

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

"ESTUDO DOS EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO NO ALGORITMO LMS EM FILTROS
DIGITAIS ADAPTÁVEIS COM APLICAÇÃO EM CANCELAMENTO DE ECOS"

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

WALTER PEREIRA CARPES JUNIOR

Florianópolis, Novembro de 1992

ESTUDO DOS EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO NO ALGORITMO
LMS EM FILTROS DIGITAIS ADAPTÁVEIS COM APLICAÇÃO
EM CANCELAMENTO DE ECOS

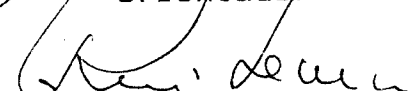
ii

WALTER PEREIRA CARPES JUNIOR


ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE MESTRE EM ENGENHARIA, ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA, E
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. José Carlos Moreira Bermudez, Ph. D.
Orientador




Prof. Rui Seara, Dr. Ing.
Co-orientador

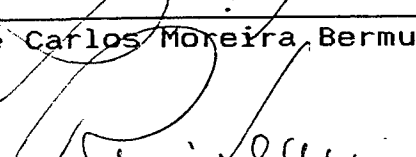


Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph. D.
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica


BANCA EXAMINADORA




Prof. José Carlos Moreira Bermudez, Ph. D.



Prof. Rui Seara, Dr. Ing.



Prof. Hans Helmut Zürn, Ph. D.



Prof. Jacques Szczupak, Ph. D.

A minha Mãe

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Prof. José Carlos Moreira Bermudez, pela orientação.

Ao Prof. Rui Seara, pela co-orientação.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

A Universidade Federal do Paraná.

Aos colegas do Laboratório de Instrumentação Eletrônica (LINSE).

Ao LINSE (Laboratório de Instrumentação Eletrônica) do Departamento de Engenharia Elétrica da UFSC, onde este trabalho foi desenvolvido.

Aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização do presente trabalho.

R E S U M O

Filtros Adaptáveis têm utilização crescente em diversas aplicações, notadamente em instrumentação eletrônica e em telecomunicações. Neste trabalho são apresentados uma nova formulação e um modelo aprimorado para os erros causados pela implementação digital do algoritmo LMS em filtros adaptáveis. O novo modelo leva em conta as variações das propriedades estatísticas do sinal de erro durante o processo de adaptação. A análise é feita para aritmética de ponto fixo e inclui filtros com coeficientes reais e filtros com coeficientes complexos. São deduzidas expressões analíticas para o erro médio quadrático na saída dos filtros adaptáveis válidas tanto no período de convergência quanto em regime permanente. Tais expressões são de grande utilidade em projeto de sistemas adaptáveis. São apresentados, ainda, resultados de simulações a fim de validar o equacionamento e o modelo propostos. Durante o desenvolvimento do trabalho, o estudo dos efeitos dos erros de quantização em um sistema de cancelamento de ecos em transmissão digital é usado como motivação. Entretanto, a formulação apresentada é geral para o problema de identificação de sistemas.

A B S T R A C T

Adaptive filters encounter large applicability in several areas such as telecommunications and electronic instrumentation. This work presents a new formulation and an improved model for the errors due to the finite word length digital implementation of the LMS algorithm for adaptive filters. The improved model includes the modifications in the statistics of the error signal which occur close and upon convergence. The analysis is made for fixed point arithmetic and includes both filters with real and complex coefficients. Analytical expressions are derived for the mean-square error at the filter's output, which are valid in steady-state and during the transient adaptation period. These expressions are of great value in designing adaptive systems. Simulation results have also been presented to validate the proposed theory. During the work development, the study of the quantization error effects in echo cancellers for digital transmission is used as motivation. However, the formulation presented is general for the problem of system identification.

S U M Á R I O

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 - Introdução.....	1
1.2 - Organização do Trabalho.....	5

CAPÍTULO 2 - CANCELAMENTO DE ECO E FILTRAGEM ADAPTÁVEL - Revisão

2.1 - Introdução.....	7
2.2 - Origem do Eco.....	8
2.3 - O Cancelador de Ecos.....	13
2.4 - O Filtro Adaptável.....	16
2.5 - O Algoritmo LMS.....	21
2.6 - Conclusão.....	22

CAPÍTULO 3 - ANÁLISE DOS ERROS DE QUANTIZAÇÃO EM FILTROS DIGITAIS
ADAPTÁVEIS - Uma Nova Formulação

3.1 - Introdução.....	24
3.2 - Fontes de Erros de Quantização.....	25
3.3 - Erros de Quantização em Filtros Digitais Adaptáveis - Revisão Bibliográfica.....	28
3.4 - Filtro Adaptável com Coeficientes Reais.....	30
3.4.1 - Descrição do Sistema.....	31
3.4.2 - Análise do Sistema.....	33
3.4.3 - Condição de Convergência.....	37
3.4.4 - Resultados de Simulações.....	38
3.5 - Filtro Adaptável com Coeficientes Complexos.....	40
3.5.1 - Descrição do Sistema.....	41

3.5.2 - Análise do Sistema.....	43
3.5.3 - Condição de Convergência.....	45
3.5.4 - Resultados de Simulações.....	46
3.6 - Conclusão.....	47

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DOS ERROS DE QUANTIZAÇÃO EM FILTROS DIGITAIS ADAPTÁVEIS

- Modelo Aprimorado

4.1 - Introdução.....	49
4.2 - Considerações sobre a Modelagem dos Erros de Quantização.....	50
4.3 - Filtro Adaptável com Coeficientes Reais.....	54
4.3.1 - Análise do Sistema.....	54
4.3.2 - EMQ Residual.....	57
4.3.3 - Condição de Convergência.....	58
4.4 - Filtro Adaptável com Coeficientes Complexos.....	59
4.4.1 - Análise do Sistema.....	59
4.4.2 - Condição de Convergência.....	62
4.4.3 - EMQ Residual.....	62
4.5 - Determinação de r , σ_1^2 e σ_2^2	63
4.6 - Resultados de Simulações	
4.6.1 - Filtros com Coeficientes Reais.....	69
4.6.2 - Filtros com Coeficientes Complexos.....	75
4.7 - Conclusão.....	80

CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

5.1 - Conclusões.....	81
5.2 - Sugestões para Trabalhos Futuros.....	82

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	84
APÊNDICE 1 - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO (3.10).....	89
APÊNDICE 2 - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO (3.23).....	93
APÊNDICE 3 - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO (4.4).....	98
APÊNDICE 4 - DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO (4.12).....	101

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Introdução

A transmissão de dados no modo "full-duplex" a dois fios sobre a linha telefônica tem sido alvo de crescente interesse nos últimos anos. Dentre as várias razões para este fato, pode-se destacar a maior eficiência dos protocolos de transmissão "full-duplex" quando comparados aos protocolos "half-duplex", o que possibilita um aumento substancial na velocidade de transmissão [1].

Embora a transmissão de dados na forma telegráfica seja anterior à telefonia, a comunicação de voz dominou a evolução de redes de telecomunicações. Quando o crescimento no uso do computador criou a necessidade para a transmissão de dados, não foi surpreendente que as redes telefônicas inicialmente oferecessem o melhor meio para esta comunicação. É importante lembrar que a rede telefônica pública permite a interconexão dos mais remotos assinantes, o que viabiliza a transmissão de dados entre os mesmos a um custo baixo, bastando apenas que possuam equipamentos terminais (MODEMS), uma vez que o meio comum de transmissão já está disponível.

O problema básico a ser resolvido na transmissão "full-duplex" a dois fios é a implementação de um sistema eficiente de separação de canais. Isto porque, neste tipo de transmissão, os dados transmitidos e os dados recebidos estão simultaneamente disponíveis na linha.

Numa conexão entre dois assinantes através da linha telefônica, cada MODEM está ligado à central mais próxima através de um par de fios, o

qual serve para comunicação em ambos os sentidos. A parte central da conexão é de 4 fios, onde as duas direções de transmissão estão separadas fisicamente. Devido aos descasamentos de impedâncias, uma importante parcela do sinal transmitido é refletida para o receptor nas conversões de 4 para 2 fios ao longo da linha. Isto constitui o eco, o qual se soma ao sinal recebido, podendo até mesmo mascará-lo completamente.

Na transmissão através da rede discada pública em baixas velocidades (até 2400 bps) utilizam-se técnicas de separação de canais por multiplexação em frequência (FDM), onde os sinais transmitido (Tx) e recebido (Rx) ocupam diferentes bandas de frequências. Desta forma, o sinal de eco no receptor é eliminado através de uma simples filtragem. Para transmissão em maiores taxas, não há mais banda disponível para FDM e a transmissão "full-duplex" a dois fios deve ser feita com os dois canais (Tx e Rx) ocupando a mesma faixa de frequências. Nestes casos, técnicas de cancelamento de eco devem ser utilizadas na separação dos canais.

A idéia básica do cancelamento de eco é a de sintetizar uma réplica do sinal de eco e subtraí-lo do sinal que chega ao receptor. O problema do cancelamento de eco pode, portanto, ser modelado como um caso de identificação de sistemas, onde o principal integrante da estrutura do cancelador é um filtro adaptável.

Filtros adaptáveis têm seus comportamentos (no tempo e na frequência) alterados, ou adaptados, de forma a satisfazerem parâmetros de projeto que sejam, de alguma forma, variantes no tempo. A operação do filtro adaptável é controlada por um algoritmo de otimização que ajusta sua resposta de modo a minimizar alguma função de custo. Um filtro adaptável consiste de duas partes distintas: a *estrutura*, a qual é escolhida para realizar o processamento desejado e o *algoritmo de adaptação*, responsável pelo ajuste

dos parâmetros (coeficientes) do filtro. As muitas combinações possíveis das diferentes estruturas e dos diferentes algoritmos levam a uma grande variedade de filtros adaptáveis. Uma das estruturas mais utilizadas é a de um filtro FIR transversal, devido às suas características de simplicidade, generalidade e estabilidade. Para a adaptação dos coeficientes do filtro, o algoritmo LMS ("Least Mean Square"), apresentado por Widrow e Hoff em 1960, tem sido um dos mais utilizados, uma vez que sua simplicidade e facilidade de implementação o tornam atrativo para muitas aplicações, especialmente aquelas que exigem operação em tempo real.

Inicialmente, os filtros adaptáveis eram implementados exclusivamente na forma analógica, baseados em técnicas de CCD ("Charge-Couple Device") e BBD ("Bucket-Brigade Device"). Entretanto, o desempenho das estruturas analógicas é muitas vezes limitado por restrições na faixa dinâmica causadas por não-linearidades e pelos efeitos de ruído. Isto estimulou o desenvolvimento de implementações digitais [2]. Atualmente, com o progresso de técnicas de VLSI e com o desenvolvimento de arquiteturas computacionalmente eficientes, é crescente a utilização de filtros digitais adaptáveis em aplicações em tempo-real.

Na implementação digital de filtros adaptáveis, tanto os sinais de entrada quanto as grandezas internas são quantizados, ou seja, apresentam precisão limitada. Como consequência, o comportamento destes filtros pode se tornar bastante diverso daquele esperado se fossem implementados com precisão infinita. Deste modo, os efeitos da representação com precisão finita (n° finito de bits) das grandezas envolvidas devem ser considerados tanto na análise quanto no projeto destes sistemas. Deve-se determinar o comprimento de palavra mínimo necessário para armazenar cada coeficiente do filtro e cada grandeza interna, levando em conta o processo de atualização dos coeficientes

do filtro adaptável. É importante lembrar que se um desempenho aceitável puder ser obtido com menor número de bits, o que pode ser determinado através de um melhor entendimento dos efeitos de quantização, então a complexidade e conseqüentemente o custo de implementação podem ser reduzidos.

Encontram-se, na literatura especializada, diversos trabalhos onde são apresentadas expressões para os erros causados pela precisão limitada em filtros digitais adaptáveis [3], [4], [5], [6]. Entretanto, tais expressões são de pouca utilidade prática devido à sua complexidade e dificuldade de interpretação física. Também, a maioria destes trabalhos apresenta expressões e resultados para os erros no vetor de coeficientes do filtro adaptável e não para o erro médio quadrático (EMQ) na saída do filtro. Este último, entretanto, fornece uma medida mais representativa do desempenho do sistema, podendo ser inclusive facilmente considerado na especificação de um sistema adaptável.

Neste trabalho é apresentado um estudo detalhado dos erros causados pela implementação digital do algoritmo LMS em filtros FIR transversais adaptáveis. Neste estudo são considerados filtros com coeficientes reais e filtros com coeficientes complexos, ambos de larga aplicação em processamento de sinais. A análise é feita para aritmética de ponto fixo, que é, atualmente, a mais utilizada em aplicações de processamento de sinais em tempo real. Expressões analíticas para o EMQ na saída dos filtros (real e complexo) são obtidas a partir de um equacionamento simples e completo, podendo ser utilizadas tanto durante o período de convergência quanto em regime permanente. Além disso, a nova formulação apresentada permite, de forma simples e direta, a consideração de um processamento digital adicional do sinal de entrada e a utilização de diferentes comprimentos de palavra para os diversos blocos do sistema, procedimentos estes comuns em diversas

aplicações práticas. As condições para a convergência do algoritmo LMS com precisão finita são estudadas e são obtidas expressões simples para o EMQ residual em função de parâmetros de projeto. Neste estudo são modeladas as variações das propriedades estatísticas dos sinais durante o processo de adaptação. A nova formulação permite determinar, com uma precisão superior à obtida através do equacionamento clássico, os valores das constantes de adaptação que levam aos menores EMQ residuais, sendo, portanto, de grande utilidade em projetos de sistemas adaptáveis.

1.2 - Organização do Trabalho

No capítulo 2 é apresentada uma breve revisão sobre a origem dos ecos na transmissão de dados através da linha telefônica e sobre a técnica normalmente utilizada para o seu cancelamento. Esta revisão serve como motivação para o trabalho desenvolvido e estabelece o diagrama em blocos do processo de identificação de sistemas a ser estudado.

No capítulo 3 é apresentada uma nova formulação para o estudo do EMQ na saída de filtros digitais adaptáveis, tanto com coeficientes reais quanto com coeficientes complexos, utilizando o algoritmo LMS. Neste capítulo, o erro de quantização em qualquer variável do sistema é modelado da forma clássica, ou seja, como um ruído branco aditivo, não correlacionado com qualquer outra grandeza e uniformemente distribuído sobre o intervalo de quantização [7,18].

No capítulo 4, o modelo clássico é aprimorado de forma a incluir as variações das propriedades estatísticas dos sinais durante o processo de adaptação. Como consequência, obtêm-se expressões mais completas e mais

realistas para o EMQ na saída dos filtros. Tais expressões levam em conta a distribuição não uniforme dos erros de quantização presentes na equação de atualização dos coeficientes, assim como a variação desta distribuição como consequência da correlação entre o fator de correção do algoritmo e seu valor quantizado. São obtidos, também, modelos aproximados para as variâncias destes erros e para o coeficiente de correlação utilizado, a partir de resultados experimentais. Por fim, são apresentados resultados comparativos de simulações que evidenciam a superioridade do novo equacionamento proposto.

Finalmente, no capítulo 5, são apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para a sua continuidade.

C A P Í T U L O 2

CANCELAMENTO DE ECOS E FILTRAGEM ADAPTÁVEL - Revisão

2.1 - Introdução

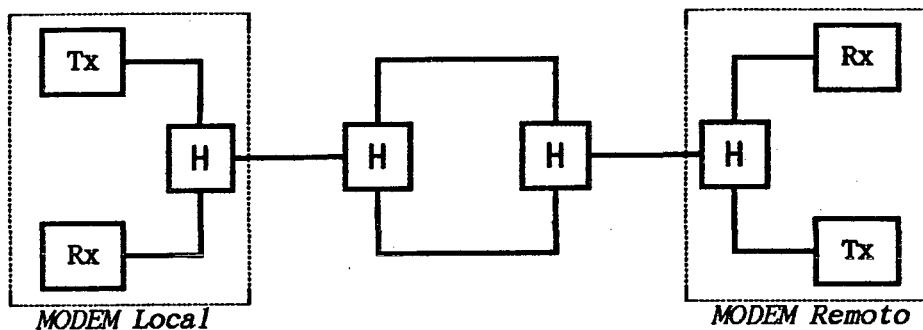
Nos últimos anos, é crescente o interesse em transmissão de dados "full-duplex" a dois fios em altas taxas (2400 bps ou mais) sobre a linha telefônica. Dentre as principais razões, pode-se destacar a maior eficiência dos protocolos de transmissão "full-duplex" quando comparados aos protocolos "half-duplex", o que possibilita um aumento substancial na velocidade de transmissão. É importante ressaltar, também, que a rede telefônica pública permite a interconexão dos mais remotos assinantes, o que viabiliza a transmissão de dados entre os mesmos a um baixo custo, bastando apenas que possuam os equipamentos terminais (MODEMS), uma vez que o meio comum de transmissão já está disponível.

Na transmissão "full-duplex" a dois fios, os dados transmitidos e os recebidos estão simultaneamente disponíveis na linha. Desta forma, a implementação de um sistema eficiente de separação de canais faz-se necessária [8].

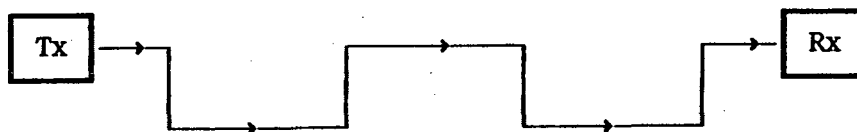
Neste capítulo será apresentada uma breve revisão sobre o problema dos ecos presentes na transmissão "full-duplex" a dois fios na linha telefônica e da técnica normalmente utilizada para o seu cancelamento. O problema do cancelamento de ecos é modelado como um caso de identificação de sistemas, onde o principal integrante da estrutura do cancelador é um filtro adaptável. Estudos resumidos do filtro adaptável e do algoritmo mais empregado para a atualização de seus coeficientes serão também apresentados.

2.2 - Origem do Eco

A Fig. 2.1 apresenta um diagrama simplificado representando a conexão típica para transmissão em banda passante de dados entre dois assinantes através da linha telefônica. Neste diagrama, um traço simples representa um par de fios. Cada MODEM está ligado à central mais próxima através de um par de fios (chamado linha do assinante), o qual serve para a comunicação em ambos os sentidos. A parte central da conexão é de 4 fios, onde as duas direções de transmissão estão separadas fisicamente (típico de sistemas com portadora) [9].



(a)



(b)

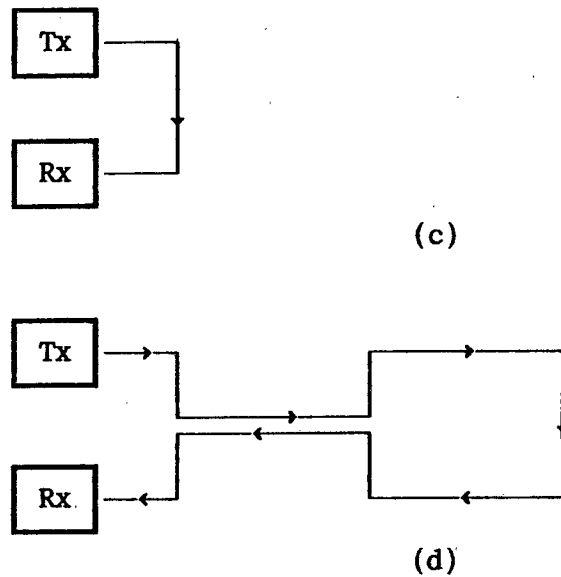


FIGURA 2.1: (a) Conexão Típica através da Linha Telefônica; (b) Fluxo do Sinal Transmitido; (c) Eco Local; (d) Eco Remoto.

O dispositivo que realiza as conversões de 4 para 2 fios e vice-versa é chamado "híbrida". A Fig. 2.2 mostra o diagrama esquemático básico de uma híbrida passiva.

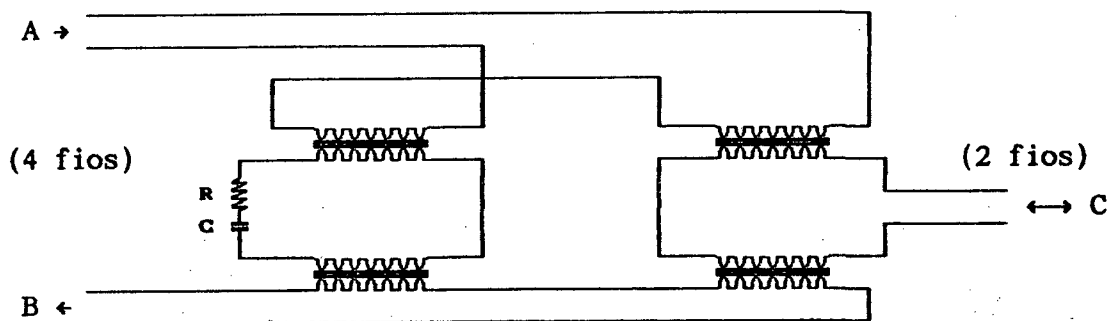


FIGURA 2.2: Diagrama Esquemático Básico de uma Híbrida Passiva

A híbrida é uma estrutura em ponte (transformador diferencial) onde, idealmente, os transformadores são idênticos e a impedância de balanceamento (circuito RC) é exatamente igual à impedância do circuito a

dois fios em todas as frequências. Sob tais condições ideais, todo sinal presente em "A" é acoplado ao circuito a dois fios, mas não produz qualquer resposta em "B". Um sinal que entra por "C", é acoplado tanto a "A" quanto a "B"; entretanto, ele não tem nenhum efeito em "A", uma vez que os amplificadores utilizados neste circuito (transmissão) são unidirecionais e estão colocados na direção de "A" para "C" [10]. Em um sistema ideal de comunicações, uma separação efetiva de canais poderia ser realizada pela inclusão de híbridas perfeitas (casamento perfeito entre as impedâncias da híbrida e da linha) nas conversões de 4 para 2 fios ao longo da linha de transmissão. Na prática, entretanto, a rede discada está conectada a várias redes locais, cada uma com sua impedância característica própria. Desta forma, os descasamentos entre as impedâncias das redes locais e as terminações utilizadas para as híbridas provocam o acoplamento entre as duas direções de transmissão no circuito a 4 fios. Este acoplamento faz com que uma importante parcela do sinal transmitido seja refletida para o receptor nas conversões de 4 para 2 fios ao longo da linha. Isto constitui o eco, que é, portanto, uma versão filtrada do sinal transmitido localmente que retorna ao receptor local. Como a inserção de uma híbrida real causa atenuações típicas de apenas 10 dB aos sinais indesejáveis, tais sinais de eco devem ser considerados presentes na linha para o projeto do sistema de comunicações, principalmente porque os sinais emitidos pelo MODEM remoto sofrem atenuações típicas superiores a 40 dB.

A Fig. 2.1 (b), (c) e (d) mostra os principais fluxos de sinais referentes à conexão representada pela Fig. 2.1(a). O fluxo de sinal de dados do MODEM local ao MODEM remoto está representado na Fig. 2.(b). A fim de que este sinal seja atenuado o mínimo possível, é necessário que as híbridas não apresentem atenuação apreciável nesta direção de fluxo de sinal. Existem

basicamente dois mecanismos distintos de eco, os quais são mostrados na Fig. 2.1(c) e (d): o "eco local", que se origina na conversão de 4 para 2 fios na híbrida local e o "eco remoto", que tem origem na conversão de 4 para 2 fios na central remota.

Uma resposta ao impulso típica do canal de eco é mostrada na Fig. 2.3 [1].

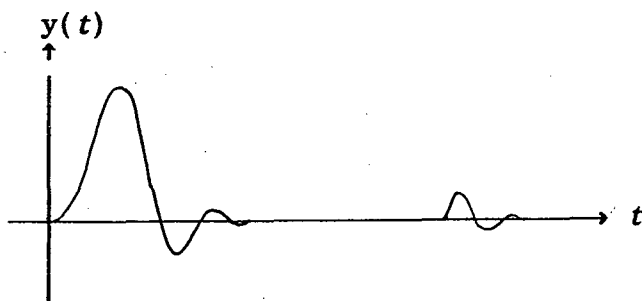


FIGURA 2.3: Resposta ao Impulso Típica do Canal de Eco

Nesta figura, os dois tipos de eco podem ser facilmente identificados: o eco local, caracterizado por um curto atraso de tempo (normalmente menor que 20ms [1]) e por uma grande potência (cerca de 10 dB abaixo do sinal transmitido), e o eco remoto, caracterizado por um grande atraso (500ms ou mais [11] para conexões via satélite), e por um nível de potência inferior ao do eco local. Observa-se, também, que entre os ecos local e remoto há um período de tempo durante o qual os ecos não estão ativos. Esta característica pode ser explorada, a fim de simplificar a implementação do cancelador de ecos [1], [12]. Em relação às suas naturezas, o eco local propaga-se através de um canal essencialmente linear e invariante no tempo, podendo ser perfeitamente cancelado (pelo menos teoricamente) por um cancelador de ecos linear. Já o eco remoto pode apresentar

não-linearidades, sendo a mais comum o desvio em frequência [13].

Neste trabalho será dada ênfase ao cancelamento do eco local por ser este o eco com maior nível de potência e, em alguns casos, o único presente (por exemplo, em transmissão de dados na banda-base [14]). Também, grande parte da formulação aqui desenvolvida pode ser diretamente aplicada ao caso do cancelamento do eco remoto. Entretanto, o cancelamento do eco remoto encontra-se além dos objetivos deste trabalho e não será aqui abordado.

Na transmissão através da rede telefônica discada pública, o fluxo de dados é codificado e modula uma portadora. A transmissão é, portanto, feita na banda de voz (banda passante) e as taxas de transmissão são relativamente baixas (no máximo até 19 Kbps) devido à estreita banda do canal telefônico [9]. Em baixas velocidades (até 2400 bps) utilizam-se, normalmente, técnicas de separação de canais por multiplexação em frequência (FDM), onde os sinais transmitido (Tx) e recebido (Rx) ocupam diferentes bandas de frequências. Desta forma, o sinal de eco no receptor é eliminado através de uma simples filtragem. Para taxas de transmissão iguais ou superiores a 4800 bps, a largura de banda do canal telefônico é insuficiente para FDM e a transmissão "full-duplex" a dois fios deve ser feita com os dois canais (Tx e Rx) ocupando a mesma banda de frequências. Nestes casos, a separação de canais deve incluir a utilização de técnicas de cancelamento de ecos.

É importante ressaltar que o surgimento de ecos acontece não só na transmissão de dados através da linha telefônica mas também em transmissão de dados através de linha privada (linha do assinante) e na transmissão de voz pela rede pública. Em transmissão de dados através de linha privada, o sinal é transmitido sem modulação, de forma que o circuito a quatro fios da conexão mostrada na Fig. 2.1(a) não existe. Assim, os MODEMS estão conectados

diretamente através de um par de fios. Desta forma, somente o eco local estará presente. Na transmissão de voz pela linha telefônica, por outro lado, o eco local é até desejável, pois o sinal de retorno é importante para evitar a impressão de que o aparelho está "mudo". Assim, somente o eco remoto deve ser cancelado. Uma análise detalhada destes sistemas de transmissão é apresentada em [9]. Os princípios aqui descritos, entretanto, são gerais, podendo ser aplicados em qualquer caso onde o cancelamento de ecos seja necessário.

