

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

MODELAGEM DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS

ESTÁTICOS E DINÂMICOS

USANDO A TÉCNICA DAS DIFERENÇAS FINITAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE
FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

IVERTON COCENTINO DE LIMA

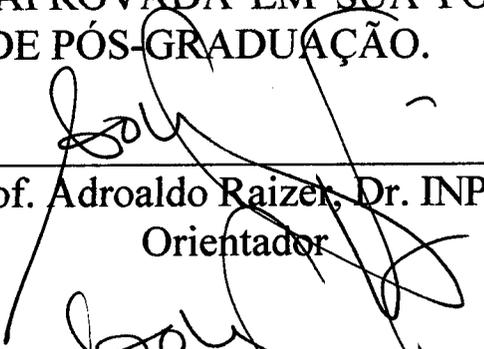
Fpolis, outubro de 1997

**MODELAGEM DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS
ESTÁTICOS E DINÂMICOS
USANDO A TÉCNICA DAS DIFERENÇAS FINITAS**

IVERTON COCENTINO DE LIMA

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM
ENGENHARIA**

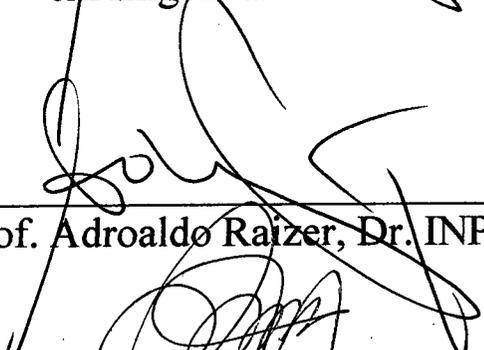
**ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA,
CONCEPÇÃO E ANÁLISE DE DISPOSITIVOS
ELETROMAGNÉTICOS, E APROVADA EM SUA FORMA
FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO.**



Prof. Adroaldo Raizer, Dr. INPG
Orientador

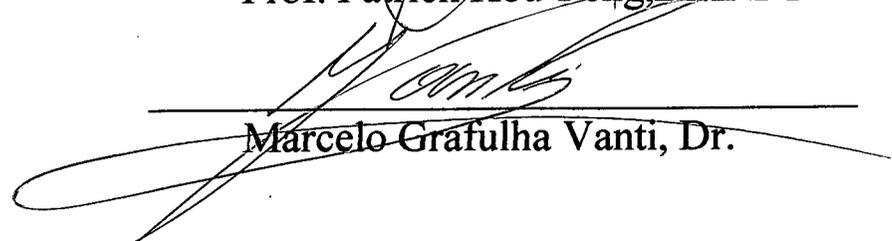
Prof. Adroaldo Raizer, Dr. INPG
Coordenador do Curso de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

BANCA EXAMINADORA



Prof. Adroaldo Raizer, Dr. INPG

Prof. Patrick Kou-Peng, Dr. INPT



Marcelo Grafulha Vanti, Dr.

Agradecimentos

O desenvolvimento deste trabalho científico tem uma infra-estrutura proporcionada por pessoas que, direta ou indiretamente, auxiliaram na sua concretização perfeita, exigida pela instituição à qual pertenço. É exatamente a essas pessoas que desejo agora me dirigir.

Agradeço ao meu orientador e amigo, Adroaldo Raizer, pela dedicação e interesse com que me dirigiu no decorrer do trabalho. A todos os mestrandos, bolsistas e funcionários do GRUCAD, pelas discussões e esclarecimentos que muito contribuíram para o enriquecimento deste documento científico. Agradeço, em especial, aos colegas de turma de pós-graduação, Maurício Petry, Marcia Cristina Aguiar e Roberto Meza Cubilla, o incentivo e ajuda desde o início desta jornada. A todos os meus amigos do meu Estado que me incentivaram à conclusão desta nova etapa da minha vida. Ao CNPQ, o auxílio para que esta jornada acadêmica pudesse ser concretizada.

