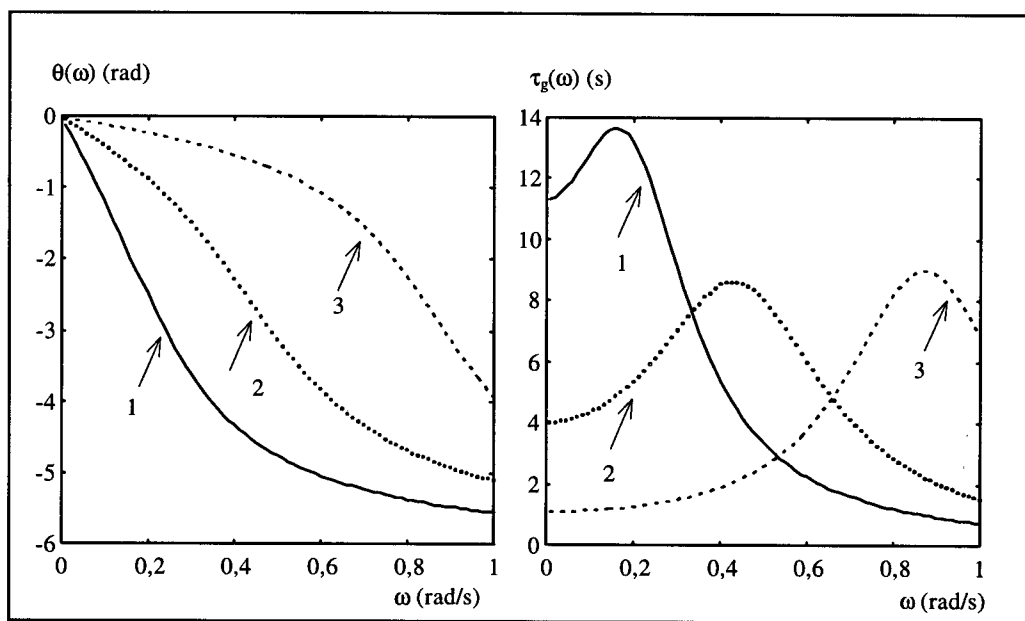


Fig. 3.3 - Comparação da fase e do *atraso de grupo* para um filtro passa-tudo de 2ª ordem.

A Tabela 1 mostra numericamente as três situações como função da área sob a curva do *atraso de grupo*.



Tabela 1 - Comparação da área sob a curva do atraso de grupo

Curva	$\omega_0$	$Q$	Área $\tau_g$
1	0,25	0,707	$\approx 5.34$
2	0,50	1	$\approx 4.98$
3	0,90	2	$\approx 3.88$

Como resultado destas observações propõe-se que:

“O algoritmo de otimização deve iniciar com um número mínimo de seções passado de 2ª ordem, no caso  $N = 1$ , e durante o processo aumentar gradativamente este número, de forma a atender as especificações da dispersão do erro em torno do valor médio do *tempo de propagação*”.

A consideração anterior pode ser aplicada tanto na equalização utilizando o *atraso de grupo* quanto o *atraso de fase* como função desejada no processo de otimização.

Fica claro também que, o número de seções passado de 2ª ordem tende a aumentar se as especificações da dispersão do erro, entre frequências adjacentes, forem muito rigorosas.

## 3.8 ESTUDO DAS FIGURAS DE MÉRITO

### 3.8.1 Erro na simetria da resposta ao impulso

A simetria da resposta ao impulso foi colocada por Blinchikoff [1] como uma maneira segura pela qual poder-se-ia avaliar a linearidade da fase.

Os procedimentos de equalização, como os tratados neste trabalho, procuram apenas minimizar a dispersão em torno do *tempo de propagação* produzido pelo filtro original

casateado com filtro equalizador, sem levar em consideração a resposta ao impulso do sistema equalizado. Estes procedimentos podem levar, a princípio, à uma resposta ao impulso cuja simetria apresenta discrepância considerável para o mesmo problema de equalização.

Outro motivo que leva-nos a utilizar a simetria da resposta ao impulso, como forma de avaliação, é o fato de poder mensurar características de filtros equalizados projetados tanto através do *atraso de grupo* como pelo *atraso de fase*.

Para definir a medida de simetria a ser utilizada, vamos considerar uma resposta ao impulso idealmente simétrica como a mostrada na Fig. 3.4.

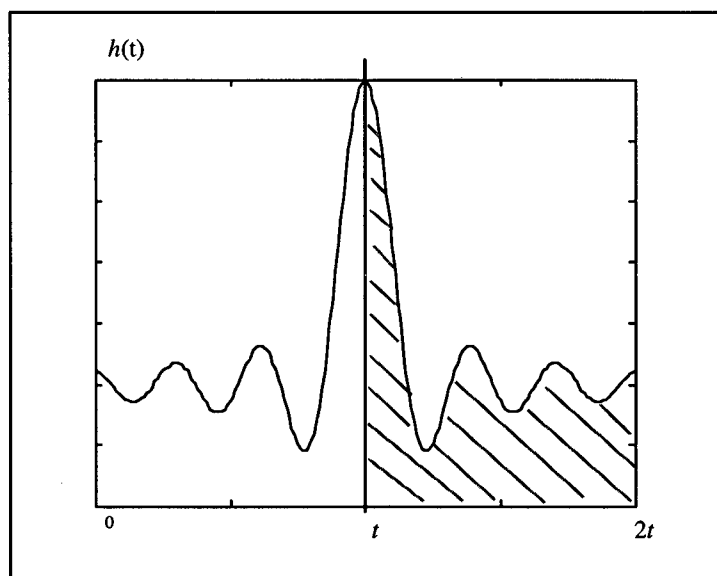


Fig. 3.4 - Resposta ao impulso idealmente simétrica.

Obtida a resposta ao impulso, pode-se admitir a existência de um instante ( $t$ ) qualquer para o qual tem-se o valor máximo da amplitude do lóbulo principal da resposta. A determinação deste instante é importante, pois é sobre ele que é estabelecido o eixo de simetria da resposta. A partir desta consideração pode-se então imaginar que a diferença entre as duas porções de área

delimitada pelo eixo de simetria e pela curva da resposta ao impulso deve ser igual a zero.

Matematicamente podemos expressar esta formulação da seguinte forma:

$$\int_0^t h(t)dt - \int_t^{2t} h(t)dt = 0 \quad (3.8-1)$$

Como esta situação ideal não é jamais obtida em um caso prático, pode-se pensar em uma função que expresse a diferença ou resíduo na medida de simetria no sentido dos mínimos quadrados.

Como o processo de otimização, com o qual iremos trabalhar é um processo discreto ( $L$  amostras distribuídas simetricamente em torno do instante ( $t$ )), a expressão que mede a energia do erro de simetria é dada por:

$$\epsilon_h = \sum_{i=1}^L [h(t+i) - h(t-i)]^2 \quad (3.8-2)$$

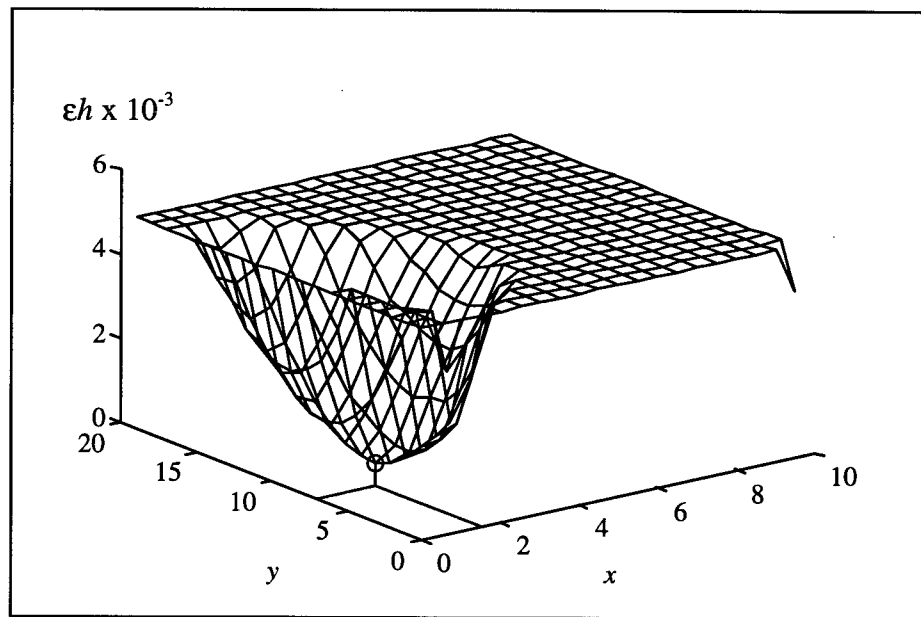


Fig. 3.5- Comportamento espacial da função erro de simetria.

Como forma de avaliar o comportamento desta função vamos utilizar o mesmo filtro de 2ª ordem, equalizado com uma seção passa-tudo de 2ª ordem, sobre o qual foi analisado o erro na aproximação do *atraso de fase* na seção 3.5.

Conforme pode ser visto, a função erro de simetria da resposta ao impulso  $\epsilon h$ , mostrada na Fig. 3.5, apresenta um comportamento bem condicionado com o conjunto de coeficientes  $\{x,y\}$ , apresentando para este caso um único valor mínimo no intervalo considerado. Para visualizar melhor o comportamento da função apresentamos os contornos da superfície da função erro de simetria na Fig. 3.6, a fim de mostrar que não existem pontos de mínimos locais.

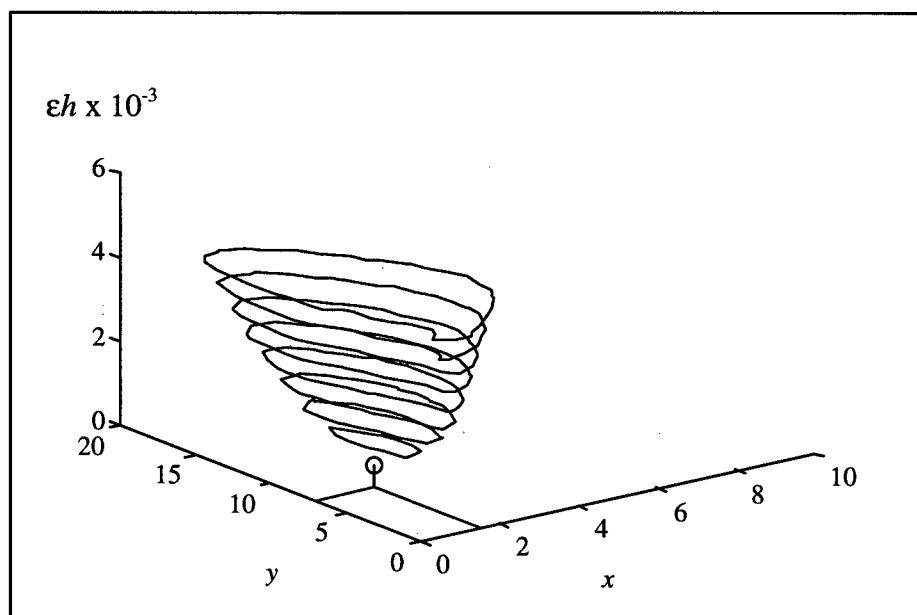


Fig. 3.6- Contornos da superfície da função erro de simetria.

### 3.8.2 Erro na resposta à excitação colorida

Sabemos que os verdadeiros responsáveis pela distorção de um sinal são os diferentes tempos de atraso às diversas componentes de frequência na banda de interesse. Se o processo utilizado baseia-se em uma dispersão em torno do *atraso de fase*, a determinação dos limites da variação vai depender da aplicação. Conseqüentemente uma análise destas variações fornece informações a respeito das distorções.

Uma outra forma seria a verificação da resposta do sistema equalizado, a um sinal que contenha todas as componentes de frequências de igual energia, ou seja, um “ruído branco”. Em nosso estudo estamos interessados em analisar as não linearidades da fase em filtros passa-baixas, portanto, sem perda da generalidade, podemos realizar uma limitação da largura de faixa do “ruído branco” resultando em um sinal denominado de “ruído colorido”.

Esquemáticamente é mostrado, na Fig. 3.7, a geração do ruído colorido ( $\mathcal{R}_c$ ) através de um gerador discreto de pseudo-ruído aleatório (GPR), cascadeado com um filtro limitador de banda ( $|H_{PB}|$ ). Para evitar os efeitos de borda no truncamento da série gerada optou-se pela utilização da janela de ponderação de Hamming.

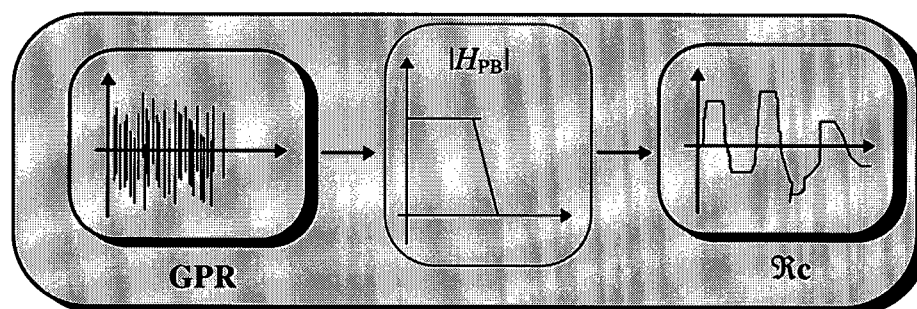


Fig. 3.7- Representação esquemática da geração do “ruído colorido”.

O filtro limitador utilizado é um passa-baixas elíptico de 12<sup>a</sup> ordem com atenuação máxima na banda de passagem ( $A_{\max}$ ) igual a 0,1 dB. A relação entre a frequência inferior da banda de rejeição ( $\omega_s$ ) e a frequência limite da banda passante ( $\omega_p$ ) é igual a 1,1. A Fig. 3.8 ilustra os sinais envolvidos neste procedimento.

Embora os filtros que iremos utilizar apresentem o limite da banda passante igual a 1 rad/s, escolhemos um filtro limitador com limite superior da banda de passagem igual a 0,8 rad/s. Esta escolha permite que o conjunto das frequências do ruído colorido seja condizente com as variações envolvidas tanto no *atraso de grupo* quanto no *atraso de fase* dentro da banda de frequência de interesse. A Fig. 3.9 mostra o gráfico da densidade espectral de energia para o “ruído colorido” gerado.

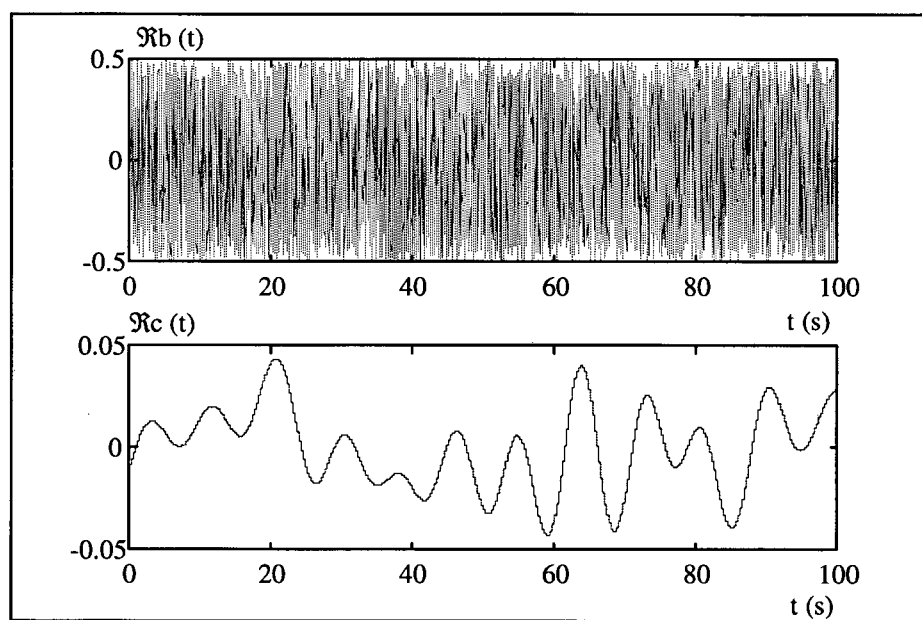


Fig. 3.8- Geração do “ruído colorido”

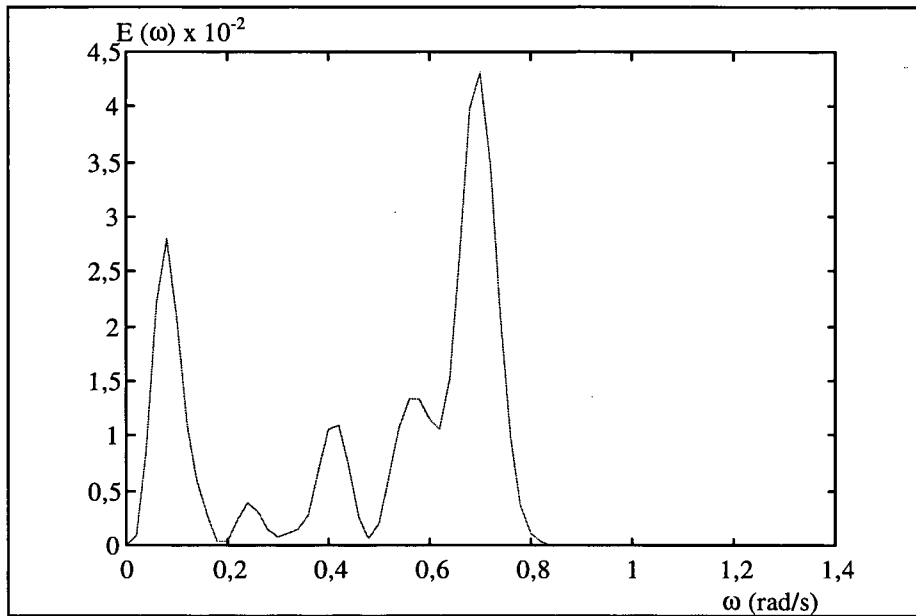


Fig. 3.9 - Densidade espectral de energia do ruído limitando em banda.

Idealmente podemos pensar que, no caso de fase linear, a resposta do sistema equalizado ( $\Re_e(t)$ ) é apenas o sinal de entrada ( $\Re_c(t)$ ) atrasado de um instante  $T_0$ . Como a linearidade da fase é conseguida apenas aproximadamente, não temos a situação na qual a diferença entre os dois sinais, descontado o instante de atraso, seja igual a zero. Matematicamente podemos escrever que,

$$\int_0^t \Re_c(t) dt - \int_{0+T_0}^{t+T_0} \Re_e(t) dt \neq 0, \quad (3.6-3)$$

portanto, pode-se pensar em uma função que expresse a diferença ou resíduo na medida de diferença entre os dois sinais no sentido dos mínimos quadrados.