2.3 - O Cancelador de Ecos

A Fig. 2.4 ilustra o princípio de funcionamento do cancelador de ecos para transmissão de dados [15].

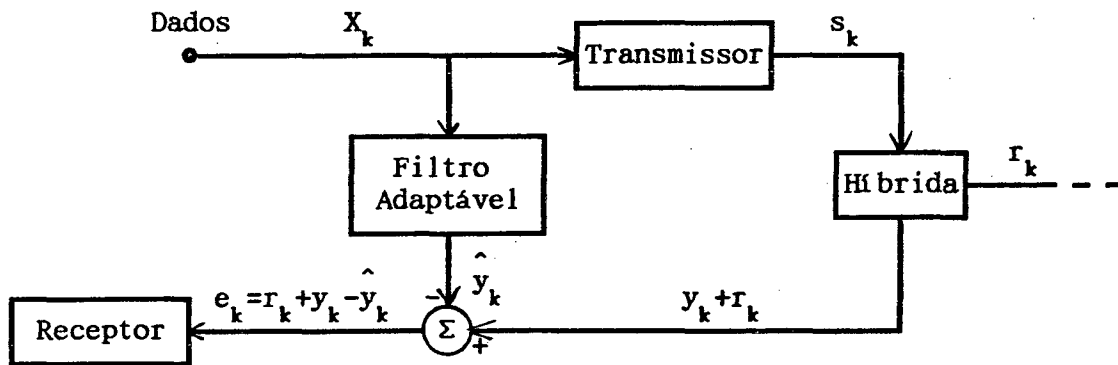


FIGURA 2.4: Princípio de Cancelamento de Eco

Esta figura representa um MODEM num dos extremos de uma conexão por linha discada, onde s_k é o sinal transmitido localmente, r_k o sinal remoto (transmitido pelo MODEM no outro extremo da linha), y_k o sinal de eco referente a s_k e \hat{y}_k a estimativa do sinal y_k gerada pelo cancelador de ecos.

A função do cancelador de ecos é, portanto, estimar a resposta do canal de eco (de algum ponto do transmissor à entrada do receptor), gerando assim uma "réplica" do sinal de eco que, idealmente, serviria para cancelar totalmente a parcela indesejável y_k do sinal $r_k + y_k$ que chega ao somador. Desta forma, o eco pode ser cancelado por subtração [15], [16]. É importante lembrar que o sinal de eco está apenas cerca de 10 dB abaixo do sinal transmitido (devido à híbrida). Levando em conta que a perda no canal, do transmissor remoto ao receptor local, pode ser tão alta quanto 40-50 dB, verifica-se que o sinal indesejável (eco) pode estar num nível 30-40 dB acima do sinal remoto. Como é necessária uma relação sinal/ruído maior ou igual que 20 dB na entrada do receptor, o cancelador de ecos deve prover uma atenuação adicional do sinal de eco de cerca de 50-60 dB [9].

É possível modelar o problema de cancelamento de ecos como um caso de identificação de sistemas, conforme mostra a Fig. 2.5. O principal integrante da estrutura do cancelador de ecos é um filtro adaptável (W_k), o qual é comumente implementado na forma digital. É importante notar que esta figura pode representar não somente a operação de um cancelador de ecos, mas qualquer sistema em que um filtro adaptável tenha a função de identificar um sistema desconhecido.

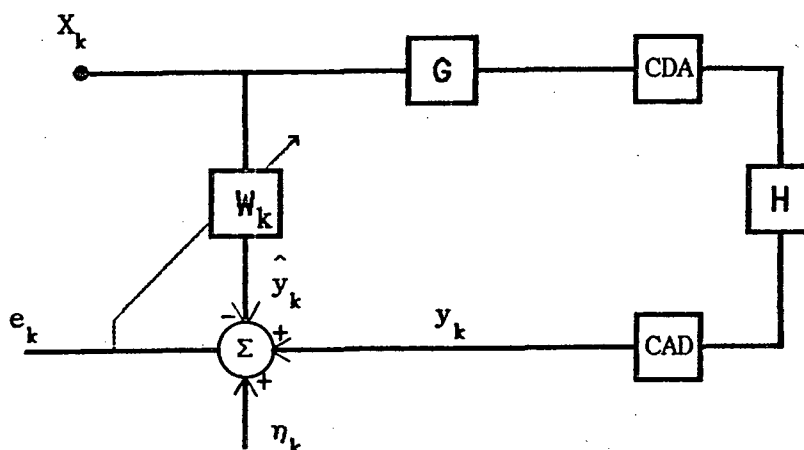


FIGURA 2.5: Sistema de Identificação Utilizando Filtragem Adaptável

No diagrama da Fig. 2.5, tem-se:

- X_k : vetor de entrada do sistema;
- G : representa qualquer processamento no sinal de entrada (por exemplo, modulação ou conformação de espectro);
- CDA: conversor digital-analógico;
- CAD: conversor analógico-digital;
- W_k : filtro adaptável, o qual deve gerar uma réplica (\hat{y}_k) do sinal de saída (y_k) do sistema desconhecido;
- η_k : ruído aditivo, não correlacionado com os demais sinais (por exemplo, o sinal remoto adicionado ao ruído);
- e_k : sinal de erro (a ser minimizado pelo filtro adaptável).

Para cada aplicação, o filtro adaptável deve possuir certas características de modo a satisfazer requisitos específicos, tais como taxa de operação e comprimento de sua resposta ao impulso. Por exemplo, se o filtro adaptável é um filtro transversal de N coeficientes, seu sinal de

saída é dado por:

$$\hat{y}_k = \sum_{i=0}^{N-1} w_{ik} x_{k-i} \quad (2.1)$$

onde w_{ik} são os coeficientes do filtro adaptável na k -ésima iteração, x é o sinal de entrada tal que $x_{k-i} = x[(k-i)T]$ e $\hat{y}_k = \hat{y}[kT]$, e sua taxa de operação é igual a $1/T$. O filtro gera, então, uma amostra do sinal de saída a cada T segundos. Para o caso específico de cancelamento de ecos na banda de voz, o sinal a ser cancelado possui pouca energia acima de 3,6 kHz, o que implica que este deve ser amostrado numa taxa de, no mínimo, 7,2 kHz (taxa de Nyquist). Assim, o filtro pode operar numa taxa de, por exemplo, 8kHz, o que resulta em $T=125\mu s$. O número de coeficientes do filtro deve ser escolhido de modo que o sistema desconhecido possa ser completamente identificado, ou seja, NT deve ser maior ou igual à duração da resposta ao impulso do sistema a identificar. Para o exemplo dado, 120 coeficientes são necessários para o cancelamento de um eco com duração de 15ms [10].

O filtro adaptável é o principal elemento do sistema de identificação. Torna-se necessário, portanto, um estudo mais detalhado de sua operação.

2.4 - O Filtro Adaptável

Um sistema adaptável é aquele cujos parâmetros são ajustáveis de modo que seu desempenho (conforme algum critério especificado) melhore através do contato com seu ambiente. Tais sistemas, normalmente, apresentam as seguintes características [17]:

- a) podem adaptar-se automaticamente (auto-otimização) perante mudanças no seu ambiente de operação;
- b) não requerem um procedimento padrão de síntese, como usualmente necessário em sistemas não adaptáveis; podem ser *autoprojetados* ou *autoprogramados* através de um processo de treinamento. São normalmente mais complexos de analisar e projetar do que os sistemas não adaptáveis, mas oferecem a possibilidade de melhorar substancialmente o desempenho quando as características do sistema forem desconhecidas ou variantes no tempo;
- c) podem extrapolar um modelo de comportamento para tratar com novas situações após haverem sido treinados;
- d) dentro de certos limites, podem adaptar-se de modo a minimizar até mesmo as conseqüências de algum defeito interno.

Dentre os principais campos de aplicação de sistemas adaptáveis pode-se citar comunicações, radar, sonar, sismologia, sistemas de navegação, medidas elétricas e eletrônica biomédica.

A Fig. 2.6 apresenta esquematicamente a estrutura de adaptação do sistema da Fig. 2.5, onde e_k é o sinal de erro entre a saída do sistema adaptável (\hat{y}_k) e a saída desejada (y_k). Este sinal é normalmente utilizado pelo algoritmo de adaptação para ajustar os coeficientes do sistema, alterando assim a sua resposta de forma a minimizar alguma função objetivo.

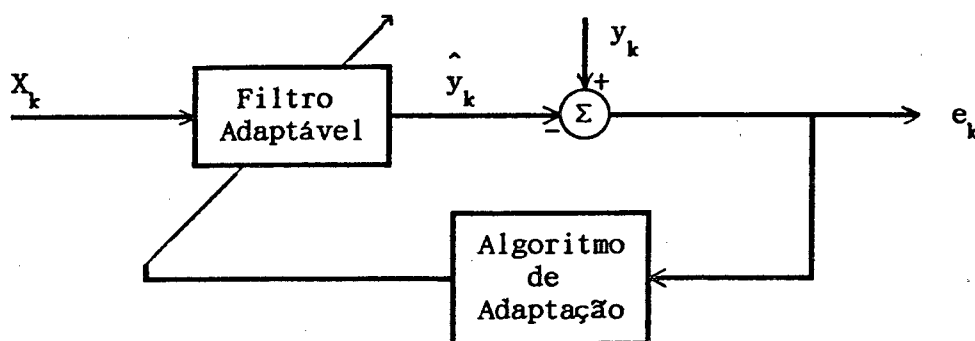


FIGURA 2.6: Estrutura de Adaptação

Diferentes estruturas são possíveis para o filtro adaptável. A sua escolha depende não só do problema a resolver como também dos recursos disponíveis. Uma das estruturas mais utilizadas é a de um filtro FIR transversal, devido principalmente à sua simplicidade e generalidade. Dentre as suas principais características, pode-se destacar:

- a) existe uma relação linear entre os coeficientes do filtro e sua função de transferência;
- b) é uma estrutura sempre estável, independentemente dos valores de seus coeficientes;
- c) permite a obtenção de fase perfeitamente linear;
- d) não apresenta problemas de "ciclos limites";
- e) quando utilizada para minimizar o valor médio quadrático do sinal de erro, leva a uma função objetivo unimodal, tendo somente um ponto de mínimo, o mínimo global, o que facilita o processo de convergência.

A Fig. 2.7 mostra o diagrama de um filtro transversal adaptável de N coeficientes. Estes coeficientes, variáveis no tempo, são atualizados através de um algoritmo de adaptação.

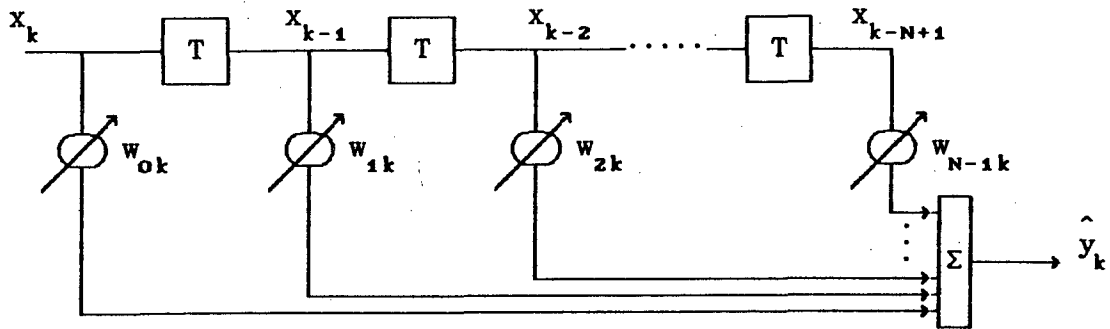


FIGURA 2.7: Filtro Transversal Adaptável

Definindo os vetores:

$$X_k = [x_k \quad x_{k-1} \quad \dots \quad x_{k-N+1}]^T \quad (\text{vetor de entrada})$$

$$W_k = [w_{0k} \quad w_{1k} \quad \dots \quad w_{N-1k}]^T \quad (\text{vetor de coeficientes})$$

O sinal de saída é dado por:

$$\hat{y}_k = \sum_{i=0}^{N-1} w_{ik} x_{k-i} \quad (2.2)$$

Reescrevendo (2.2) na forma de produto escalar, tem-se

$$\hat{y}_k = X_k^T W_k = W_k^T X_k \quad (2.3)$$

No processo de adaptação, o vetor de coeficientes é ajustado de modo a minimizar alguma função de custo. O critério mais utilizado é o de minimização do valor médio quadrático ou potência média do sinal de erro.

Da Fig. 2.6 tem-se:

$$e_k = y_k - \hat{y}_k \quad (2.4)$$

Utilizando (2.3) e considerando, por enquanto, os coeficientes fixos, vem:

$$e_k = y_k - X_k^T \cdot W = y_k - W^T \cdot X_k \quad (2.5)$$

O erro quadrático instantâneo vale, então

$$e_k^2 = (y_k - X_k^T \cdot W)^2 = y_k^2 + W^T \cdot X_k \cdot X_k^T \cdot W - 2 \cdot y_k \cdot X_k^T \cdot W \quad (2.6)$$

Tomando valores esperados e definindo ξ como erro médio quadrático (EMQ), vem:

$$\xi = E\{e_k^2\} = E\{y_k^2\} + W^T \cdot R \cdot W - 2 \cdot P^T \cdot W \quad (2.7)$$

onde $R = E\{X_k \cdot X_k^T\}$ é a matriz de autocorrelação do sinal de entrada e $P = E\{y_k \cdot X_k\}$ é o vetor de correlação cruzada entre o sinal desejado e o sinal de entrada [17].

O gráfico do EMQ em função de W , conforme (2.7), é chamado de *superfície de desempenho*, cujo ponto mínimo é atingido através da adaptação dos coeficientes do filtro.

A maioria dos algoritmos adaptáveis procura atingir o ponto de mínimo EMQ através de métodos baseados no gradiente. O gradiente do EMQ, designado por ∇ , pode ser obtido diferenciando (2.7) em relação aos coeficientes, ou seja,

$$\nabla = \frac{\partial \xi}{\partial W} = 2 \cdot R \cdot W - 2 \cdot P \quad (2.8)$$

O EMQ mínimo é obtido quando o vetor de coeficientes assume um valor tal que o gradiente seja nulo. Partindo-se de um vetor qualquer de coeficientes e seguindo as curvas de nível da superfície de desempenho no

hiperplano dos coeficientes no sentido oposto ao da projeção do vetor gradiente, chega-se ao vetor ótimo de coeficientes [17]. Isto sugere o seguinte algoritmo iterativo de atualização do vetor de coeficientes:

$$W_{k+1} = W_k + \mu (-\nabla_k) \quad (2.9)$$

onde μ é a constante de adaptação que controla a estabilidade e convergência do algoritmo e o índice k no vetor gradiente refere-se à k -ésima iteração. A equação (2.9) é utilizada para obter-se iterativamente o vetor de coeficientes ótimos.

2.5 - O Algoritmo LMS

A equação (2.9), apesar de sua forma simples, freqüentemente não pode ser facilmente implementada devido à complexidade computacional envolvida no cálculo do vetor gradiente. O algoritmo LMS ("Least Mean Square") utiliza uma estimativa do gradiente que facilita sobremaneira a implementação; o erro quadrático instantâneo é utilizado como aproximação para o EMQ e, conseqüentemente, uma estimativa do gradiente pode ser obtida sem a necessidade de computação de valores médios.

O gradiente estimado, a partir de (2.6), é dado por:

$$\hat{\nabla} = \frac{\partial e_k^2}{\partial W_k} = 2 e_k \frac{\partial e_k}{\partial W_k} = -2 e_k X_k \quad (2.10)$$

A equação de atualização resulta em

$$W_{k+1} = W_k + \beta e_k X_k \quad (2.11)$$

onde, por conveniência, introduziu-se uma nova constante de adaptação, $\beta=2\mu$. Convém notar que o fato dos sinais e_k e X_k estarem inerentemente disponíveis confere mais um grau de simplicidade à execução do algoritmo.

Como as correções nos coeficientes em cada iteração são baseadas em estimativas imperfeitas do gradiente, o processo torna-se ruidoso; porém converge para a condição ótima, desde que a constante de adaptação seja escolhida convenientemente. Uma importante característica do algoritmo LMS é a sua simplicidade aliada a uma boa precisão, o que o torna atrativo para utilização em aplicações que requeiram processamento em tempo real, como o caso de cancelamento de ecos.

Em aplicações de filtros adaptáveis para cancelamento do eco local, o sinal de erro e_k consiste do eco residual ($y_k - \hat{y}_k$) somado ao sinal recebido r_k , proveniente do transmissor remoto (ver Fig. 2.4) e a um ruído aditivo. Como r_k é não correlacionado com o sinal transmitido s_k , o sinal remoto não afeta o valor médio assintótico dos coeficientes do filtro. Entretanto, a variação destes coeficientes em torno de seu valor médio aumenta consideravelmente na presença de r_k , devido à introdução de outro componente estocástico na adaptação. Por este motivo, na conexão entre dois MODEMS é previsto um período de tempo durante a fase de inicialização, chamado de período de treinamento, no qual não há operação "full-duplex" ($r_k=0$), de modo a facilitar a adaptação do cancelador [9].

2.6 - Conclusão

Neste capítulo foi apresentada uma breve revisão sobre o problema dos ecos presentes na transmissão "full-duplex" a dois fios na linha telefônica e da técnica normalmente utilizada para o seu cancelamento. O

problema do cancelamento de ecos foi modelado como um caso de identificação de sistemas, onde o principal integrante da estrutura do cancelador é um filtro adaptável. Um estudo resumido do filtro adaptável bem como de um algoritmo para atualização de seus coeficientes foi também apresentado.

Finalmente, é importante frisar que os filtros adaptáveis são geralmente implementados na forma digital, de modo que os efeitos da representação das grandezas envolvidas com precisão finita (número finito de bits) devem ser considerados, pois o seu desempenho está diretamente associado à sua precisão. No próximo capítulo será efetuado um estudo detalhado dos erros devido à precisão finita em filtros adaptáveis digitais, tanto com coeficientes reais quanto com coeficientes complexos, adaptados através do algoritmo LMS. Será visto que o comportamento de um filtro digital adaptável, em termos do EMQ na sua saída, é bastante diverso daquele que teria se fosse implementado com precisão infinita. Serão realizadas, também, análises da convergência e da estabilidade do algoritmo LMS digitalmente implementado.

C A P Í T U L O 3

ANÁLISE DOS ERROS DE QUANTIZAÇÃO EM FILTROS DIGITAIS ADAPTÁVEIS
Uma Nova Formulação

3.1 - Introdução

Neste capítulo, será apresentado um estudo detalhado dos erros causados pela implementação digital do algoritmo LMS em filtros FIR transversais adaptáveis. A análise é feita para aritmética de ponto fixo, que é, atualmente, a mais utilizada em aplicações de processamento de sinais em tempo-real [6] e inclui tanto filtros com coeficientes reais quanto filtros com coeficientes complexos. A partir de um equacionamento simples, são obtidas expressões analíticas para o EMQ na saída dos filtros (real e complexo), as quais podem ser utilizadas tanto durante a convergência quanto em regime permanente. Também, a nova formulação apresentada permite, de forma simples e direta, a consideração de um processamento digital adicional do sinal de entrada e de conversores A/D e D/A, blocos comuns em diversas aplicações práticas. São estudadas, ainda, as condições para a convergência do algoritmo LMS com precisão finita e são obtidas expressões simples para o EMQ residual em função de parâmetros de projeto. Estas equações permitem determinar os valores das constantes de adaptação que levam aos menores EMQ residuais, sendo, portanto, de grande utilidade em projetos de sistemas adaptáveis. Finalmente, são apresentados resultados de simulações que verificam o modelo teórico estabelecido.

É importante mencionar que, neste capítulo, é utilizada a modelagem clássica para os erros de quantização tanto na dedução das equações quanto nas simulações realizadas. Neste tipo de modelagem, os erros de quantização

são representados como ruídos brancos aditivos, não correlacionados com qualquer outra grandeza e uniformemente distribuídos sobre o intervalo de quantização.

3.2 - Fontes de Erros de Quantização

Quantização ocorre sempre que quantidades físicas são representadas numericamente com precisão limitada. Pode-se definir um quantizador típico como um operador não-linear cuja relação entrada/saída é mostrada na Fig. 3.1 (considera-se, aqui, a quantização com arredondamento) [7], [19]:

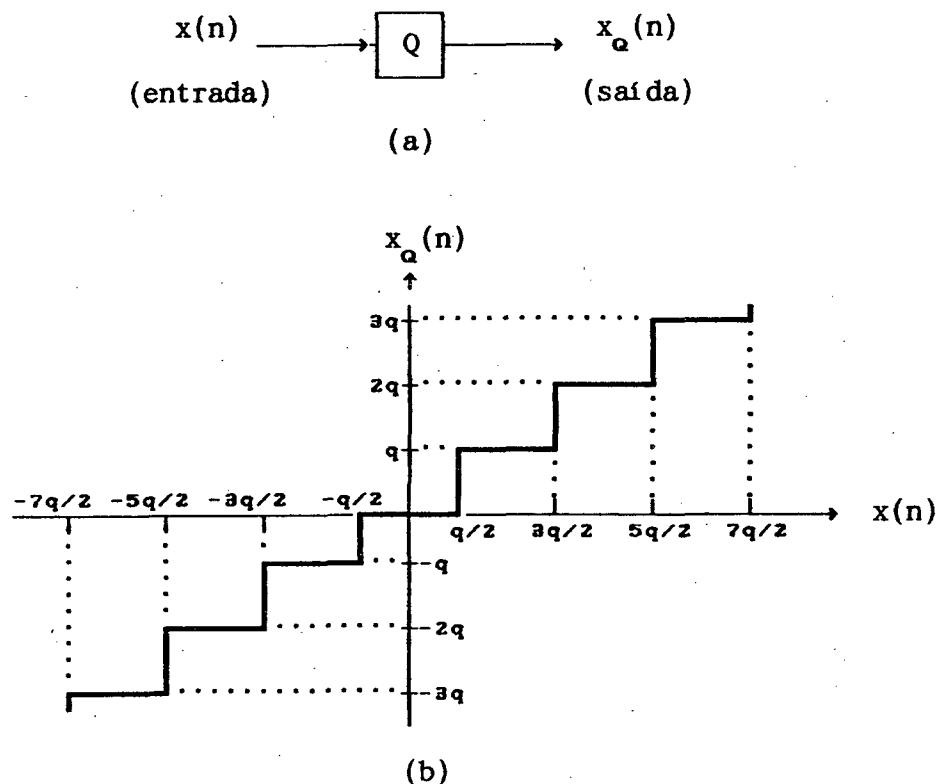


FIGURA 3.1: Quantizador Básico com Arredondamento: (a) Representação Simbólica; (b) Relação Entrada/Saída.

Em aritmética binária de ponto fixo, os valores são escalados de forma a terem módulo máximo unitário e, após o arredondamento, são quantizados em níveis de amplitude distanciados entre si por $q=2^{-B+1}$, onde B é o número de bits utilizados para representação das grandezas envolvidas (B-1 bits de magnitude e 1 bit de sinal). Assim, a menor diferença (não nula) entre dois números quantizados é 2^{-B+1} (passo de quantização).

O erro de quantização é definido como a diferença entre o valor quantizado e o valor com precisão infinita:

$$\varepsilon(n) = x_q(n) - x(n) \quad (3.1)$$

O processo de arredondamento consiste em escolher o nível de quantização que mais se aproxime do valor da grandeza a ser arredondada. Desta forma, o erro máximo possível é de $q/2$, ou seja, o erro de quantização está na faixa

$$-q/2 < \varepsilon(n) \leq q/2 \quad (3.2)$$

Obviamente, quanto maior o número de bits utilizado, menores serão os erros introduzidos pela quantização.

Uma representação alternativa para o modelo não-linear de quantização da Fig. 3.1 é mostrada na Fig. 3.2. Neste modelo, conhecido como modelo estatístico ou linearizado, a quantização é modelada pela adição de um erro de quantização, conforme a equação (3.1) [7], [19].

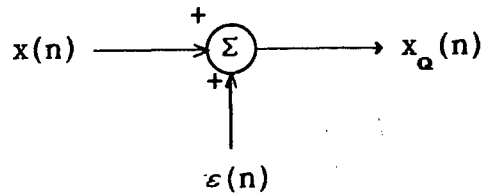


FIGURA 3.2: Modelo de Quantização Linearizado .

Para que a Fig. 3.2 seja exatamente equivalente à Fig. 3.1(a), $\varepsilon(n)$ deve ser conhecido para todo n . Como $\varepsilon(n)$ é, em geral, desconhecido, utiliza-se freqüentemente um modelo estatístico para o erro de quantização, baseado na Fig. 3.2. Neste modelo, os quantizadores são substituídos por fontes de ruído de quantização, onde assume-se que:

- a) cada fonte de ruído de quantização $\varepsilon(n)$ é um ruído branco estacionário;
- b) cada fonte de ruído apresenta uma distribuição uniforme de amplitudes sobre um intervalo de quantização ($-q/2$ a $q/2$), conforme mostrado na Fig. 3.3;
- c) cada fonte de ruído não apresenta qualquer correlação com a entrada do quantizador correspondente, com as outras fontes de ruído, ou com o sinal de entrada do sistema [7].

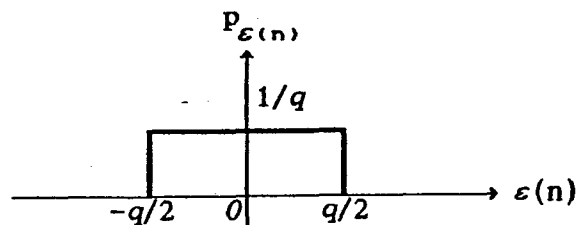


FIGURA 3.3: Função Densidade de Probabilidade do Erro de Quantização.

Tais considerações são mais realistas quando $x(n)$ for um sinal aleatório com espectro razoavelmente amplo em frequência, e seus desvio padrão e amplitudes forem grandes quando comparados ao passo de quantização q .

A partir da Fig. 3.3, obtém-se para o erro de quantização um valor médio $E\{\varepsilon(n)\}$ igual a zero e uma variância $E\{\varepsilon(n)^2\} - E\{\varepsilon(n)\}^2$ igual a $q^2/12$, onde $E\{\cdot\}$ representa o operador esperança matemática.

Existem duas fontes de erros causados pela precisão finita em filtros digitais: uma é a quantização dos sinais analógicos no conversor analógico-digital (CAD). A outra é o comprimento finito dos registradores do(s) processador(es) utilizado(s), o que limita a precisão tanto dos coeficientes quanto das operações internas. Assim, o produto de duas variáveis de B -bits de precisão resulta numa variável com comprimento $2B$ -bits (considerando representação em ponto fixo-complemento de 2), a qual geralmente deve ser truncada ou arredondada para a precisão original, introduzindo assim erros de quantização [5].

3.3 - Erros de Quantização em Filtros Digitais Adaptáveis - Revisão Bibliográfica

Existem, na literatura, alguns trabalhos que analisam os efeitos dos erros causados pela precisão limitada em filtros digitais adaptáveis. O objetivo desta seção é fazer uma breve descrição dos principais destes trabalhos.