Faço um agradecimento especial à minha família, dedicando este trabalho aos meus pais, Iêso e Tereza Neumann (In Memoriam) por confiarem em mim, dando-me a chance e o incentivo necessários para estudar, bem como aos meus irmãos Iêsa e Ives. A todos os parentes e amigos, por compartilharem comigo do sofrimento e da euforia para a consecução desta vitória.

Resumo

Este trabalho tem como finalidade definir as formulações matemáticas para os problemas eletromagnéticos, incluindo propagação das ondas eletromagnéticas de alta frequência em guias de onda e apresentar a resolução numérica das equações obtidas, usando, para isso, o método das diferenças finitas.

Este estudo leva ao desenvolvimento de dois “softwares”. O primeiro foi construído para modelar as mais variadas aplicações estáticas sujeitas às condições de contorno específicas. O segundo foi implementado, especificamente, para simular a propagação de ondas eletromagnéticas de alta frequência em guias de onda retangulares.

ABSTRACT

This work has the purpose of defining the mathematical formulations to the electrostatical problems, the propagation of high frequency electromagnetical waves in wave guides and to present the numerical resolution of the obtained equations, through the use of finite differences method.

This study leads to the development of two softwares. The first one was built to model a wide range applications under specific boundary conditions. The second one was especially built to simulate the propagation of high frequency magnetic waves in rectangular wave guides.

Índice

Resumo

ABSTRACT

Introdução	01
-------------------------	----

Cap. 1 - Método das Diferenças Finitas

1.1 - Introdução.....	03
1.2 - Equações de Maxwell.....	04
1.3 - Equações de Poisson e Laplace.....	05
1.4 - Fundamentação Matemática do Método das Diferenças Finitas.....	07
1.5 - Método das Diferenças Finitas para as Equações de Poisson e Laplace.....	10
1.6 - Formulação do Método das Diferenças Finitas com Elementos Quadrados em Meios não Homogêneos	14
1.7 - Formulação do Método das Diferenças Finitas para Elementos Retangulares em Meios Homogêneos.....	17
1.8 - Formulação do Método das Diferenças Finitas para Elementos Retangulares em Meios não Homogêneos	22
1.9 - Condições de Contorno.....	24
1.9.1 - Condições de Dirichlet.....	25
1.9.2 - Condições de Neumann.....	27
1.10 - Métodos de Resolução Matricial.....	29
1.11 - Conclusão.....	34

Cap. 2 - Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo

2.1 - Introdução.....	35
2.2 - Equações Temporais de Maxwell.....	36
2.3 - Algoritmo de Yee em Diferenças Finitas.....	28
2.4 - Precisão e Estabilidade.....	41
2.5 - Condições de Contorno.....	42
2.6 - Conclusão.....	44

Cap.3 - Apresentação e Análise de Resultados

3.1 - Introdução.....	45
3.2 - O EFCAD.....	46
3.3 - Resultados do Método das Diferenças Finitas.....	46
3.3.1 - O Software Desenvolvido - DFCS.....	47
3.3.2- Resultados Obtidos para o DFCS com Potencial Escalar.....	49
3.3.2.a - Aplicação para Capacitor de Placas Paralelas.....	49
3.3.3 - Resultados Obtidos para o DFCS com o Potencial Vetor.....	52
3.3.3.a - Aplicação para um Contactador.....	52
3.3.3.b - Aplicação para Imãs Permanentes.....	55
3.3.4 - Conclusão para os Problemas Estáticos.....	57
3.4 - Resultados do Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo..	58
3.4.1 - O Software Desenvolvido - GUIAS.....	58
3.4.2 - Resultados Obtidos para Guias de Onda.....	59
3.4.3 - Conclusão para os Problemas Dinâmicos.....	69