Sendo um processo discreto, a expressão que mede a energia do erro entre os dois sinais é dada por:

$$\varepsilon_{\Re} = \sum_{i=1}^L [\Re_e(i+T_0) - \Re_c(i)]^2 \quad (3.6-4)$$

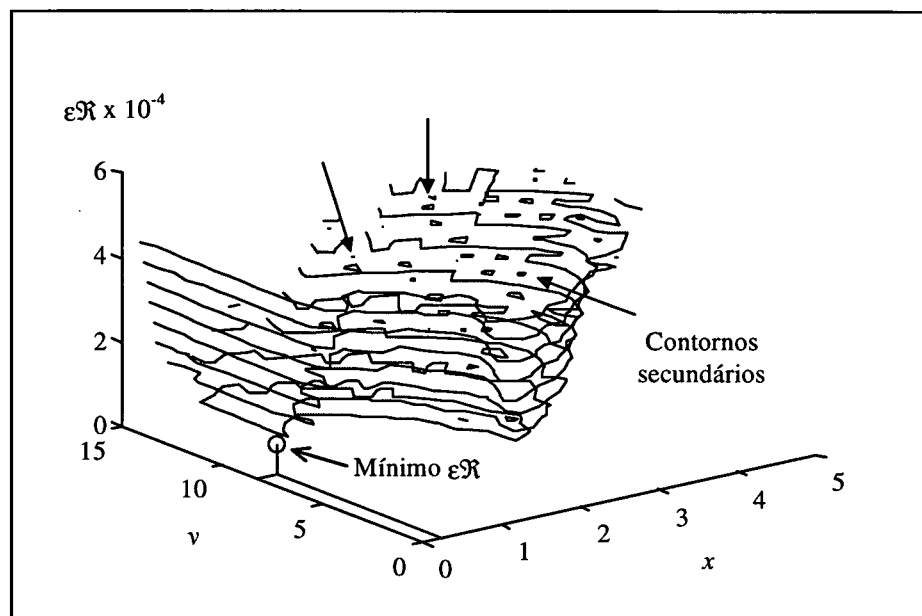


Fig. 3.10 - Contornos da superfície gerada pela função erro colorido.

Como forma de avaliar o comportamento desta função vamos utilizar o mesmo filtro de 2ª ordem, equalizado com uma seção passa-tudo de 2ª ordem, sobre o qual foi analisado o erro na aproximação do *atraso de fase* na seção 3.4.2.

Conforme pode ser visto a função erro colorido ( $\epsilon\mathcal{R}$ ), cujos contornos da superfície gerada são mostrados na Fig. 3.10, apresenta um comportamento mal condicionado com o conjunto de coeficientes  $\{x,y\}$ . Embora a função apresente um valor mínimo, no intervalo considerado, é importante verificar a existência de outros contornos secundários, os quais, dependendo das estimativas iniciais dos coeficientes, podem induzir a erros secundários ou locais.



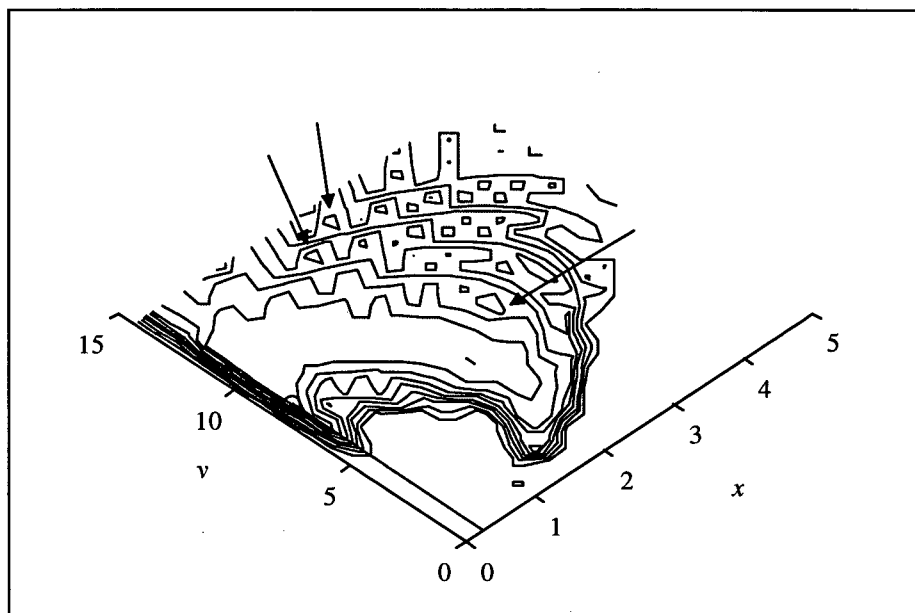


Fig. 3.11 - Detalhes dos contornos secundários da função erro colorido.

Para visualizar melhor o comportamento da função erro colorido apresentamos os contornos da superfície em uma vista superior (Fig. 3.11), a fim de mostrar que existem contornos secundários. Esta função é sensível as estimativas iniciais. Comparando com os contornos da função erro de simetria, no intervalo considerado, a função aqui estudada requer um tratamento mais elaborado sobre o seu comportamento que pode acarretar em um custo computacional elevado para a determinação do valor mínimo global.

### 3.9 AVALIAÇÃO DAS FIGURAS DE MÉRITO

Podemos observar pelas Fig. 3.5 e Fig. 3.10, que mostram o comportamento das funções de mérito que as mesmas apresentam diferentes conjuntos de parâmetros  $\{x,y\}$  que levam estas funções a apresentarem valores mínimos distintos. Na Tabela 2 são apresentados estes valores.

Tabela 2 - Comparação dos erros obtidos nas figuras de mérito da fase

	$x$	$y$	$\epsilon h$	$\epsilon \mathfrak{R}$
P1	1,51	7,01	<b><math>5,34 \times 10^{-4}</math></b>	$1,43 \times 10^{-4}$ (*)
P2	0,26	8,26	$2,02 \times 10^{-3}$ (**)	<b><math>7,15 \times 10^{-4}</math></b>

Na Tabela 2, os valores em negrito representam os valores mínimos que as funções erro assumem. O valor marcado com (\*) é o mínimo erro colorido ( $\epsilon \mathfrak{R}$ ), quando são utilizados os coeficientes que levam a função erro de simetria ( $\epsilon h$ ) a apresentar um mínimo valor. O valor marcado com (\*\*) é o mínimo erro de simetria ( $\epsilon h$ ) quando utilizados os coeficientes que levam a função erro colorido ( $\epsilon \mathfrak{R}$ ) a apresentar um mínimo valor.

A partir destes dados preliminares, pode-se ter um sentimento mais aprofundado sobre os resultados que podem ser obtidos pelos processos de equalização. Idealmente, pode-se pensar que o melhor caso é aquele no qual ambas as funções erro apresentem a ordenada do ponto mínimo igual a zero, o que não é verificado nos casos aqui estudados.

As medidas de mérito, isoladas ou em conjunto, constituem uma forma de análise da qualidade do filtro equalizado em relação a linearidade da fase, como apresentaremos no capítulo seguinte. O motivo que leva-nos a desenvolver este conjunto de medidas é o fato de que existe um grande universo de condições, e em alguns casos são usados critérios subjetivos, que influenciam na determinação do que denominamos de “equalização ótima”.

### 3.10 CONCLUSÕES

As equalizações realizadas, sendo algumas baseadas em considerações subjetivas, possuem um universo muito grande de resultados possíveis, principalmente devido às inúmeras considerações que podem ser feitas sobre o valor das dispersões a serem adotadas, quando da aproximação de um atraso arbitrário.

A literatura contempla, com grande volume de material, o comportamento do *atraso de grupo* como principal função na determinação dos coeficientes de equalizadores de fase. Neste capítulo apresentamos o *atraso de fase* como uma função alternativa no processo de equalização da fase e conjuntamente apresentamos uma maneira formal de prever o atraso a cada iteração.

A introdução de figuras de mérito, como forma de mensurar as qualidades das equalizações permitiu identificar características importantes dos dois processos estudados. Isoladas ou em conjunto estas figuras podem auxiliar o projetista na escolha do melhor caminho a adotar. Outro aspecto importante, aqui apresentado, é o comportamento da figura de mérito erro de simetria ( $\epsilon h$ ), como mostrado nas Fig. 3.5 e 3.6. Comparada às outras duas, para a determinação do mínimo global, o custo computacional envolvido tende a ser minimizado, uma vez que a função não apresenta contornos secundários, que poderiam conduzir à mínimos locais.

## **4.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo são apresentados os resultados comparativos de equalizações realizadas através do uso do *atraso de grupo* e do *atraso de fase*. Conjuntamente apresentaremos os resultados de uma equalização que apresenta distorção por interceptação de fase.

Através das figuras de mérito estudadas e apresentadas, pretende-se estabelecer critérios de avaliação e de escolha do “melhor” equalizador de fase.

## **4.2 CARACTERÍSTICAS DOS FILTROS A SEREM EQUALIZADOS**

Devido à grande diversidade de funções de filtros seletores existentes, neste trabalho, optou-se somente pelo estudo da equalização de funções do tipo passa-baixas, normalizadas em frequência.

A Tabela 3, apresenta as características de alguns filtros passa-baixas, normalizados, com diferentes ordens e diferentes tipos de aproximações em magnitude, que serão utilizados como elementos para comparações em nosso estudo.

Tabela 3 - Características dos filtros passa-baixas.

Tipo de filtro	$\omega_s/\omega_p$	$A_{max}(dB)$	Ordem( $n_F$ )	Designação
Butterworth	2	3	4	LP1
Butterworth	2	0,5	8	LP2
Butterworth	2	0,1	10	LP3
Chebyshev	2	3	4	LP4
Chebyshev	2	0,5	8	LP5
Chebyshev	2	0,1	10	LP6
Elíptico	1,4	4	4	LP7
Elíptico	1,2	0,5	8	LP8
Elíptico	1,1	0,1	10	LP9

### 4.3 ESPECIFICAÇÃO DAS DISPERSÕES ADMISSÍVEIS

Como discutido no Capítulo 2, a função *atraso de grupo* e a função *atraso de fase* apresentam características distintas, como por exemplo, as discrepâncias entre os valores máximos e mínimos. Estas discrepâncias são mais acentuadas na função *atraso de grupo* do que na função *atraso de fase*. Isto deve-se principalmente ao fato de que a função *atraso de fase* é uma relação linear entre a fase  $\theta(\omega)$  e a frequência  $\omega$  (seção 2.3). Por outro lado, a função *atraso de grupo* mede a variação da função fase, conseqüentemente se a fase apresentar uma transição abrupta resultará em um aumento dos valores do *atraso de grupo*.

A maior variação de fase ocorre no limite da banda de passagem, e torna-se mais abrupta

para respostas de filtros que apresentam a banda de transição ( $\omega_s / \omega_p$ ) muito estreita, como é o caso dos filtros Chebyshev e Elípticos. Para homogeneizar o estudo dos três tipos de aproximações iremos limitar a banda de equalização em 80% da banda passante, visando diminuir as diferenças de tempos envolvidas e assim poder melhor comparar os procedimentos de equalização que serão estudados.

Com base nas variações percentuais utilizadas na literatura, para a equalização do *atraso de grupo* e ainda considerando as diferenças existentes entre as duas funções (*atraso de grupo* e *atraso de fase*), discutidas na seção 2.4, estipulou-se um conjunto de valores para estas variações os quais são apresentados na Tabela 4. Entre as equalizações resultantes, realizadas a partir deste conjunto (Apêndice A), serão selecionadas com base nas figuras de mérito discutidas na seção 3.6, àquelas que proporcionem os menores erros.

Tabela 4 - Especificação da dispersão admissível para as funções *atraso de grupo* e *atraso de fase*.

	Tipo de aproximação em magnitude		
	Butterworth	Chebyshev	Elíptico
Variações do Atraso de fase (%)	0,25; 0,5; 1,0; 2,0	0,25; 0,5; 1,0; 2,0	0,5; 1,0; 2,0; 4,0
Variações do Atraso de grupo (%)	0,5; 1,0; 2,0; 4,0	1,0; 2,0; 4,0; 8,0	1,0; 2,0; 4,0; 8,0

#### 4.4 FIGURAS DE MÉRITO

Independentemente da equalização de fase ser realizada através da função *atraso de grupo* ou da função *atraso de fase*, o resultado que interessa é a minimização da dispersão em torno da

função *atraso de fase*. O *atraso de fase* constante garante fase linear, o que pode não acontecer quando o *atraso de grupo* for constante. Assim, para os exemplos escolhidos, a primeira figura de mérito da linearidade da fase será a medida da energia do erro na aproximação do *atraso de fase* ( $\epsilon\tau_p$ ), definida na seção 3.4.2.

Através da medida de simetria da resposta ao impulso ou da anti-simetria da resposta ao degrau, pode-se avaliar precisamente a linearidade da fase [1]. A energia do erro de simetria da resposta ao impulso ( $\epsilon h$ ), definida na seção 3.6.1, é também utilizada como figura de mérito na avaliação da linearidade da fase.

Outra medida que utilizaremos como avaliação de linearidade da fase é a energia do erro entre o sinal de entrada e o sinal de saída do filtro a ser analisado ( $\epsilon\mathcal{R}$ ), usando como sinal de entrada uma “excitação colorida”, definida na seção 3.6.2.

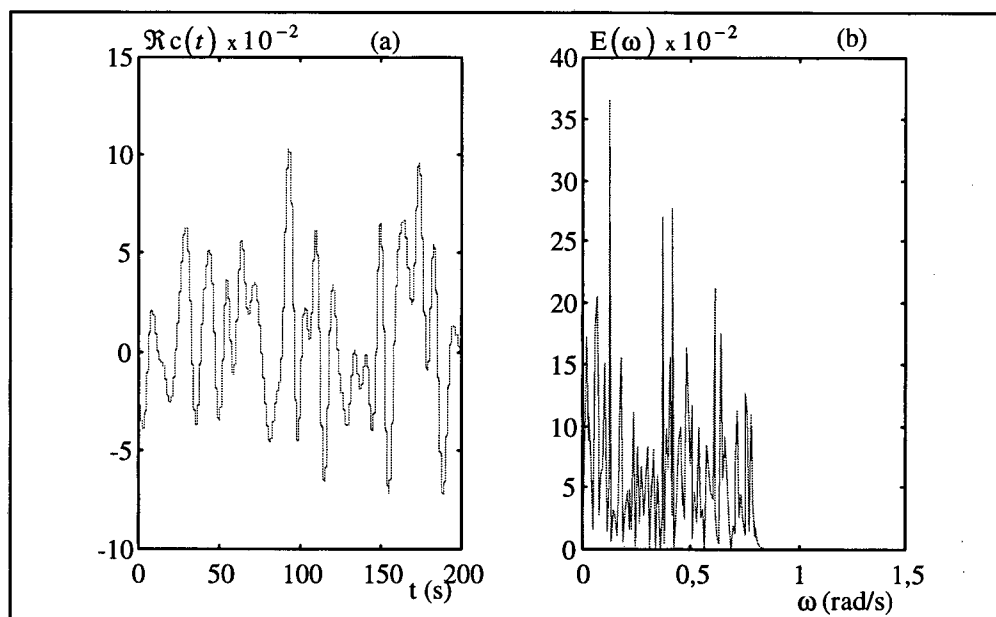


Fig. 4.1 - Características do sinal de excitação

O sinal de excitação ( $\mathcal{R}(t)$ ) é mostrado na Fig. 4.1(a) e sua densidade espectral de

energia é mostrada na Fig. 4.1(b). Para a utilização desta medida, é necessário remover a parcela de tempo relativa ao tempo de propagação proporcionado pelo sistema equalizado. A determinação deste tempo é feita com base nas características da resposta ao impulso do sistema equalizado, onde utilizamos o instante de ocorrência do máximo valor do lóbulo principal da resposta ao impulso.

## 4.4 CARACTERÍSTICAS DOS FILTROS SEM EQUALIZAÇÃO

### 4.4.1 Filtros Butterworth

Através da Fig. 4.2 pode-se verificar as características do *atraso de fase* e do *atraso de grupo* para os filtros Butterworth sem equalização. A Fig. 4.3 ilustra a resposta ao impulso para estes filtros.

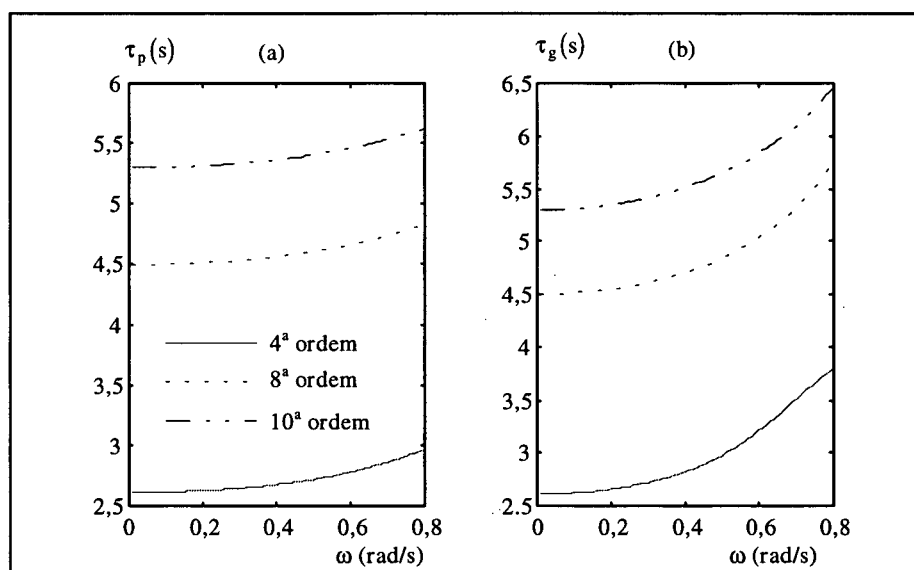


Fig. 4.2 - Filtros Butterworth sem equalização: (a) *Atraso de fase*, (b) *Atraso de grupo*.



A Tabela 5 mostra os valores das figuras de mérito para os filtros Butterworth com a fase não equalizada.

Tabela 5 - Figuras de mérito para os filtros Butterworth sem equalização.

	Ordem do filtro ( $n_F$ )	$\epsilon\tau_p \times 10^{-5}$	$\epsilon h \times 10^{-5}$	$\epsilon R \times 10^{-5}$
	4	1047	89,1	0,73
Butterworth	8	936	211	9,32
	10	919	275	12,9

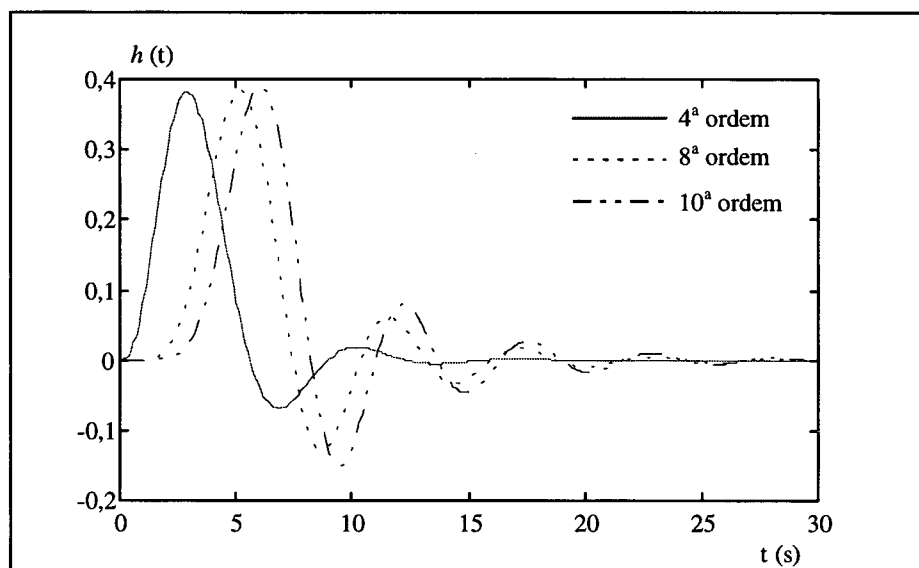


Fig. 4.3 - Resposta ao impulso para os filtros Butterworth sem equalização.