Em [25] são analisados os efeitos dos erros devido à implementação digital de um equalizador transversal adaptável. Especial atenção é dada ao erro devido à parada de adaptação. Esta ocorre quando o termo de correção do

algoritmo de adaptação torna-se menor do que meio passo de quantização, tendo valor quantizado nulo. É demonstrado que este erro será tanto maior quanto menor for o valor da constante de adaptação β . Também, é demonstrado que a estratégia de utilização de uma constante de adaptação variável no tempo não apresenta bons resultados no algoritmo LMS implementado digitalmente.

Em [3] é analisado o efeito dos erros de quantização na equação de atualização do algoritmo LMS implementado digitalmente. Neste trabalho, o erro é definido como a diferença entre o vetor de coeficientes do algoritmo LMS implementado com precisão infinita e o vetor de coeficientes do algoritmo LMS implementado com precisão limitada. Desta forma, o erro de precisão infinita ("excess mean square error") inerente ao algoritmo LMS não é considerado na análise. Os resultados de simulação apresentados não estão de acordo com os valores previstos teoricamente.

Em [4] são obtidas expressões para o EMQ residual do algoritmo LMS implementado com precisão finita. A análise é feita tanto para aritmética de ponto fixo quanto para aritmética de ponto flutuante. A metodologia de cálculo é similar à apresentada em [3]. Os resultados de simulação apresentados consideram somente uma parcela do erro residual e, para o caso de um filtro transversal adaptável, as previsões teóricas dos erros não são apresentadas.

Em [5] são analisados os efeitos da quantização nos algoritmos LMS e RLS ("Recursive Least Squares") e em métodos de filtragem adaptável no domínio da frequência. A precisão e a estabilidade numérica destes algoritmos são também examinadas. A equação apresentada para o cálculo do EMQ residual na saída de um filtro digital adaptado através do algoritmo LMS é a mesma obtida em [4].

Diferentemente dos trabalhos anteriores, em [6] são apresentadas

equações para o cálculo do EMQ na saída de um filtro digital, adaptado através do algoritmo LMS, válidas não só para o regime permanente mas também para o período de convergência. A análise é feita para aritmética de ponto fixo e, do mesmo modo que em [3], o "excess mean square error" não está incluído nas equações obtidas. Também, as equações são de difícil aplicação prática.

É importante frisar que, nos trabalhos anteriores, os erros de quantização são modelados como ruídos brancos aditivos uniformemente distribuídos sobre o intervalo de quantização e não correlacionados com qualquer outra variável do sistema. A mesma modelagem é feita nos equacionamentos deste capítulo. No próximo capítulo, será utilizada uma modelagem mais realista que leva em conta as características de correlação e de distribuição não uniforme dos erros de quantização na equação de atualização dos coeficientes do algoritmo LMS.

Neste trabalho, o erro no vetor de coeficientes é definido como a diferença entre os N coeficientes com precisão finita e as N primeiras amostras da resposta ao impulso do sistema a ser identificado. Como consequência, o EMQ obtido inclui os erros de quantização e o "excess mean square error". Além disso, são utilizadas as variáveis "reais" do sistema adaptável, ou seja, as representações dos coeficientes e dos sinais com comprimento finito de palavra.

3.4 - Filtro Adaptável com Coeficientes Reais

Filtros adaptáveis com coeficientes reais apresentam uma larga gama de aplicações, dentre as quais pode-se citar equalização [20], cancelamento de eco em transmissões de dados na banda base [9], [14], cancelamento de

ruído [21], processamento de voz [22], medição de impedâncias [23] , [24], etc.

3.4.1 - Descrição do Sistema

A Fig. 3.4 representa o modelo de um sistema genérico no qual um filtro adaptável tem a função de identificar a resposta ao impulso de um sistema desconhecido. Tal modelo pode representar a operação de um cancelador de ecos na banda-base [14], de um cancelador de ruídos, de uma ponte digital autobalanceada [23], [24], etc.

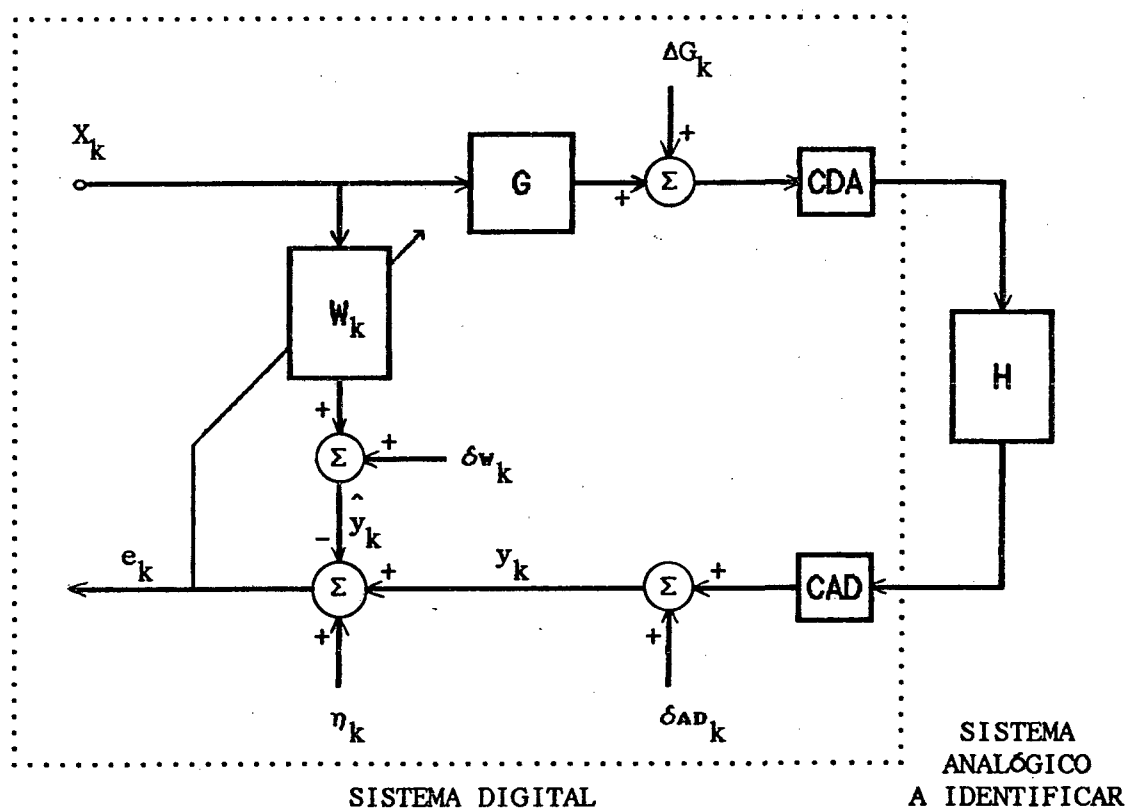


FIGURA 3.4: Modelo de um Sistema de Adaptação que Utiliza um Filtro Adaptável com Coeficientes Reais.

Na Fig. 3.4, tem-se:

- X_k : vetor de entrada do sistema;
- G : filtro transversal de L coeficientes reais que representa qualquer processamento digital do sinal de entrada (por exemplo, conformação de espectro);
- CDA : conversor digital-analógico;
- CAD : conversor analógico-digital;
- H : filtro transversal com M coeficientes reais que representa a resposta ao impulso do sistema desconhecido (por exemplo, canal do eco em transmissão digital);
- W_k : filtro transversal adaptável com N coeficientes reais. Este deve gerar uma réplica (\hat{y}_k) do sinal de saída (y_k) do sistema a ser identificado;
- ΔG_k : vetor dos erros de quantização nos produtos efetuados no processamento digital em G ;
- δ_{AD_k} : erro de quantização no CAD;
- δ_{W_k} : erro de quantização nos produtos efetuados no filtro adaptável;
- η_k : ruído aditivo, não correlacionado com os demais sinais;
- e_k : sinal de erro (a ser minimizado).

Na utilização deste modelo são assumidas as seguintes condições:

- i) o sinal de entrada é digital por natureza e não apresenta erros de quantização;
- ii) $N \geq M+L-1$, de modo que o número de coeficientes do filtro adaptável seja suficiente para identificar completamente o sistema desconhecido;
- iii) o CDA não introduz erros de conversão nem distorção no sinal convertido;

ω) o sinal de entrada está convenientemente escalado, de modo que não ocorram erros devido a "overflow".

É importante ressaltar que estas condições são perfeitamente compatíveis com a grande maioria das implementações práticas de sistemas adaptáveis.

Deve ser observado que os efeitos dos erros de quantização em todos os produtos efetuados no filtro W_k foram modelados por uma única fonte de ruído na saída deste filtro (δw_k). A variância deste ruído depende do modo como a filtragem é realizada. Se todos os produtos são realizados em dupla precisão e a quantização é feita após a acumulação, a variância de δw_k será igual a $q^2/12$, correspondente à quantização de um único valor. Por outro lado, se a quantização é realizada após cada produto, e, por hipótese, os erros dos produtos não são correlacionados entre si [7], a variância do ruído de quantização na saída vale N vezes a variância do erro em cada produto individual, onde N é o número de coeficientes do filtro W_k (N produtos realizados em cada iteração). Esta última hipótese será a considerada no presente trabalho, uma vez que representa a análise do pior caso. As mesmas considerações são feitas para a modelagem dos erros nos produtos efetuados no filtro G através do vetor de ruídos ΔG_k em sua saída. A análise do pior caso nos erros de filtragem evidencia, como ficará claro mais adiante, a preponderância dos erros de quantização na equação de atualização do algoritmo LMS.

3.4.2 - Análise do Sistema

No equacionamento que se segue, os vetores X_k e W_k têm dimensão $N \times 1$, H e ΔG_k são $M \times 1$ e G é uma matriz de dimensão $M \times N$. As demais grandezas envolvidas são todas escalares.

Mostra-se facilmente que a matriz G que representa o processamento no filtro de mesmo nome é dada por

$$G = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} \text{L termos} & & & & \text{N-L termos} & & & \\ \hline \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_{L-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_0 & \xi_1 & \dots & & \xi_{L-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_0 & \xi_1 & \dots & & \xi_{L-1} \end{array} \right] \end{array}$$

A partir da Fig. 3.4 tem-se:

$$e_k = y_k - \hat{y}_k + \eta_k \quad (3.3)$$

onde

$$y_k = (GX_k + \Delta G_k)^T H + \delta_{AD_k} \quad (3.4)$$

$$\hat{y}_k = X_k^T W_k + \delta_{W_k} \quad (3.5)$$

Portanto,

$$e_k = X_k^T (G^T H - W_k) + \Delta G_k^T H + \delta_{AD_k} - \delta_{W_k} + \eta_k \quad (3.6)$$

Após a convergência do algoritmo, a resposta ao impulso do filtro adaptável, representada pelo vetor W_k , deve se aproximar de $G^T H$, que é a resposta ao impulso do sistema a identificar. Definindo o vetor de erros nos coeficientes do filtro adaptável como

$$\theta_k = W_k - G^T H \quad (3.7)$$

a expressão do erro pode ser reescrita como:

$$e_k = \eta_k + \delta_{AD_k} - \delta_{W_k} + \Delta G_k^T H - X_k^T \theta_k \quad (3.8)$$

Tomando-se o valor esperado do quadrado do erro e admitindo-se que tanto os erros de quantização como o ruído aditivo são de média nula e não

correlacionados com qualquer outro sinal [4], vem:

$$\xi_k \triangleq E\{e_k^2\} = E\{\eta_k^2\} + E\{\delta_{AD,k}^2\} + E\{\delta_{W,k}^2\} + E\{H^T \Delta G_k \Delta G_k^T H\} + E\{\theta_k^T X_k X_k^T \theta_k\} \quad (3.9)$$

A expressão recursiva para o EMQ é obtida no Apêndice 1, a partir do algoritmo LMS, resultando:

$$\xi_{k+1} = [1 - 2\beta X_{rms}^2 + N\beta^2 X_{rms}^4] \xi_k + 2\beta X_{rms}^2 [E\{\eta_k^2\} + \sigma_{AD}^2 + L\|H\|^2 \sigma_G^2 + N\sigma_W^2] + NX_{rms}^2 (X_{rms}^2 + 1) \sigma_W^2 \quad (3.10)$$

onde β é a constante de adaptação do algoritmo LMS, X_{rms} é o valor eficaz do sinal de entrada, $\|H\|$ é a norma euclidiana do vetor H e σ_{AD}^2 , σ_G^2 e σ_W^2 são as variâncias dos erros de quantização no CAD, no processamento em G e no filtro adaptável, respectivamente.

A equação (3.10) pode ser resolvida eliminando-se a sua recursividade através da representação de ξ_k como o somatório dos termos de uma série geométrica. Assim,

$$\xi_k = [1 - 2\beta X_{rms}^2 + N\beta^2 X_{rms}^4]^k [\xi_0 - \xi_\infty] + \xi_\infty \quad (3.11)$$

onde ξ_0 é o EMQ no início do processo iterativo e ξ_∞ é o EMQ residual, obtido após a convergência. A expressão de ξ_∞ também pode ser determinada de (3.10) utilizando-se o fato de que, após a convergência, $\xi_{k+1} = \xi_k = \xi_\infty$. Desta forma

$$\xi_\infty = \frac{E\{\eta_k^2\}}{1 - \frac{\beta NX_{rms}^2}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{\beta NX_{rms}^2}{2}} \left\{ \sigma_{AD}^2 + N\sigma_W^2 + L\|H\|^2 \sigma_G^2 \right\} + \frac{N(X_{rms}^2 + 1)}{2\beta \left(1 - \frac{\beta NX_{rms}^2}{2} \right)} \sigma_W^2 \quad (3.12)$$

A equação (3.12) tem grande importância, pois permite calcular o EMQ residual em função da constante de adaptação e de outras grandezas

conhecidas do sistema. O primeiro termo à direita da igualdade representa a potência média da parcela não cancelável do erro, a qual deve-se ao ruído aditivo e é, portanto, independente dos efeitos da quantização. O segundo termo é causado pelos erros de quantização no CAD e nas filtragens e estaria presente mesmo se o sistema não fosse adaptável. Os efeitos destas duas parcelas em ξ_{∞} podem ser minorados, por exemplo, pela redução da constante de adaptação β . A terceira parcela representa a potência média dos erros causados pela quantização na equação de atualização dos coeficientes do filtro adaptável. Esta parcela é tanto maior quanto menor for o valor de β e, normalmente, é muito mais significativa do que as outras duas somadas. Isto porque, em geral, são utilizadas constantes de adaptação muito menores do que a unidade. Como consequência, ao contrário da realização com precisão infinita, não se pode diminuir sem limite o valor de β na implementação de um filtro adaptável digital, pois isto acarretaria um aumento no erro residual [25]. A partir de (3.12) pode-se obter, também, a constante de adaptação que minimiza a potência média dos erros de quantização na equação de atualização. Este valor de β é determinado pela maximização do denominador da terceira parcela e vale $\beta=1/(NX_{rms}^2)$. É importante lembrar também que a escolha da constante de adaptação está vinculada à estabilidade e à velocidade de convergência do algoritmo. Ainda em relação à equação (3.12), para valores práticos de σ_{AD}^2 , $\|H\|^2$, N , L e σ_G^2 , verifica-se que os erros de quantização no CAD e no processamento em G têm um peso muito menor do que os erros de quantização que ocorrem no processamento em W_k . Esta observação confirma a importância do número de bits utilizados na implementação do filtro adaptável.

Finalmente, é importante enfatizar a utilidade da equação (3.12) para o projeto do sistema adaptável. Ela permite determinar, a partir de uma

estimativa de $\|H\|^2$, o EMQ residual na saída de um sistema adaptável em função de parâmetros conhecidos. Considerando a contribuição pouco significativa do termo $L\|H\| \sigma_g^2$ no valor de ξ_ω , esta determinação pode ser feita com bastante precisão. No projeto de um cancelador de ecos, por exemplo, pode-se então determinar a constante de adaptação e o número de bits necessários para obter uma relação sinal-ruído especificada.

3.4.3 - Condição de Convergência

Um dos requisitos básicos de qualquer sistema adaptável é a estabilidade do seu algoritmo de adaptação. Nesta seção são estabelecidas as condições de convergência do algoritmo LMS quando aplicado a uma estrutura transversal operando com precisão finita. A partir do mesmo equacionamento é também obtida uma expressão para a constante de adaptação que maximiza a velocidade de convergência.

O processo adaptável será convergente se o módulo do raio de convergência, determinado a partir de (3.11), for menor do que a unidade. Portanto, deve-se ter:

$$|1 - 2\beta X_{rms}^2 + N\beta^2 X_{rms}^4| < 1 \quad (3.13)$$

o que implica na seguinte faixa de escolha para a constante de adaptação:

$$0 < \beta < \frac{2}{NX_{rms}^2} \quad (3.14)$$

A constante de adaptação ótima em termos de velocidade de convergência é aquela que minimiza o raio de convergência, resultando:

$$\beta_{\maxvel} = \frac{1}{NX_{rms}^2} \quad (3.15)$$

Das duas últimas expressões, comparadas com os resultados

conhecidos para implementações com precisão infinita [2], [15], observa-se que as características de convergência do algoritmo LMS aplicado a filtros transversais não são afetadas por sua implementação em precisão finita. Também, verifica-se que a constante de adaptação que maximiza a velocidade de convergência é a mesma que minimiza a parcela mais significativa do EMQ residual. Portanto, este valor da constante de adaptação pode ser utilizado como primeira aproximação na implementação do algoritmo.

3.4.4 - Resultado de Simulações

O sistema da Fig. 3.4 foi simulado em computador a fim de verificar a correção do novo equacionamento. Nas simulações, as seguintes condições foram utilizadas, as quais correspondem a um problema de cancelamento de ecos em transmissão de dados:

- a) sinal de entrada composto por símbolos +1 e -1 equiprováveis, de forma que $X_{rms}^2=1$;
- b) filtro transversal G com 8 coeficientes e precisão de 12 bits, o qual corresponde ao filtro conformador de pulsos. Os coeficientes utilizados foram obtidos a partir da expressão [26]

$$g_n = \text{sen}[(n-7)/2] \cdot \{0,54 + 0,46 \cos[(2n-7)/8]\}, \quad \text{para } n=1, 2, \dots, 7;$$

- c) filtro transversal H (canal analógico) com 20 coeficientes e precisão infinita. Em cancelamento de ecos, este filtro pode representar, por exemplo, o canal de eco local através da híbrida. A resposta ao impulso utilizada para este canal foi obtida a partir da resposta em frequência de um sistema com largura de banda igual à da linha telefônica e com $\|H\|^2=0,1$, uma vez que a híbrida atenua o eco em cerca de 10 dB [9]. A

função de transferência do sistema utilizado, com frequência de amostragem $f_s=8\text{kHz}$, é dada abaixo:

$$H(z)=\frac{0,0546(z^8-0,188z^7-3,39z^6+0,155z^5+4,86z^4+0,155z^3-3,39z^2-0,188z+1)}{z^8-1,36z^7+0,693z^6-0,833z^5+1,57z^4-1,06z^3-0,650z^2-0,632z+0,410}$$

- d) filtro adaptável com 28 coeficientes reais e precisão de 12 bits. Todos os coeficientes foram inicializados com valor nulo (no princípio do processo iterativo);
- e) CAD com 10 bits de resolução;
- f) o ruído aditivo não foi considerado pois seus efeitos podem ser englobados no erro causado pela conversão A/D.

O efeito da quantização de uma variável foi representado pela adição de um ruído de quantização, de média nula e uniformemente distribuído entre $\pm 2^{-B}$, onde B é o número de bits de precisão da variável (supondo quantização com arredondamento e representação em ponto fixo-complemento de 2). Estas considerações levam a variâncias iguais a $2^{-2(B-1)}/12$ para os erros de quantização [7], [19].

A Fig. 3.5 mostra os gráficos dos EMQ residuais, simulado e previsto pela expressão (3.12), em função da constante de adaptação β . O EMQ residual simulado foi obtido, após a convergência do algoritmo, considerando amostras do erro e_k (Fig. 3.4). Para cada valor de β , foram feitas 10 simulações, com 12000 iterações cada. Em cada simulação, o EMQ residual foi calculado através de uma média quadrática dos valores de e_k das últimas 2000 iterações. Os valores de EMQ residuais apresentados no gráfico foram obtidos através da média aritmética dos 10 valores de EMQ residuais calculados para cada valor de β . Este procedimento se justifica porque a variável aleatória e_k , após a convergência, constitui um processo ergódico, conforme verificado

através das simulações. Observa-se uma grande concordância entre os valores calculados e simulados, o que valida todo o equacionamento proposto.

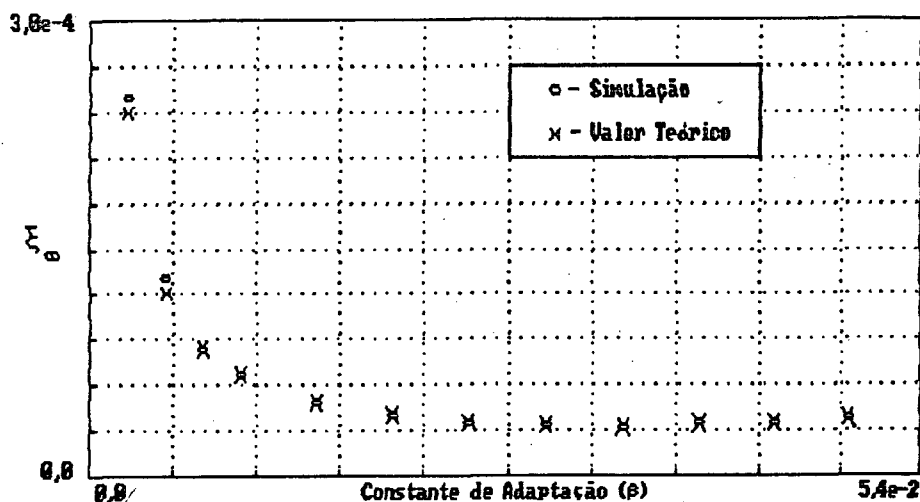


FIGURA 3.5: Erro Médio Quadrático Residual x Constante de Adaptação

3.5 - Filtro Adaptável com Coeficientes Complexos

Algumas aplicações de filtros adaptáveis requerem o processamento de sinais complexos e, conseqüentemente, um filtro com coeficientes complexos. Isto inclui a filtragem adaptável de sinais de banda estreita em torno de uma frequência intermediária, na qual X_k e y_k (ver Fig. 3.4) são transladados em frequência sem alterar sua relação de fases [27]. Como exemplo, pode-se citar o cancelamento de ecos em transmissões de dados utilizando a banda de voz. Nestes casos, os dados são codificados em símbolos complexos, os quais modulam uma portadora em amplitude e em fase. O cancelador terá como entrada, em geral, os próprios símbolos complexos, e não amostras do sinal real transmitido [15]. Desta forma, os coeficientes do filtro adaptável devem ser complexos [8], [12].

O processamento de sinais complexos envolve operações com partes reais e imaginárias de sinais e de coeficientes. Assim, os efeitos dos erros de quantização terão particularidades específicas e devem, portanto, ser cuidadosamente determinados. Dada, entretanto, a semelhança com o equacionamento do caso real, será mantido, sempre que possível, um paralelismo entre os dois casos.

3.5.1 - Descrição do Sistema

A Fig. 3.6 representa a implementação de um sistema no qual um filtro adaptável com coeficientes complexos é usado para identificar a resposta ao impulso de um sistema desconhecido.

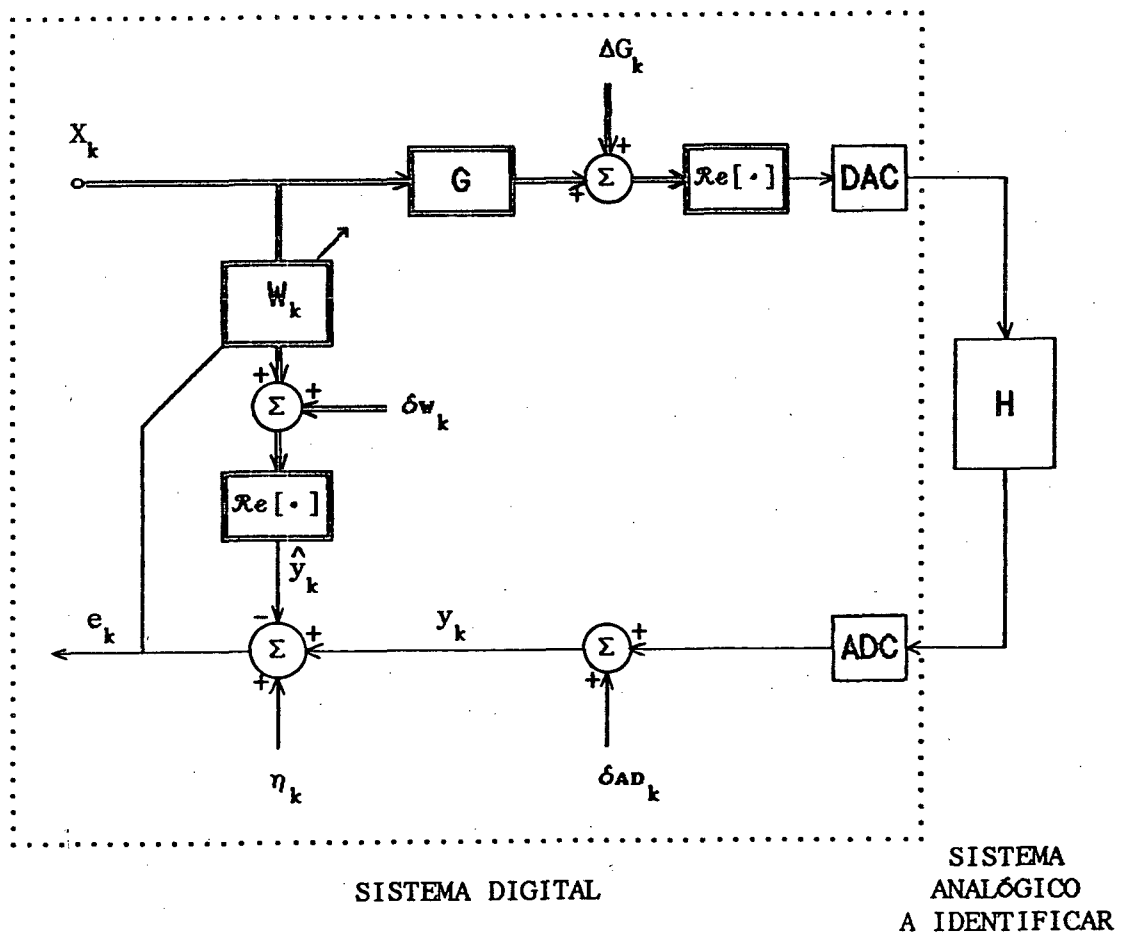


FIGURA 3.6: Modelo de um Sistema de Adaptação que Utiliza um Filtro Adaptável com Coeficientes Complexos.