<i>Conclusões Gerais</i>	70
---------------------------------------	----

<i>Apêndice I - Guias de Onda</i>	72
--	----

<i>Apêndice II - Análise Harmônica</i>	75
---	----

<i>Apêndice III - Método dos Elementos Finitos</i>	79
---	----

<i>Referências Bibliográficas</i>	84
--	----

Introdução

O eletromagnetismo tem como alicerce inicial para a sua compreensão o estudo das Leis de Maxwell, também conhecidas como Equações de Maxwell. Maxwell foi um físico escocês que teve como fonte principal de seu trabalho científico os estudos e resultados de *Ampère*, *Gauss* e *Faraday* para a elaboração da teoria eletromagnética. O grande mérito de Maxwell foi a unificação dos resultados desses três cientistas citados em um conjunto de equações e a complementação da Lei de Ampère com a introdução do conceito das “correntes de deslocamento”, generalizando a lei para todos os casos. Maxwell conseguiu através do desenvolvimento destas pesquisas alcançar, através do conjunto de equações, uma total percepção dos fenômenos eletromagnéticos.

Para o estudo e compreensão dos fenômenos eletromagnéticos envolvidos em uma determinada aplicação é necessária a resolução do sistema das Equações de Maxwell. Geralmente essas equações são apresentadas em sua forma diferencial, que infelizmente são de difícil resolução. Para resolvê-las e assim conseguir analisar o fenômeno eletromagnético do problema em questão existem duas maneiras: a primeira, através de técnicas analíticas e a segunda através de técnicas numéricas.

Cada técnica de análise matemática das equações diferenciais tem suas particularidades e as suas aplicações mais indicadas. As técnicas analíticas são, geralmente, empregadas em problemas com estruturas de complexidade pequena e meios homogêneos, conseguindo-se com isso simplificações algébricas e tornando a solução bastante imediata.

Um fator que dificulta um maior uso na resolução das equações diferenciais através de soluções analíticas são as aproximações e simplificações feitas na modelagem do problema. Essas aproximações acarretam, geralmente, imprecisões numéricas, levando, com isso, a uma modelagem totalmente equivocada. Geralmente as aplicações onde se trabalha em regiões geometricamente complexas, com

condições de contorno mistas (várias condições de contorno numa mesma aplicação) e em meios não homogêneos e anisotrópicos, as técnicas de solução analíticas não são indicadas.

Com o desenvolvimento computacional recente, são largamente empregadas técnicas numéricas para a solução de equações diferenciais. Com o emprego dessas técnicas, ampliou-se o número de aplicações.

Existem várias técnicas numéricas de solução de problemas envolvendo equações diferenciais para as Equações de Maxwell. A escolha do método pode depender do tipo de problema a ser resolvido. Os mais conhecidos são :

- ⇒ O Método dos Elementos Finitos [3];
- ⇒ O Método dos Momentos [3];
- ⇒ O Método das Linhas de Transmissão [3];
- ⇒ O Método de Monte Carlo [3];
- ⇒ Método Variacional [3];
- ⇒ Método das Diferenças Finitas [3].

Este trabalho teve como objetivo analisar os campos eletromagnéticos estáticos e dinâmicos. No estudo estático, procurou-se desenvolver uma formulação através do Método das Diferenças Finitas que fosse capaz de calcular, por exemplo, a configuração dos campos e equipotenciais para um capacitor de placas paralelas, configurações de campos elétricos ou magnéticos de ímãs permanentes sem saturação, etc. No capítulo I, é mostrado todo o procedimento para a construção do algoritmo numérico.

Com as Equações de Maxwell temporais, buscou-se construir uma formulação matemática através do Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo, capaz de analisar e observar os fenômenos dinâmicos no eletromagnetismo. Procurou-se modelar, através dessa técnica numérica, um dispositivo conhecido como guia de onda. No capítulo II, é visto todo o procedimento para a construção do algoritmo numérico.

Construídas as formulações numéricas através de cada método, procurou-se desenvolver dois “softwares” que pudessem observar e produzir resultados significativos para a posterior validação do trabalho científico.