#### 4.4.2 Filtros Chebyshev

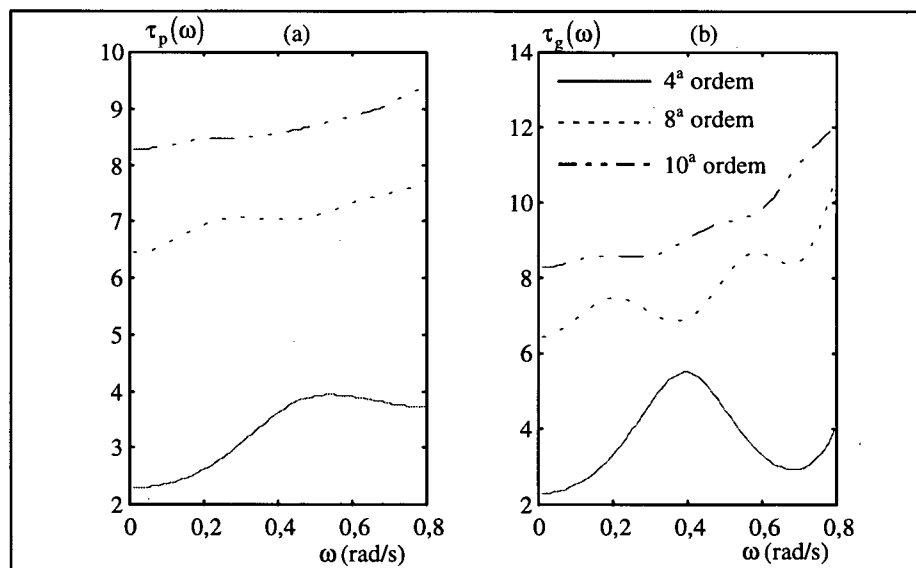
Através de resultados numéricos, mostrados na Tabela 6, pode-se verificar as diferenças entre os erros para os filtros Chebyshev com a fase não equalizada.

Tabela 6 - Figuras de mérito para os filtros Chebyshev sem equalização.

	Ordem do filtro ( $n_F$ )	$\epsilon\tau_p \times 10^{-5}$	$\epsilon h \times 10^{-5}$	$\epsilon\mathcal{R} \times 10^{-5}$
	4	37625	196	15,2
Chebyshev	8	10751	258	16,1
	10	9156	265	22,7

A Fig. 4.4 mostra as características do *atraso de fase* e do *atraso de grupo* para os filtros Chebyshev sem equalização. A Fig. 4.5 mostra a resposta ao impulso para estes filtros.

Um dado que merece atenção é a diminuição do erro  $\epsilon\tau_p$  com o aumento da ordem do filtro. Este resultado, que pode ser visualmente percebido através da Fig. 4.4 (a), deve-se ao fato de que o aumento da ordem faz com que as variações ocorram mais próximas do limite da banda de passagem e, cabe ressaltar que estamos limitando em 80% a banda de interesse para estudo.

Fig. 4.4 - Filtros Chebyshev sem equalização: (a) *Atraso de fase*, (b) *Atraso de grupo*.

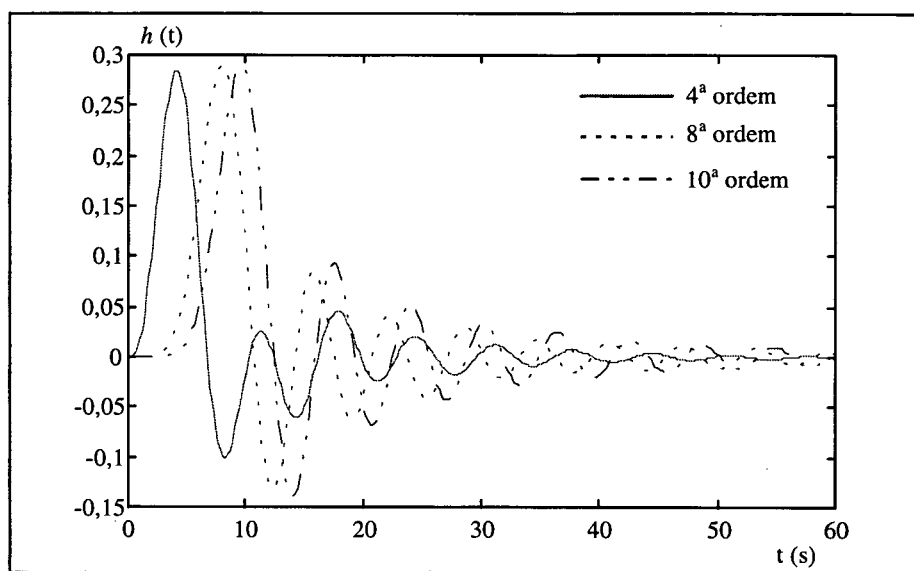


Fig. 4.5 - Resposta ao impulso para os filtros Chebyshev sem equalização

#### 4.4.3 Filtros Elípticos

A Tabela 7 mostra os valores dos erros para os filtros Elípticos com a fase não equalizada.

Tabela 7 - Figuras de mérito para os filtros Elípticos sem equalização.

	Ordem do filtro ( $n_F$ )	$\epsilon\tau_p \times 10^{-5}$	$\epsilon h \times 10^{-5}$	$\epsilon\mathcal{R} \times 10^{-5}$
	4	37885	309	20,6
Elíptico	8	99960	271	26,1
	10	125110	244	30,5

A Fig. 4.6 mostra as características do *atraso de fase* e do *atraso de grupo* para os filtros elípticos sem equalização. A Fig. 4.7 mostra a resposta ao impulso para estes filtros

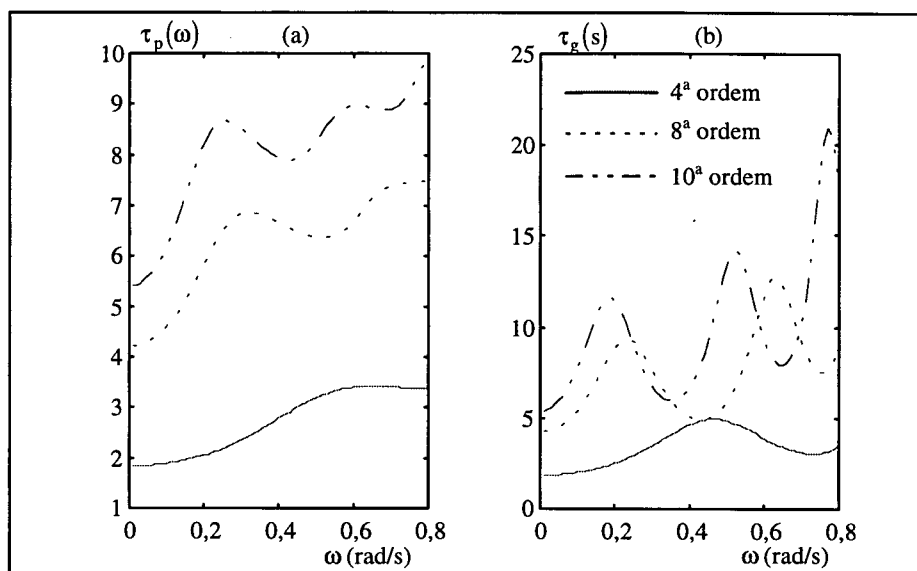


Fig. 4.6 - Filtros Elípticos sem equalização: (a) *Atraso de fase*, (b) *Atraso de grupo*

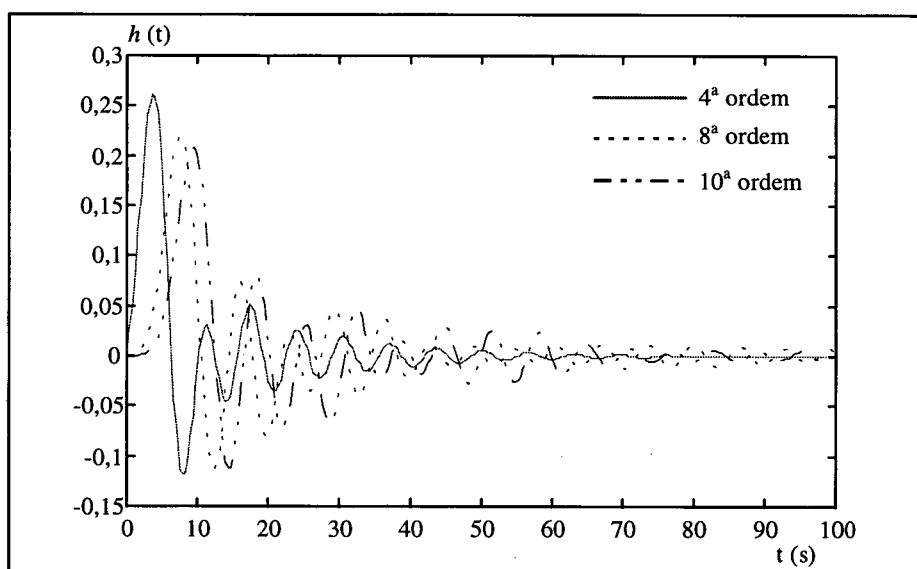


Fig. 4.7- Resposta ao impulso para os filtros Elíptico sem equalização

## 4.5 RESULTADOS OBTIDOS APÓS A EQUALIZAÇÃO DA FASE

Os resultados obtidos após a equalização de fase, para os filtros definidos na seção 4.2 estão apresentados nas Tabelas 8 a 16. Estas tabelas contemplam os resultados obtidos através de dois procedimentos: aproximação baseada no *atraso de fase* e aproximação baseada no *atraso de*

grupo, representadas pelos símbolos  $E\tau_p$  e  $E\tau_g$ , respectivamente. Para cada um destes procedimentos são apresentados os mínimos valores para as seguintes figuras de mérito:

- i)  $\epsilon\tau_p$  a energia do erro na aproximação do *atraso de fase*;
- ii)  $\epsilon h$  a energia do erro na simetria da resposta ao impulso;
- iii)  $\epsilon\mathfrak{R}$  a energia do erro à excitação colorida.

Como mostrado na seção 3.7, os mínimos erros não ocorrem simultaneamente, ou seja, a minimização de uma figura de mérito pode não levar a minimização das outras duas. Assim, para um dado erro obtido (mínimo), são mostrados os valores correspondente às outras figuras de mérito.

Outra informação, relevante, resultante dos procedimentos de equalização é o número de seções passa-tudo de 2ª ordem necessárias à equalização. Estes valores também são mostrados nas tabelas abaixo com destaque.

#### 4.5.1 Resultados das Equalizações para os filtros Butterworth

Tabela 8 - Resultado da equalização para o filtro Butterworth de 4ª ordem.

		Mínimo erro obtido x $10^{-5}$ {número de seções equalizadoras}					
		$\epsilon\tau_p$		$\epsilon h$		$\epsilon\mathfrak{R}$	
$E\tau_p$		0,65 {1}		55,2 {2}		0,80 {2}	
		$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$
		72,5	1,13	0,99	0,80	0,99	55,2
$E\tau_g$		9,55 {4}		10,2 {2}		0,49 {2}	
		$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$
		40,9	2,76	38,5	0,60	28,7	11,3

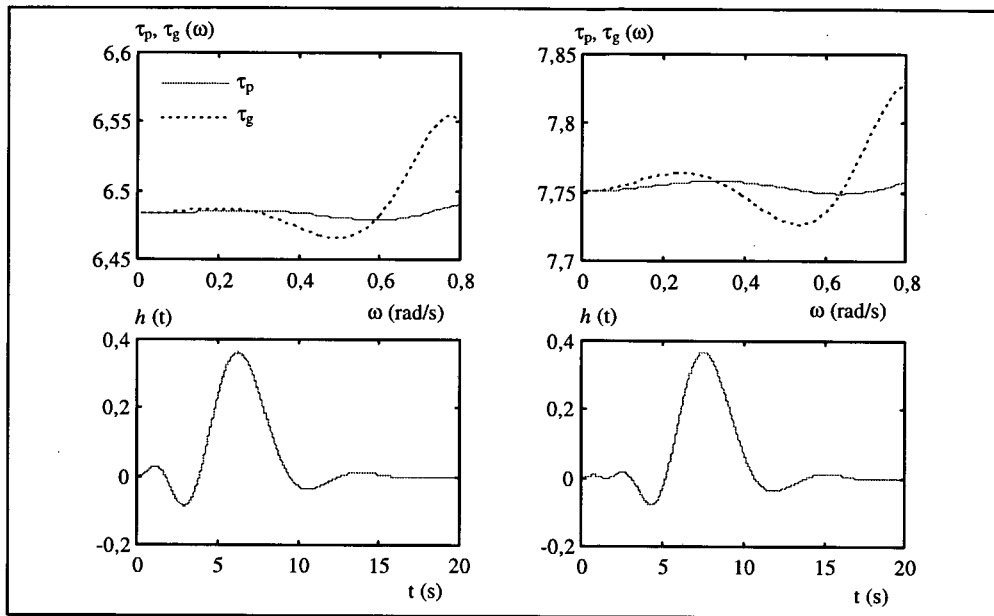


Fig. 4.8 - Filtro Butterworth 4ª ordem equalizado via  $E\tau_p$ . (a) mínimo  $\varepsilon\tau_p$  (b) mínimo  $\varepsilon h$  e  $\varepsilon\mathfrak{R}$ .

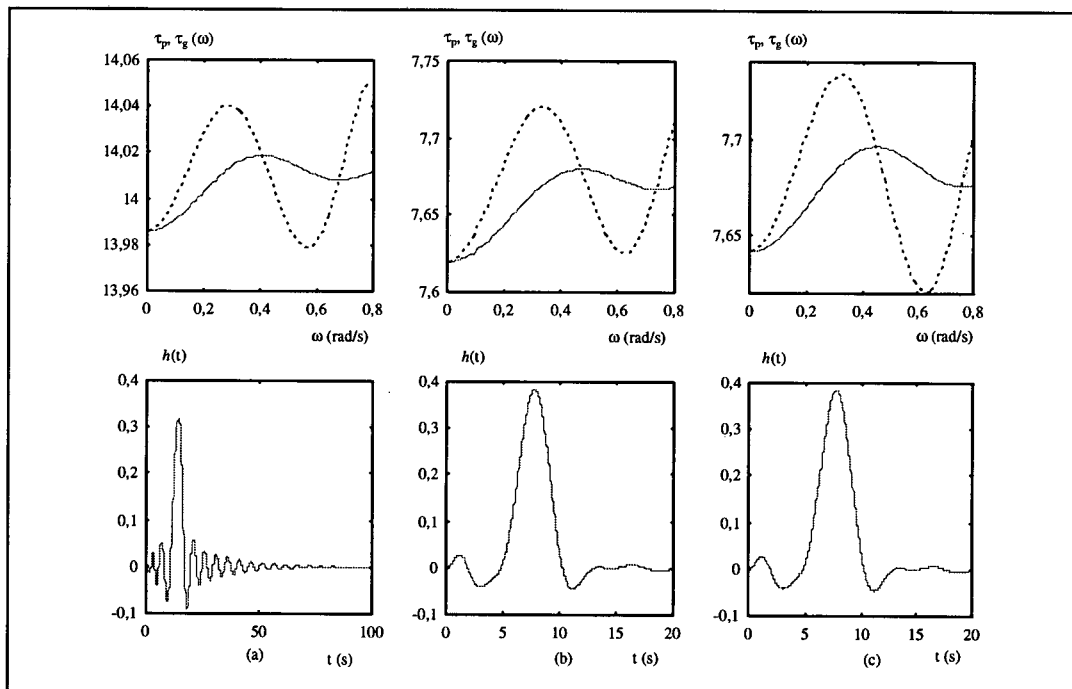
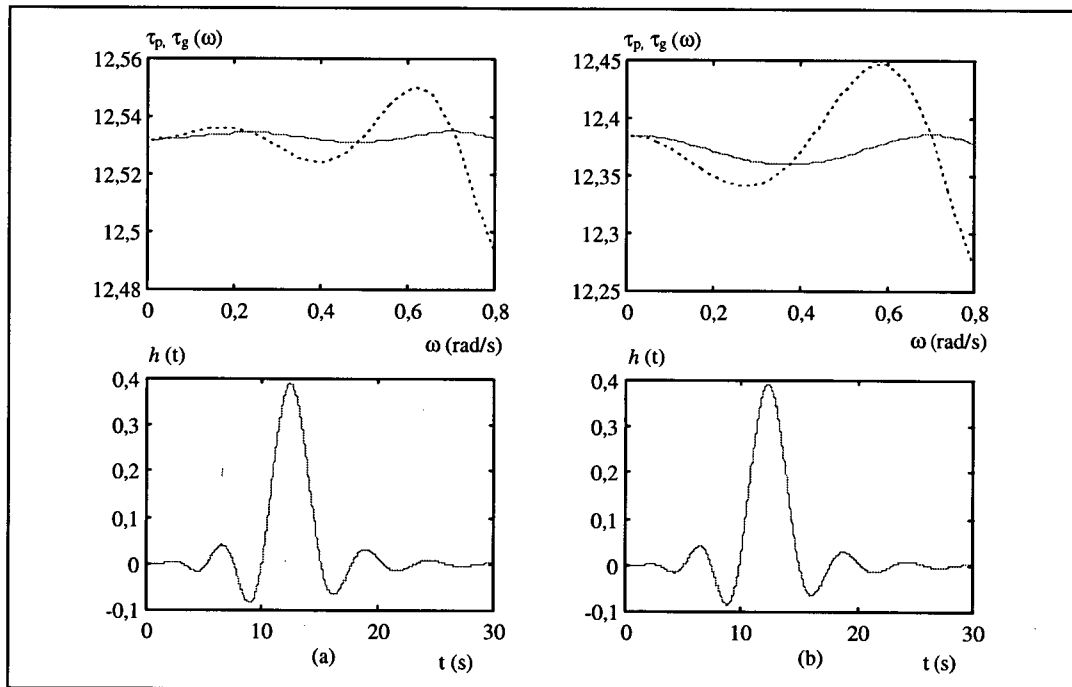


Fig. 4.9 - Filtro Butterworth 4ª ordem equalizado via  $E\tau_g$ . (a) mínimo  $\varepsilon\tau_p$ , (b) mínimo  $\varepsilon h$  e (c) mínimo  $\varepsilon\mathfrak{R}$

Tabela 9 - Resultado da equalização para o filtro Butterworth de 8ª ordem.

		Mínimo erro obtido x 10 <sup>-5</sup> {número de seções equalizadoras}					
		$\epsilon\tau_p$		$\epsilon h$		$\epsilon\mathfrak{R}$	
$E\tau_p$		0,14 {2}		7,15 {2}		0,03 {2}	
		$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$
		8,28	0,04	8,58	0,03	8,58	7,15
$E\tau_g$		7,94 {6}		4,46 {6}		0,015 {2}	
		$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$
		4,46	0,23	7,94	0,23	70,2	8,77

Fig. 4.10 - Filtro Butterworth 8ª ordem equalizado via  $E\tau_p$ . (a) mínimo  $\epsilon\tau_p$ . e (b) mínimo  $\epsilon h$  e  $\epsilon\mathfrak{R}$ .