Nesta figura, as linhas duplas representam fluxo e processamento de sinais complexos, enquanto que as linhas simples representam fluxo e processamento de sinais reais. A notação empregada na Fig. 3.6 é a seguinte:

- X_k : vetor complexo de entrada do sistema (por exemplo, símbolos QAM em transmissão de dados na banda de voz [1], [9]);
- G : filtro transversal com L coeficientes complexos que representa qualquer processamento digital do sinal de entrada (por exemplo, modulação ou conformação de espectro);
- $\text{Re}[\cdot]$: extrator da parte real;
- CDA : conversor digital-analógico;
- CAD : conversor analógico-digital;
- H : filtro transversal com M coeficientes reais que representa a resposta ao impulso do sistema desconhecido (por exemplo, canal de eco);
- W_k : filtro transversal adaptável com N coeficientes complexos, o qual deve gerar uma réplica do sinal de saída do sistema a ser identificado;
- ΔG_k : vetor complexo dos erros de quantização nos produtos efetuados no processamento digital em G ;
- δ_{AD}_k : erro de quantização no CAD;
- δ_{W}_k : erro de quantização nos produtos efetuados no filtro adaptável;
- η_k : ruído aditivo, não correlacionado com os demais sinais;
- e_k : sinal de erro (a ser minimizado).

É importante lembrar que o cancelamento, neste caso, está sendo feito apenas com a parte real do sinal de erro e não com o sinal de erro analítico (complexo), como mostra a Fig. 3.6. Isto simplifica o sistema, uma vez que elimina a necessidade de utilização de uma rede defasadora (filtro de Hilbert), requerida na obtenção do erro analítico. Em contrapartida, o tempo

de convergência é aproximadamente duplicado [12].

Da mesma forma que no caso de sinais reais, é assumido que o sinal de entrada é digital por natureza, que o filtro adaptável tem número de coeficientes suficiente para identificar o sistema desconhecido, que o CDA não introduz erros e que erros devido a "overflow" são evitados.

3.5.2 - Análise do Sistema

No equacionamento que se segue, os vetores X_k e W_k têm dimensão $N \times 1$, H e ΔG_k são $M \times 1$ e G é uma matriz $M \times N$. As demais grandezas são escalares.

Da Fig. 3.6 tem-se:

$$e_k = y_k - \hat{y}_k + \eta_k \quad (3.16)$$

onde

$$y_k = \Re e[(GX_k + \Delta G_k)^T H] + \delta_{AD_k} \quad (3.17)$$

$$\hat{y}_k = \Re e[X_k^T W_k + \delta_{W_k}] \quad (3.18)$$

Portanto,

$$e_k = \Re e[X_k^T (G^T H - W_k) + \Delta G_k^T H - \delta_{W_k}] + \delta_{AD_k} + \eta_k \quad (3.19)$$

Após a convergência do algoritmo, a resposta ao impulso W_k do filtro adaptável deve aproximar-se de $G^T H$, que é a resposta ao impulso completa do sistema a identificar.

Definindo o vetor de erros nos coeficientes do filtro adaptável como

$$\theta_k = W_k - G^T H \quad (3.20)$$

a expressão do erro pode ser reescrita:

$$e_k = \eta_k + \delta_{AD_k} - \mathcal{R}e[\delta w_k] + \mathcal{R}e[\Delta G_k^T]H - \mathcal{R}e[X_k^T \theta_k] \quad (3.21)$$

Tomando-se o valor esperado do quadrado do erro e admitindo-se que tanto os erros de quantização quanto o ruído aditivo têm médias nulas e não são correlacionados com qualquer outro sinal, vem:

$$\begin{aligned} \xi_k \triangleq E\{e_k^2\} &= E\{\eta_k^2\} + E\{\delta_{AD_k}^2\} + E\{(\mathcal{R}e[\delta w_k])^2\} + \\ &+ E\{H^T \mathcal{R}e[\Delta G_k] \mathcal{R}e[\Delta G_k^T] H\} + E\{(\mathcal{R}e[X_k^T \theta_k])^2\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

A expressão recursiva para o EMQ é obtida no Apêndice 2, a partir do algoritmo LMS complexo, resultando:

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= [1 - 2\beta A_{rms}^2 + 2N\beta^2 A_{rms}^4] \xi_k + 2\beta A_{rms}^2 [E\{\eta_k^2\} + \\ &+ \sigma_{AD}^2 + 2L\|H\|^2 \sigma_G^2 + 2N\sigma_w^2] + 2NA_{rms}^2 (A_{rms}^2 + 1) \sigma_w^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Na obtenção desta equação, foi assumido que as partes real e imaginária do sinal de entrada são seqüências não correlacionadas, de média nula, com variâncias iguais a A_{rms}^2 . Aqui, σ_G^2 e σ_w^2 são as variâncias dos erros de quantização em cada produto de números reais no processamento em G e no filtro adaptável, respectivamente.

A equação (3.23) pode ser resolvida, resultando em

$$\xi_k = [1 - 2\beta A_{rms}^2 + 2N\beta^2 A_{rms}^4]^k [\xi_0 - \xi_\infty] + \xi_\infty \quad (3.24)$$

onde ξ_0 é o EMQ no início da adaptação e ξ_∞ é o erro residual, obtido após a convergência, dado por

$$\xi_{\infty} = \frac{E\{\eta_k^2\}}{1-\beta N A_{rms}^2} + \frac{1}{1-\beta N A_{rms}^2} \left\{ \sigma_{AD}^2 + 2N\sigma_w^2 + 2L\|H\|^2 \sigma_g^2 \right\} + \frac{N(A_{rms}^2+1)}{\beta(1-\beta N A_{rms}^2)} \sigma_w^2 \quad (3.25)$$

Todas as observações feitas na seção 3.3.2 em relação à equação (3.12) são também válidas para a equação (3.25).

3.5.3 - Condição de Convergência

O processo adaptável será convergente se o módulo do raio de convergência, a partir de (3.24), for menor do que a unidade. Logo,

$$|1-2\beta A_{rms}^2+2N\beta^2 A_{rms}^4| < 1 \quad (3.26)$$

o que implica na seguinte faixa de escolha para a constante de adaptação:

$$0 < \beta < \frac{1}{N A_{rms}^2} \quad (3.27)$$

A constante de adaptação que maximiza a velocidade de convergência é dada por:

$$\beta_{\maxvel} = \frac{1}{2N A_{rms}^2} \quad (3.28)$$

Novamente, verifica-se que as características de convergência não são afetadas pelos erros de quantização. Neste caso, também, pode-se verificar que a constante de adaptação que maximiza a velocidade de convergência é a mesma que minimiza a parcela mais significativa do EMQ residual, devida aos erros de quantização na equação de atualização dos coeficientes.

3.5.4 - Resultados de Simulações

O sistema da Fig. 3.6 foi simulado em computador a fim de verificar correção do novo equacionamento. Nas simulações, as seguintes condições foram utilizadas:

a) sinal de entrada composto pelos símbolos complexos $(+1+j/3)$, $(-1-j/3)$, $(1/3-j)$ e $(-1/3+j)$ equiprováveis, de forma que $A_{rms}^2=5/9$. Estes são os símbolos utilizados na seqüência de treinamento dos MODEMS V.32 [28], escalados de modo a terem partes reais e imaginárias com módulo máximo unitário;

b) filtro transversal G com 8 coeficientes complexos e precisão de 12 bits, correspondente ao filtro conformador de pulsos. Para cada coeficiente, foram utilizadas partes real e imaginárias iguais, obtidas a partir da expressão

$$\Re[g_n] = \Im[g_n] = \text{sen}[(n-7)/2] \cdot \{0,54 + 0,46 \cos[(2n-7)/8]\}, \text{ para } n=1, \dots, 2, 7;$$

c) filtro transversal H (canal analógico) com 20 coeficientes e precisão infinita e com $\|H\|^2=0,1$. Os coeficientes utilizados foram obtidos a partir da resposta ao impulso de um sistema cuja função de transferência é dada abaixo

$$H(z) = \frac{0,0546(z^8 - 0,188z^7 - 3,39z^6 + 0,155z^5 + 4,86z^4 + 0,155z^3 - 3,39z^2 - 0,188z + 1)}{z^8 - 1,36z^7 + 0,693z^6 - 0,833z^5 + 1,57z^4 - 1,06z^3 - 0,650z^2 - 0,632z + 0,410};$$

d) filtro adaptável com 28 coeficientes complexos e precisão de 12 bits. Todos os coeficientes foram inicializados com valor nulo;

e) CAD com 10 bits de resolução.

Aqui, novamente, o ruído aditivo η_k não foi considerado e o efeito da quantização de uma variável foi representado pela adição de um ruído de

quantização, de média nula e uniformemente distribuído entre $\pm 2^{-B}$, onde B é o número de bits de precisão da variável.

A Fig. 3.7 mostra o gráfico do EMQ residual (simulado e calculado pela expressão (3.25)) em função da constante de adaptação. O procedimento de cálculo do EMQ residual simulado é o mesmo descrito na Seção 3.3.4. Novamente, pode ser verificada a boa concordância existente entre os valores calculados por (3.25) e simulados, o que valida o equacionamento proposto.

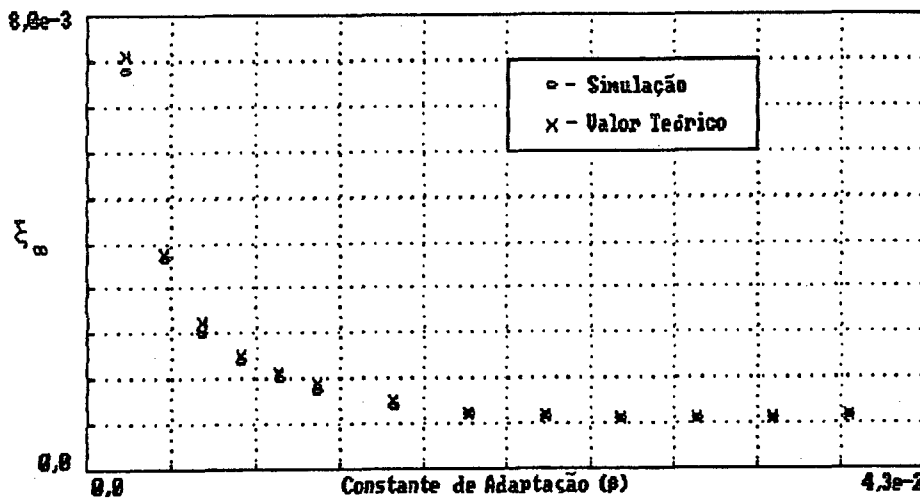


FIGURA 3.7: Erro Médio Quadrático Residual x Constante de Adaptação

3.6 - Conclusão

Neste capítulo foi apresentado um novo equacionamento dos efeitos dos erros de quantização em filtros digitais, tanto com coeficientes reais quanto com coeficientes complexos, adaptados através do algoritmo LMS. Foram obtidas expressões gerais para o EMQ, as quais são válidas tanto para o período de convergência (transiente) quanto para o regime permanente. As condições de convergência do algoritmo foram estudadas e equações simples

para a determinação do EMQ residual foram obtidas. Estas equações são de grande valia em projetos de sistemas adaptáveis, pois permitem a determinação das constantes de adaptação bem como das precisões necessárias no processamento e nas conversões A/D para a implementação de sistemas com EMQ residual pré-estabelecido. Também, foram apresentados resultados experimentais em plena concordância com as equações propostas, validando o novo equacionamento.

Aqui, todos os erros de quantização foram modelados da forma convencional, ou seja, como ruídos brancos aditivos com distribuição uniforme de amplitudes sobre um intervalo de quantização e não correlacionados com qualquer outra variável presente no sistema analisado. Conforme dito anteriormente, esta modelagem é mais realista quando as variáveis a serem quantizadas possuem amplitudes e desvios-padrão grandes quando comparados com o passo de quantização. Durante a convergência do algoritmo LMS, entretanto, o sinal de erro, que é utilizado na equação de adaptação, é não-estacionário, tendo potência decrescente. Na realidade, é bastante comum que, após a convergência, o desvio-padrão do sinal de erro caia abaixo do valor do passo de quantização. Desta forma, os erros de quantização presentes na equação de atualização perdem suas características de distribuição uniforme e de não correlação com os outros sinais. Como estes erros são os de maior peso na composição do EMQ na saída do filtro, um equacionamento que leve em conta as novas características dos mesmos é altamente desejável. No próximo capítulo, é proposto um aprimoramento do modelo clássico do ruído de quantização, onde são levados em consideração os efeitos mencionados anteriormente.

C A P Í T U L O 4

ANÁLISE DOS ERROS DE QUANTIZAÇÃO EM FILTROS DIGITAIS ADAPTÁVEIS

Modelo Aprimorado

4.1 - Introdução

No capítulo anterior foram obtidas expressões para o erro médio quadrático (EMQ) na saída de filtros digitais adaptáveis com coeficientes reais e com coeficientes complexos. Nos modelos utilizados, o efeito da quantização de uma variável é representado pela adição de um ruído branco de quantização com média nula, uniformemente distribuído entre $\pm 2^{-B}$ e não correlacionado com a variável a ser quantizada (modelo de quantização linearizado). Entretanto, já foi demonstrado [25] que em vários casos a adaptação pode parar prematuramente. Isto porque o termo de correção da equação de atualização do algoritmo torna-se menor do que meio passo de quantização (supondo quantização com arredondamento). Este fenômeno caracteriza um comportamento não linear do sistema, o qual tende a se agravar com a redução da amplitude do sinal de erro. Quando o nível do sinal aproxima-se de meio passo de quantização, as conseqüentes alterações nas propriedades estatísticas do erro de quantização devem ser consideradas. Nestes casos o modelo linearizado é claramente incompleto. Portanto, torna-se altamente desejável melhorar o modelo existente de forma que tais situações possam ser automaticamente consideradas.

A falta de um modelo apropriado levou vários pesquisadores a buscarem formas de prevenir a ocorrência da parada abrupta do algoritmo. Um destes métodos propõe a inserção de um "dither" na entrada dos quantizadores [29]. Quando adequadamente utilizada, esta técnica força a operação do

sistema a satisfazer as condições necessárias à validade do modelo de ruído branco. No entanto, esta solução acarreta em um aumento considerável na complexidade de implementação do algoritmo.

Neste capítulo é proposta uma nova modelagem para o fenômeno não linear de quantização. O novo modelo é baseado nas variáveis reais do sistema adaptável, ou seja, nas representações em precisão finita dos coeficientes e dos sinais. O uso de variáveis hipotéticas é evitado. Como consequência, o erro médio quadrático calculado inclui os erros médios quadráticos de arredondamento e de precisão infinita ("excess mean square error").

Utilizando o novo modelo, são obtidas novas expressões para o EMQ na saída de filtros digitais, tanto com coeficientes reais quanto com coeficientes complexos, adaptados através do algoritmo LMS. Tais expressões levam em conta a correlação existente entre o termo de correção da equação de atualização (βe_k) e seu erro de quantização. Também são obtidos, a partir de resultados experimentais, modelos aproximados para as variâncias dos erros de quantização na equação de atualização e para o coeficiente de correlação utilizado. Estes parâmetros, por terem grande relevância nas equações obtidas, devem ser conhecidos, pelo menos aproximadamente. Finalmente, são apresentados resultados de simulações que validam o novo equacionamento proposto.

4.2 - Considerações sobre a Modelagem dos Erros de Quantização

A fim de verificar a precisão do modelo linearizado, é interessante simular o sistema digital exatamente da maneira como ele será implementado. Assim, a quantização de uma variável deve ser realizada conforme a Fig. 3.1, e não através da adição de um ruído branco à variável.

O sistema da Fig. 3.6 foi novamente simulado em computador nas mesmas condições da Seção 3.5.4, exceto pela utilização do modelo não linear de quantização conforme a Fig. 3.1. A Fig. 4.1 mostra os resultados obtidos, onde o eixo vertical está em escala logarítmica (decibéis relativos a 10^{-6}), a fim de facilitar a visualização.

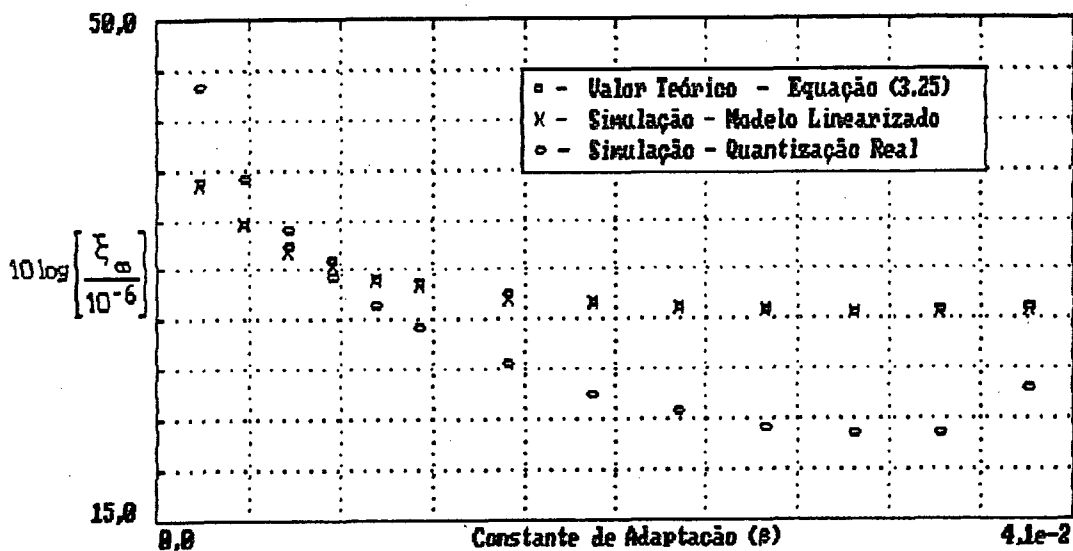


FIGURA 4.1: Erro Médio Quadrático Residual x Constante de Adaptação

Verifica-se que os valores de EMQ residuais obtidos a partir da equação (3.25) do modelo linearizado não estão em concordância com os valores obtidos através das simulações para todos os valores da constante de adaptação β .

Esta simulação apenas confirma que o efeito da quantização de uma grandeza, neste caso, não pode ser estudado, em geral, pela substituição do quantizador por uma fonte de ruído branco aditivo com distribuição uniforme de amplitudes sobre $\pm q/2$. A razão disto é que, nesta substituição, assume-se implicitamente que o desvio padrão da variável de entrada do quantizador é

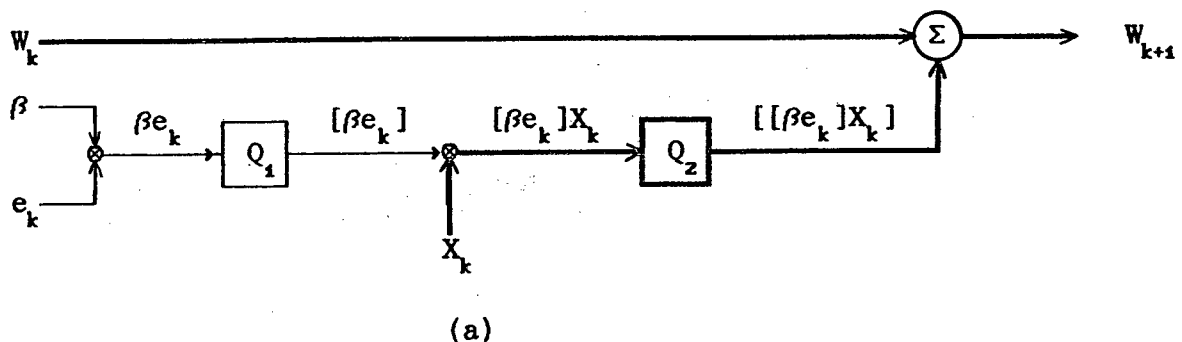
maior do que meio passo de quantização [19]. Se, por exemplo, a entrada do quantizador for não-estacionária tal que seu desvio padrão caia abaixo de meio passo de quantização, o ruído de quantização perde suas características de distribuição uniforme e de não-correlação com a entrada do quantizador. Neste caso, o modelo linearizado utilizado no capítulo anterior não é mais adequado para representar os efeitos da quantização. Entretanto, é exatamente isto que pode ocorrer no algoritmo LMS [29].

A equação de atualização dos coeficientes de um filtro digital (com coeficientes reais, por simplicidade) adaptado através do algoritmo LMS é aqui reescrita por conveniência, de dois modos diferentes:

$$W_{k+1} = W_k + [[\beta e_k] X_k] \quad (4.1a)$$

$$W_{k+1} = W_k + (\beta e_k + \delta_1) X_k + \Delta z_k \quad (4.1b)$$

Na equação (4.1a), os colchetes representam a operação de quantização enquanto que na equação (4.1b) tal operação é representada pela adição de ruídos de quantização. Tais equações podem ser mais facilmente entendidas através de suas representações, conforme mostrado na Fig. 4.2, onde linhas finas indicam fluxo de sinais escalares e linhas grossas indicam fluxo de grandezas vetoriais.



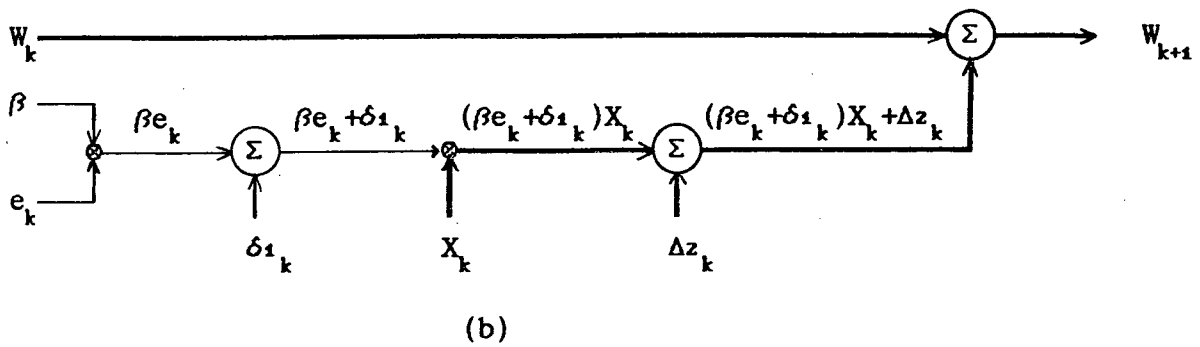


FIGURA 4.2: Representações da Equação de Atualização do Algoritmo LMS Utilizando: (a) Quantizadores; (b) Ruídos Aditivos.

Na computação do termo de atualização dos coeficientes, $\beta e_k X_k$, o produto βe_k deve ser realizado em primeiro lugar, a fim de reduzir o número de multiplicações, já que este termo é constante para todos os coeficientes em cada iteração. Assumindo aritmética de ponto fixo e complemento de 2, este produto terá dupla precisão e deve ser arredondado para a precisão original, introduzindo um erro de quantização (δ_{1k} na Fig. 4.2(b)). O produto de $[\beta e_k]$ pelo vetor de entrada X_k também introduz, pelo mesmo motivo, um vetor de erros de quantização (Δz_k na Fig. 4.2(b)).

Durante o processo de convergência do algoritmo, o sinal de erro e_k tem nível de potência decrescente. Desta forma, o produto βe_k na entrada do quantizador Q1 (Fig. 4.2(a)) torna-se cada vez menor, de modo que pode se tornar inferior a $q/2 = 2^{-B}$ (meio passo de quantização). Nestas condições, $[\beta e_k]$ será nulo, o erro de quantização δ_{1k} será igual a $-\beta e_k$ e o algoritmo virtualmente pára de adaptar os coeficientes do filtro [25]. Neste caso, obviamente, o ruído δ_{1k} terá a mesma distribuição de $-\beta e_k$. Conclui-se, então, que quanto mais próximo da convergência estiver o algoritmo, menos será realista a hipótese de que δ_{1k} é um ruído branco uniformemente distribuído entre $\pm q/2$ e não-correlacionado com βe_k . Quanto ao vetor Δz_k , suas

componentes também não podem ser modeladas como ruídos brancos uniformemente distribuídos entre $\pm q/2$. Na verdade, após a convergência, tais componentes serão, na maioria das vezes, nulas. Isto ocorre porque quando $[\beta e_k]$ for nulo, $[\beta e_k]X_k$ e $[[\beta e_k]X_k]$ também o serão.

Todos os outros erros de quantização envolvidos (nas filtragens e na conversão A/D) serão modelados como ruídos brancos uniformemente distribuídos entre $\pm q/2$. Isto porque tais erros se originam da quantização de grandezas que normalmente apresentam desvios-padrão muito maiores do que os passos de quantização correspondentes. Neste caso também a modelagem linear representa uma simplificação em relação ao caso real [30]. Entretanto, como os erros de quantização dominantes no processo de adaptação são aqueles presentes na equação de atualização, esta simplificação pode ser feita sem grandes prejuízos para a qualidade dos resultados obtidos.

4.3 - Filtro Adaptável com Coeficientes Reais

Nesta seção será tratado o caso de filtros adaptáveis com coeficientes reais. O estudo em separado deste caso permite a utilização de uma notação mais simples e é, portanto, conveniente para a introdução da nova modelagem. O caso mais geral de filtros com coeficientes complexos será tratado na próxima seção.

O equacionamento aqui desenvolvido segue o mesmo procedimento utilizado na Seção 3.4. Todas as considerações e definições feitas naquela seção são válidas também aqui, a não ser que diferentemente estabelecidas.

4.3.1 - Análise do Sistema

Por conveniência, o modelo representativo de um sistema no qual um filtro adaptável tem a função de identificar a resposta ao impulso de um

sistema desconhecido é repetido na Fig. 4.3.

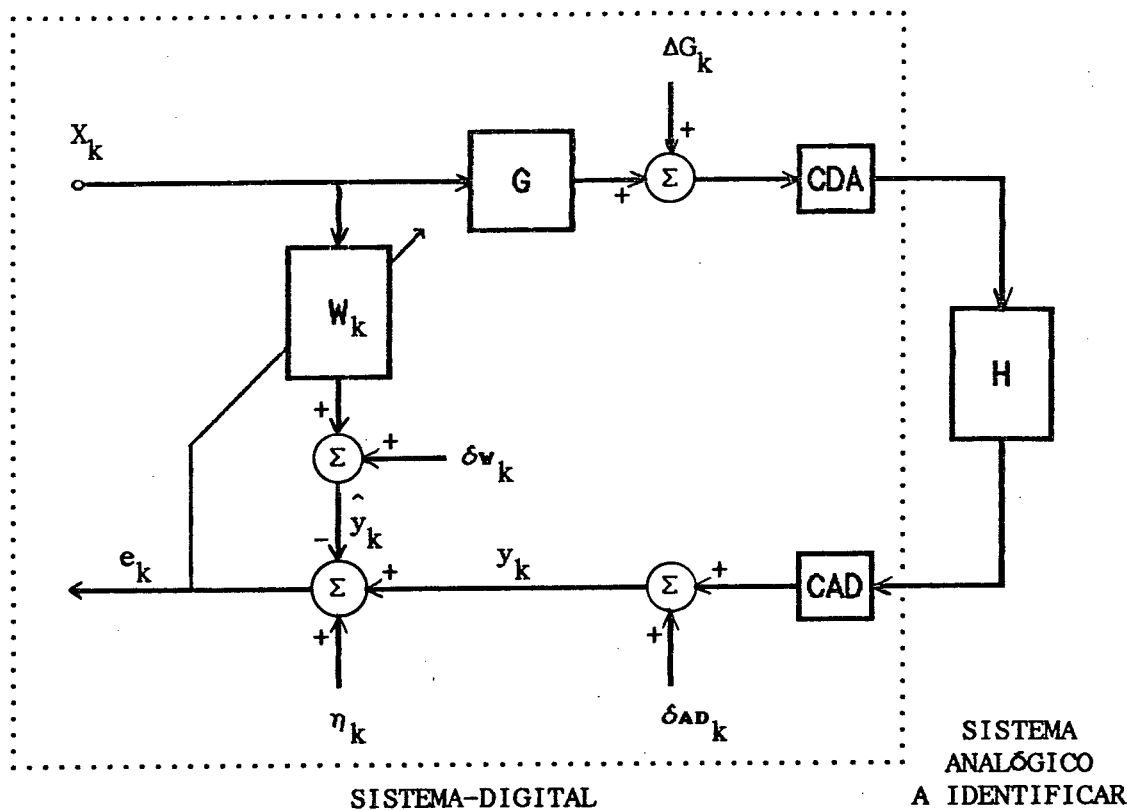


FIGURA 4.3: Sistema de Identificação que Utiliza um Filtro Adaptável com Coeficientes Reais.