Cap. 1 - Método das Diferenças Finitas

1.1- Introdução

Como foi dito anteriormente, existem vários tipos de soluções numéricas para a obtenção dos campos eletromagnéticos. Dos métodos numéricos empregados para a solução de problemas eletromagnéticos destaca-se o **Método das Diferenças Finitas** (MDF). Esse método é bastante utilizado, possuindo duas características fundamentais para o seu emprego: facilidade de entendimento e aplicação na modelagem dos problemas eletromagnéticos.

O MDF foi desenvolvido por A. Thom, em 1920, com o título de '*Métodos dos Quadrados*', para resolver equações hidrodinâmicas não-lineares. Desde então, o método tem sido aplicado em diversas áreas de interesse científico como, por exemplo, na dinâmica dos fluidos e gases, no cálculo de fadiga em estruturas, etc.

As técnicas em diferenças finitas são baseadas em aproximações numéricas, permitindo transformar equações diferenciais em equações por diferenças finitas. Essas aproximações por diferenças finitas são feitas algebricamente em uma região discretizada, que relaciona os valores das variáveis com pontos dentro da área de estudo, os quais são chamados de *nós*.

A solução por diferenças finitas envolve, basicamente, quatro passos :

- (1) divisão da região em uma malha de *nós* ou uma discretização da região envolvida;
- (2) aproximação numérica da equação diferencial de interesse em uma equação por diferenças finitas equivalentes, relacionando as variáveis independentes e dependentes com os *nós* na região;
- (3) imposição das condições de contorno no sistema matricial;
- (4) resolução da equação matricial por um método numérico conhecido.

1.2 - Equações de Maxwell

As equações básicas no estudo do eletromagnetismo é o conhecimento das Equações de Maxwell [1] , observadas abaixo :

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.2.4)$$

e juntamente com as relações constitutivas tem-se :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.2.5)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (1.2.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.2.7)$$

Onde :

\vec{B} é a indução magnética (T);

\vec{H} é o campo magnético (A/m);

\vec{E} é o campo elétrico (V/m);

\vec{D} é a indução elétrica (C/m²);

\vec{J} é a densidade superficial de corrente (A/m²);

ρ é a densidade volumétrica de carga (C/m³);

μ é a permeabilidade magnética (H/m);

ε é a permissividade elétrica (F/m);

σ é a condutividade elétrica (S/m).

O termo $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ na eq. (1.2.1) é conhecido como Corrente de Deslocamento.

Essa corrente apresenta valores significativos quando se trabalha em altas frequências.

É importante destacar que existem dois domínios de estudo no eletromagnetismo: o domínio das baixas e altas frequências.

O domínio das baixas frequências compreende os dispositivos eletromagnéticos como, por exemplo, motores elétricos, relés, contactores, transformadores, etc.

O domínio das altas frequências compreende o estudo e análise de ondas eletromagnéticas e a propagação de energia pelas mesmas. Nesse domínio aparecem as correntes de deslocamento citadas anteriormente.

Precisa-se ressaltar que não é muito bem definido o valor exato da faixa de frequências onde começa o domínio de altas frequências e termina o das baixas frequências. Isso deve-se ao fato do constante desenvolvimento tecnológico e em qual aplicação se está estudando ou trabalhando. Na presente dissertação, tem-se como princípio que, a partir de 10 kHz , já se trabalha em domínios de altas frequências.

1.3 - Equações de Poisson e Laplace

Para se obter a distribuição dos campos em um determinado dispositivo, ao invés de se tentar calcular diretamente os campos (\vec{E} e \vec{H}), pode-se abordar o mesmo problema através do cálculo de potenciais. Através dos potenciais calculados, obtém-se a distribuição dos campos.