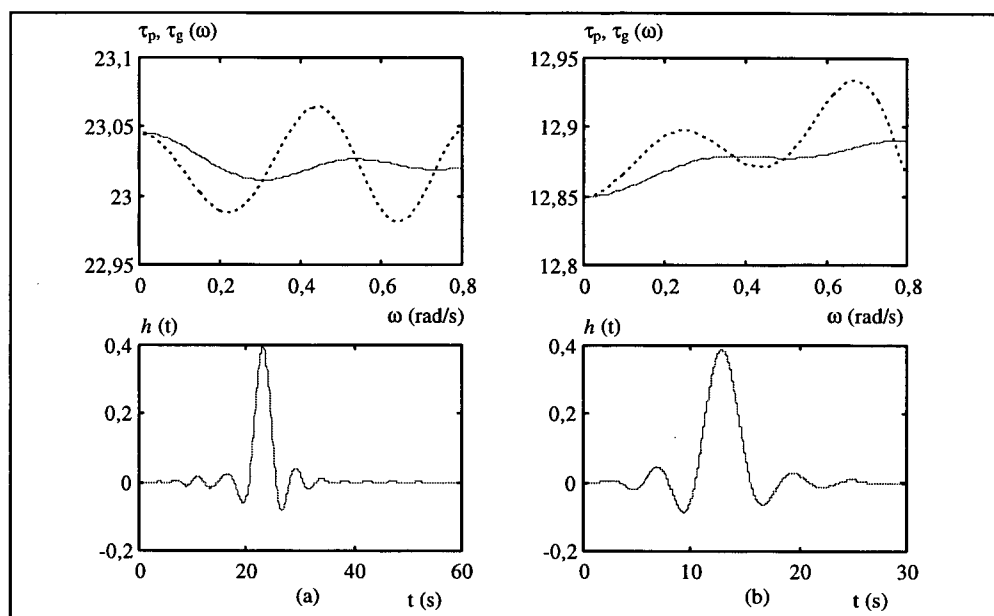


Fig. 4.11 - Filtro Butterworth 8ª ordem equalizado via  $E\tau_g$ . (a) mínimo  $\epsilon_{\tau_p}$  e  $\epsilon_h$ , (b) mínimo  $\epsilon_{\mathcal{R}}$ .

Tabela 10 - Resultado da equalização para o filtro Butterworth de 10ª ordem.

		Mínimo erro obtido x $10^{-5}$ [número de seções equalizadoras]					
		$\epsilon_{\tau_p}$		$\epsilon_h$		$\epsilon_{\mathcal{R}}$	
$E\tau_p$		0,28 {2}		2,87 {2}		0,13 {2}	
	$\epsilon_h$	$\epsilon_{\mathcal{R}}$	$\epsilon_{\tau_p}$	$\epsilon_{\mathcal{R}}$	$\epsilon_{\tau_p}$	$\epsilon_h$	
	5,43	0,62	37,1	0,13	37,1	2,87	
$E\tau_g$		0,68 {4}		2,47 {4}		0,02 {4}	
	$\epsilon_h$	$\epsilon_{\mathcal{R}}$	$\epsilon_{\tau_p}$	$\epsilon_{\mathcal{R}}$	$\epsilon_{\tau_p}$	$\epsilon_h$	
	2,47	0,02	0,68	0,02	0,68	2,47	



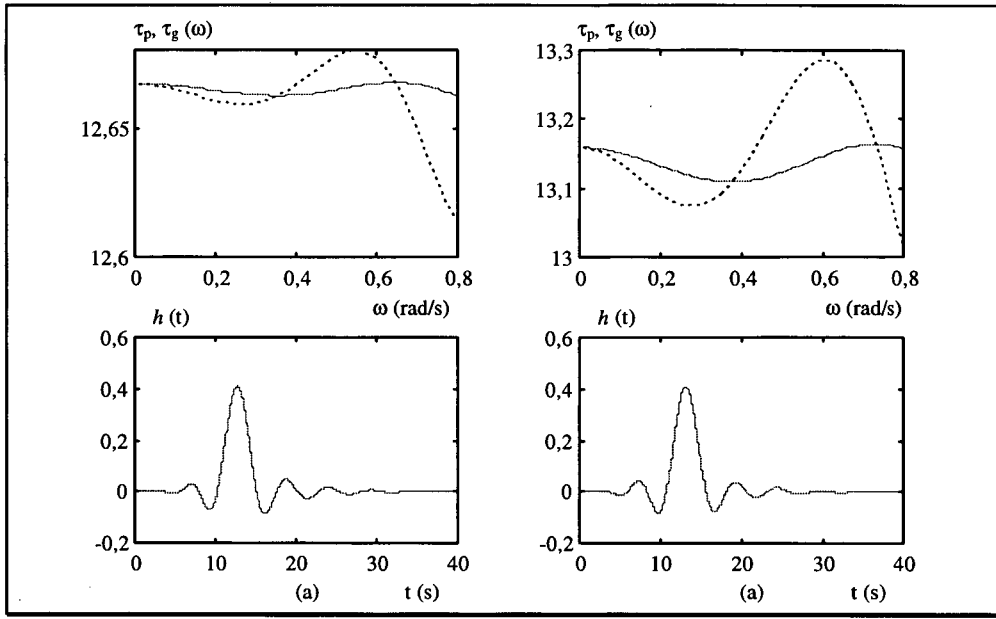


Fig. 4.12 - Filtro Butterworth 10ª ordem equalizado via  $\epsilon\tau_p$ . (a) mínimo  $\epsilon\tau_p$  e (b) mínimo  $\epsilon h$  e  $\epsilon R$ .

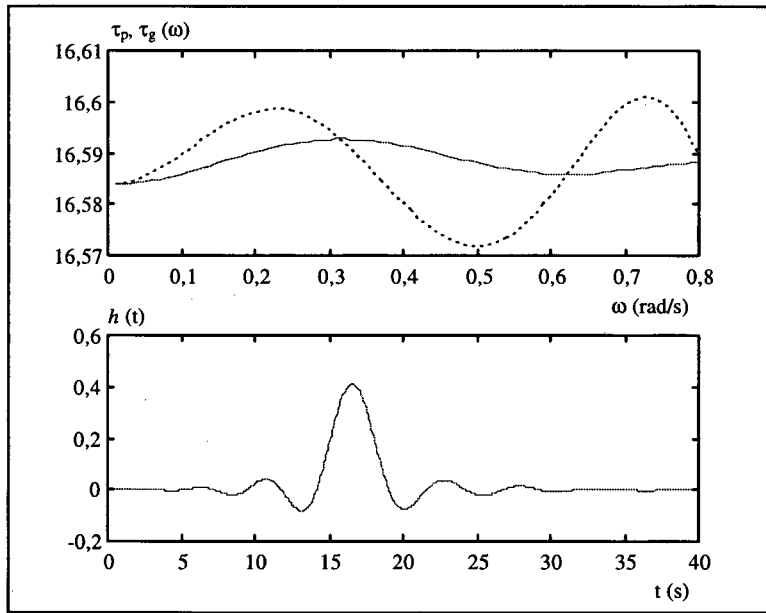


Fig. 4.13 - Filtro Butterworth 10ª ordem equalizado via  $\epsilon\tau_g$ .

## 4.5.2 Resultados das Equalizações para os filtros Chebyshev

Tabela 11 - Resultado da equalização para o filtro Chebyshev de 4ª ordem.

Mínimo erro obtido x 10 <sup>-5</sup> [número de seções equalizadoras]							
		$\epsilon\tau_p$		$\epsilon h$		$\epsilon\mathfrak{R}$	
$E\tau_p$	14,5 {3}		8,24 {4}		7,61 {4}		
	$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$	
	15,2	9,18	38,6	7,61	38,6	8,24	
$E\tau_g$	21,2{3}		6,95 {4}		7,5 {4}		
	$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$	
	30,7	11	56,4	7,8	46,9	8	

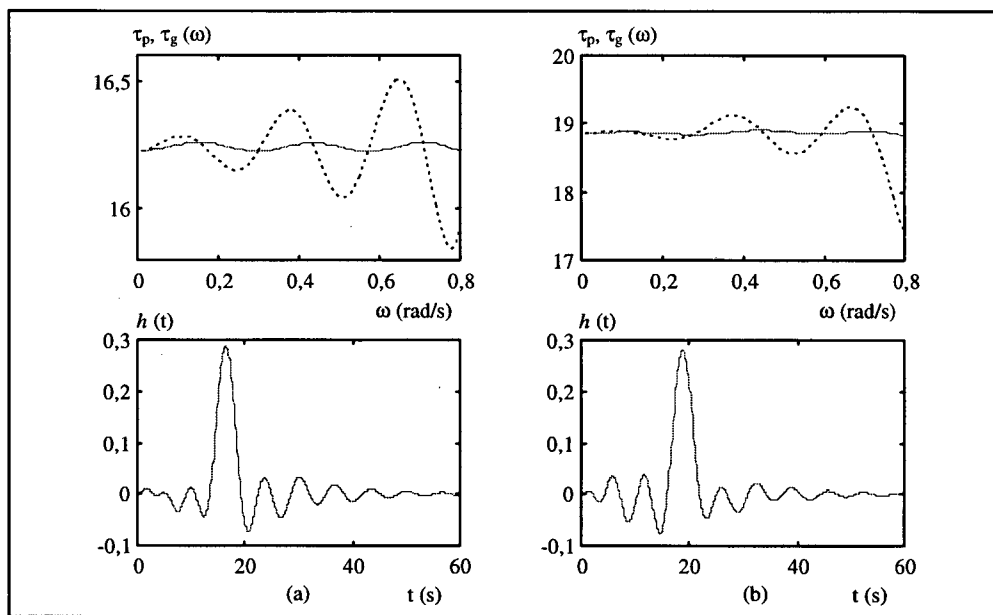


Fig. 4.14 - Filtro Chebyshev 4ª ordem equalizado via  $E\tau_p$ . (a) mínimo  $\epsilon\tau_p$ , (b) mínimo  $\epsilon h$  e  $\epsilon\mathfrak{R}$ .

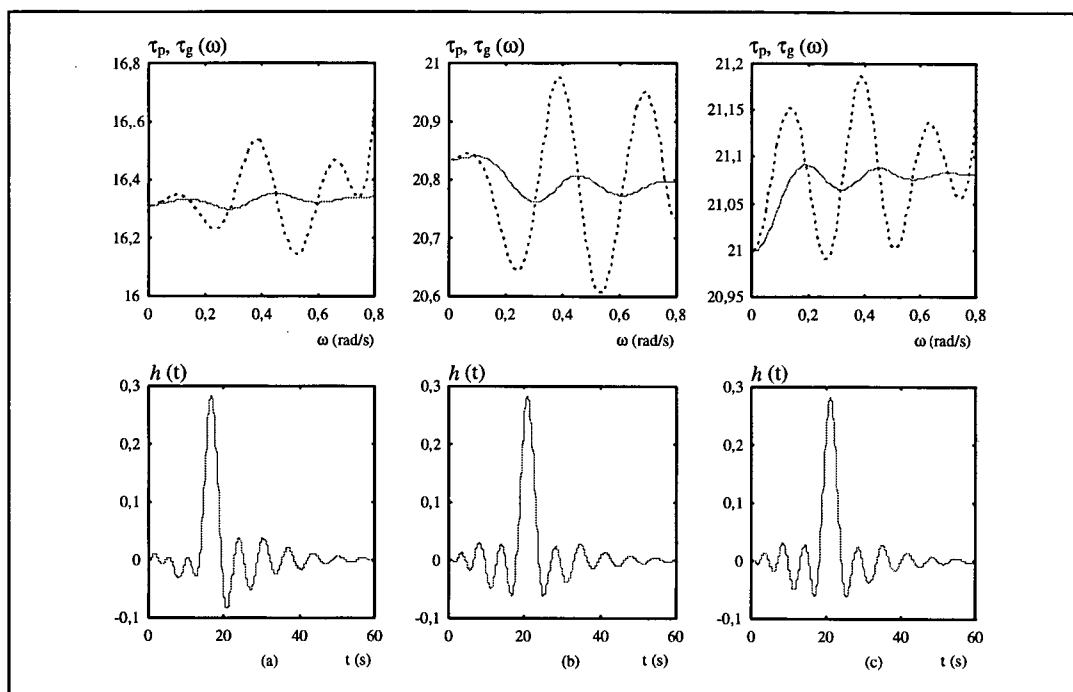


Fig. 4.15 - Filtro Chebyshev 4ª ordem equalizado via  $\epsilon\tau_g$ . (a) mínimo  $\epsilon\tau_p$ , (b) mínimo  $\epsilon h$  e (c) mínimo  $\epsilon\mathcal{R}$ .

Tabela 12 - Resultado da equalização para o filtro Chebyshev de 8ª ordem.

Mínimo erro obtido x $10^{-5}$ {número de seções equalizadoras}							
		$\epsilon\tau_p$		$\epsilon h$		$\epsilon\mathcal{R}$	
$\epsilon\tau_p$	10,3 {3}		9,72 {3}		1,70 {3}		
	$\epsilon h$	$\epsilon\mathcal{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathcal{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$	
	9,72	1,70	10,3	1,70	10,3	9,72	
$\epsilon\tau_g$	4,8 {4}		1,95 {4}		0,28 {4}		
	$\epsilon h$	$\epsilon\mathcal{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathcal{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$	
	2,19	0,28	72,9	0,6	4,8	2,19	

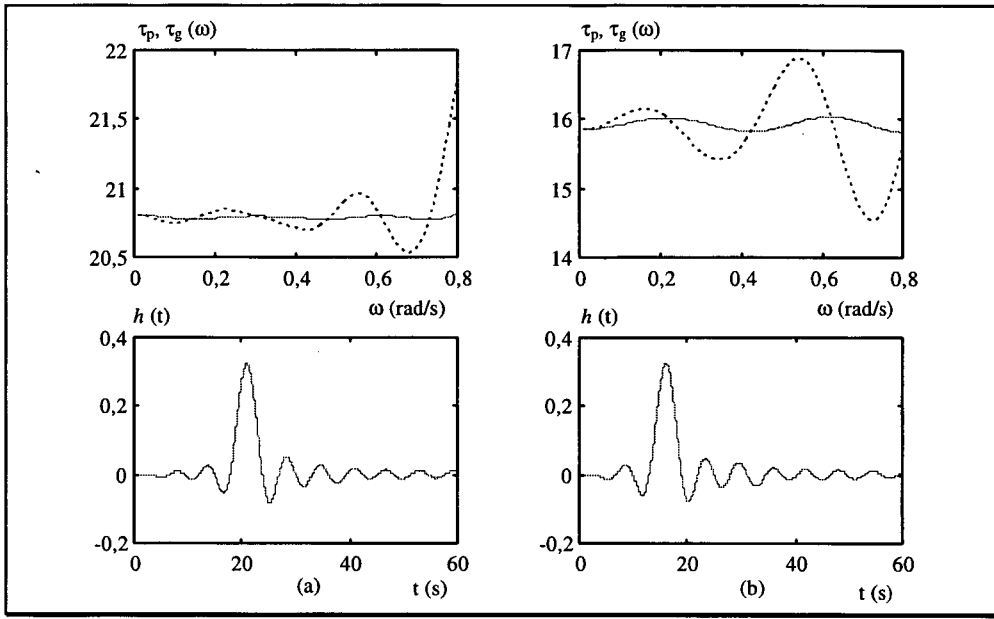


Fig. 4.16 - Filtro Chebyshev 8ª ordem equalizado via  $E\tau_p$ . (a) mínimo  $\epsilon\tau_p$  e  $\epsilon h$  (b) mínimo  $\epsilon\mathcal{R}$ .

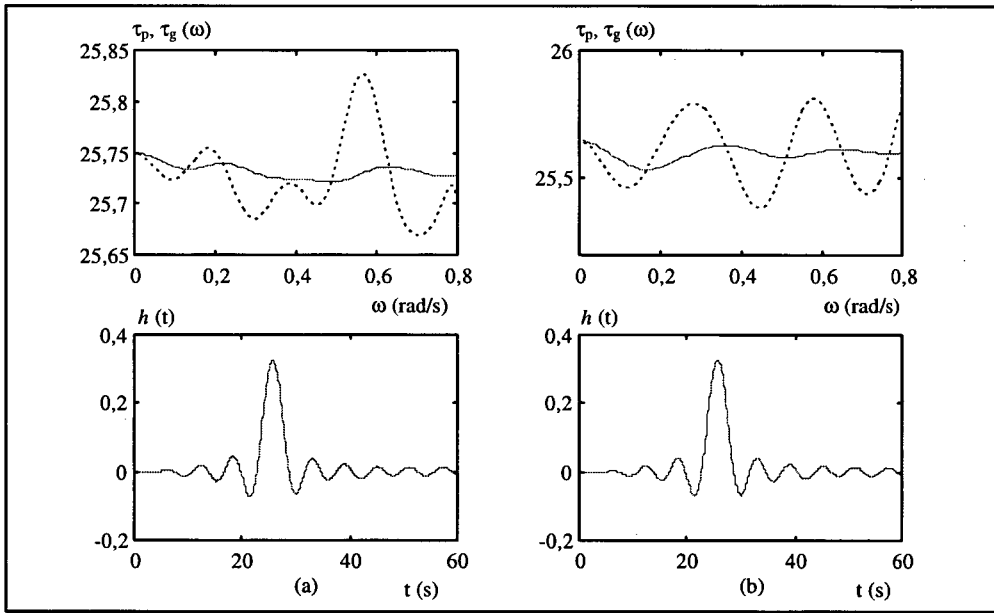
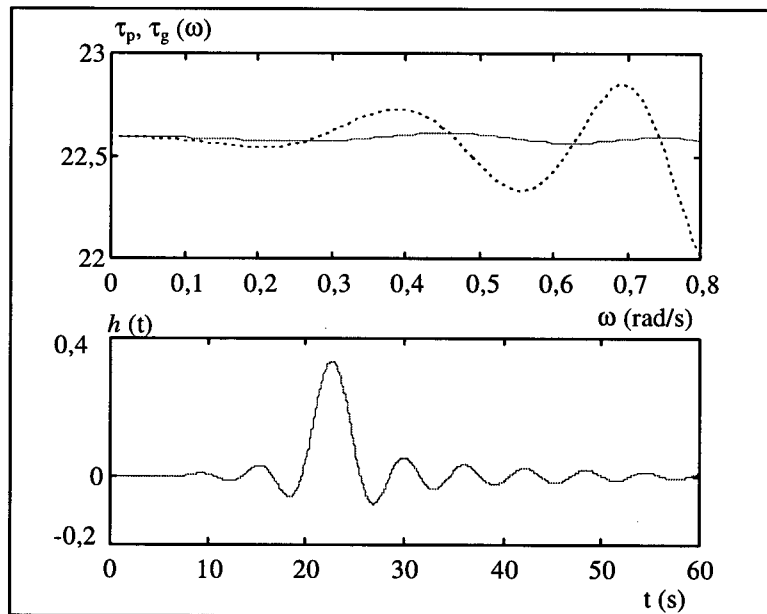


Fig. 4.17 - Filtro Chebyshev 8ª ordem equalizado via  $E\tau_g$ . (a) mínimo  $\epsilon\tau_p$  e  $\epsilon\mathcal{R}$  (b) mínimo  $\epsilon h$

Tabela 13 - Resultado da equalização para o filtro Chebyshev de 10ª ordem.

		Mínimo erro obtido x 10 <sup>-5</sup> [número de seções equalizadoras]					
		$\epsilon\tau_p$		$\epsilon h$		$\epsilon\mathfrak{R}$	
$E\tau_p$		18,1 {3}		8,31 {3}		0,48 {3}	
		$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$
		8,31	0,48	18,1	0,48	18,1	8,31
$E\tau_g$		57,1 {3}		1,59 {5}		0,10 {5}	
		$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$
		15,7	1,02	120	0,10	120	1,59

Fig. 4.18 - Filtro Chebyshev 10ª ordem equalizado via  $E\tau_p$ .