A expressão para o sinal de erro na k -ésima iteração do algoritmo é dada por

$$e_k = \eta_k + \delta_{AD_k} - \delta_{w_k} + \Delta G_k^T H - X_k^T \theta_k \quad (4.2)$$

onde $\theta_k = W_k - G^T H$ é o vetor de erros nos coeficientes do filtro adaptável.

Tomando-se o valor esperado do quadrado do erro e considerando a não-correlação entre os termos envolvidos, obtém-se a expressão para o EMQ:

$$\xi_k \triangleq E\{e_k^2\} = E\{\eta_k^2\} + E\{\delta_{AD,k}^2\} + E\{\delta_{W,k}^2\} + E\{H^T \Delta G_k \Delta G_k^T H\} + E\{\theta_k^T X_k X_k^T \theta_k\} \quad (4.3)$$

Considerando X_k e θ_k estatisticamente independentes e representando os erros de quantização como na equação (4.1b), obtém-se, após algumas manipulações matemáticas (ver Apêndice 3), uma expressão recursiva para o EMQ.

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} = & [1 - 2\beta X_{rms}^2 + N\beta^2 X_{rms}^4] \xi_k - 2r X_{rms}^2 (1 - \beta N X_{rms}^2) \sigma_1 \sqrt{\xi_k} + \\ & + 2\beta X_{rms}^2 \xi_{NA} + N X_{rms}^2 (X_{rms}^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde ξ_{NA} é o EMQ na saída do filtro se o mesmo não fosse adaptável ($\beta=0$) e é dado por

$$\xi_{NA} = E\{\eta_k^2\} + \sigma_{AD}^2 + L\|H\|^2 \sigma_G^2 + N\sigma_W^2 \quad (4.5)$$

O termo σ_1^2 é a variância do erro de quantização no produto βe_k na equação de atualização ($\delta_{1,k}$ em (4.1b)), σ_2^2 é a variância do erro de quantização em cada componente do produto $[\beta e_k] X_k$ ($\Delta_{2,k}$ em (4.1b)), r é o coeficiente de correlação entre $\delta_{1,k}$ e βe_k e σ_W^2 é a variância dos erros de quantização na filtragem em W_k . As outras possíveis correlações existentes entre os termos da equação de atualização (por exemplo, entre o produto $[\beta e_k] X_k$ e $\Delta_{2,k}$) não foram incluídas na análise. Isto porque a sua não inclusão leva a expressões simples que ainda permitem prever com bastante precisão os valores de EMQ. A pouca importância destas outras correlações deve-se ao fato do produto βe_k ser o primeiro a ser quantizado na equação de atualização; portanto, o

coeficiente de correlação associado à sua quantização tem uma maior relevância.

É importante observar que a equação (3.10) é um caso particular da equação (4.4), a qual descreve mais precisamente o comportamento do EMQ na saída do filtro, pois inclui o coeficiente de correlação entre βe_k e seu erro de quantização. Além disso, (4.4) permite considerar variâncias distintas para os erros de quantização nos diferentes produtos envolvidos na equação de atualização.

4.3.2 - EMQ Residual

O EMQ residual pode ser obtido fazendo-se $k \rightarrow \infty$ em (4.4), utilizando-se o fato de que, após a convergência, $\xi_{k+1} = \xi_k = \xi_\infty$. Desta forma

$$\xi_\infty = \frac{\theta}{2\beta \left(1 - \frac{\beta N X_{rms}^2}{2} \right)} + \xi_r \quad (4.6)$$

onde

$$\theta = 2\beta \xi_{NA} + N(X_{rms}^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad (4.7)$$

e ξ_r é a parcela do EMQ residual decorrente da existência de correlação entre o erro de quantização δ_{1k} e o produto βe_k , na equação de atualização, sendo dada por

$$\xi_r = \frac{1}{\left[2\beta \left(1 - \frac{\beta N X_{rms}^2}{2}\right)\right]^2} \left\{ 2[r (1 - \beta N X_{rms}^2) \sigma_1]^2 - \right. \\ \left. - 2r (1 - \beta N X_{rms}^2) \sigma_1 \sqrt{2\beta \theta \left[1 - \beta N X_{rms}^2 / 2\right] + [r (1 - \beta N X_{rms}^2) \sigma_1]^2} \right\} \quad (4.8)$$

A equação (4.6) permite determinar o EMQ residual em função da constante de adaptação e de outras grandezas do sistema e, portanto, é de grande utilidade prática em projeto de sistemas adaptáveis. Novamente se observa que os erros de quantização na equação de atualização são tão mais significativos quanto menor for a constante de adaptação β . Também, se o erro de quantização δ_{1k} for não-correlacionado com o sinal de erro e_k (o que pode acontecer se e_k for suficientemente ruidoso, ou seja, com grande variância), o coeficiente de correlação r será nulo e a parcela ξ_r do EMQ residual também o será. Por exemplo, se um filtro de cancelamento de ecos estiver sendo adaptado durante a fase de operação "full-duplex", o sinal de erro é bastante ruidoso, pois inclui o sinal proveniente do MODEM remoto. Neste caso, a equação (3.12), que é um caso particular da equação (4.6), pode ser utilizada. Em um caso mais geral, a equação (4.6) deve ser empregada. Assim, os parâmetros desconhecidos presentes nesta equação (r , σ_1^2 e σ_2^2) devem ser estimados, pelo menos aproximadamente.

4.3.3 - Condição de Convergência

Durante quase todo o processo de convergência, o sinal de erro é bastante ruidoso, tendo grandes amplitudes. Desta maneira, para efeito de condição de convergência, δ_{1k} e βe_k podem ser considerados não-correlacionados, ou seja, $r=0$. Neste caso, a equação (4.4) é idêntica à

equação (3.10) e as condições de convergência obtidas na Seção 3.4.3 permanecem válidas.

4.4 - Filtro Adaptável com Coeficientes Complexos

Nesta seção será tratado o caso de filtros adaptáveis com coeficientes complexos. O equacionamento aqui desenvolvido seguirá o mesmo procedimento utilizado na Seção 3.5.

4.4.1 - Análise do Sistema

A Fig. 4.4 mostra a representação de um sistema de identificação que utiliza um filtro adaptável com coeficientes complexos. Mantendo a notação empregada no capítulo anterior, as linhas duplas representam fluxo e processamento de sinais complexos, enquanto que as linhas simples representam fluxo e processamento de sinais reais.

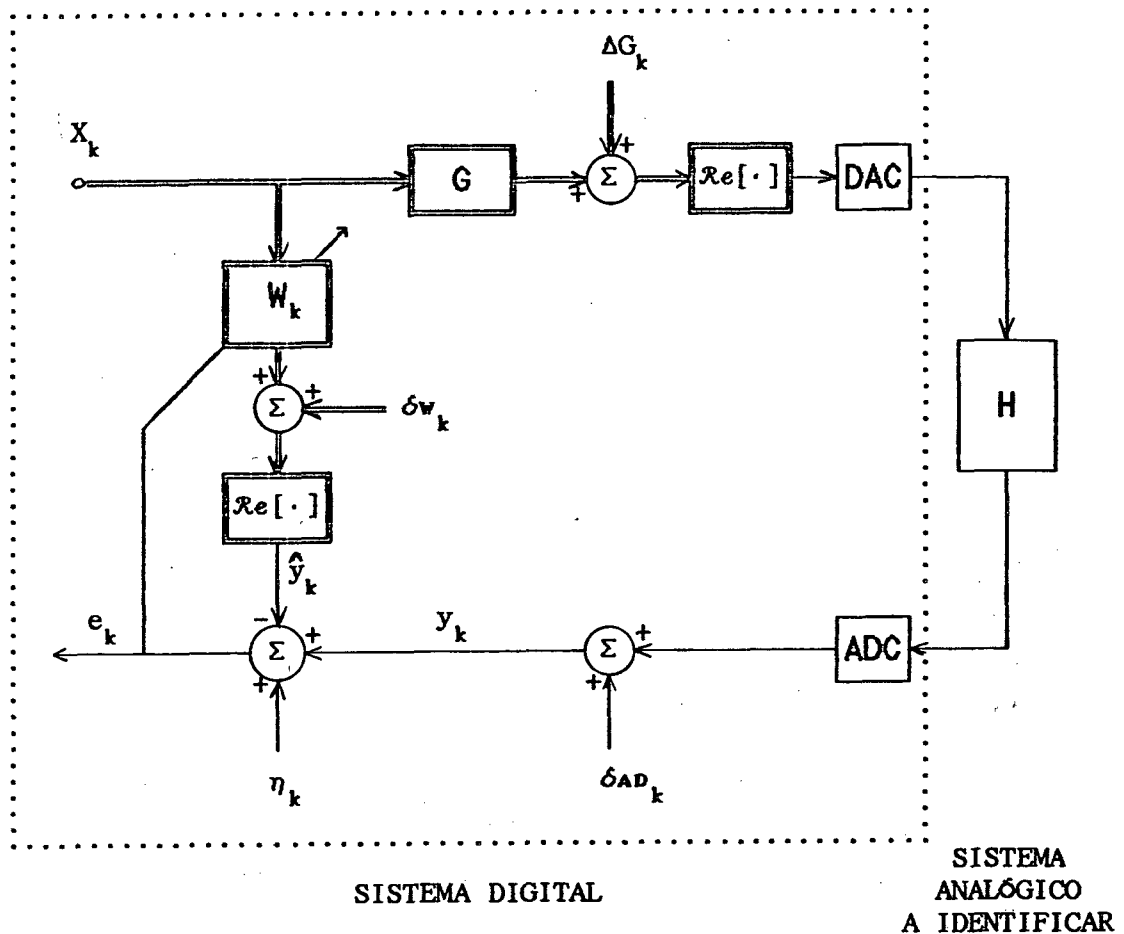


FIGURA 4.4: Sistema de Identificação que Utiliza um Filtro Adaptável com Coeficientes Complexos.

A expressão para o sinal de erro é obtida a partir da Fig. 4.4, resultando

$$e_k = \eta_k + \delta_{AD_k} - \Re[\delta w_k] + \Re[\Delta G_k^T]H - \Re[X_k^T \theta_k] \quad (4.9)$$

onde $\theta_k = w_k - G^T H$ é o vetor de erro nos coeficientes do filtro adaptável.

Tomando-se o valor esperado do quadrado do erro e considerando a não-correlação entre os termos envolvidos, obtém-se a expressão para o EMQ:

$$\xi_k \triangleq E\{e_k^2\} = E\{\eta_k^2\} + E\{\delta_{AD,k}^2\} + E\{(\Re[\delta w_k])^2\} + \\ + E\{H^T \Re[\Delta G_k] \Re[\Delta G_k^T] H\} + E\{(\Re[X_k^T \theta_k])^2\} \quad (4.10)$$

Por conveniência, a equação de atualização dos coeficientes para filtros digitais adaptáveis com coeficientes complexos, a partir do algoritmo LMS [27], é aqui apresentada de dois modos distintos porém equivalentes:

$$W_{k+1} = W_k + [[\beta e_k] X_k^*] \quad (4.11a)$$

$$W_{k+1} = W_k + (\beta e_k + \delta_{1,k}) X_k^* + \Delta z_k \quad (4.11b)$$

onde "*" indica complexo conjugado, $\delta_{1,k}$ é um escalar real que representa o erro de quantização no produto βe_k e Δz_k é um vetor complexo que representa os erros de quantização no produto $[\beta e_k] X_k^*$.

A expressão recursiva para o EMQ, cuja determinação é apresentada em detalhes no Apêndice 4, é dada por:

$$\xi_{k+1} = [1 - 2\beta A_{rms}^2 + 2N\beta^2 A_{rms}^4] \xi_k - 2r A_{rms}^2 (1 - 2\beta N A_{rms}^2) \sigma_1^2 \sqrt{\xi_k} + \\ + 2\beta A_{rms}^2 \xi_{GNA} + 2N A_{rms}^2 (A_{rms}^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad (4.12)$$

onde ξ_{GNA} é o EMQ na saída do filtro complexo se o mesmo não fosse adaptável ($\beta=0$) e é dado por

$$\xi_{GNA} = E\{\eta_k^2\} + \sigma_{AD}^2 + 2L\|H\|^2 \sigma_G^2 + 2N\sigma_W^2 \quad (4.13)$$

O termo σ_1^2 é a variância do erro de quantização $\delta_{1,k}$ no produto βe_k , σ_2^2 é a

variância dos erros de quantização nos produtos reais em cada componente do produto $[\beta e_k] X_k^*$ (variância das componentes de $\Re\{\Delta z_k\}$ e $\Im\{\Delta z_k\}$), r é o coeficiente de correlação entre δ_{1k} e βe_k e σ_w^2 é a variância dos erros de quantização em cada produto real na filtragem em W_k .

Fazendo-se uma comparação com a Seção 3.5, verifica-se que a equação (4.12) é uma generalização da equação (3.23) pois inclui o coeficiente de correlação entre βe_k e seu erro de quantização além de permitir a consideração de variâncias distintas para os vários erros de quantização presentes na equação de atualização.

4.4.2 - Condição de Convergência

Durante o processo de convergência, $r=0$ (ver Seção 4.3), de forma que as condições de convergência obtidas na Seção 3.5.3 permanecem válidas.

4.4.3 - EMQ Residual

O EMQ residual pode ser obtido fazendo-se $k \rightarrow \infty$ na equação (4.12), lembrando que, após a convergência, $\xi_{k+1} = \xi_k = \xi_\infty$. Desta forma

$$\xi_\infty = \frac{\gamma}{\beta(1-\beta N A_{rms}^2)} + \xi_{cr} \quad (4.14)$$

onde

$$\gamma = \beta \xi_{CNA} + N(A_{rms}^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad (4.15)$$

e ξ_{cr} representa a parcela do EMQ residual decorrente da correlação entre o erro de quantização δ_{1k} e o produto βe_k na equação de atualização, sendo dado por

$$\xi_{cr} = \frac{1}{2[\beta(1-\beta NA_{rms}^2)]^2} \left\{ [r(1-2\beta NA_{rms}^2)\sigma_1]^2 - \right. \\ \left. - r(1-2\beta NA_{rms}^2)\sigma_1 \sqrt{4\beta(1-\beta NA_{rms}^2)\gamma + [r(1-2\beta NA_{rms}^2)\sigma_1]^2} \right\} \quad (4.16)$$

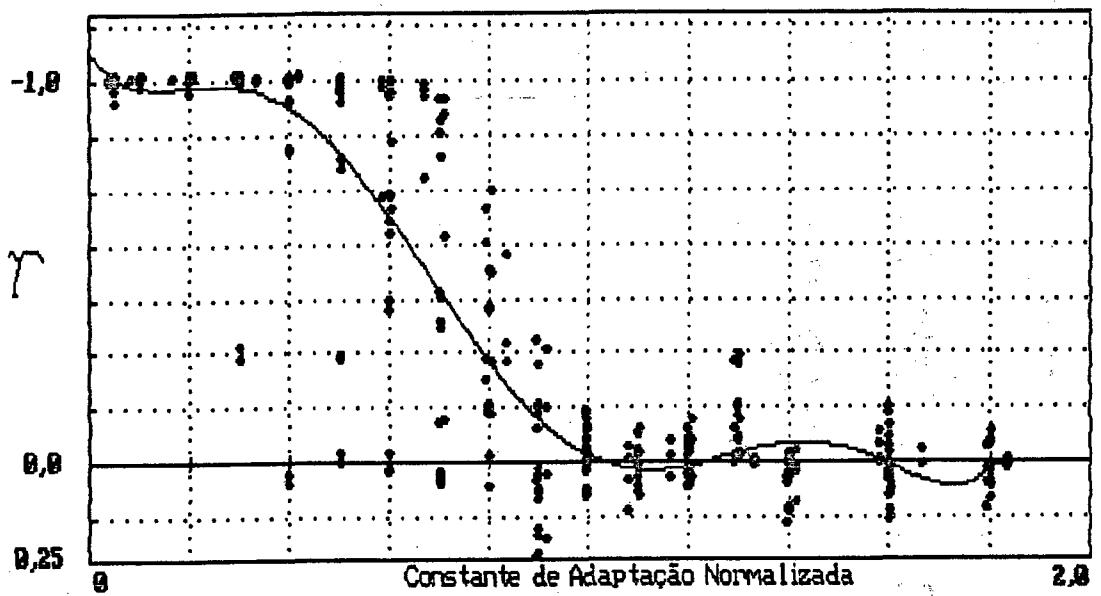
A equação (4.14) é de grande utilidade prática em projeto de sistemas adaptáveis, pois permite calcular o EMQ residual em função da constante de adaptação e de outros parâmetros do sistema. Todas as observações feitas em relação à equação (4.6) são também válidas para a equação (4.16). A fim de que esta equação possa ser utilizada, os parâmetros desconhecidos na mesma (r , σ_1^2 e σ_2^2) devem ser estimados, pelo menos aproximadamente. Isto será feito na próxima seção, a partir de resultados de simulações.

4.5 - Determinação de r , σ_1^2 e σ_2^2

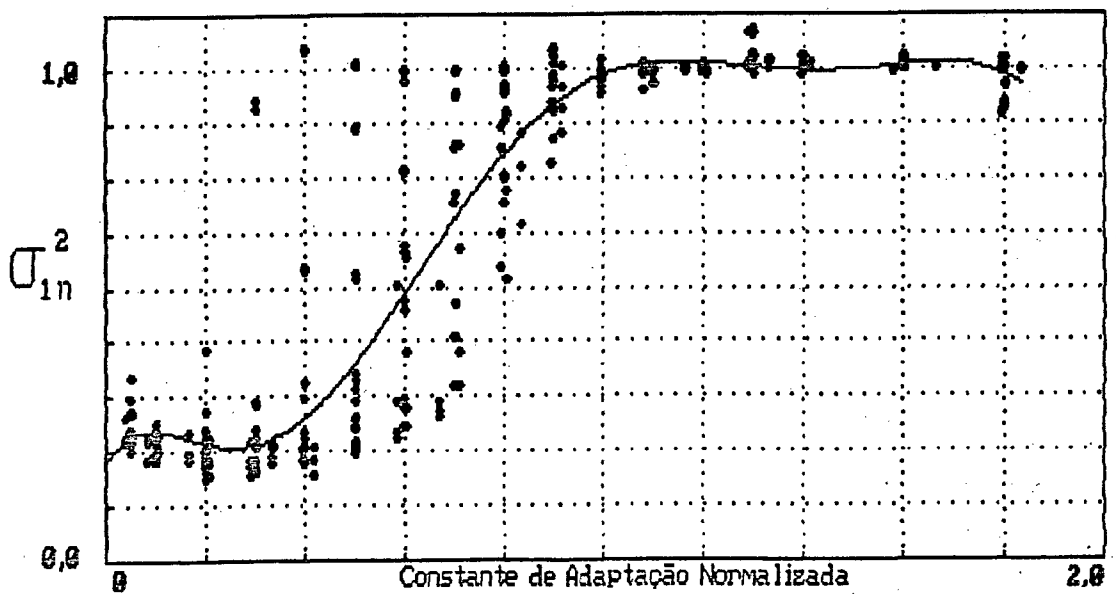
Os novos parâmetros introduzidos no equacionamento devido à modificação das propriedades estatísticas das variáveis da equação de atualização (r , σ_1^2 , σ_2^2) devem ser conhecidos, a fim de que as equações (4.6) e (4.14) possam ser utilizadas. Tais parâmetros foram estimados, a partir de resultados de simulações. O procedimento utilizado foi o seguinte: simularam-se vários filtros adaptáveis com coeficientes reais e com coeficientes complexos de comprimentos (números de coeficientes) diferentes e com precisões (número de bits) distintas. Também, o ruído aditivo η_k (ver figuras 4.3 e 4.4) foi feito nulo, a fim de que o sinal de erro fosse o menos ruidoso possível, de modo que a correlação dos erros de quantização e a

parada de adaptação fossem evidenciadas.

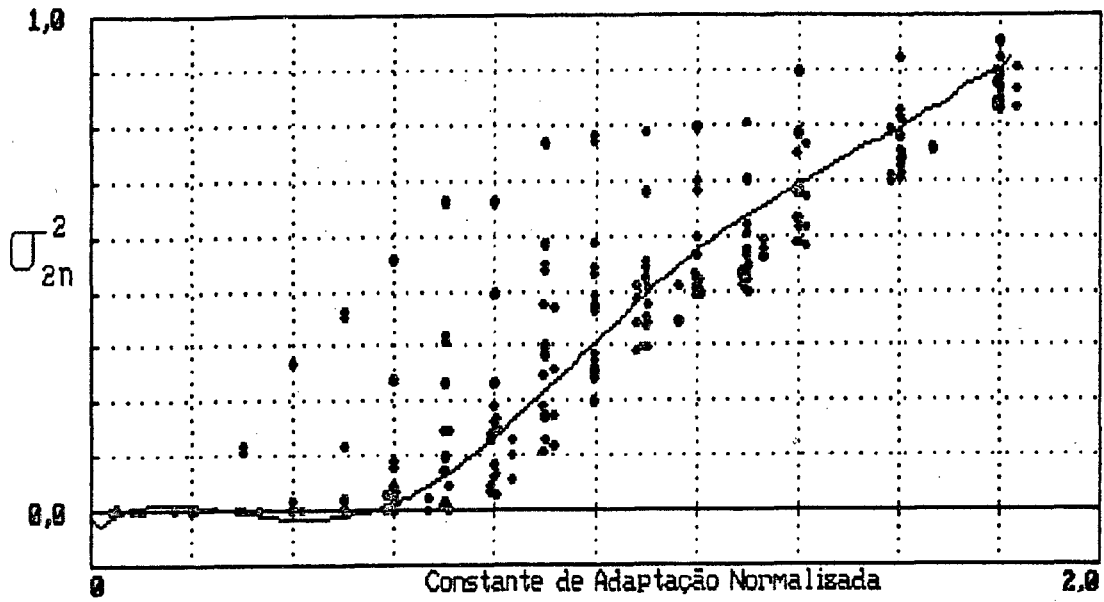
A partir dos resultados obtidos após a convergência dos filtros, chegou-se a expressões para cada um dos parâmetros como função da constante de adaptação. As figuras 4.5 e 4.6 sumarizam os resultados obtidos.



(a)

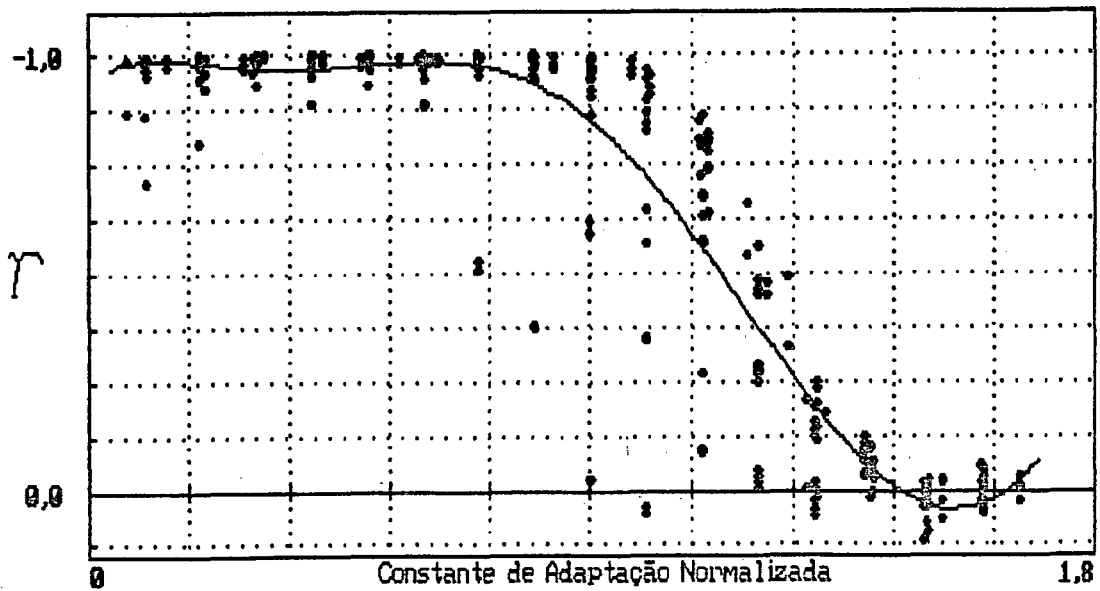


(b)

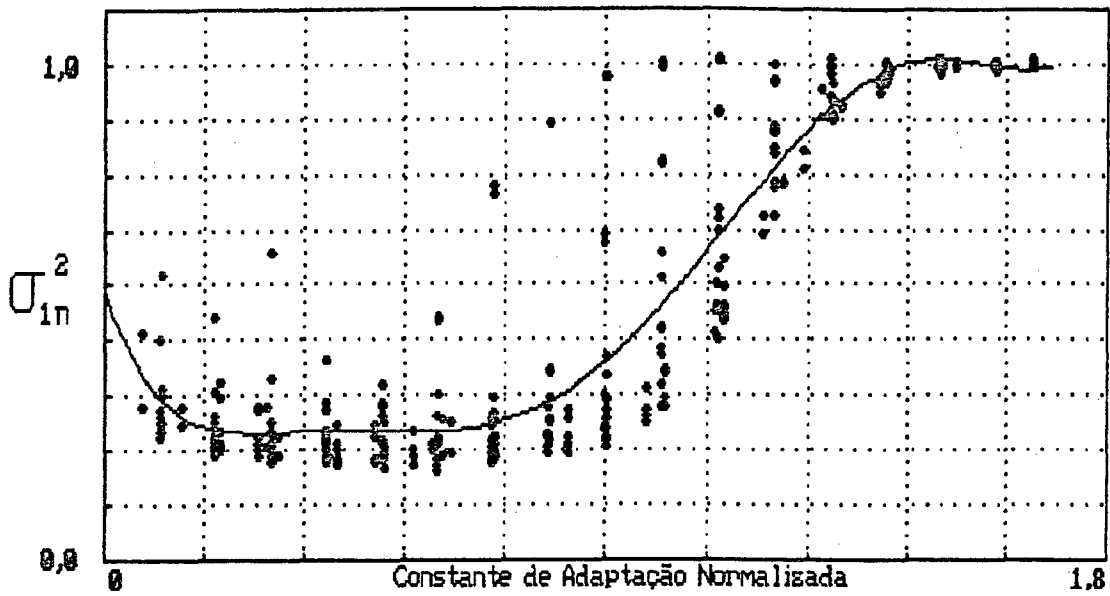


(c)

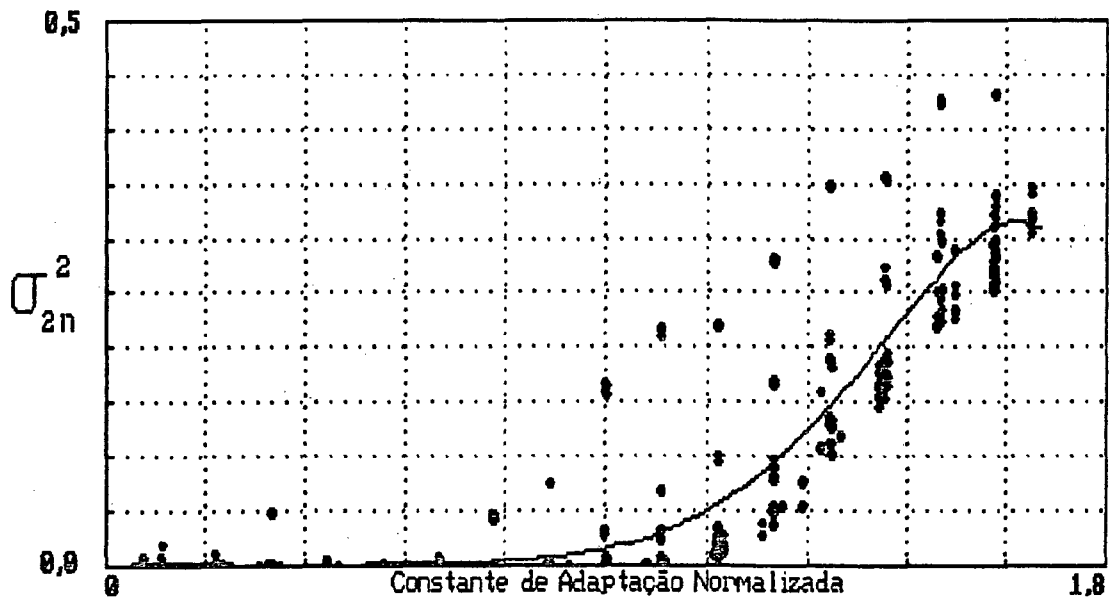
FIGURA 4.5: FILTROS COM COEFICIENTES REAIS. Parâmetros Obtidos através de Simulações x Constante de Adaptação Normalizada (β/β_{\maxvel}). (a) r ; (b) σ_{1n}^2 ; (c) σ_{2n}^2 .



(a)



(b)



(c)

FIGURA 4.6: FILTROS COM COEFICIENTES COMPLEXOS. Parâmetros Obtidos através de Simulações x Constante de Adaptação Normalizada (β/β_{\maxvel}). (a) r ; (b) σ_{1n}^2 ; (c) σ_{2n}^2 .

Nas seis figuras anteriores, as abcissas são representadas pelas constantes de adaptação normalizadas em relação a β_{maxvel} correspondente a cada simulação (ver equações (3.15) e (3.28)). Isto foi feito com o objetivo de exprimir os resultados numa base comum. De outra forma isto não seria possível, uma vez que a faixa de escolha da constante de adaptação depende do número de coeficientes de cada filtro. Também, foi observado através das simulações que os parâmetros em questão dependem fundamentalmente da constante de adaptação, sendo pouco influenciados pela variação das outras grandezas envolvidas (por exemplo, respostas ao impulso de G e H e precisões de G e do CAD). Observou-se que tais parâmetros dependem, ainda, da variância do sinal de entrada, sendo pouco dependentes da função distribuição de probabilidade deste sinal. Entretanto, o sinal de entrada pode ser sempre escalado, de forma que X_{rms}^2 ou A_{rms}^2 tenham o valor que se desejar.

As figuras 4.5(a) e 4.6(a) mostram os gráficos do coeficiente de correlação (r) entre o produto βe_k e seu erro de quantização em função da constante de adaptação normalizada ($\beta/\beta_{\text{maxvel}}$) para filtros com coeficientes reais e filtros com coeficientes complexos, respectivamente. Observa-se que, para pequenos valores de β , r (em módulo) é muito próximo da unidade, o que pode ser explicado da seguinte forma: como e_k é pouco ruidoso, o valor absoluto do produto βe_k é, na maior parte das vezes, menor do que $q/2$ (meio passo de quantização). Nestes casos, $[\beta e_k]$ será nulo e δ_k será igual a $-\beta e_k$ e o coeficiente de correlação assume seu valor máximo em módulo ($r=-1$). Para valores maiores de β , valores nulos para $[\beta e_k]$ são menos frequentes, de forma que βe_k e seu erro de quantização são menos correlacionados ($|r|<1$).

Nas figuras 4.5(b) e (c) são mostrados, respectivamente, os gráficos da variância do erro de quantização no produto βe_k (σ_1^2) e da variância dos erros de quantização nos produtos $[\beta e_k]X_k$ (σ_2^2) em função da

constante de adaptação normalizada para filtros com coeficientes reais. As variâncias σ_{1n}^2 e σ_{2n}^2 correspondem a valores normalizados em relação ao valor $q^2/12$, o qual corresponde à variância de um ruído branco uniformemente distribuído entre $\pm q/2$. As mesmas variâncias normalizadas são apresentadas nas figuras 4.6(b) e (c) para filtros com coeficientes complexos. Observa-se que quanto maior for β , mais as variâncias se aproximam do valor $q^2/12$, já que o fator de correlação diminui e os ruídos de quantização se aproximam de ruídos brancos com distribuição uniforme. Os baixos valores de σ_2^2 se explicam pelo fato do vetor Δz_k apresentar muitos componentes nulos, conforme explicado na Seção 4.2.

As curvas contínuas nas seis figuras anteriores correspondem a funções interpolantes dos pontos de cada gráfico, obtidas pelo método dos mínimos quadrados, dadas pelas seguintes expressões:

Filtros com Coeficientes Reais:

r :

$$r = 8,96\beta_n^7 - 60,7\beta_n^6 + 163\beta_n^5 - 217\beta_n^4 + 146\beta_n^3 - 45,0\beta_n^2 + 5,81\beta_n - 1,22 \quad (4.17)$$

σ_1^2 :

$$\sigma_{1n}^2 = -4,94\beta_n^7 + 25,9\beta_n^6 - 48,9\beta_n^5 + 38,0\beta_n^4 - 8,85\beta_n^3 - 0,493\beta_n^2 + 0,0572\beta_n + 0,205 \quad (4.18)$$

σ_2^2 :

$$\sigma_{2n}^2 = 0,411\beta_n^5 - 1,78\beta_n^4 + 2,42\beta_n^3 - 0,728\beta_n^2 + 0,0570\beta_n - 0,0146 \quad (4.19)$$

Filtros com Coeficientes Complexos:

r :

$$r = 1,99\beta_n^6 - 11,2\beta_n^5 + 22,2\beta_n^4 - 18,7\beta_n^3 + 7,01\beta_n^2 - 1,03\beta_n - 0,939 \quad (4.20)$$

$$\sigma_1^2 : \\ \sigma_{1n}^2 = 3,45\beta_n^6 - 18,3\beta_n^5 + 36,1\beta_n^4 - 33,1\beta_n^3 + 15,3\beta_n^2 - 3,39\beta_n + 0,545 \quad (4.21)$$

$$\sigma_2^2 : \\ \sigma_{2n}^2 = -0,477\beta_n^6 + 1,89\beta_n^5 - 2,62\beta_n^4 + 1,69\beta_n^3 - 0,501\beta_n^2 + 0,0539\beta_n - 0,00103 \quad (4.22)$$

onde β_n é o valor da constante de adaptação normalizada em relação a β_{maxvel} ($\beta_n = \beta / \beta_{\text{maxvel}}$). Estas equações serão utilizadas nos cálculos dos EMQs residuais nos vários exemplos da próxima seção.

Por fim, é importante mencionar que se o sinal de erro fosse suficientemente ruidoso (por exemplo, com ruído aditivo η_k de grande potência), o fator de correlação seria pequeno e as variâncias σ_1^2 e σ_2^2 seriam cada vez mais próximas de $q^2/12$, uma vez que os ruídos de quantização tornar-se-iam cada vez mais "brancos", com distribuição uniforme sobre $\pm q/2$. Isto foi confirmado através de simulações.

4.6 - Resultados de Simulações

4.6.1 - Filtros com Coeficientes Reais

O sistema da Fig. 3.4 foi simulado em computador a fim de verificar a validade da equação (4.6). Aqui são apresentados os resultados de 10 (dez) simulações, nas quais alguns parâmetros são comuns a todas, a saber:

- a) sinal de entrada composto por símbolos +1 e -1 equiprováveis, de forma que $X_{\text{rms}}^2 = 1$;
- b) filtro transversal G com 8 coeficientes. Foram utilizados os mesmos coeficientes empregados na simulação da Seção 3.4.4;
- c) filtros H (canais analógicos) de vários comprimentos, porém sempre

com $\|H\|^2=0,1$. Os coeficientes foram obtidos a partir da função de transferência $H(z)$ apresentada na Seção 3.4.4;

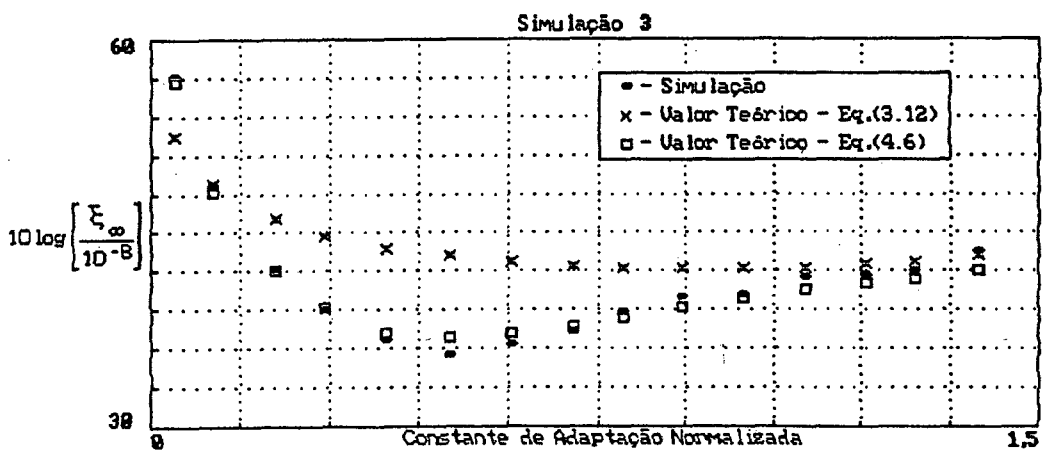
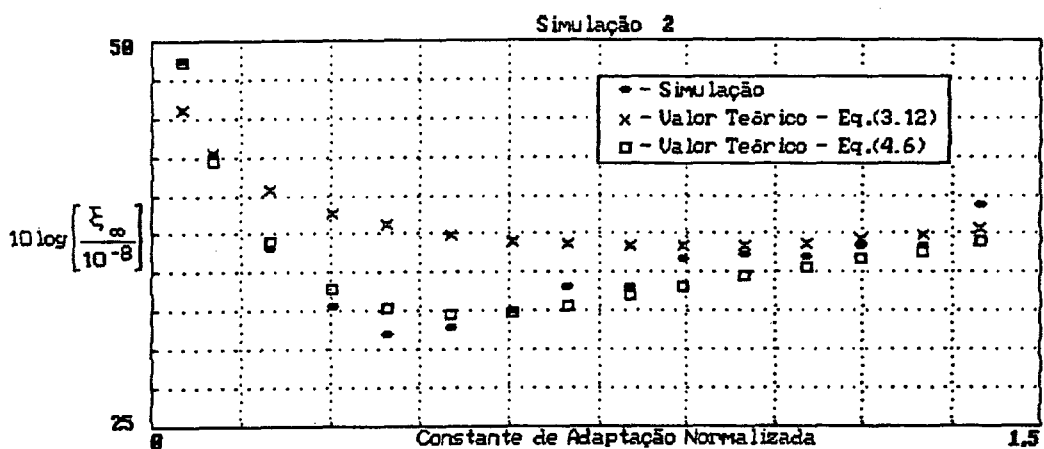
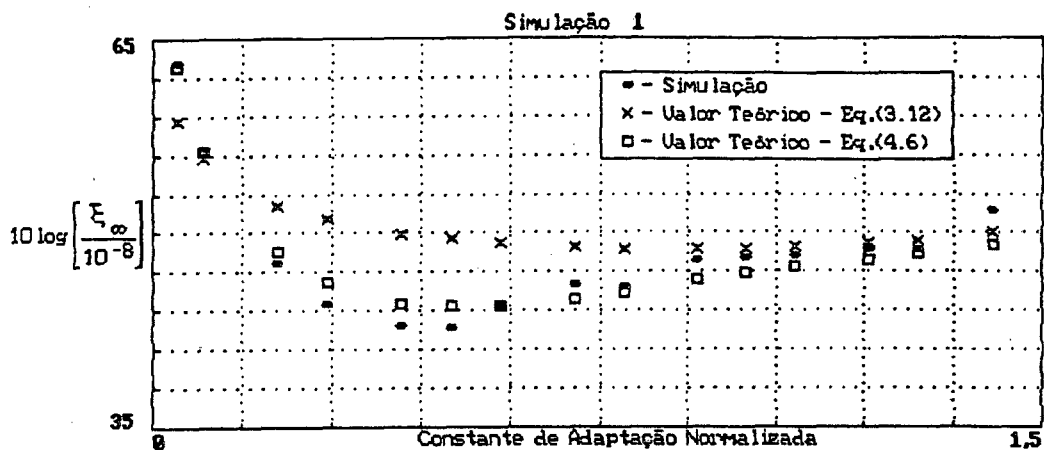
d) ruído aditivo η_k nulo.

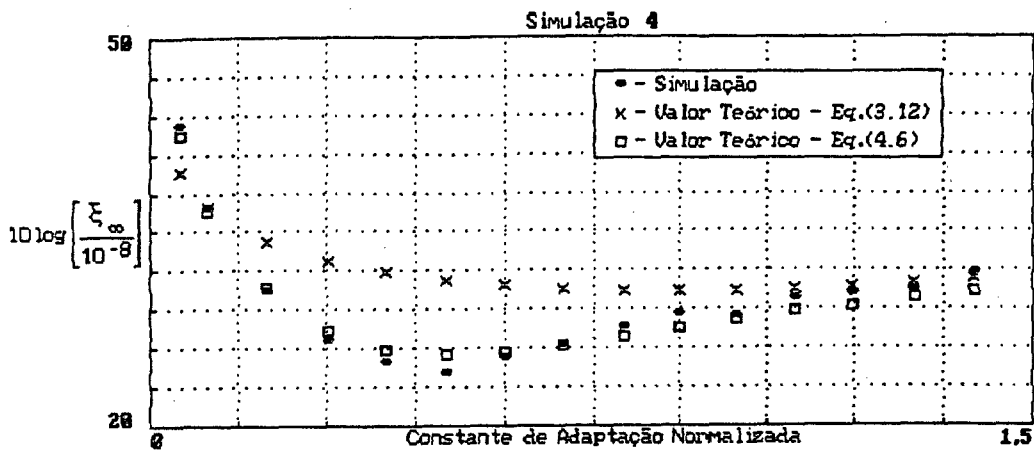
Os outros parâmetros foram feitos diferentes para cada simulação, conforme a Tabela I, onde N é o número de coeficientes do filtro adaptável, B_p é o número de bits utilizados no processamento em G e no filtro adaptável e B_{cad} é o número de bits do CAD.

TABELA I

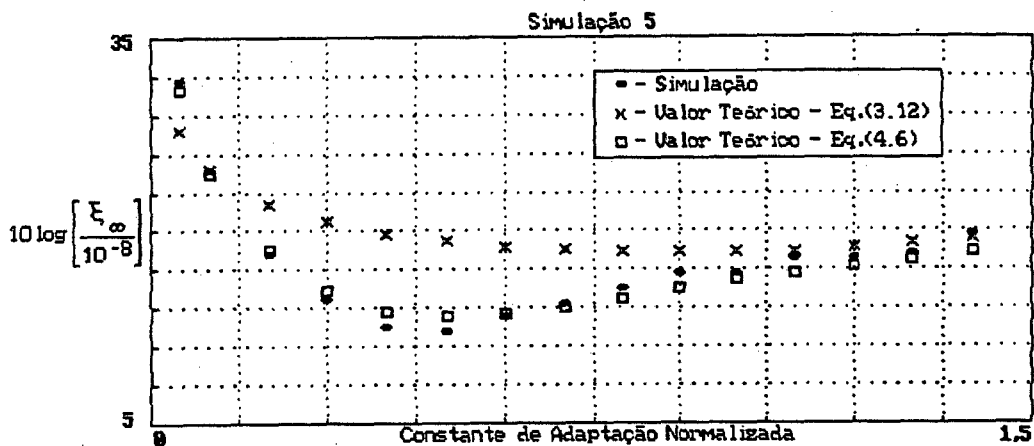
Simulação	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	16	16	32	32	32	64	64	64	128	128
B_p	8	10	10	12	14	12	14	20	16	20
B_{cad}	8	10	10	10	12	10	12	16	12	16

A Fig. 4.8(a-j) apresenta os resultados obtidos.

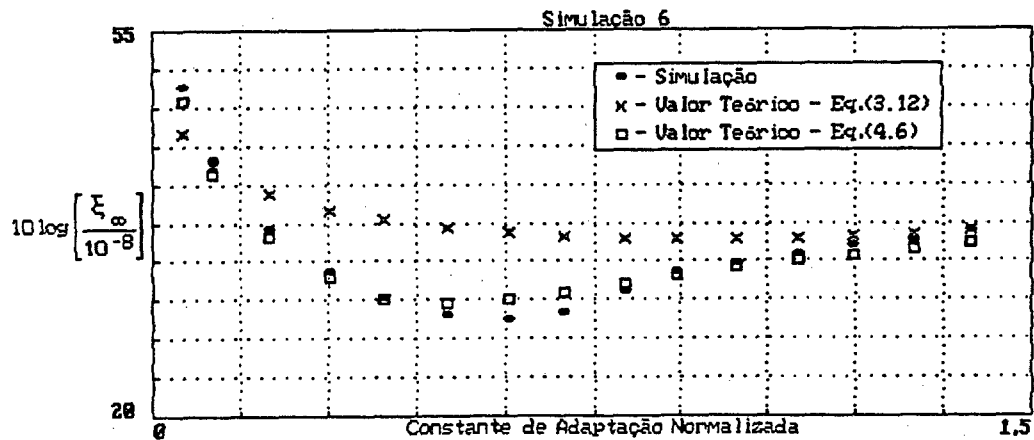




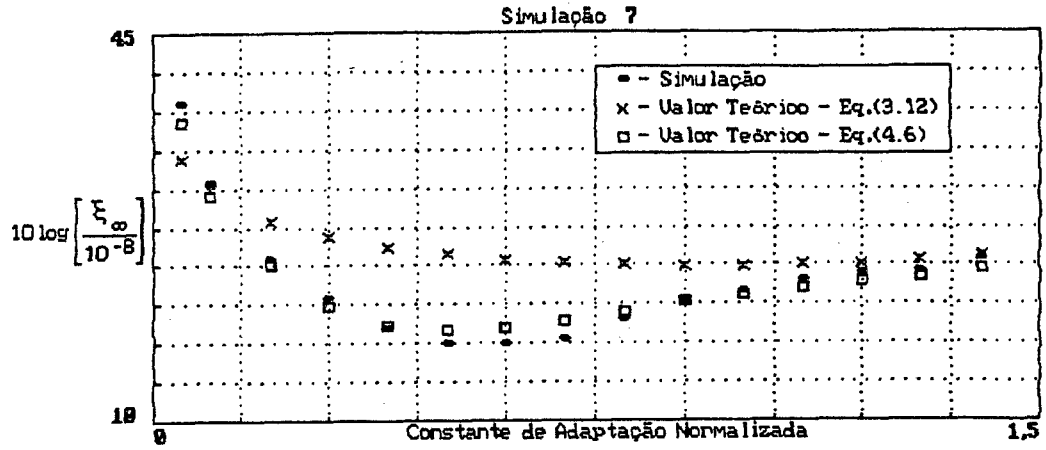
(d)



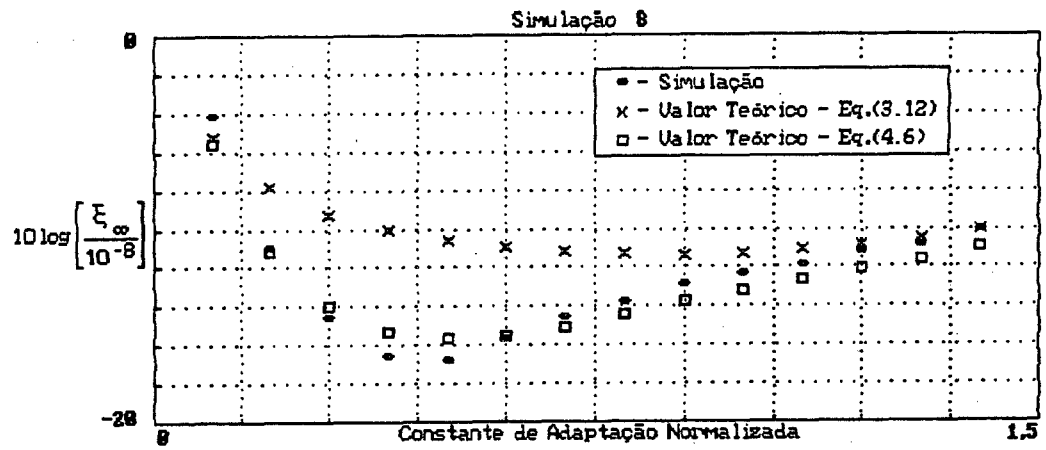
(e)



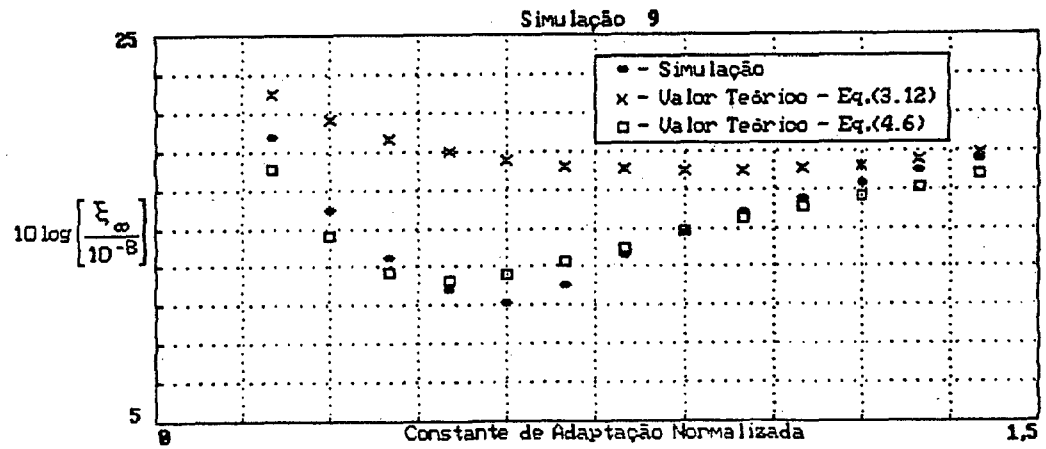
(f)



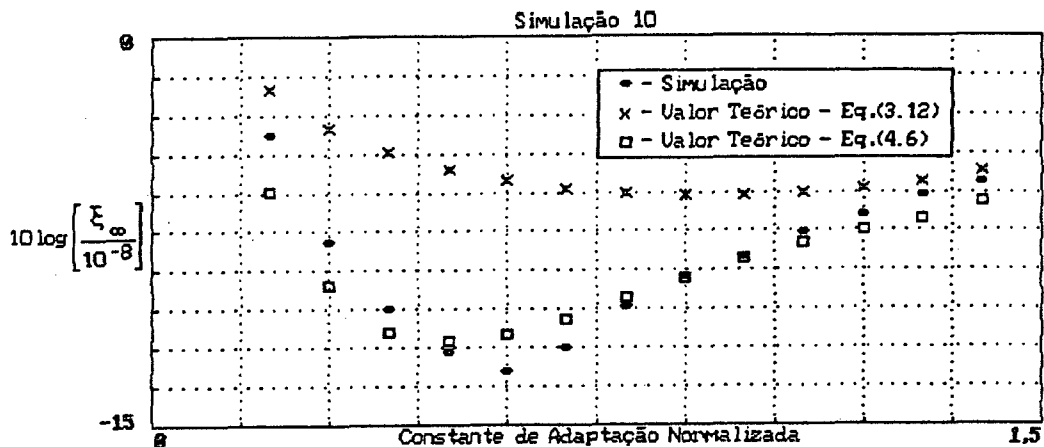
(g)



(h)



(i)



(j)

FIGURA 4.8: Erro Médio Quadrático Residual (ξ_{∞}) x Constante de Adaptação Normalizada ($\beta/\beta_{\max vel}$) - FILTROS COM COEFICIENTES REAIS.

Em cada figura, são mostrados três gráficos do EMQ residual como função da constante de adaptação: o EMQ obtido através de simulação (onde as quantizações foram realizadas conforme o modelo não linear da Fig. 3.1), o EMQ calculado através da equação (3.12) (modelo linear de quantização) e o EMQ calculado através do novo modelo (equação (4.6)), onde o coeficiente de correlação e as variâncias dos erros de quantização na equação de atualização foram obtidos através das equações (4.17), (4.18) e (4.19). Para facilitar a visualização, a escala vertical dos gráficos está em escala logarítmica (decibéis relativos a 10^{-8}). Pode-se observar que o novo modelo apresenta resultados muito melhores do que o modelo linear do capítulo anterior, o que era esperado, uma vez que o primeiro é mais completo e mais realista do que o segundo.