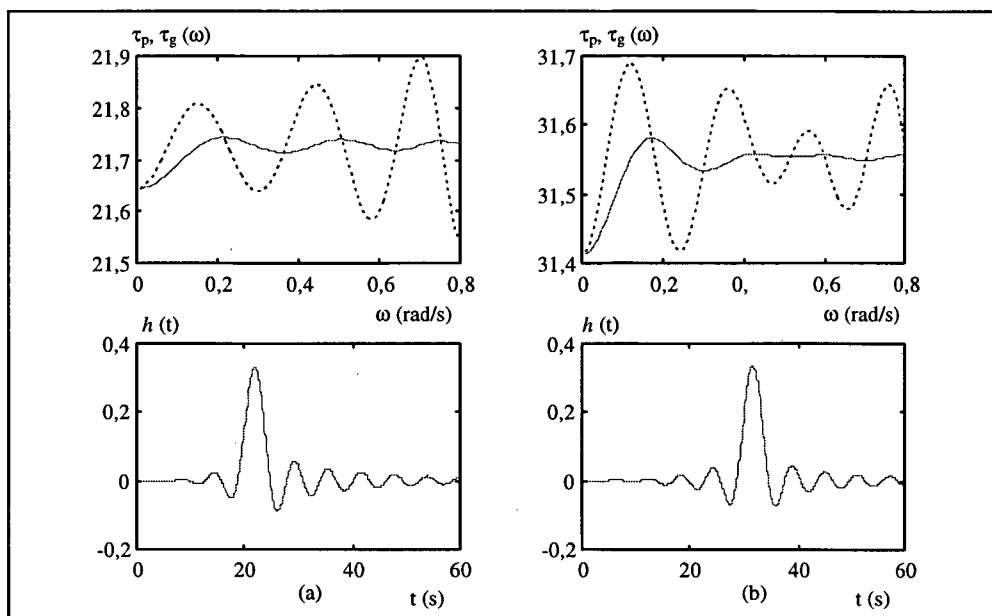


Fig. 4.19 - Filtro Chebyshev 10<sup>a</sup> ordem equalizado via  $E\tau_g$ . (a) mínimo  $\epsilon\tau_p$ , (b) mínimos  $\epsilon h$  e  $\epsilon\mathfrak{I}$ .

### 4.5.3 Resultados das Equalizações para os filtros Elípticos

Tabela 14 - Resultado da equalização para o filtro Elíptico de 4<sup>a</sup> ordem.

		Mínimo erro obtido x 10 <sup>-5</sup> [número de seções equalizadoras]					
		$\epsilon\tau_p$		$\epsilon h$		$\epsilon\mathfrak{I}$	
$E\tau_p$		22,4 {4}		4,02 {4}		7,18 {3}	
	$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{I}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{I}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$	
	10,5	8,32	261	7,30	506	8,68	
$E\tau_g$		17,3 {4}		19,7 {3}		8,25 {3}	
	$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{I}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{I}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$	
	33,4	10,8	50,9	8,25	50,9	19,7	

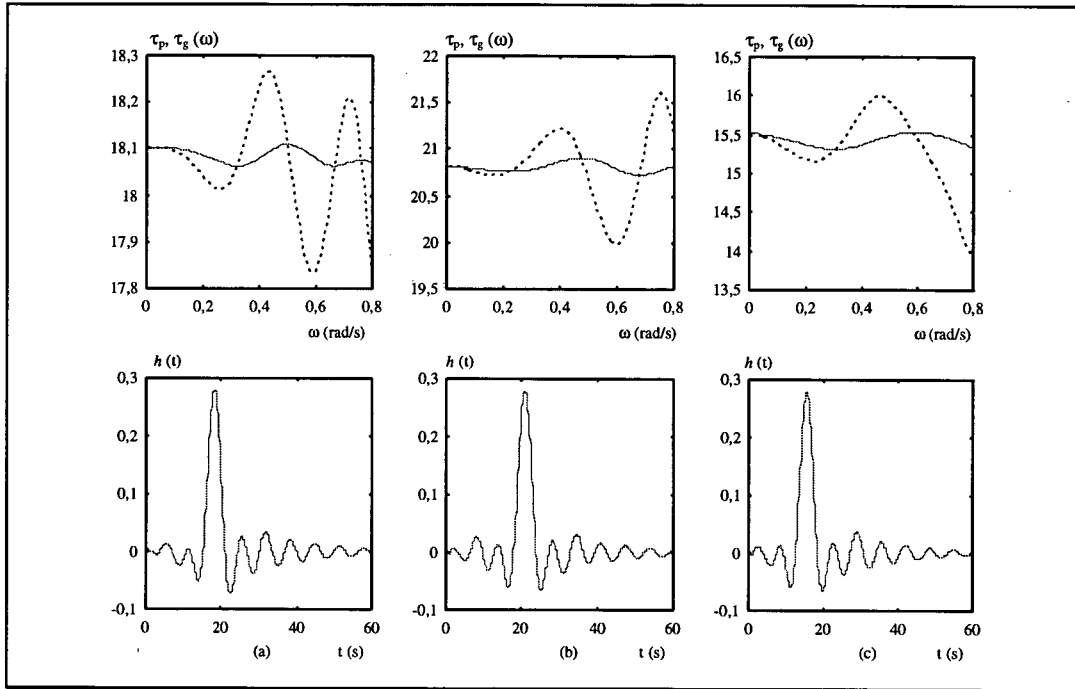


Fig. 4.20 - Filtro Elíptico 4ª ordem equalizado via  $\epsilon\tau_p$ . (a) mínimo  $\epsilon\tau_p$ , (b) mínimo  $\epsilon h$  e (c) mínimo  $\epsilon\mathfrak{R}$ .

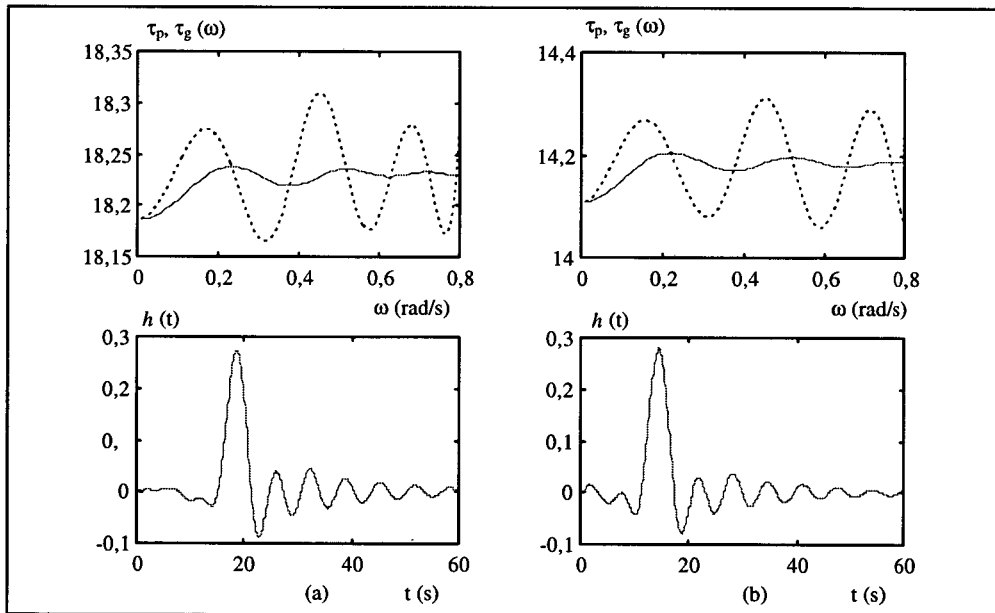
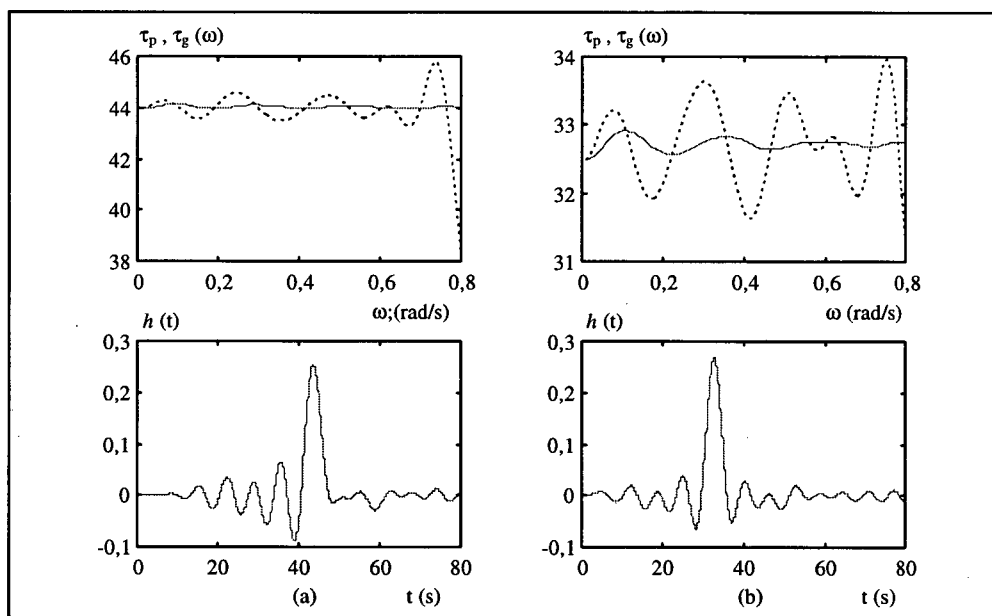


Fig. 4.21 - Filtro Elíptico 4ª ordem equalizado via  $\epsilon\tau_g$ . (a) mínimo  $\epsilon\tau_p$ , (b) mínimos  $\epsilon h$  e  $\epsilon\mathfrak{R}$ .

Tabela 15 - Resultado da equalização para o filtro Elíptico de 8ª ordem.

Mínimo erro obtido x 10 <sup>-5</sup> [número de seções equalizadoras]						
		$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$		$\epsilon\mathfrak{R}$	
$E\tau_p$	214 {6}		3,22 {4}		7,95 {4}	
	$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$
	26,6	15,4	782	7,95	782	3,22
$E\tau_g$	20,9 {8}		2,25 {6}		7,96 {6}	
	$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$
	9,13	11,7	105	7,96	105	2,25

Fig. 4.22 - Filtro Elíptico 8ª ordem equalizado via  $E\tau_p$ . (a) mínimo  $\epsilon\tau_p$ , (b) mínimos  $\epsilon h$  e  $\epsilon\mathfrak{R}$ .



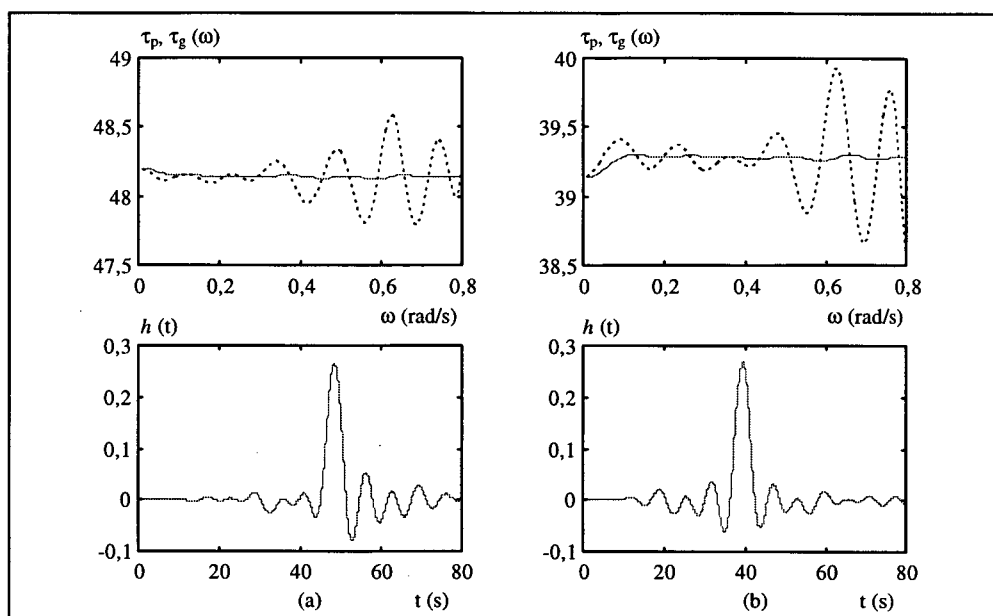


Fig. 4.23 - Filtro Elíptico 8ª ordem equalizado via  $E\tau_g$ . (a) mínimo  $\epsilon\tau_p$ , (b) mínimos  $\epsilon h$  e  $\epsilon\mathfrak{R}$ .

Tabela 16 - Resultado da equalização para o filtro Elíptico de 10ª ordem.

		Mínimo erro obtido x $10^{-5}$ [número de seções equalizadoras]					
		$\epsilon\tau_p$		$\epsilon h$		$\epsilon\mathfrak{R}$	
$E\tau_p$		122 {8}		15,8 {5}		7,86 {5}	
		$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$
		40,1	16,2	763	8,12	578	16,9
$E\tau_g$		10 {9}		5,34 {15}		7,39 {15}	
		$\epsilon h$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon\mathfrak{R}$	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$
		41,2	20,2	12,6	7,39	12,6	5,34

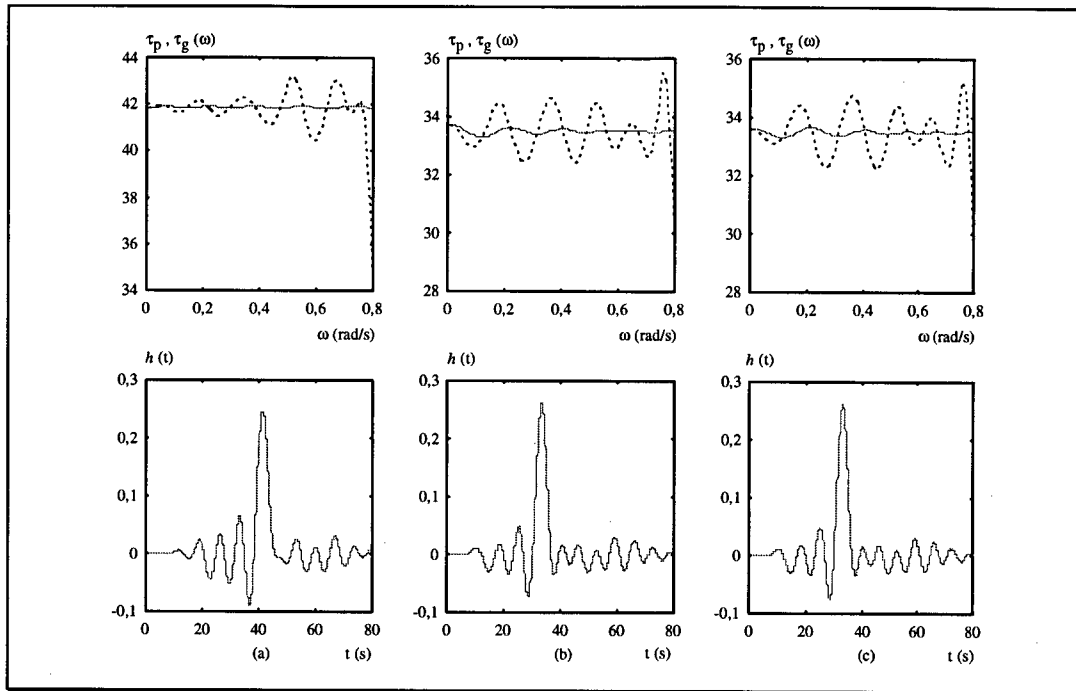


Fig. 4.24 - Filtro Elíptico 10<sup>a</sup> ordem equalizado via  $E\tau_p$ . (a) mínimo  $\epsilon_{\tau_p}$ , (b) mínimo  $\epsilon_h$  e (c) mínimo  $\epsilon_R$ .

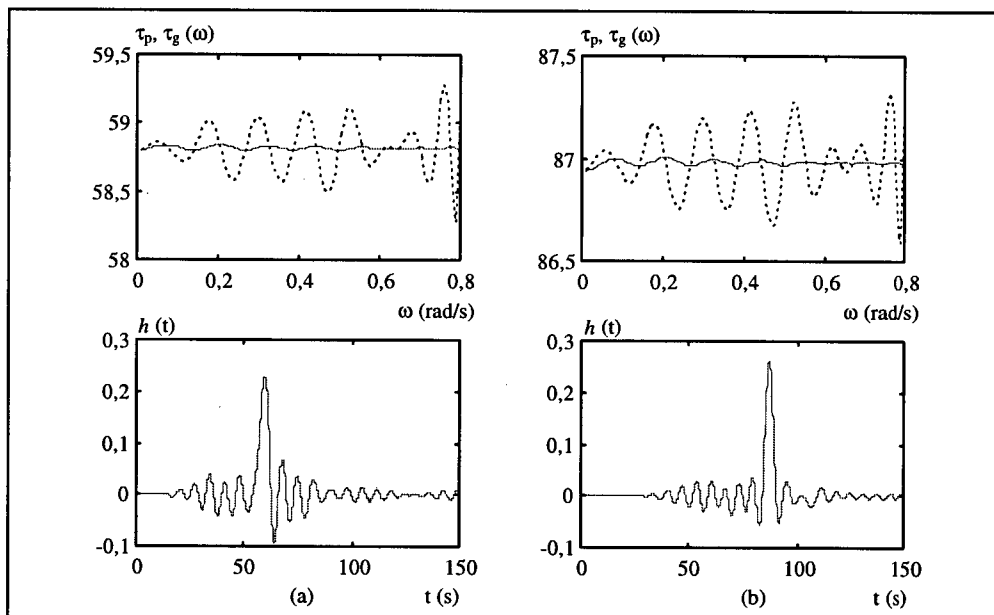


Fig. 4.25 - Filtro Elíptico 10<sup>a</sup> ordem equalizado via  $E\tau_p$ . (a) mínimo  $\epsilon_{\tau_p}$ , (b) mínimos  $\epsilon_h$  e  $\epsilon_R$ .

#### 4.5.4 Avaliação das equalizações realizadas

Abaixo elencamos alguns pontos que consideramos importante na avaliação e comparação dos procedimentos de equalização, tomando por base as tabelas e gráficos apresentados.

- A situação ideal seria aquela na qual as figuras de mérito apresentassem seus valores mínimos simultaneamente, onde podemos citar, por exemplo, a equalização do filtro Butterworth de 10<sup>a</sup> ordem equalizado através da aproximação do *atraso de grupo* (Tabela 10) e o filtro Chebyshev 10<sup>a</sup> ordem equalizado através da aproximação do *atraso de fase* (Tabela 13). Porém, isto nem sempre ocorre, devido principalmente da natureza não linear do problema que estamos tratando;
- Constata-se que os diferentes procedimentos e medidas levam a diferentes ordens para o equalizador. Estas situações implicam na obtenção de distintos tempos de propagação para a composição filtro original e equalizador;
- Quanto ao número de seções, vemos que, para os casos estudados a equalização baseada no *atraso de fase* ( $E\tau_p$ ), apresenta a ordem do equalizador ( $n$ ) menor ou igual a ordem obtida através da equalização realizada através do *atraso de grupo* ( $E\tau_g$ ), quando as figuras de mérito apresentam valores da mesma ordem de grandeza. Esta característica, conjuntamente com os menores valores de erro, são determinantes na escolha do processo de equalização da fase a ser utilizado.
- Dentre os dezoito casos apresentados nas Fig. 4.8 a 4.25 em apenas quatro casos houve

uma simultaneidade entre a minimização da energia do erro na aproximação do atraso de fase ( $\epsilon\tau_p$ ) e a minimização da energia do erro de simetria da resposta ao impulso ( $\epsilon h$ ). Nos demais casos verifica-se que, minimizar a energia do erro na aproximação do *atraso de fase* (ou do *atraso de grupo*) nem sempre conduz à uma resposta ao impulso incrementalmente simétrica.