4.6.2 - Filtros com Coeficientes Complexos

O sistema da Fig. 4.3 foi simulado em computador a fim de verificar a validade da equação (4.14). Serão aqui apresentados os resultados de 10 (dez) simulações, nas quais alguns parâmetros são comuns a todas, a saber:

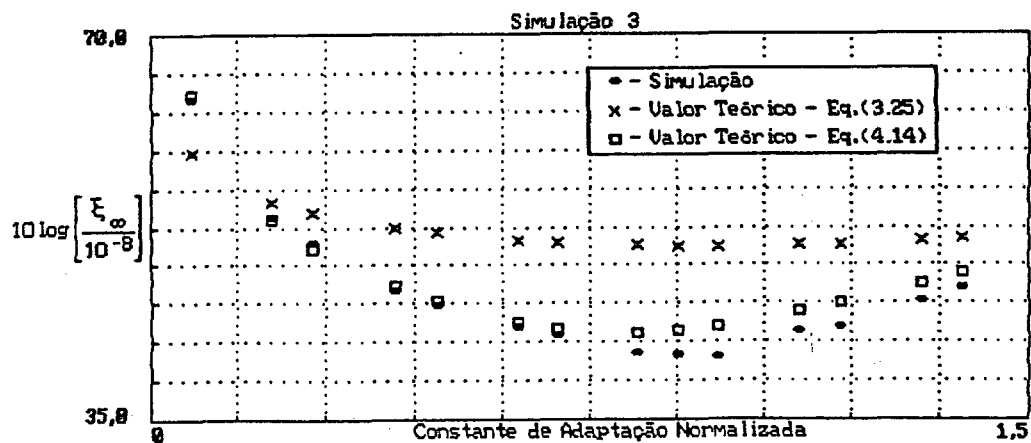
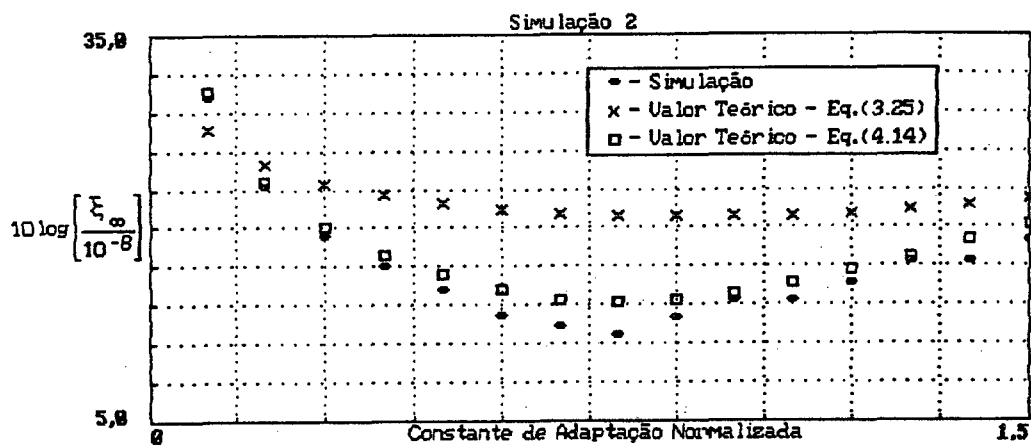
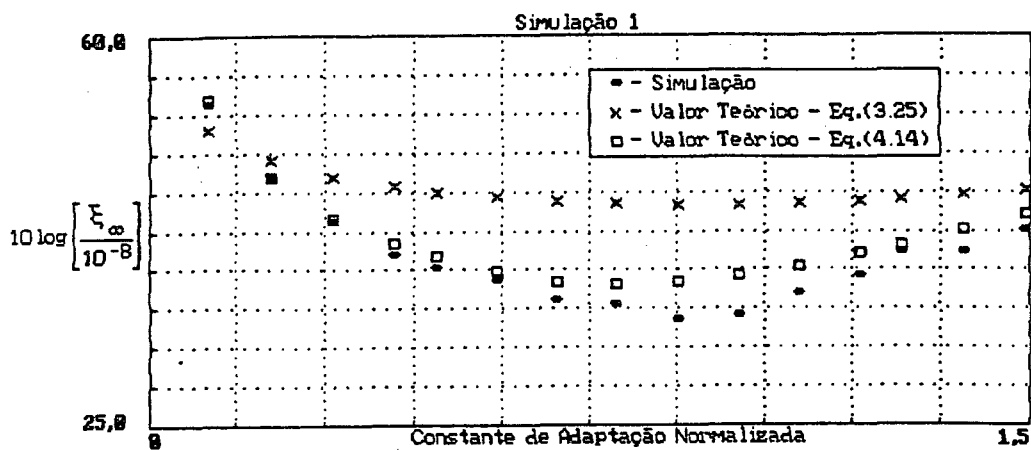
- a) sinal de entrada composto pelos símbolos complexos equiprováveis $(1+j/3)$, $(-1-j/3)$, $(1/3-j)$ e $(-1/3+j)$, de forma que $A_{rms}^2=5/9$. Estes são os símbolos utilizados na seqüência de treinamento dos MODEMS V.32 [28], escalados de modo a terem partes reais e imaginárias com módulo máximo unitário;
- b) número de coeficientes (complexos) do filtro G (L) igual a 8. Foram utilizados os mesmos coeficientes da simulação da Seção 3.4.4.
- c) filtros H (canais analógicos) de vários comprimentos, porém sempre com $\|H\|^2=0,1$. Os coeficientes foram obtidos a partir da função de transferência $H(z)$ apresentada na Seção 3.4.4;
- d) ruído aditivo η_k nulo.

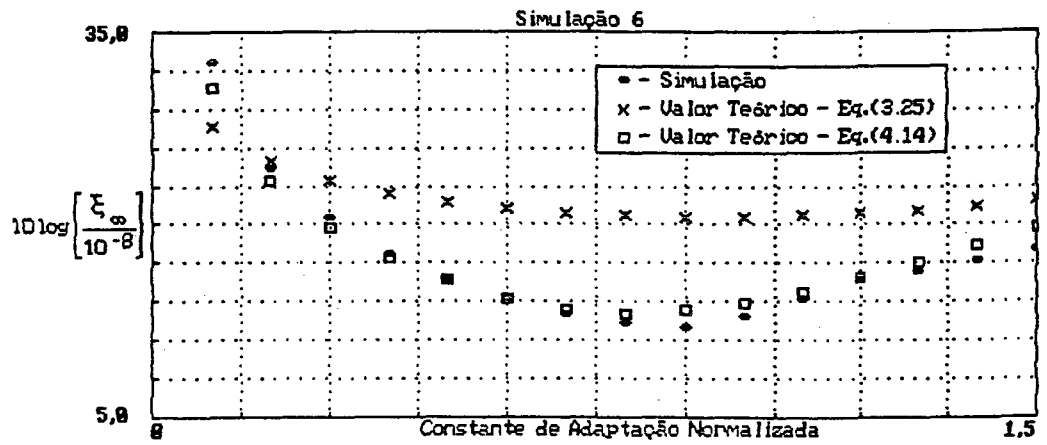
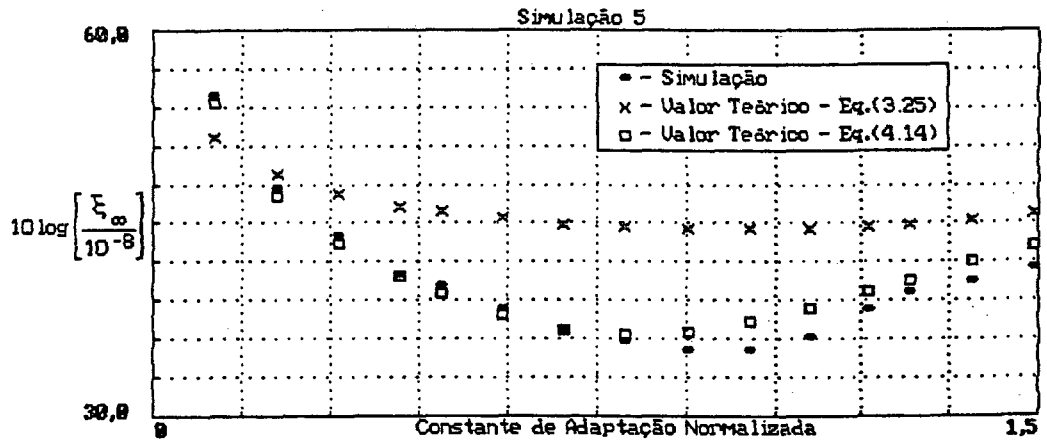
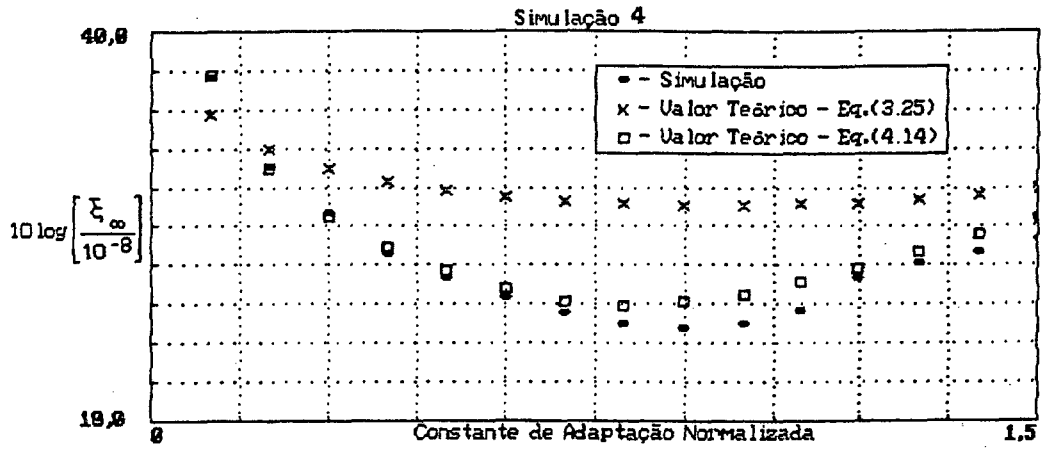
Os outros parâmetros foram feitos diferentes para cada simulação, conforme a Tabela II.

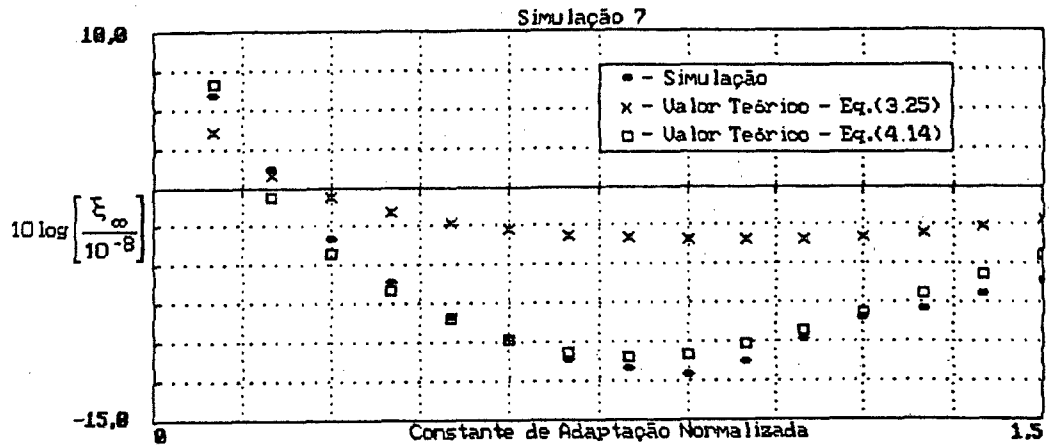
TABELA II

Simulação	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	16	16	32	32	64	64	64	128	128	128
Bp	10	14	10	14	12	16	20	12	14	16
Bcod	10	12	10	12	10	12	16	10	12	12

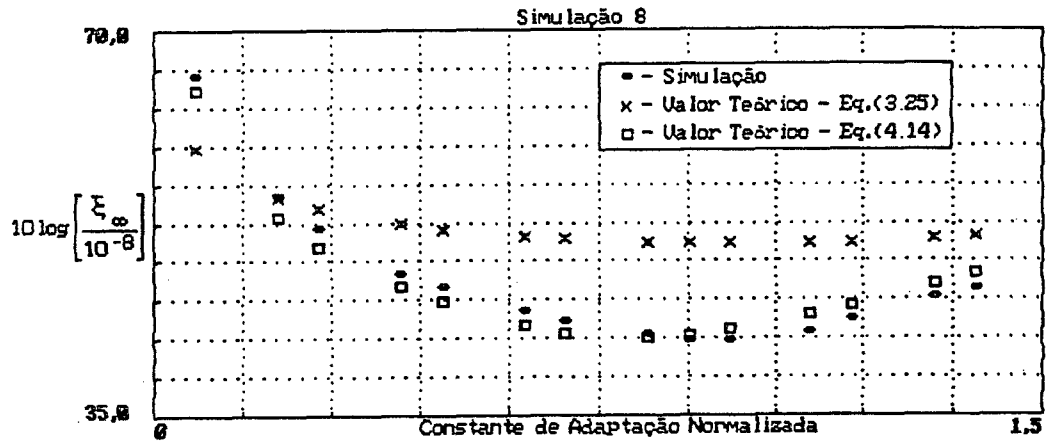
A Fig. 4.9(a-j) apresenta os resultados obtidos.



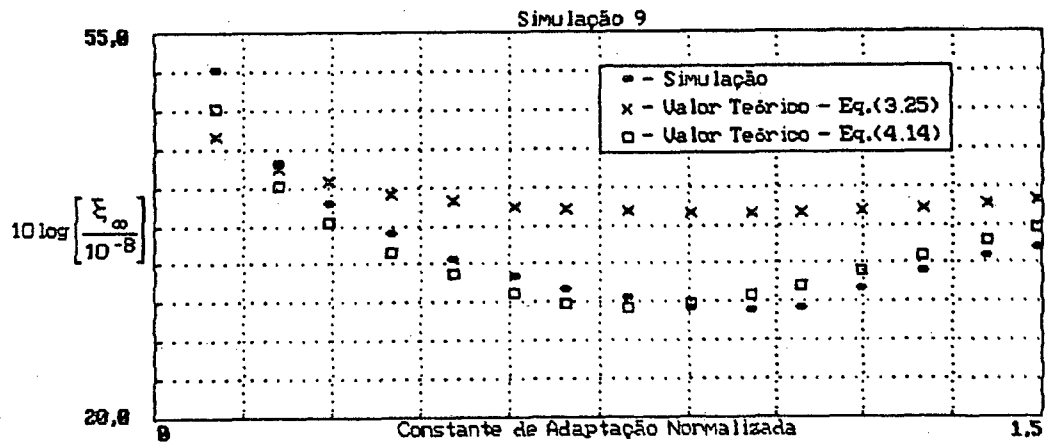




(g)



(h)



(i)

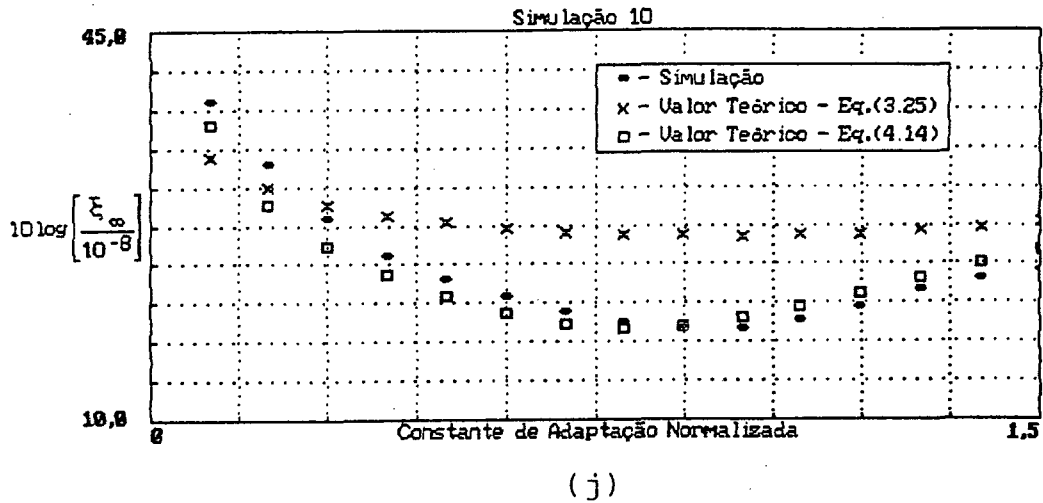


FIGURA 4.9: Erro Médio Quadrático Residual (ξ_{∞}) x Constante de Adaptação Normalizada ($\beta/\beta_{\max vel}$) - FILTROS COM COEFICIENTES COMPLEXOS.

Em cada figura, são mostrados três gráficos do EMQ residual como função da constante de adaptação: o EMQ obtido através de simulação (onde as quantizações foram realizadas conforme a Fig.3.1), o EMQ calculado através da equação (3.25) (modelo linear de quantização) e o EMQ calculado através do novo modelo (equação (4.14)), onde o coeficiente de correlação e as variâncias dos erros de quantização na equação de atualização foram obtidos através das equações (4.20), (4.21) e (4.22). Novamente se observa que o novo modelo apresenta resultados muito melhores do que o modelo linear do capítulo anterior.

4.4 - Conclusão

Neste capítulo foi apresentado um novo equacionamento, mais completo e realista do que o efetuado no capítulo anterior, para o EMQ na saída de filtros digitais adaptados através do algoritmo LMS. Neste novo equacionamento foi levado em conta o fato de os erros de quantização presentes na equação de atualização não serem ruídos brancos com distribuição uniforme, devido à natureza não linear do processo de quantização. Foram obtidos, a partir de resultados experimentais, modelos aproximados para as variâncias de tais erros e para o coeficiente de correlação mais importante para a análise. Por fim, são apresentados resultados de simulações que validam o novo equacionamento proposto.

Cabe, aqui, frisar que projetos de sistemas adaptáveis com EMQs residuais pré-definidos poderiam ser realizados através da utilização das equações (3.12) ou (3.25), uma vez que os valores de EMQ residuais calculados através destas expressões são muito maiores do que os valores obtidos na prática. Entretanto, isto levaria a projetos bastante conservativos em relação às especificações de EMQ, o que poderia exigir uma precisão além da realmente necessária para os processadores digitais utilizados, elevando desnecessariamente os custos de implementação. Por outro lado, a utilização das equações (4.6) ou (4.14) leva a uma implementação mais simples que atenda às especificações, o que minimiza o custo de implementação.

C A P Í T U L O 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

5.1 - Conclusões

É crescente a utilização de filtros adaptáveis em diversas aplicações, notadamente em instrumentação eletrônica e telecomunicações. Neste trabalho, foi apresentado como exemplo de aplicação o cancelamento de ecos em transmissão de dados na linha telefônica. Foi feita uma breve revisão do problema e da técnica mais utilizada para a sua solução, na qual um filtro adaptável tem a função de identificar a resposta ao impulso de um sistema desconhecido. Estudos resumidos do filtro transversal adaptável e do algoritmo mais utilizado na atualização dos seus coeficientes (LMS) foram também apresentados.

Neste trabalho, foi realizado um estudo detalhado dos erros causados pela implementação digital do algoritmo LMS em filtros FIR transversais adaptáveis. Neste tipo de implementação, tanto os sinais de entrada quanto as grandezas internas são quantizados, ou seja, são representados com precisão limitada. Isto faz com que o comportamento destes filtros seja diferente daquele esperado se fossem implementados com precisão infinita. No estudo apresentado, foram considerados filtros com coeficientes reais e filtros com coeficientes complexos. A análise foi feita para aritmética de ponto fixo. Foram obtidas expressões analíticas para o EMQ na saída dos filtros a partir de um equacionamento simples, as quais podem ser utilizadas tanto durante o período de convergência quanto em regime permanente. As condições para a convergência do algoritmo LMS com precisão finita foram estudadas e foram obtidas expressões simples para o EMQ residual em função de parâmetros conhecidos. Estas equações são de grande utilidade em

projeto de sistemas adaptáveis pois permitem determinar a constante de adaptação mais apropriada e o número de bits necessários, a partir de uma especificação de EMQ residual. Cabe, aqui, frisar que a complexidade e o custo de implementação de um sistema, os quais dependem do número de bits utilizados, podem ser reduzidos a partir de uma melhor compreensão dos efeitos de quantização.

Deve ser mencionado que o equacionamento realizado no Capítulo 3 baseia-se no modelo clássico (linearizado) de quantização, onde os erros de quantização são modelados como ruídos brancos aditivos com distribuição uniforme. Esta mesma modelagem foi utilizada em todos os trabalhos anteriores disponíveis na literatura. No Capítulo 4, por outro lado, o equacionamento leva em conta a natureza não linear do processo de quantização. Nesta nova modelagem, as características de correlação e distribuição não uniforme dos erros de quantização presentes na equação de atualização são consideradas. Como consequência, as equações obtidas neste capítulo são mais completas, mais realistas e apresentam melhores resultados em casos práticos do que as obtidas no Capítulo 3.

Finalmente, os equacionamentos propostos foram validados através dos resultados de simulações apresentados.

5.2 - Sugestões para Trabalhos Futuros

A fim de dar continuidade ao presente trabalho, pode-se destacar alguns tópicos para investigação futura:

- 1) refazer a análise para aritmética de ponto flutuante;
- 2) considerar os efeitos dos erros de quantização em filtros digitais adaptáveis em outras aplicações além de identificação de sistemas. Como

exemplo, pode-se citar equalização (filtragem inversa), predição e cancelamento de ruído;

3) analisar os efeitos da precisão finita em outros algoritmos (por exemplo, RLS) e em outras estruturas (por exemplo, filtros IIR e redes "lattice").

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] - GUIDOUX, L. & PEUCH, B. Binary Passband Echo Canceller in a 4800 Bit/s Two-Wire Duplex Modem. IEEE Trans. on Sel. Areas in Comm., V. SAC-2, n.5, p. 711-721, setembro 1984.
- [02] - COWAN, C.N.F & GRANT, P.M. Adaptive Filters. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985. 308p.
- [03] - ANDREWS, M. & FITCH, R. Finite Word Length Arithmetic Computational Error Effects on the LMS Adaptive Weights. Proc. 1977 IEEE Int. Conf. ASSP, p. 628-631, maio 1977.
- [04] - CARAISCUS, C. & LIU, B. A Roundoff Error Analysis of the LMS Adaptive Algorithm. IEEE Trans. on ASSP, V. ASSP-32, n.1, p. 34-31, fevereiro 1984.
- [05] - CIOFFI, J.M. Limited-Precision Effects in Adaptive Filtering. IEEE Trans. on Cir. and Sys., V. CAS-34, n.7, p. 821-833, julho 1987.
- [06] - ALEXANDER, S.T. Transient Weight Misadjustment Properties for the Finite Precision LMS Algorithm. IEEE Trans. on ASSP, V. ASSP-35, n.9, p. 1250-1258, setembro 1987.
- [07] - OPPENHEIM, A.V. & SCHAFER, R.W. Discrete-Time Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989. 879p.
- [08] - CARPES Jr., W.P.; SEARA, R. & BERMUDEZ, J.C.M. Estudo Comparativo de

Duas Técnicas de Cancelamento de Eco para Transmissão de Dados 'Full-Duplex' a Dois Fios na Banda de Voz. Anais do 6º Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Campina Grande - PB, p. 167-171, setembro 1988.

- [09] - MESSERSCHMITT, D.G. Echo Cancellation in Speech and Data Transmission. IEEE on Sel. Areas in Comm., V. SAC-2, n.2, p. 283-297, março 1984.
- [10] - SONDHI, M.M & BERKLEY, D.A. Silencing Echoes on the Telephone Network. Proc. of the IEEE, V. 68, n.8, p. 948-963, agosto 1980.
- [11] - WITTKKE, P.H.; PENSTONE, S.R. & KEIGHTLEY, R.J. Measurements of Echo Parameters Pertinent to High-Speed Full-Duplex Data Transmission on Telephone Circuits. IEEE Trans. on Sel. Areas in Comm., V. SAC-2, n.5, p. 703-710, setembro 1984.
- [12] - WEINSTEIN, S.B. A Passband Data-Driven Echo Canceller for Full-Duplex Transmission on Two-Wire Circuits. IEEE Trans. on Communications, V. COM-25, n.7, p. 654-666, julho 1977.
- [13] - WANG, J.D. & WERNER, J.J. Performance Analysis of an Echo-Cancellation Arrangement that Compensates for Frequency Offset in the Far Echo. IEEE Trans. on Communications, V. 36, n.3, p. 364-372, março 1988.
- [14] - VERHOECKX, N.A.M. Digital Echo Cancellation for Baseband Data Transmission. IEEE Trans. on ASSP, V. ASSP-27, p. 768-781,

dezembro 1979.

- [15] - MUELLER, K.H. A New Digital Echo Canceled for Two-Wire Full-Duplex Data Transmission. IEEE Trans. on Communications, V. COM-24, n.9, p. 956-962, setembro 1976.
- [16] - WERNER, J.J. An Echo-Cancellation-Based 4800 Bit/s Full-Duplex DDD Modem. IEEE Journal on Sel. Areas in Comm., V. SAC-2, n.5, p. 722-730, setembro 1984.
- [17] - WIDROW, B. & STEARNS, S.D. Adaptive Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985. 474p.
- [18] - HONIG, M.L. & MESSERSCHMITT, D.G. Adaptive Filters. New York: Kluwer, 1984.
- [19] - WIDROW, B. Statistical Analysis of Amplitude-Quantized Sampled-Data Systems. AIEE Trans. Appl. Ind., V. 79, p. 555-568, janeiro 1961.
- [20] - LUCKY, R.W. Automatic Equalization for Digital Communication. Bell Syst. Tech. Journal, V. 44, p. 547-588, abril 1965.
- [21] - WIDROW, B. Adaptive Noise Cancelling: Principles and Applications. Proc. IEEE, V. 63, p. 1692-1716, dezembro 1975.
- [22] - FRANZIER, R.H; SAMSAN, S.; BRAIDA, L.D. & OPPENHEIM, A.V. Enhancement of Speech by Adaptive Filtering. Proc. of the Inter. Conf. on

ASSP, p. 85-92, abril 1976.

- [23] - MIRANDA, M.D. & SEARA, R. Análise de uma Ponte AC Digital Autobalanceada Utilizando o Algoritmo LMS. Anais do 7º Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Florianópolis - SC, p. 460-463, setembro 1989.
- [24] - CARPES, W.P.; SEARA, R. & MIRANDA, M.D. Uma Nova Estrutura de Ponte AC Digital Autobalanceada. Anais do 8º Congresso Brasileiro de Automática, Belém-PA, p. 1080-1086, setembro 1990.
- [25] - GITLIN, R.D.; MAZO, J.E. & TAYLOR, M.G. On the Design of Gradient Algorithms for Digitally Implemented Adaptive Filters. IEEE Trans. on Circuit Theory, V. CT-20, n.2, p. 125-136, março 1973.
- [26] - LIMA, F.C.M.V. Técnicas de Realização para um Modem de Alta Taxa de Transferência de Dados. TESE DE MESTRADO. COPPE - UFRJ, junho, 1980.
- [27] - WIDROW, B.; MCCOOL, J. & BALL, M. The Complex LMS Algorithm. Proc. IEEE, V. 63, p. 719-720, abril 1975.
- [28] - INTERNATIONAL TELEGRAPH AND TELEPHONE CONSULTATIVE COMMITTEE. Recommendation V.32 - A Family of 2-Wire, Duplex Modems Operating at Data Signalling Rates of up to 9600 Bit/s for Use on the General Switched Telephone Networks and on Leased Telephone-Type Circuits. Malaga-Torremolinos, CCITT, p. 221-238, 1984.

- [29] - SHERWOOD, D.T. & BERSHAD, N.J. Quantization Effects in the Complex LMS Adaptive Algorithm: Linearization Using Dither-Theory, IEEE Trans. on Cir. and Sys., V. CAS-34, n.7, p. 848-854, julho 1987.
- [30] - WONG, P.W. Quantization and Roundoff Noises in Fixed-Point FIR Digital Filters. IEEE Trans. on Sig. Processing, V.39, n.7, p. 1552-1663, julho 1991.
- [31] - CARPES Jr., W.P.; SEARA, R. & BERMUDEZ, J.C.M. Análise dos Efeitos da Quantização no Algoritmo LMS em Filtros Adaptáveis. Anais do 8º Congresso Brasileiro de Automática, Belém-PA, p. 1114-1119, setembro 1990.
- [32] - CARPES Jr., W.P.; SEARA, R. & BERMUDEZ, J.C.M. Analysis of the Quantization Effects on LMS Complex Algorithm in Digital Adaptive Filters. SBT/IEEE International Telecommunications Symposium, p. 307-311, setembro 1990.