#### 4.6 DISTORÇÃO POR INTERCEPTAÇÃO DE FASE

Como já discutido anteriormente, no caso de processamento de sinais onde a frequência inferior da banda de interesse não coincide com a origem, a equalização através do *atraso de grupo* leva a uma fase linear na referida banda mas, não garante que a fase seja uma função linear.

Para analisar esta situação, consideraremos a equalização de um filtro elíptico passa-baixas, denominado de LP9, cujas características encontram-se descritas na Tabela 3. Na Fig. 4.26 são ilustradas as características de *atraso de grupo* e de *atraso de fase* para este filtro, destacando que a banda de interesse está compreendida entre 0,4 e 0,9 rad/s.

Outra característica importante na avaliação dos procedimentos de equalização, para este caso, é verificar a resposta ao impulso. Na Fig. 4.27 apresentamos a resposta ao impulso para o filtro não equalizado.

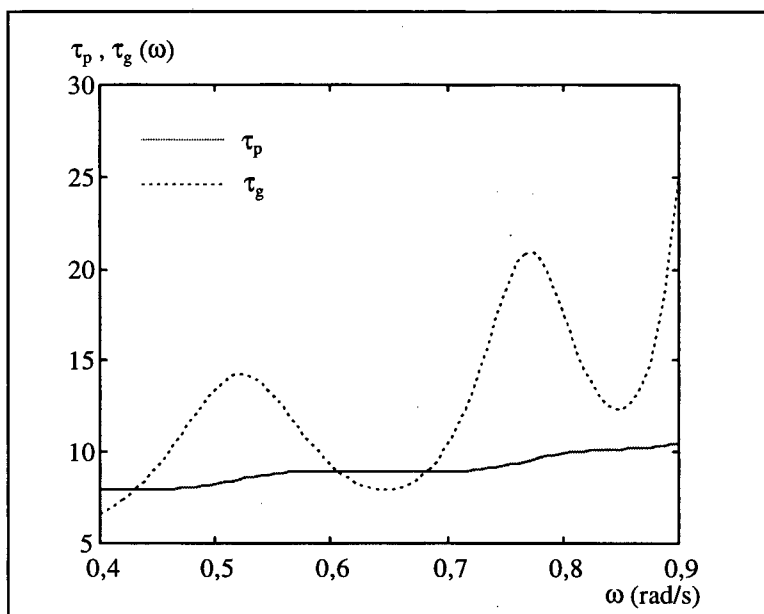


Fig. 4.26 - Comportamento das funções *atraso de grupo* e *atraso de fase* para o filtro LP9.

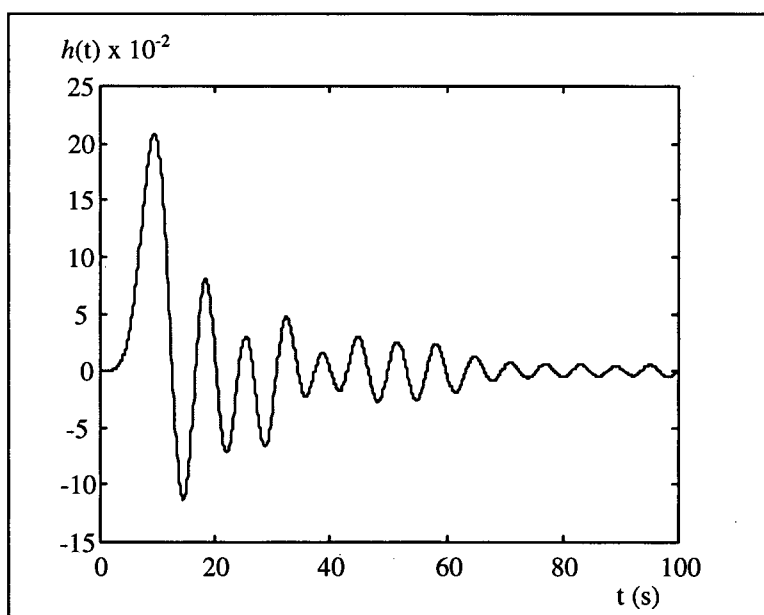


Fig. 4.27 - Resposta ao impulso para o filtro LP9 sem equalização.

Para analisar o problema de distorção por interceptação de fase vamos adotar um sinal  $x(t)$  (Fig. 4.28), obtido através da limitação em banda de um pseudo-ruído brando, como mostrado na seção 3.6.2. Neste caso faremos a limitação em banda com um filtro passa-faixa com as seguintes

características:  $A_{\max} = 0,01$  dB, largura de banda igual 0,64 rad/s, frequência central igual a 0,6 rad/s e a relação entre as frequências limites ( $(\omega_b - \omega_a) / \omega_2 - \omega_1 = \Omega_s$ ) igual a 1,28.

O espectro do sinal resultante é mostrado na Fig. 4.29, onde fica evidenciado que o sinal  $x(t)$  contém frequências bem distintas dentro da banda de interesse.

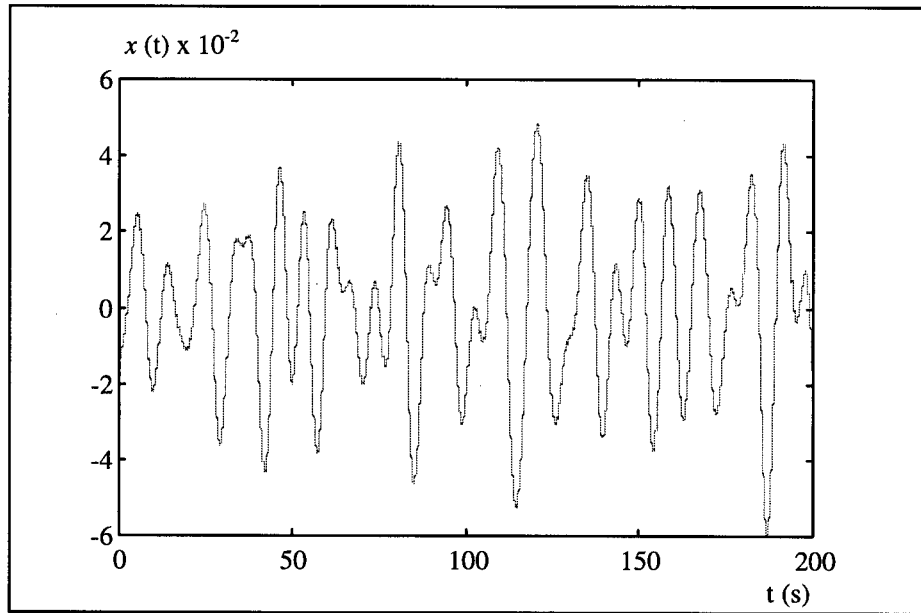


Fig. 4.28 - Característica temporal do sinal de excitação  $x(t)$ .

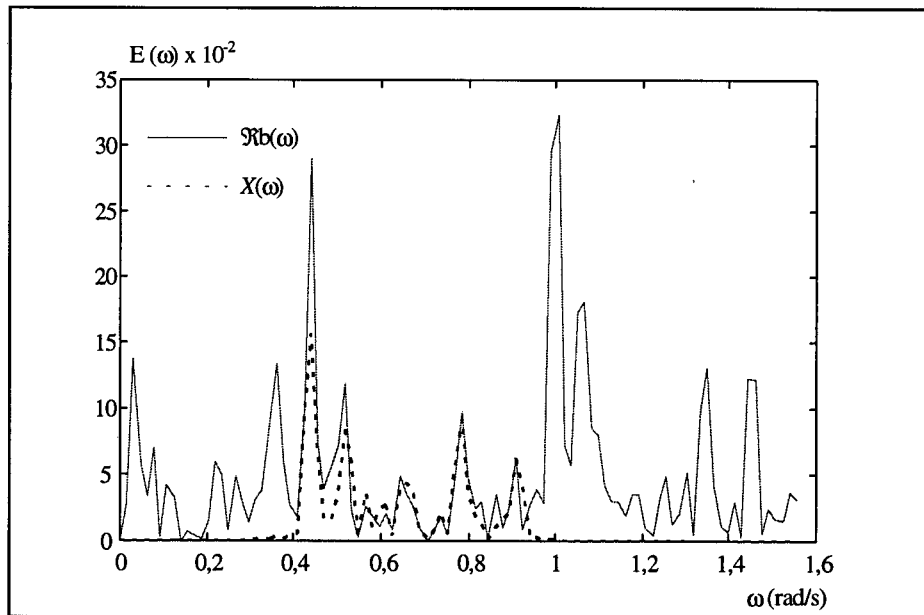


Fig. 4.29 - Espectro do pseudo-ruído branco e do sinal  $x(t)$ .

A Fig. 4.30, ilustra a distorção de fase provocada pelo filtro LP9 ao sinal de excitação. A resposta do filtro à esta excitação é representada por  $y(t)$ .

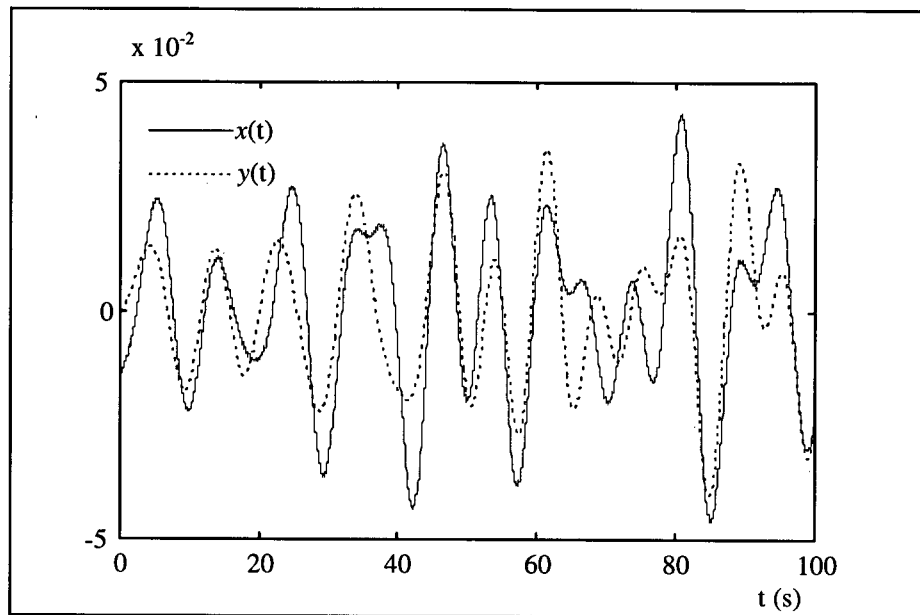


Fig. 4.30- Distorção de fase provocada pelo filtro LP9 ao sinal  $x(t)$ .

Numericamente, as características deste filtro, estão descritas na Tabela 17.

Tabela 17 - Características numéricas do filtro LP9.

	$\varepsilon\tau_p$	$\varepsilon h$	$\varepsilon\mathcal{R}$	Ordem ( $n_F+n_{EQ}$ )	$\bar{\tau}_p$	$\bar{\tau}_g$	$\Delta\tau_p(\%)$	$\Delta\tau_g(\%)$
LP9	0,57	$2,3 \times 10^{-3}$	$1,7 \times 10^{-4}$	10+0	9,04	12,6	33,13	279,19

Conhecidas as características do filtro e do sinal de excitação, adotou-se como objetivo de equalização da fase a diminuição da variação percentual em torno das funções *atraso de grupo* e *atraso de fase*.

A equalização através do *atraso de grupo* como função desejada foi realizada utilizando a variação percentual equivalente a 1/5 da variação encontrada na Tabela 17. Este valor corresponde a aproximadamente 55,8%.

Os resultados obtidos com esta equalização são mostrados na Tabela 18.

Tabela 18 - Resultados da equalização do filtro LP9 através do *atraso de grupo*.

	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$	$\epsilon\mathcal{R}$	Ordem ( $n_F+n_{EQ}$ )	$\bar{\tau}_p$	$\bar{\tau}_g$	$\Delta\tau_p$ (%)	$\Delta\tau_g$ (%)
LP9 + $E\tau_g$	1,57	$2,2 \times 10^{-3}$	$2,7 \times 10^{-4}$	10+6	23,6	28,3	19,5	50

Para a equalização através da função *atraso de fase* foi estimada uma redução de 1/10 da variação mostrada na Tabela 17 para o *atraso de fase*, ou seja, o limite de variação percentual, imposto ao algoritmo de equalização é igual a 3,3 %.

Os resultados obtidos com a equalização de fase, tendo o *atraso de fase* como função desejada, são mostrados na Tabela 19.

Tabela 19 - Resultado da equalização do filtro LP9 através do *atraso de fase*.

	$\epsilon\tau_p$	$\epsilon h$	$\epsilon\mathcal{R}$	Ordem ( $n_F+n_{EQ}$ )	$\bar{\tau}_p$	$\bar{\tau}_g$	$\Delta\tau_p$ (%)	$\Delta\tau_g$ (%)
LP9 + $E\tau_p$	$3,9 \times 10^{-2}$	$3,5 \times 10^{-4}$	$3,1 \times 10^{-5}$	10+4	20,4	20,7	3,3	84,7

Nas figuras Fig. 4.31 e Fig. 4.32 pode-se observar claramente as diferenças relativas aos dois processos de equalização. A equalização através da função *atraso de fase* (Fig. 4.32) minimiza a dispersão em torno do seu valor e leva simultaneamente a uma minimização da dispersão do *atraso de grupo*, situação esta que não tem reciprocidade na equalização através do



*atraso de grupo* (Fig. 4.31).

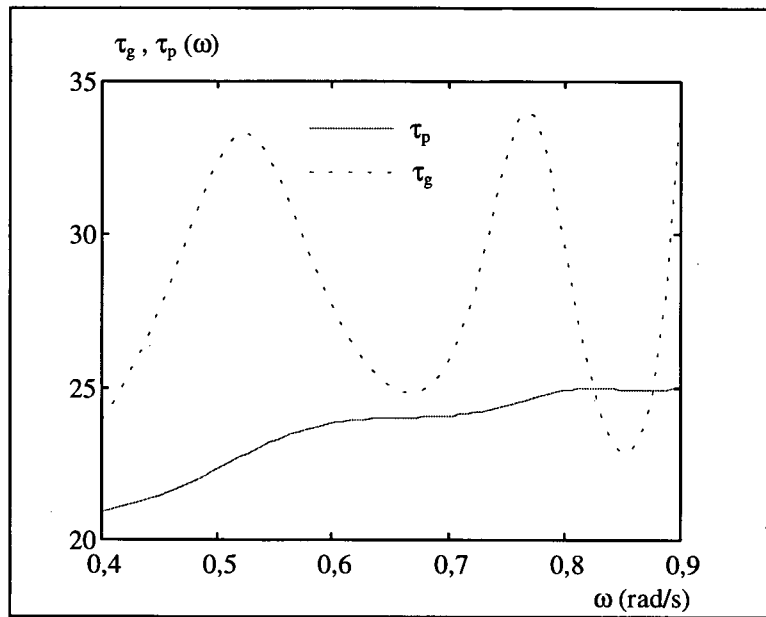


Fig. 4.31- *Atraso de grupo* e *Atraso de fase* para o filtro LP9 com equalização pelo *atraso de grupo*.

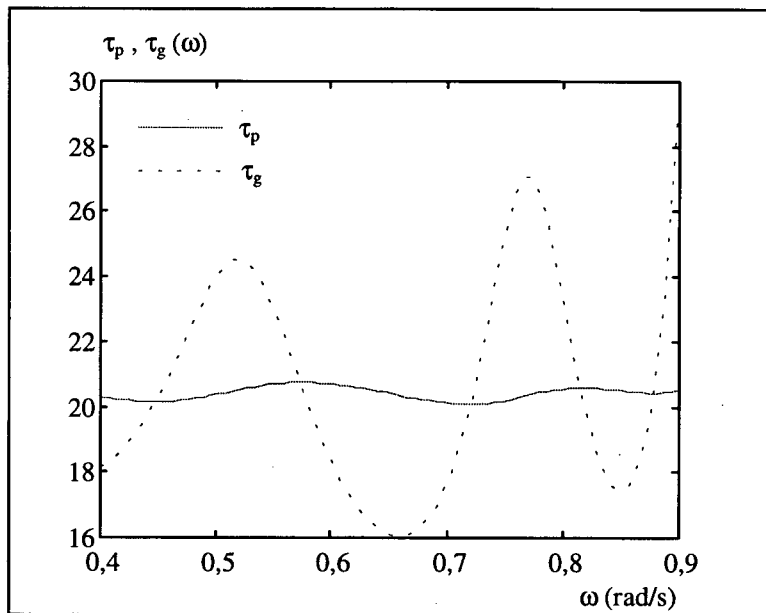


Fig. 4.32 - *Atraso de grupo* e *Atraso de fase* para o filtro LP9 com equalização pelo *atraso de fase*.

Um dado relativo às tabelas 18 e 19 que merece atenção é a diferença de ordem obtida para o equalizador. Pode ser verificado que a equalização através do *atraso de grupo* exigiu um número maior de seções passa-tudo de segunda ordem, no caso três, comparado à duas seções

obtidas através da equalização através do *atraso de fase*.

Verifica-se ainda que, embora a equalização através do *atraso de grupo* tenha melhorado a dispersão em torno do seu valor médio (50%) comparado à equalização através do *atraso de fase* (84,7%) a dispersão em torno do *atraso de fase* (19,5%), é pior do que a dispersão obtida com a equalização através do *atraso de fase* (3,3%).

As Fig. 4.33 e Fig. 4.34 ilustram as diferenças entre os resultados da equalização, quando é analisada a energia do erro entre o sinal de saída do sistema ( $y(t)$ ) e o sinal de entrada ( $x(t)$ ). Vê-se que, embora não ocorra uma perfeita linearização da fase, a equalização através do *atraso de fase* apresenta uma importante redução do valor da energia do erro  $\epsilon_{\mathcal{R}}$ , enquanto que a equalização através do *atraso de grupo* piora, visual e numericamente, este erro.

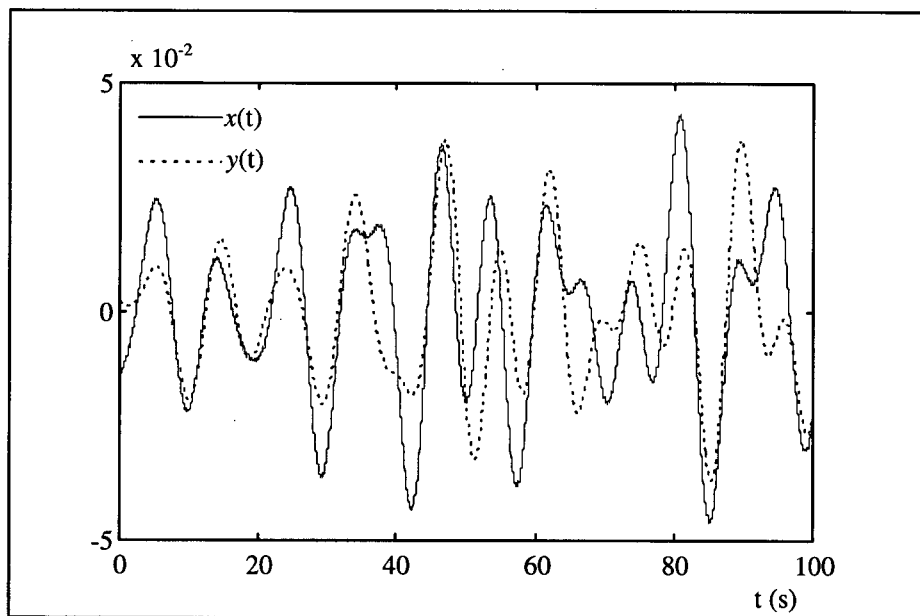


Fig. 4.33 - Característica dos sinais  $x(t)$  e  $y(t)$  para o filtro LP9 equalizado através do *atraso de grupo*.