A P Ê N D I C E 1

Dedução da Equação (3.10): Expressão do EMQ na Saída de um Filtro Digital Adaptável com Coeficientes Reais.

Reescrevendo a equação (3.7):

$$\xi_k \triangleq E\{e_k^2\} = E\{\eta_k^2\} + E\{\delta_{AD_k}^2\} + E\{\delta_w^2\} + E\{H^T \Delta G_k \Delta G_k^T H\} + E\{\theta_k^T X_k X_k^T \theta_k\} \quad (A1.1)$$

Será admitido que o sinal de entrada, o ruído aditivo e os erros de quantização são não correlacionados entre si, de média nula e com amostras independentes no tempo.

Define-se σ_{AD}^2 como a variância do erro de quantização no CAD e σ_G^2 e σ_w^2 como as variâncias dos erros de quantização em cada produto em G e no filtro adaptável, respectivamente. Uma análise detalhada dos diferentes termos da equação (A1.1) leva às seguintes conclusões:

- i) $E\{\delta_w^2\} = N\sigma_w^2$, pois há N produtos quantizados em cada iteração no filtro adaptável;
- ii) $E\{H^T \Delta G_k \Delta G_k^T H\} = L\sigma_G^2 E\{H^T H\} = L\sigma_G^2 \|H\|^2$, onde $\|H\|$ é a norma euclidiana do vetor H e há L produtos quantizados no filtro G;
- iii) $E\{\theta_k^T X_k X_k^T \theta_k\} = X_{rms}^2 E\{\theta_k^T \theta_k\}$, pois X_k e θ_k são estatisticamente independentes. X_{rms} é o valor eficaz do sinal de entrada. Aqui levou-se em consideração a característica da matriz de autocorrelação do sinal de entrada ($E\{X_k X_k^T\}$) ser diagonal com termos não nulos iguais a X_{rms}^2 .

Portanto, a equação (A1.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\xi_k = E\{\eta_k^2\} + \sigma_{AD}^2 + L\sigma_G^2 \|H\|^2 + N\sigma_w^2 + X_{rms}^2 E\{\theta_k^T \theta_k\} \quad (A1.2)$$

Ou, na próxima iteração,

$$\xi_{k+1} = E\{\eta_{k+1}^2\} + \sigma_{AD}^2 + L\sigma_G^2 \|H\|^2 + N\sigma_w^2 + X_{rms}^2 E\{\theta_{k+1}^T \theta_{k+1}\} \quad (A1.3)$$

A equação de atualização dos coeficientes através do algoritmo LMS [5] é dada por:

$$W_{k+1} = W_k + \beta e_k X_k + Q_k \quad (A1.4)$$

onde Q_k é o vetor dos erros de quantização nos produtos $\beta e_k X_k$. Subtraindo $G^T H$ de cada lado da igualdade, vem:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \beta e_k X_k + Q_k \quad (A1.5)$$

Desta equação verifica-se que θ_k depende somente de X_{k-1} e não de X_k . Como X_k possui componentes independentes no tempo, isto justifica a consideração anterior de que θ_k e X_k são independentes.

Formando o produto:

$$\theta_{k+1}^T \theta_{k+1} = \theta_k^T \theta_k + 2\beta e_k \theta_k^T X_k + 2\theta_k^T Q_k + \beta^2 e_k^2 X_k^T X_k + 2\beta e_k X_k^T Q_k + Q_k^T Q_k \quad (A1.6)$$

Tomando os valores esperados, tem-se:

$$\bullet \quad E\{2\beta e_k \theta_k^T X_k\} = 2\beta E\{(\eta_k + \delta_{AD_k} - \delta_{v_k} + \Delta G_k^T H - X_k^T \theta_k) \theta_k^T X_k\} = -2\beta E\{\theta_k^T X_k X_k^T \theta_k\} = -2\beta X_{rms}^2 E\{\theta_k^T \theta_k\};$$

$$\bullet \quad E\{\theta_k^T Q_k\} = 0;$$

$$\bullet E\{\beta^2 e_k^2 X_k^T X_k\} = \beta^2 N X_{rms}^2 E\{e_k^2\} = \beta^2 N X_{rms}^2 \xi_k ;$$

$$\bullet E\{2\beta e_k X_k^T Q_k\} = 0.$$

Portanto,

$$E\{\theta_{k+1}^T \theta_{k+1}\} = [1 - 2\beta X_{rms}^2] E\{\theta_k^T \theta_k\} + \beta^2 N X_{rms}^2 \xi_k + E\{Q_k^T Q_k\} \quad (A1.7)$$

Utilizando (A1.2), (A1.3) e (A1.7) e considerando todos os sinais estacionários, tem-se:

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} = [1 - 2\beta X_{rms}^2 + N\beta^2 X_{rms}^4] \xi_k + 2\beta X_{rms}^2 [E\{\eta_k^2\} + \sigma_{AD}^2 + \\ + L\|H\|^2 \sigma_G^2 + N\sigma_W^2] + X_{rms}^2 E\{Q_k^T Q_k\} \end{aligned} \quad (A1.8)$$

Vetor de Quantização Q_k

Reescrevendo a equação de atualização dos coeficientes:

$$W_{k+1} = W_k + (\beta e_k + \delta_1) X_k + \Delta z_k \quad (A1.9)$$

onde δ_1 representa o erro de quantização no produto βe_k e Δz_k é o vetor dos erros de quantização no produto $(\beta e_k) X_k$. Cada um destes erros possui variância σ_W^2 . Comparando-se (A1.9) com (A1.4), obtém-se:

$$Q_k = \delta_1 X_k + \Delta z_k \quad (A1.10)$$

Formando o produto $Q_k^T Q_k$ e tomando valores esperados vem:

$$E\{Q_k^T Q_k\} = NX_{rms}^2 \sigma_w^2 + N\sigma_w^2 \quad (A1.11)$$

Finalmente, de (A1.8) e (A1.11), obtém-se:

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} = & [1 - 2\beta X_{rms}^2 + N\beta^2 X_{rms}^4] \xi_k + 2\beta X_{rms}^2 [E\{\eta_k^2\} + \\ & + \sigma_{AD}^2 + L\|H\|^2 \sigma_G^2 + N\sigma_w^2] + NX_{rms}^2 (X_{rms}^2 + 1) \sigma_w^2 \end{aligned} \quad (A1.12)$$

A P Ê N D I C E 2

Obtenção da Equação (3.23): Expressão para o EMQ na Saída de um Filtro Digital Adaptável com Coeficientes Complexos.

Reescrevendo a equação (3.22)

$$\begin{aligned} \xi_k = E\{\eta_k^2\} + E\{\delta_{AD}^2\} + E\{\mathcal{R}e[\delta_w^2]\} + E\{H^T \mathcal{R}e[\Delta G_k] \mathcal{R}e[\Delta G_k^T] H\} + \\ + E\{(\mathcal{R}e[X_k^T \theta_k])^2\} \end{aligned} \quad (A2.1)$$

Será admitido que o sinal de entrada, o ruído aditivo e os erros de quantização são não-correlacionadas entre si, de média nula e com amostras independentes no tempo.

Define-se σ_{AD}^2 como variância do erro de quantização no CAD e σ_G^2 e σ_w^2 como as variâncias dos erros de quantização de cada produto real em G e no filtro adaptável, respectivamente (ver Seção 3.4.2). Uma análise detalhada dos diferentes termos da equação (A2.1) leva às seguintes conclusões:

- i) $E\{\mathcal{R}e[\delta_w^2]\} = 2N\sigma_w^2$, pois há 2N produtos reais quantizados (N produtos complexos) em cada iteração no filtro adaptável;
- ii) $E\{H^T \mathcal{R}e[\Delta G_k] \mathcal{R}e[\Delta G_k^T] H\} = 2L\sigma_G^2 E\{H^T H\} = 2L\|H\|^2 \sigma_G^2$, onde $\|H\|$ é a norma euclidiana do vetor H e há 2L produtos reais quantizados no filtro G.
- iii) $E\{(\mathcal{R}e[X_k^T \theta_k])^2\} = A_{rms}^2 [E\{\mathcal{R}e[\theta_k^T] \mathcal{R}e[\theta_k]\} + E\{\mathcal{I}m[\theta_k^T] \mathcal{I}m[\theta_k]\}]$, pois X_k e θ_k são estatisticamente independentes. A_{rms} é o valor eficaz de cada componente (real e imaginária) do sinal de entrada. Aqui foi usado o fato da matriz de autocorrelação do sinal de entrada ($E\{X_k X_k^{*T}\}$) ser diagonal com termos não nulos iguais a $2A_{rms}^2$.

Portanto, (A2.1) pode ser escrita como:

$$\xi_k = E\{\eta_k^2\} + \sigma_{AD}^2 + 2L\sigma_G^2\|H\|^2 + 2N\sigma_w^2 + A_{rms}^2 [E\{\mathcal{R}e[\theta_k^T]\mathcal{R}e[\theta_k]\}] + E\{\mathcal{I}m[\theta_k^T]\mathcal{I}m[\theta_k]\}] \quad (A2.2)$$

Ou, na próxima iteração,

$$\xi_{k+1} = E\{\eta_{k+1}^2\} + \sigma_{AD}^2 + 2L\|H\|^2\sigma_G^2 + 2N\sigma_w^2 + A_{rms}^2 [E\{\mathcal{R}e[\theta_{k+1}^T]\mathcal{R}e[\theta_{k+1}]\}] + E\{\mathcal{I}m[\theta_{k+1}^T]\mathcal{I}m[\theta_{k+1}]\}] \quad (A2.3)$$

A equação de atualização dos coeficientes através do algoritmo LMS [5], [27] é dada por

$$W_{k+1} = W_k + \beta e_k X_k^* + Q_k \quad (A2.4)$$

onde Q_k é o vetor dos erros de quantização nos produtos $\beta e_k X_k^*$. Subtraindo $G^T H$ de cada lado da igualdade, vem:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \beta e_k X_k^* + Q_k \quad (A2.5)$$

Desta equação verifica-se que θ_k depende somente de X_{k-1} e não de X_k . Como X_k possui componentes independentes no tempo, fica justificada a consideração anterior de que θ_k e X_k são independentes. Tomando as partes real e imaginária de θ_{k+1} , vem:

$$\mathcal{R}e[\theta_{k+1}] = \mathcal{R}e[\theta_k] + \beta e_k \mathcal{R}e[X_k] + \mathcal{R}e[Q_k] \quad (A2.6a)$$

$$\mathcal{I}m[\theta_{k+1}] = \mathcal{I}m[\theta_k] - \beta e_k \mathcal{I}m[X_k] + \mathcal{I}m[Q_k] \quad (\text{A2.6b})$$

Formando o produto:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e[\theta_{k+1}^T] \mathcal{R}e[\theta_{k+1}] &= \mathcal{R}e[\theta_k^T] \mathcal{R}e[\theta_k] + 2\beta e_k \mathcal{R}e[\theta_k^T] \mathcal{R}e[X_k] + 2\mathcal{R}e[\theta_k^T] \mathcal{R}e[Q_k] + \\ &+ \beta^2 e_k^2 \mathcal{R}e[X_k^T] \mathcal{R}e[X_k] + 2\beta e_k \mathcal{R}e[X_k^T] \mathcal{R}e[Q_k] + \mathcal{R}e[Q_k^T] \mathcal{R}e[Q_k] \end{aligned} \quad (\text{A2.7})$$

Tomando os valores esperados, tem-se:

- $E\{2\beta e_k \mathcal{R}e[\theta_k^T] \mathcal{R}e[X_k]\} = 2\beta E\{(\eta_k + \delta A D_k - \mathcal{R}e[\delta w_k] + \mathcal{R}e[\Delta G_k^T] H - \mathcal{R}e[X_k^T \theta_k]) \mathcal{R}e[\theta_k^T] \mathcal{R}e[X_k]\}$
 $= -2\beta E\{\mathcal{R}e[X_k^T \theta_k] \mathcal{R}e[\theta_k^T] \mathcal{R}e[X_k]\} = -2\beta E\{(\mathcal{R}e[X_k^T] \mathcal{R}e[\theta_k] - \mathcal{I}m[X_k^T] \mathcal{I}m[\theta_k]) \mathcal{R}e[\theta_k^T] \mathcal{R}e[X_k]\}$
 $= -2\beta E\{\mathcal{R}e[X_k^T] \mathcal{R}e[\theta_k] \mathcal{R}e[\theta_k^T] \mathcal{R}e[X_k]\} = -2\beta A_{rms}^2 E\{\mathcal{R}e[\theta_k^T] \mathcal{R}e[\theta_k]\} ;$
- $E\{2\mathcal{R}e[\theta_k^T] \mathcal{R}e[Q_k]\} = 0 ;$
- $E\{\beta^2 e_k^2 \mathcal{R}e[X_k^T] \mathcal{R}e[X_k]\} = \beta^2 N A_{rms}^2 E\{e_k^2\} = \beta^2 N A_{rms}^2 \xi_k ;$
- $E\{2\beta e_k \mathcal{R}e[X_k^T] \mathcal{R}e[Q_k]\} = 0.$

Portanto,

$$\begin{aligned} E\{\mathcal{R}e[\theta_{k+1}^T] \mathcal{R}e[\theta_{k+1}]\} &= [1 - 2\beta A_{rms}^2] E\{\mathcal{R}e[\theta_k^T] \mathcal{R}e[\theta_k]\} + \beta^2 N A_{rms}^2 \xi_k + \\ &+ E\{\mathcal{R}e[Q_k^T] \mathcal{R}e[Q_k]\} \end{aligned} \quad (\text{A2.8})$$

Similarmente, obtém-se:

$$E\{\mathcal{I}_m[\theta_{k+1}^T] \mathcal{I}_m[\theta_{k+1}]\} = [1-2\beta A_{rms}^2] E\{\mathcal{I}_m[\theta_k^T] \mathcal{I}_m[\theta_k]\} + \beta^2 N A_{rms}^2 \xi_k + \\ + E\{\mathcal{I}_m[Q_k^T] \mathcal{I}_m[Q_k]\} \quad (A2.9)$$

Utilizando (A2.2), (A2.3), (A2.8) e (A2.9) e considerando todos os sinais estacionários, tem-se:

$$\xi_{k+1} = [1-2\beta A_{rms}^2 + 2N\beta^2 A_{rms}^4] \xi_k + 2\beta A_{rms}^2 [E\{\eta_k^2\} + \sigma_{AD}^2 + 2L\|H\|^2 \sigma_G^2 + 2N\sigma_W^2] + \\ + A_{rms}^2 [E\{\text{Re}[Q_k^T] \text{Re}[Q_k]\} + E\{\text{Im}[Q_k^T] \text{Im}[Q_k]\}] \quad (A2.10)$$

Vetor de Quantização Q_k

Reescrevendo a equação de atualização dos coeficientes:

$$W_{k+1} = W_k + (\beta e_k + \delta_1) X_k^* + \Delta z_k \quad (A2.11)$$

onde δ_1 representa o erro de quantização no produto βe_k , com variância σ_W^2 , e Δz_k é o vetor complexo dos erros de quantização nos produtos $(\beta e_k) X_k$. As partes real e imaginária de cada componente de Δz_k têm, também, variâncias iguais a σ_W^2 . Comparando-se (A2.11) com (A2.4), obtém-se:

$$Q_k = \delta_1 X_k^* + \Delta z_k \quad (\text{A2.12})$$

Formando os produtos $\Re\{Q_k^T\}\Re\{Q_k\}$ e $\Im\{Q_k^T\}\Im\{Q_k\}$ e tomando valores esperados vem:

$$E\{\Re\{Q_k^T\}\Re\{Q_k\}\} = E\{\Im\{Q_k^T\}\Im\{Q_k\}\} = N A_{rms}^2 \sigma_w^2 + N \sigma_w^2 \quad (\text{A2.13})$$

Finalmente, de (A2.8) e (A2.11), obtém-se:

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} = & [1 - 2\beta A_{rms}^2 + 2N\beta^2 A_{rms}^4] \xi_k + 2\beta A_{rms}^2 [E\{\eta_k^2\} + \sigma_{AD}^2 + 2L\|H\|^2 \sigma_G^2 + 2N\sigma_w^2] + \\ & + 2N A_{rms}^2 (A_{rms}^2 + 1) \sigma_w^2 \end{aligned} \quad (\text{A2.14})$$

A P Ê N D I C E 3

Dedução da Equação (4.4): Expressão do EMQ na saída de um filtro digital adaptável com coeficientes reais.

O equacionamento aqui desenvolvido segue o mesmo procedimento utilizado no Apêndice 1. Todas as considerações e definições feitas naquele apêndice são válidas também aqui, a não ser que diferentemente estabelecidas.

Reescrevendo a equação (4.3):

$$\xi_k \triangleq E\{e_k^2\} = E\{\eta_k^2\} + E\{\delta_{AD_k}^2\} + E\{\delta_{w_k}^2\} + E\{H^T \Delta G_k \Delta G_k^T H\} + E\{\theta_k^T X_k X_k^T \theta_k\} \quad (A3.1)$$

Levando em conta a independência estatística entre X_k e θ_k , esta equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\xi_k = \xi_{NA} + X_{rms}^2 E\{\theta_k^T \theta_k\} \quad (A3.2)$$

Ou, na próxima iteração,

$$\xi_{k+1} = \xi_{NA} + X_{rms}^2 E\{\theta_{k+1}^T \theta_{k+1}\} \quad (A3.3)$$

onde $\xi_{NA} = E\{\eta_k^2\} + \sigma_{AD}^2 + L\|H\|^2 \sigma_G^2 + N\sigma_G^2$ é o EMQ na saída do filtro se o mesmo não fosse adaptável ($\beta=0$).

A equação de atualização dos coeficientes do filtro através do algoritmo LMS é dada por:

$$W_{k+1} = W_k + (\beta e_k + \delta_{1_k}) X_k + \Delta z_k \quad (A3.4)$$

onde δ_{1_k} é o erro de quantização no produto βe_k e Δz_k é o vetor dos erros de quantização no produto $[\beta e_k] X_k$. Subtraindo $G^T H$ de cada lado da igualdade, vem:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + (\beta e_k + \delta_{1k}) X_k + \Delta z_k \quad (A3.5)$$

Formando o produto:

$$\begin{aligned} \theta_{k+1}^T \theta_{k+1} &= \theta_k^T \theta_k + \beta^2 e_k^T X_k^T X_k + \delta_{1k}^2 X_k^T X_k + \Delta z_k^T \Delta z_k + 2\beta e_k^T \theta_k^T X_k + 2\delta_{1k} \theta_k^T X_k + \\ &2\theta_k^T \Delta z_k + 2\beta e_k \delta_{1k} X_k^T X_k + 2\beta e_k X_k^T \Delta z_k + 2\delta_{1k} X_k^T \Delta z_k \end{aligned} \quad (A3.6)$$

Tomando valores esperados, analisando cada termo e utilizando (A3.2) e (A3.3), vem:

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= [1 - 2\beta X_{rms}^2 + N\beta^2 X_{rms}^4] \xi_k - 2r X_{rms}^2 (1 - \beta N X_{rms}^2) \sigma_1 \sqrt{\xi_k} + \\ &+ 2\beta X_{rms}^2 \xi_{NA} + N X_{rms}^2 (X_{rms}^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \end{aligned} \quad (A3.7)$$

onde σ_1^2 é a variância de δ_{1k} , σ_2^2 é a variância de cada componente do vetor Δz_k e r é o coeficiente de correlação entre δ_{1k} e βe_k (ou entre δ_{1k} e e_k , o que é a mesma coisa, já que β é constante), definido conforme abaixo:

$$r = \frac{E\{(\delta_{1k} - \bar{\delta}_{1k})(\beta e_k - \beta \bar{e}_k)\}}{\sqrt{E\{(\delta_{1k} - \bar{\delta}_{1k})^2\} \cdot E\{(\beta e_k - \beta \bar{e}_k)^2\}}} = \frac{E\{\delta_{1k} \cdot e_k\}}{\sigma_1 \sqrt{\xi_k}} \quad (A3.8)$$

onde as barras horizontais indicam valor médio. Na simplificação da expressão foi levado em conta que todas as grandezas envolvidas possuem valor médio nulo.

Em relação ao Apêndice 1, dois termos considerados nulos naquele equacionamento são aqui reavaliados, devido à correlação entre δ_{1k} e βe_k , a saber:

$$\bullet E\{2\delta_{k k} \theta_{k k}^T X_k\} = -2E\{\delta_{k k} e_k\} = -2r \sigma_1 \sqrt{\xi_k};$$

$$\bullet E\{2\beta e_k \delta_{k k} X_k^T X_k\} = 2\beta N X_{rms}^2 r \sigma_1 \sqrt{\xi_k}.$$

A P Ê N D I C E 4

Dedução da Equação (4.12): Expressão do EMQ na Saída de um Filtro Digital Adaptável com Coeficientes Complexos.

O equacionamento aqui desenvolvido segue o mesmo procedimento utilizado no Apêndice 2. Todas as considerações e definições feitas naquele apêndice são válidas também aqui, a não ser que diferentemente estabelecidas.

Reescrevendo a equação (4.10):

$$\begin{aligned} \xi_k \triangleq E\{e_k^2\} &= E\{\eta_k^2\} + E\{\delta_{AD_k}^2\} + E\{(\Re\{\delta w_k\})^2\} + \\ &+ E\{H^T \Re\{\Delta G_k\} \Re\{\Delta G_k^T\} H\} + E\{(\Re\{X_k^T \theta_k\})^2\} \end{aligned} \quad (A4.1)$$

Levando em conta a independência estatística entre X_k e θ_k e calculando os valores esperados do mesmo modo que no Apêndice 2, esta equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\xi_k = \xi_{CNA} + A_{rms}^2 [E\{\Re\{\theta_k^T\} \Re\{\theta_k\}\} + E\{\Im\{\theta_k^T\} \Im\{\theta_k\}\}] \quad (A4.2)$$

Ou, na próxima iteração,

$$\xi_{k+1} = \xi_{CNA} + A_{rms}^2 [E\{\Re\{\theta_{k+1}^T\} \Re\{\theta_{k+1}\}\} + E\{\Im\{\theta_{k+1}^T\} \Im\{\theta_{k+1}\}\}] \quad (A4.3)$$

onde $\xi_{CNA} = E\{\eta_k^2\} + \sigma_{AD}^2 + 2L\|H\|^2\sigma_G^2 + 2N\sigma_w^2$ é o EMQ na saída do filtro se o mesmo não fosse adaptável ($\beta=0$).

A equação de atualização dos coeficientes através do algoritmo LMS [5], [27] é dada por

$$W_{k+1} = W_k + (\beta e_k + \delta_1) X_k^* + \Delta z_k \quad (A4.4)$$

onde "*" indica complexo conjugado. Subtraindo $G^T H$ de cada lado da igualdade, obtém-se:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + (\beta e_k + \delta_1) X_k^* + \Delta z_k \quad (A4.5)$$

Tomando as partes real e imaginária de θ_{k+1} , vem:

$$\Re[\theta_{k+1}] = \Re[\theta_k] + (\beta e_k + \delta_1) \Re[X_k] + \Re[\Delta z_k] \quad (A4.6a)$$

$$\Im[\theta_{k+1}] = \Im[\theta_k] - (\beta e_k + \delta_1) \Im[X_k] + \Im[\Delta z_k] \quad (A4.6b)$$

Formando os produtos

$$\begin{aligned} \Re[\theta_{k+1}^T] \Re[\theta_{k+1}] &= \Re[\theta_k^T] \Re[\theta_k] + \beta^2 e_k^2 \Re[X_k^T] \Re[X_k] + \delta_1^2 \Re[X_k^T] \Re[X_k] \\ &+ \Re[\Delta z_k] \Re[\Delta z_k] + 2\beta e_k \Re[\theta_k^T] \Re[X_k] + 2\delta_1 \Re[\theta_k^T] \Re[X_k] + \\ &2\Re[\theta_k^T] \Re[\Delta z_k] + 2\beta e_k \delta_1 \Re[X_k^T] \Re[X_k] + 2\beta e_k \Re[X_k^T] \Re[\Delta z_k] + \\ &2\delta_1 \Re[X_k^T] \Re[\Delta z_k] \end{aligned} \quad (A4.7)$$

$$\begin{aligned} \Im[\theta_{k+1}^T] \Im[\theta_{k+1}] &= \Im[\theta_k^T] \Im[\theta_k] + \beta^2 e_k^2 \Im[X_k^T] \Im[X_k] + \delta_1^2 \Im[X_k^T] \Im[X_k] \\ &+ \Im[\Delta z_k] \Im[\Delta z_k] - 2\beta e_k \Im[\theta_k^T] \Im[X_k] - 2\delta_1 \Im[\theta_k^T] \Im[X_k] + \\ &2\Im[\theta_k^T] \Im[\Delta z_k] + 2\beta e_k \delta_1 \Im[X_k^T] \Im[X_k] - 2\beta e_k \Im[X_k^T] \Im[\Delta z_k] - \\ &2\delta_1 \Im[X_k^T] \Im[\Delta z_k] \end{aligned} \quad (A4.8)$$

Tomando valores esperados, analisando e agrupando os termos e utilizando (A4.2) e (A4.3), vem:

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} = & [1 - 2\beta A_{rms}^2 + 2N\beta^2 A_{rms}^4] \xi_k - 2r A_{rms}^2 (1 - 2\beta N A_{rms}^2) \sigma_1^2 \sqrt{\xi_k} + \\ & + 2\beta A_{rms}^2 \xi_{CNA} + 2N A_{rms}^2 (A_{rms}^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \end{aligned} \quad (A4.9)$$

onde σ_1^2 é a variância de δ_{1k} , σ_2^2 é a variância de tanto da parte real quanto da parte imaginária de cada componente do vetor Δz_k e r é o coeficiente de correlação entre δ_{1k} e βe_k (ou entre δ_{1k} e e_k), definido conforme abaixo:

$$r = \frac{E\{(\delta_{1k} - \bar{\delta}_{1k})(\beta e_k - \bar{\beta e}_k)\}}{\sqrt{E\{(\delta_{1k} - \bar{\delta}_{1k})^2\} \cdot E\{(\beta e_k - \bar{\beta e}_k)^2\}}} = \frac{E\{\delta_{1k} \cdot e_k\}}{\sigma_1 \sqrt{\xi_k}} \quad (A4.10)$$

onde as barras horizontais indicam valor médio. Na simplificação da expressão foi levado em conta que todas as grandezas envolvidas possuem valor médio nulo.

Em comparação com o Apêndice 2, dois termos considerados nulos naquele equacionamento são aqui reavaliados devido à correlação entre δ_{1k} e βe_k , a saber:

- $E\{2\delta_{1k} \Re\{\theta_k^T\} \Re\{X_k\} - 2\delta_{1k} \Im\{\theta_k^T\} \Im\{X_k\}\} = -2E\{\delta_{1k} e_k\} = -2r \sigma_1 \sqrt{\xi_k}$;
- $E\{2\beta e_k \delta_{1k} \Re\{X_k^T\} \Re\{X_k\} + 2\beta e_k \delta_{1k} \Im\{X_k^T\} \Im\{X_k\}\} = 4r \beta N A_{rms}^2 \sigma_1 \sqrt{\xi_k}$.