Na Fig. 4.34 a resposta do filtro equalizado, através do *atraso de fase*, descontado o tempo de propagação, confunde-se com o sinal de entrada  $x(t)$  e desta forma pode-se dizer que o

sinal de saída  $y(t)$  é uma réplica atrasada do sinal de entrada. Por outro lado, através da rápida inspeção visual da Fig. 4.33 pode-se afirmar que as características do sinal  $y(t)$  quando comparado ao sinal de entrada  $x(t)$  apresentam uma forte degradação, que pode comprometer a interpretação do mesmo.

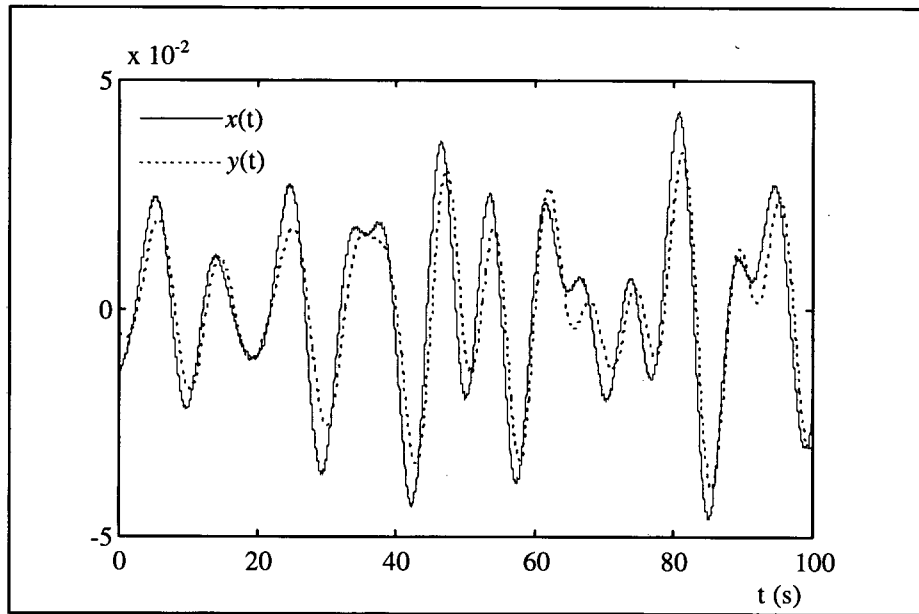


Fig. 4.34 - Característica dos sinais  $x(t)$  e  $y(t)$  para o filtro LP9 equalizado através do *atraso de fase*.

As Fig. 4.35 e Fig. 4.36 ilustram a resposta ao impulso devida aos dois casos de equalização: através do *atraso de grupo* e através do *atraso de fase* respectivamente. As características apresentadas mostram claramente que o procedimento de equalização através do *atraso de fase* conduz à uma fase linear e conseqüentemente a resposta ao impulso torna-se mais simétrica.

Os resultados obtidos, nesta seção, demonstraram que a aproximação do *tempo de propagação* através do *atraso de grupo*, quando realizado em uma banda de frequência na qual a frequência inferior difere da origem, pode apresentar *distorção por interceptação de fase* [1].

Embora o *tempo de propagação* aproxime-se, incrementalmente, de um valor constante e a linearidade da fase seja mantida dentro da banda de interesse, não se pode garantir o comportamento da fase na origem.

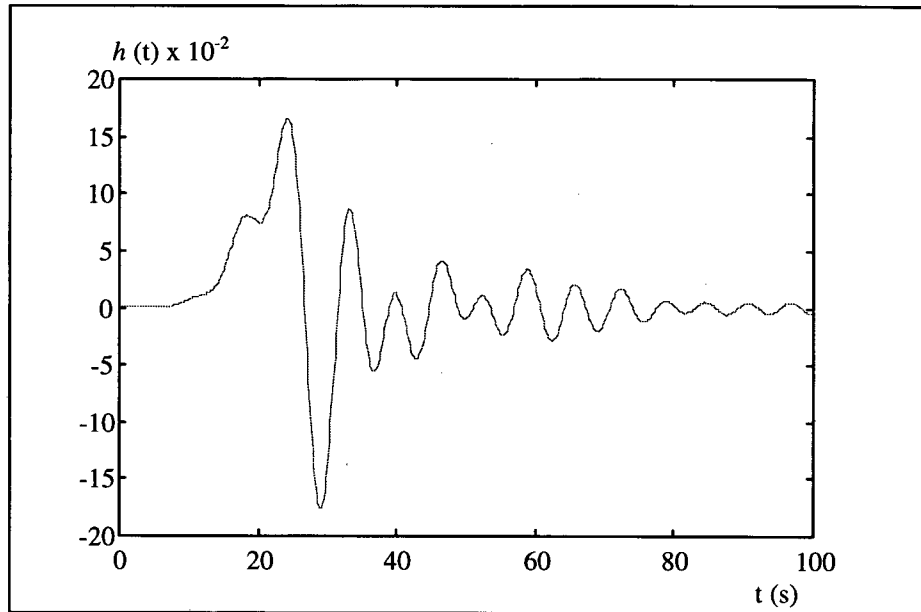


Fig. 4.35 - Resposta ao impulso para o filtro LP9 equalizado através do *atraso de grupo*.

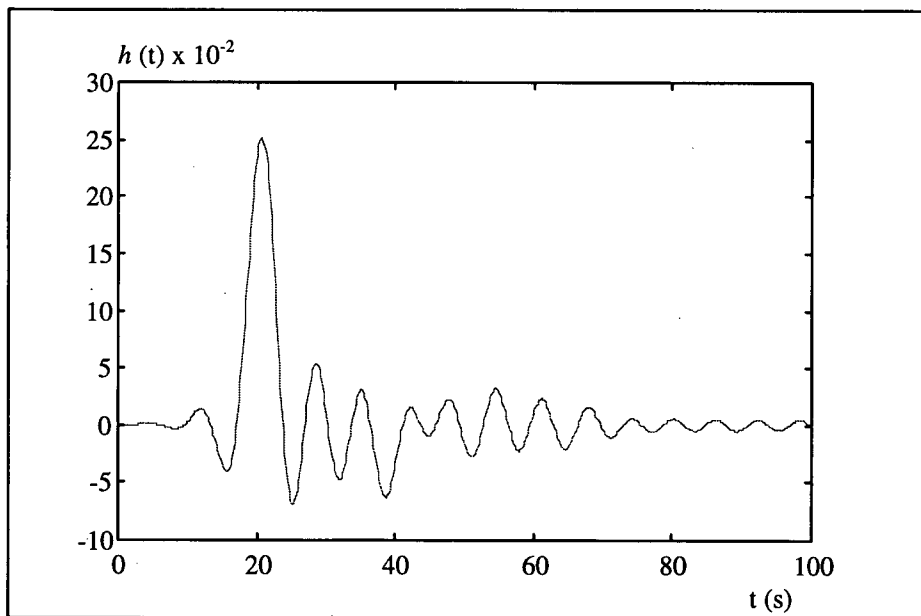


Fig. 4.36 - Resposta ao impulso para o filtro LP9 equalizado através do *atraso de fase*.

A equalização realizada através do *atraso de fase*, além de requerer um número menor de

seções de 2ª ordem, garante a linearidade da fase na banda de interesse e leva a fase, na origem, a apresentar deslocamento zero ou um múltiplo de  $\pi$  rad.

## 4.7 CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos com a equalização de filtros passa-baixas para diversas ordens e tipos de aproximações de magnitude.

Foram utilizadas as figuras de mérito, introduzidas no Capítulo 3, a fim de avaliar o comportamento dos filtros equalizados e não equalizados de forma a criar um sentimento para melhor interpretar e os resultados obtidos através dos dois procedimentos de equalização.

Através dos dados obtidos verificamos que existe uma correlação muito forte dos dois processos de equalização com a simetria da resposta ao impulso, em virtude de os mesmos conduzirem aproximadamente a fase para a linearidade. Ao passo que o uso desta medida seja mais difundido, permite que tenhamos um sentimento mais apurado sobre seu comportamento.

Os resultados obtidos, até o momento, não resolvem, ainda, completamente todos os problemas de equalização. Por outro lado, eles nos permitiram aprimorar significativamente a compreensão dos procedimentos de equalização de fase, os quais, dentro do nosso conhecimento, tem sido realizados apenas baseados na função *atraso de grupo*. É importante ainda mencionar que em praticamente todas as nossas avaliações, o procedimento baseado no *atraso de grupo* não apresentou melhor resultado, quando comparado com o procedimento baseado no *atraso de fase*.

Este trabalho apresentou a função *atraso de fase* como sendo uma alternativa à função *atraso de grupo*, capaz de realizar a síntese de funções de transferência de equalizadores de fase, com o intuito de corrigir as distorções provocadas pela fase não linear dos filtros seletores. Isto proporcionou, em alguns casos, uma redução do número de seções de 2ª ordem dos equalizadores, com conseqüente redução no *tempo de propagação* do sinal.

Uma das grandes vantagens da equalização através da função *atraso de fase*, é a garantia de que não ocorrerá *distorção por interceptação de fase*. Esta distorção pode existir quando a equalização é realizada através do *atraso de grupo*.

O estudo da função *atraso de fase* também promoveu o desenvolvimento de uma nova abordagem para a estimação dos valores a serem atribuídos aos atrasos tanto na aproximação pelo *atraso de fase* quanto pelo *atraso de grupo*. A utilização do valor médio do “atraso”, calculado a cada iteração, proporciona uma redução do tempo de propagação, garantindo uma diminuição do número de seções equalizadoras, e ainda evitando a necessidade de se fazer a priori, uma definição hipotética a respeito de qual “atraso” deve ser especificado.

Foram também introduzidas e analisadas figuras de mérito com o intuito de avaliar as características da fase.

Neste trabalho aplicou-se a equalização de fase somente para filtros passa-baixas, ficando como sugestão para futuros trabalhos, os estudos referentes à equalização de outros tipos de

funções seletoras.

Uma perspectiva de aplicação real da utilização desta metodologia é no projeto de filtros IIR bidimensionais para o tratamento de imagens.

Fica também em aberto uma discussão mais aprofundada a respeito da importância da “simetria da resposta ao impulso” sobre as características de fase. Esta medida poderia ser utilizada como a “função desejada” no processo de otimização, ao invés da utilização de medidas transformadas da função fase (*atraso de grupo e atraso de fase*).

## APÊNDICE A

### RESULTADOS GERAIS DOS PROCEDIMENTOS DE EQUALIZAÇÃO

Os resultados obtidos com os diversos limites percentuais impostos ao algoritmo de equalização são apresentados nas tabelas a seguir. Os valores em destaque representam os mínimos valores obtidos para as figuras de mérito, dentro dos limites estabelecidos.

$\Delta\tau_g$  % ou  $\Delta\tau_p$  % (1) - Variação inicial especificada

$\Delta\tau_g$  % ou  $\Delta\tau_p$  % (2) - Variação obtida após o procedimento de equalização

#### A.1 - RESULTADOS DA EQUALIZAÇÃO DOS FILTROS BUTTERWORTH.

Tabela A1- Filtros Butterworth equalizados pelo atraso de grupo.

Filtro	$\Delta\tau_g$ % (1)	$N_{EQ}$	$\bar{\tau}_p$ (s)	$\Delta\tau_p$ %	$\varepsilon\tau_p$ $\times 10^{-5}$	$\bar{\tau}_g$ (s)	$\Delta\tau_g$ % (2)	$\varepsilon\tau_g$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon h$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon\mathcal{R}$ $\times 10^{-5}$
LP1	0.5	6	21.12	0.24	21.0	21.11	0.48	106	15.6	1.25
LP1	1.0	4	14.01	0.24	<b>9.55</b>	14.01	0.51	49.5	40.9	2.76
LP1	2.0	2	7.66	0.79	38.5	7.67	1.32	113	<b>10.2</b>	0.60
LP1	4.0	2	7.68	0.72	28.7	7.68	1.48	134	11.3	<b>0.50</b>
LP2	0.5	6	23.02	0.15	<b>7.94</b>	23.02	0.36	66.5	<b>4.46</b>	0.23
LP2	1.0	4	15.73	0.21	11.3	15.73	0.41	45.1	8.30	0.026
LP2	2.0	3	12.87	0.32	13.5	12.89	0.66	50.6	10.7	0.23
LP2	4.0	2	12.71	0.63	70.2	12.70	1.13	234	8.77	<b>0.015</b>
LP3	0.5	7	26.66	0.12	6.69	26.67	0.34	74.1	5.28	0.67
LP3	1.0	4	16.59	0.05	<b>0.69</b>	16.59	0.18	8.44	<b>2.47</b>	<b>0.015</b>
LP3	2.0	3	13.48	0.26	10.6	13.49	0.45	42.8	3.95	0.02
LP3	4.0	2	13.32	0.73	93.7	13.33	1.85	643	2.81	0.32



Tabela A2 - Filtros Butterworth equalizados pelo *atraso de fase*.

Filtro	$\Delta\tau_p\%$ (1)	$N_{EQ}$	$\bar{\tau}_p$ (s)	$\Delta\tau_p\%$ (2)	$\varepsilon\tau_p$ $\times 10^{-5}$	$\bar{\tau}_g$ (s)	$\Delta\tau_g\%$	$\varepsilon\tau_g$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon h$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon\mathcal{R}$ $\times 10^{-5}$
LP1	0.25	2	6.76	0.16	1.29	6.76	1.16	34.7	113	2.14
LP1	0.50	2	7.75	0.12	0.99	7.76	1.29	60.7	55.2	0.80
LP1	1.00	1	6.48	0.18	0.65	6.49	1.37	61.8	72.5	1.13
LP1	2.00	1	6.48	0.18	0.65	6.49	1.37	61.8	72.5	1.13
LP2	0.25	2	12.53	0.03	0.14	12.53	0.45	12.1	8.28	0.043
LP2	0.50	2	12.37	0.21	8.58	12.38	1.44	166	7.15	0.032
LP2	1.00	2	12.37	0.21	8.58	12.38	1.44	166	7.15	0.032
LP2	2.00	1	8.65	0.47	15.8	8.63	1.88	291	9.86	0.11
LP3	0.25	2	12.66	0.04	0.28	12.66	0.52	21.6	5.43	0.62
LP3	0.50	2	13.14	0.42	37.1	13.16	2.09	534	2.87	0.13
LP3	1.00	2	13.14	0.42	37.1	13.16	2.09	534	2.87	0.13
LP3	2.00	1	9.32	0.32	8.54	9.30	1.28	158	25.5	1.07

## A.2 - RESULTADOS DA EQUALIZAÇÃO DOS FILTROS CHEBYSHEV.

Tabela A3 - Filtros Chebyshev equalizados pelo *atraso de grupo*.

Filtro	$\Delta\tau_g\%$ (1)	$N_{EQ}$	$\bar{\tau}_p$ (s)	$\Delta\tau_p\%$	$\varepsilon\tau_p$ $\times 10^{-5}$	$\bar{\tau}_g$ (s)	$\Delta\tau_g\%$ (2)	$\varepsilon\tau_g$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon h$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon\mathcal{R}$ $\times 10^{-5}$
LP4	1.00	4	21.07	0.44	46.9	21.08	0.93	304	7.99	7.46
LP4	2.00	4	20.80	0.38	56.4	20.79	1.81	1150	6.95	7.79
LP4	4.00	3	16.33	0.34	21.2	16.35	3.56	1220	30.7	11.0
LP4	8.00	3	15.07	1.30	276	15.02	4.95	3930	8.97	7.50
LP5	1.00	4	25.73	0.11	4.77	25.73	0.62	147	2.19	0.28
LP5	2.00	4	25.60	0.44	72.9	25.60	1.70	1670	1.95	0.58
LP5	4.00	3	22.65	0.42	43.1	22.65	2.16	1020	3.46	0.37
LP5	8.00	3	20.79	2.25	1370	20.85	6.79	12100	15.5	2.71
LP6	1.00	5	31.54	0.53	120	31.56	0.87	546	1.59	0.10
LP6	2.00	3	21.72	0.46	57.1	21.73	1.63	760	15.7	1.02
LP6	4.00	2	18.77	0.77	115	18.78	1.57	792	26.8	3.49
LP6	8.00	2	18.77	0.77	115	18.78	1.57	792	26.8	3.49



Tabela A4 - Filtros Chebyshev equalizados pelo *atraso de fase*.

Filtro	$\Delta\tau_p\%$ (1)	$N_{EQ}$	$\bar{\tau}_p$ (s)	$\Delta\tau_p\%$ (2)	$\varepsilon\tau_p$ $\times 10^{-5}$	$\bar{\tau}_g$ (s)	$\Delta\tau_g\%$	$\varepsilon\tau_g$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon h$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon\mathcal{R}$ $\times 10^{-5}$
LP4	0.25	3	16.24	0.22	<b>14.5</b>	16.23	4.16	2190	15.2	9.18
LP4	0.50	4	18.87	0.48	38.6	18.81	10.53	11000	<b>8.24</b>	<b>7.61</b>
LP4	1.00	3	17.09	0.83	86.7	16.99	18.20	25100	13.2	8.43
LP4	2.00	3	17.62	1.17	132	17.46	26.42	52400	20.9	10.2
LP5	0.25	3	20.79	0.20	<b>10.3</b>	20.82	6.10	3860	<b>9.72</b>	<b>1.70</b>
LP5	0.50	3	19.72	0.47	61.2	19.79	12.08	14000	31.0	4.79
LP5	1.00	3	19.76	0.54	96.9	19.78	9.99	10600	22.0	3.87
LP5	2.00	2	15.93	1.43	506	15.82	16.04	35400	13.9	1.72
LP6	0.25	3	22.58	0.21	<b>18.1</b>	22.57	3.77	2360	<b>8.31</b>	<b>0.48</b>
LP6	0.50	3	26.46	0.46	74.0	26.37	11.40	21600	8.93	0.85
LP6	1.00	2	19.71	0.68	114	19.65	5.10	4890	14.6	1.35
LP6	2.00	1	13.71	1.28	145	13.81	10.49	10400	75.8	7.85

### A.3 - RESULTADOS DA EQUALIZAÇÃO DOS FILTROS ELÍPTICOS.

Tabela A5 - Filtros Elípticos equalizados pelo *atraso de grupo*.

Filtro	$\Delta\tau_g\%$ (1)	$N_{EQ}$	$\bar{\tau}_p$ (s)	$\Delta\tau_p\%$	$\varepsilon\tau_p$ $\times 10^{-5}$	$\bar{\tau}_g$ (s)	$\Delta\tau_g\%$ (2)	$\varepsilon\tau_g$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon h$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon\mathcal{R}$ $\times 10^{-5}$
LP7	1.00	4	18.22	0.28	<b>17.3</b>	18.23	0.80	173	33.4	10.8
LP7	2.00	3	14.18	0.69	50.9	14.18	1.80	584	<b>19.7</b>	<b>8.25</b>
LP7	4.00	3	14.82	1.93	618	14.80	4.06	3060	22.8	9.64
LP7	8.00	2	13.34	0.50	39.2	13.34	2.26	713	22.9	8.98
LP8	1.00	9	56.68	0.22	<b>77.1</b>	56.66	0.96	1530	3.53	8.05
LP8	2.00	8	48.14	0.17	<b>20.9</b>	48.14	1.69	2530	9.13	11.7
LP8	4.00	6	39.27	0.43	105	39.28	3.66	6480	<b>2.25</b>	<b>7.96</b>
LP8	8.00	5	32.38	2.62	3640	32.33	7.38	29200	8.63	10.5
LP9	1.00	15	86.98	0.08	12.6	86.98	0.85	2420	<b>5.34</b>	<b>7.39</b>
LP9	2.00	9	58.82	0.08	<b>10.0</b>	58.82	1.73	3130	41.2	20.2
LP9	4.00	8	49.32	1.62	2030	49.28	3.94	29500	56.5	20.1
LP9	8.00	10	55.49	1.15	1510	55.48	7.33	57200	13.6	10.5

Tabela A6 - Filtros Elípticos equalizados pelo atraso de fase.

Filtro	$\Delta\tau_p\%$ (1)	$N_{EQ}$	$\bar{\tau}_p$ (s)	$\Delta\tau_p\%$ (2)	$\varepsilon\tau_p$ $\times 10^{-5}$	$\bar{\tau}_g$ (s)	$\Delta\tau_g\%$	$\varepsilon\tau_g$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon h$ $\times 10^{-5}$	$\varepsilon\mathcal{R}$ $\times 10^{-5}$
LP7	0.50	4	18.08	0.25	<b>22.4</b>	18.07	2.54	1270	10.5	8.32
LP7	1.00	4	20.81	0.86	261	20.83	8.14	15900	<b>4.02</b>	7.30
LP7	2.00	3	13.30	1.20	225	13.40	25.57	32400	108	20.1
LP7	4.00	3	15.43	1.37	506	15.32	15.07	23500	8.68	<b>7.18</b>
LP8	0.50	6	44.03	0.43	<b>214</b>	43.92	19.47	86200	26.6	15.4
LP8	1.00	7	30.53	0.62	291	30.44	11.98	65900	21.6	11.9
LP8	2.00	4	32.72	1.36	782	32.74	8.40	36100	<b>3.22</b>	<b>7.95</b>
LP8	4.00	2	18.39	3.74	3470	18.02	68.41	4.18E5	21.8	8.89
LP9	0.50	8	41.87	0.43	<b>122</b>	41.72	25.92	1.26E5	40.1	16.2
LP9	1.00	5	33.47	0.98	578	33.43	20.49	7.46E4	16.9	<b>7.86</b>
LP9	2.00	5	33.49	1.39	763	33.48	20.50	6.91E4	<b>15.8</b>	8.12
LP9	4.00	3	23.83	2.98	3470	24.27	64.94	7.08E5	37.1	13.9



## APÊNDICE B

### COEFICIENTES DOS EQUALIZADORES

As tabelas abaixo apresentam os coeficientes ( $x_i, y_i$ ) da função de transferência dos filtros passa-tudo (equalizadores), segundo a seguinte representação:

$$H_{EQ}(s) = \prod_{i=1}^{n_{EQ}/2} \frac{s^2 - x_i s + y_i}{s^2 + x_i s + y_i} \quad (\text{B.1})$$

onde:  $x = \frac{\omega_0}{Q}$  e  $y = \omega_0^2$ .

Os coeficientes representam o equalizador que proporcionou o menor valor para as figuras de mérito correspondentes:  $\varepsilon\tau_p$ ,  $\varepsilon h$  e  $\varepsilon\mathfrak{R}$ , para ambos os processos de equalização ( $E\tau_p$  - equalização via *atraso de fase* e  $E\tau_g$  - equalização via *atraso de grupo*).

#### B.1 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP1 E EQUALIZADOR

$$H_{LP1}(s) = \frac{1.001188}{s^2 + 0.765821s + 1.001188} \cdot \frac{1.001188}{s^2 + 1.848856s + 1.001188} \quad (\text{B.2})$$

Tabela B1 - Coeficientes do filtro equalizador para o filtro LP1

	$\varepsilon\tau_p$		$\varepsilon h$		$\varepsilon\mathfrak{R}$	
	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
$E\tau_g$	1.2430	0.4463	1.2844	0.5612	1.2810	0.5565
	0.1128	1.5019	0.4887	2.2697	0.4809	2.2550
	1.3255	0.7084				
	1.0969	1.1476				
$E\tau_p$	1.6487	0.8517	1.5061	0.7145	1.5061	0.7145
			1.9817	0.4293	1.9817	0.4293

## B.2 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP2 E EQUALIZADOR

$$H_{LP2}(s) = \frac{1.300759}{s^2 + 0.445004s + 1.300759} \cdot \frac{1.300759}{s^2 + 1.267265s + 1.300759} \cdot \frac{1.300759}{s^2 + 1.896596 + 1.300759} \cdot \frac{1.300759}{s^2 + 2.237187s + 1.300759} \quad (B.3)$$

Tabela B2 - Coeficientes do filtro equalizador para o filtro LP2

	$\epsilon\tau_p$		$\epsilon h$		$\epsilon\mathfrak{R}$	
	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
$\epsilon\tau_g$	1.3521	0.4539	1.3521	0.4539	0.1312	0.4596
	0.2412	1.8452	0.2412	1.8452	0.9853	0.7709
	1.8650	0.7745	1.8650	0.7745		
	1.5039	1.7917	1.5039	1.7917		
	0.7338	0.8658	0.7338	0.8658		
	0.8625	0.4164	0.8625	0.4164		
$\epsilon\tau_p$	1.2568	0.4544	1.5584	0.6126	1.5584	0.6126
	1.0680	0.8522	1.0720	0.7648	1.0720	0.7648

## B.3 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP3 E EQUALIZADOR

$$H_{LP3}(s) = \frac{1.456389}{s^2 + 0.377573s + 1.456389} \cdot \frac{1.456389}{s^2 + 1.09576s + 1.456389} \cdot \frac{1.456389}{s^2 + 1.706686 + 1.456389} \cdot \frac{1.456389}{s^2 + 2.15055s + 1.456389} \cdot \frac{1.456389}{s^2 + 2.383903s + 1.456389} \quad (B.4)$$

Tabela B3 - Coeficientes do filtro equalizador para o filtro LP3

	$\epsilon\tau_p$		$\epsilon h$		$\epsilon\mathfrak{R}$	
	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
$\epsilon\tau_g$	1.2194	0.4197	1.2194	0.4197	1.2194	0.4197
	0.0639	2.8635	0.0639	2.8635	0.0639	2.8635
	1.3225	0.7522	1.3225	0.7522	1.3225	0.7522
	0.9986	1.0430	0.9986	1.0430	0.9986	1.0430
$\epsilon\tau_p$	1.6102	0.6890	1.7208	0.6819	1.7208	0.6819
	1.2707	0.9426	1.0139	0.7202	1.0139	0.7202

## B.4 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP4 E EQUALIZADOR

$$H_{LP4}(s) = \frac{0.125297}{s^2 + 0.170341s + 0.903087} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.411239s + 0.195980} \quad (\text{B.5})$$

Tabela B4 - Coeficientes do filtro equalizador para o filtro LP4

	$\varepsilon\tau_p$		$\varepsilon h$		$\varepsilon\mathcal{R}$	
	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
$E\tau_g$	0.5036	0.5035	0.5266	0.6871	0.4749	0.7222
	0.5537	1.1304	5.4921	3.0238	6.8420	3.3184
	0.5915	0.1071	0.5954	0.1083	0.5613	0.1026
			0.5835	0.4894	0.5132	0.4405
$E\tau_p$	0.6542	1.3254	111	4261	111	4261
	0.4726	0.4998	0.4243	0.5340	0.4243	0.5340
	0.5848	0.1057	0.5948	0.1063	0.5948	0.1063
			0.9678	0.5155	0.9678	0.5155

## B.5 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP5 E EQUALIZADOR

$$H_{LP5}(s) = \frac{0.022365}{s^2 + 0.087240s + 1.011932} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.248439s + 0.741334} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.371815s + 0.358650} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.438586s + 0.088052} \quad (\text{B.6})$$

Tabela B5 - Coeficientes do filtro equalizador para o filtro LP5

	$\varepsilon\tau_p$		$\varepsilon h$		$\varepsilon\mathcal{R}$	
	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
$E\tau_g$	0.4195	0.5782	0.5009	0.1819	0.4195	0.5782
	6.0336	4.9097	34.499	8.0509	6.0336	4.9097
	0.8343	0.1539	0.4691	0.5975	0.8343	0.1539
	0.4899	0.2149	0.9264	0.5202	0.4899	0.2149
$E\tau_p$	1921	495	1921	495	1921	495
	0.5122	0.6290	0.5122	0.6290	0.5122	0.6290
	0.5195	0.2087	0.5195	0.2087	0.5195	0.2087



## B.6 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP6 E EQUALIZADOR

$$H_{LP6}(s) = \frac{0.012797}{s^2 + 0.081577s + 1.043513} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.236747s + 0.861879} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.368742s + 0.567985} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.464642s + 0.274093} \cdot \frac{1}{s^2 + 0.515059s + 0.092457} \quad (\text{B.7})$$

Tabela B6 - Coeficientes do filtro equalizador para o filtro LP6

	$\varepsilon\tau_p$		$\varepsilon h$		$\varepsilon\mathcal{R}$	
	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
$E\tau_g$	0.6997	0.6089	0.4272	0.3845	0.4272	0.3845
	16.548	6.1751	1.1289	4.5436	1.1289	4.5436
	0.7531	0.2634	0.4406	0.1671	0.4406	0.1671
			0.3866	0.7083	0.3866	0.7083
		0.4637	0.0660	0.4637	0.0660	
$E\tau_p$	1681	506.32	1681	506.32	1681	506.32
	0.5561	0.5637	0.5561	0.5637	0.5561	0.5637
	0.5880	0.2058	0.5880	0.2058	0.5880	0.2058

## B.7 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP7 E EQUALIZADOR

$$H_{LP7}(s) = \frac{0.079728}{s^2 + 0.450420s + 0.264226} \cdot \frac{2.192723}{s^2 + 0.124008s + 0.934589} \quad (\text{B.8})$$

Tabela B7 - Coeficientes do filtro equalizador para o filtro LP7

	$\varepsilon\tau_p$		$\varepsilon h$		$\varepsilon\mathcal{R}$	
	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
$E\tau_g$	217.03	83.08	303.22	679.88	303.22	679.88
	0.5102	0.5613	0.4999	0.6219	0.4999	0.6219
	0.6434	0.1537	0.6292	0.1288	0.6292	0.1288
	0.5158	1.1066				
$E\tau_p$	0.1870	3.9568	16.026	5.6133	1014.6	442.9
	0.4596	0.6175	0.3544	0.6255	0.9491	0.2620
	0.7657	0.1905	0.8307	0.2290	0.5487	0.5938
	1.6717	0.5773	0.7938	0.3250		

### B.8 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP8 E EQUALIZADOR

$$H_{LP8}(s) = \frac{(s^2 + 37.140904)1.571262 \times 10^{-5}}{s^2 + 0.252321s + 0.070024} \cdot \frac{s^2 + 5.051119}{s^2 + 0.183582s + 0.403935} \cdot \frac{s^2 + 2.568712}{s^2 + 0.099359s + 0.775097} \cdot \frac{s^2 + 2.013484}{s^2 + 0.030145s + 0.982289} \quad (\text{B.9})$$

Tabela B8 - Coeficientes do filtro equalizador para o filtro LP8

	$\varepsilon\tau_p$		$\varepsilon h$		$\varepsilon\mathfrak{R}$	
	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
$E\tau_g$	1208.8	187.77	12.619	2.9009	12.619	2.9009
	0.2173	0.5690	0.2796	0.2670	0.2796	0.2670
	0.2768	0.2732	0.2142	0.5998	0.2142	0.5998
	0.3066	0.0389	0.3387	0.0392	0.3387	0.0392
	0.2996	0.1446	0.3053	0.1505	0.3053	0.1505
	0.2133	0.7975	0.6577	0.6417	0.6577	0.6417
	0.6596	0.2982				
	0.7488	0.4284				
$E\tau_p$	0.4278	0.1220	0.2441	0.2705	0.2441	0.2705
	0.3280	0.2758	0.1950	0.5849	0.1950	0.5849
	0.1674	0.5697	0.2760	0.1285	0.2760	0.1285
	0.2841	0.0257	0.2706	0.0252	0.2706	0.0252
	0.4688	0.2179				
	0.5138	0.3060				

### B.9 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO FILTRO LP9 E EQUALIZADOR

$$H_{LP9}(s) = \frac{(s^2 + 57.472761)6.990976 \times 10^{-7}}{s^2 + 0.204569s + 0.045122} \cdot \frac{s^2 + 7.293135}{s^2 + 0.166580s + 0.279351} \cdot \frac{s^2 + 3.331714}{s^2 + 0.112366s + 0.597336} \cdot \frac{s^2 + 2.312813}{s^2 + 0.061509s + 0.854407} \cdot \frac{s^2 + 1.993895}{s^2 + 0.019227s + 0.988561} \quad (\text{B.10})$$



Tabela B9 - Coeficientes do filtro equalizador para o filtro LP9

	$\varepsilon\tau_p$		$\varepsilon h$		$\varepsilon\mathcal{K}$	
	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
$E\tau_g$	0.3019	0.0292	0.2977	0.0279	0.2977	0.0279
	0.2356	0.1039	0.2367	0.1035	0.2367	0.1035
	0.1889	0.4988	0.1827	0.5049	0.1827	0.5049
	0.2193	0.1902	0.2222	0.1897	0.2222	0.1897
	0.0458	0.7202	0.0780	0.7174	0.0780	0.7174
	0.2124	0.3829	0.2075	0.3873	0.2075	0.3873
	1.0534	0.1733	0.9937	0.2030	0.9937	0.2030
	1.0289	0.3149	0.9952	0.2162	0.9952	0.2162
	0.9954	0.3814	0.9829	0.2206	0.9829	0.2206
			0.9349	0.3611	0.9349	0.3611
			0.9331	0.3661	0.9331	0.3661
			0.9243	0.3908	0.9243	0.3908
			0.8136	0.5749	0.8136	0.5749
			0.8099	0.5776	0.8099	0.5776
		0.7899	0.5915	0.7899	0.5915	
$E\tau_p$	0.1770	1.4487	0.5632	4.4229	0.6635	5.4931
	0.0601	2.7976	0.2434	0.1494	0.2369	0.1481
	0.1963	0.4626	1.9157	0.2833	1.9011	0.3122
	0.5057	0.3937	0.6712	0.1301	0.7091	0.1222
	0.3189	0.1749	0.2189	0.4422	0.2156	0.4384
	0.3130	8.3481				
	0.2701	0.0225				
	0.3156	0.1220				

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] H. J. Blinchikoff and A. I. Zverev, **“Filtering in the Time and Frequency Domains”**, John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [2] Adel S. Sedra, Peter O. Brackett, **“Filter Theory and Design: Active and Passive”**, Matrix Publishers, Inc. , Portland, OR, 1978.
- [3] Gobind Daryanani, **“Principles of Active Network Synthesis and Design”**, John Wiley & Sons, New York, 1976
- [4] Janez Valand, **“On the Linear Phase Approximation”**, Proc. IEEE(Letters), vol. 55, September 1967, pp.1627-1628.
- [5] J. V. Fall, **“A Digital Computer Program for the Design of Phase Correctors”**, IRE Transactions on Circuit Theory, CT-8, no. 3, September 1961, pp.223-236.
- [6] H. J. Orchard, **“Maximally Flat Approximation Techniques”**, Proc. IEEE(Letters), vol. 56, January 1968, pp.65-66.
- [7] Bozidar M. Djurich, **“Chebyshev Phase Approximation”**, Proc. IEEE(Letters), vol. 72, no.4, April 1984, pp.535-537.
- [8] Roger L. Crane, **“All-pass Network Synthesis”**, IEEE Trans. on Circuit Theory, CT-15, December 1968, pp.474-478.
- [9] R. Gregorian and G. C. Temes, **“Design Techniques for Digital and Analog All-pass Circuits”**, IEEE Trans. on Circuits Syst., vol. CAS-25, December 1978, pp.981-988.

- [10] G. Wilson and M. Papamichael, "**Group Delay Transfer Functions with Least Squares Error**", The Radio and Electronic Engineer, vol. 53, May 1983, pp.199-208.
- [11] Michel R. Kobe, Jaime Ramires-Angulo and Edgar Sánchez-Sinencio, "**FIESTA - A Filter Educational Synthesis Teaching-Aid**", IEEE Trans. on Education, vol. 32, no. 3, August 1989, pp.280-286.
- [12] Simon Hellerstein, "**Synthesis of All-Pass Delay Equalizers**", IRE Transactions on Circuit Theory, CT-8, no. 3, September 1961, pp.215-222.
- [13] Janez Valand, "**On the Linear-Slope Delay Approximation**", Proc. IEEE(Letters), vol.55, November 1967, pp.2059-2060,
- [14] Janez Valand, "**A Further Note on the Linear-Slope Delay Approximation**", Proc. IEEE(Letters), vol.56, August 1968, pp.1356-1357.
- [15] Thiep Van Chung, Jonny Andersen and Robert G. Hove, "**All-Pass Group Delay Equalization Using S-Plane Poles With Equal Frequency Spacing**", IEEE International Symposium on Circuits and Systems, vol. 4, May 1990, pp.2767-2770,
- [16] Lawrence P. Huelsman, "**Optimization - A Powerful Tool for Analysis and Design**", IEEE Trans. on Circuits and System I, vol.40, no.7, July 1993, pp.431-439.
- [17] Alan V. Oppenheim and Jae S. Lim, "**The Importance of Phase in Signals**", Proceedings of the IEEE, vol.69, no.5, May 1981, pp.529-541,
- [18] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky and Ian T. Young "**Signals and Systems**", Prentice-



Hall, Inc, New Jersey, 1983.

- [19] J. R. Treichler, I. Fijalkow and C. R. Jonhson, Jr., **“Fractionally Spaced Equalizers”**, IEEE Signal Processing Magazine, vol. 13, no.5, May 1996, pp.65-81,
- [20] Timo I. Laakso, Vesa Välimäki, Matti Karjalainen and Unto K. Laine, **“Splitting the Unit Delay”**, IEEE Signal Processing Magazine, vol. 13, no.1, January 1996, pp.30-60,
- [21] J. David Rhodes and Isam Hasan Zabalawi, **“Design of Selective Linear-Phase Filters with Equiripple Amplitude Characteristics”**, IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol.CAS-25, no.12, December 1978, pp.989-1000,
- [22] J. Ramírez-Angulo, E. Sánchez-Sinencio, **“A computer-aided circuit design algorithm based on a random direction and radial search”**, presented at 29th Midwest Symp. on Circuits and Systems, Lincoln, Nebraska, Aug.11-12, 1986, pp.897-901,
- [23] K. Matsuyama, M. Okuda and M. Ikehara, **“Approximation of Group Delay Response Using Weighted Least Square Method”**, IEEE International Symposium on Circuits and Systems, vol. 2, May 1996, pp.197-200,
- [24] D. M. Himmelblau, **“Applied Non-Linear Programming”**, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [25] Truong Q. Nguyen, Timo I. Laakso and R. David Koilpillai, **“Eigenfilter Approach for the Design of Allpass Filters Approximating a Given Phase Response”**, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 42, no. 9, September 1994, pp.2257-2263.