Assim, o problema original será representado através de uma Equação de Poisson de segunda ordem. Como exemplo considere a equação (1.2.4):

A obtenção de Equação de Poisson é extremamente simples, pois se parte da forma pontual da Lei de Gauss [2],

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.3.1)$$

da relação constitutiva para \vec{D} ,

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.3.2)$$

e o campo elétrico (\vec{E}) pode ser obtido através do gradiente de uma função escalar [1],

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (1.3.3)$$

Onde :

V é potencial escalar.

por substituição, obtém-se:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho$$

ou

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.3.4)$$

para uma região homogênea em que ϵ (eq. 1.3.4) é considerado linear. Essa equação (eq. - 1.3.4) é conhecida como a Equação de Poisson para o Potencial Escalar Elétrico. Com o mesmo desenvolvimento teórico, é formulada a equação com o Potencial Vetor Magnético, onde se tem, como termo do lado direito ou como termo fonte, uma densidade superficial de corrente multiplicada por uma permeabilidade magnética [1]:

$$\nabla^2 A = \mu J \quad (1.3.5)$$

Pode-se também representar de uma forma genérica as eqs (1.3.4) e (1.3.5) :

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.3.6)$$

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \mu J \quad (1.3.7)$$

em coordenadas cartesianas. Ao trabalhar apenas em duas dimensões, obtém-se para a eq. (1.3.7) :

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \mu J \quad (1.3.8)$$

Em problemas ligados à engenharia elétrica, considera-se $\rho = 0$ e a equação (1.3.6) transforma-se na equação seguinte:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1.3.9)$$

ou

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3.10)$$

Nesse caso, a fonte de campo elétrico é, obrigatoriamente, a diferença de potencial imposta nas fronteiras do domínio [1]. As eqs. (1.3.9) e (1.3.10) são conhecidas como Equação de Laplace no Potencial Escalar Elétrico.

1.4 - Fundamentação Matemática do Método das Diferenças Finitas

Para se ilustrar a fundamentação matemática do método em questão, faz-se, em primeiro lugar, uma aproximação de uma função $f(x)$ qualquer por diferenças finitas, como é observado na *figura 1.1* [3] :

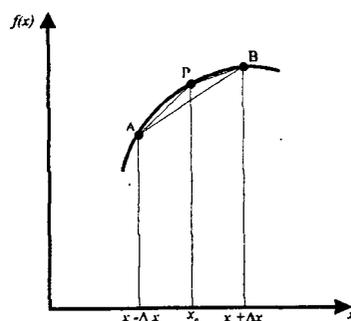


fig. 1.1 - função $f(x)$ genérica

Faz-se uma aproximação da derivada de 1ª ordem da função (fig. 1.1) no ponto P, pela inclinação do arco tangente PB, obtém-se:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.4.1)$$

Ou pela inclinação do arco tangente AP :

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.4.2)$$

Ou ainda pela inclinação do arco AB :

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (1.4.3)$$

Pode-se estimar a derivada segunda de $f(x)$ em P, tem-se :

$$f''(x_0) \cong \frac{1}{\Delta x} [f'(x_0 + \Delta x/2) - f'(x_0 - \Delta x/2)] \quad (1.4.4)$$

Sendo :

$$f'(x_0 + \Delta x/2) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.4.5)$$

e

$$f'(x_0 - \Delta x/2) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.4.6)$$

Substitui-se eqs. (1.4.5) e (1.4.6) em (1.4.4) :

$$f''(x_0) \cong \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \right] \quad (1.4.7)$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (1.4.8)$$

Com o objetivo de ilustrar a obtenção das derivadas recorreu-se à visualização da função $f(x)$, que tornou sua dedução um tanto intuitiva. Geralmente estas aproximações são feitas através de Séries de Taylor [3].

Se a função $f(x)$ e suas derivadas $\partial f / \partial x, \partial^2 f / \partial x^2 \dots$ são contínuas em x , logo se pode fazer a expansão em Série de Taylor da função [4]:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) = & f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x_0) \\ & + \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

e

$$\begin{aligned} f(x_0 - \Delta x) = & f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x_0) \\ & - \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

adicionando (1.4.9) e (1.4.10), obtém-se :

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O(\Delta x)^4 \quad (1.4.11)$$

onde $O(\Delta x)^4$ será o erro introduzido pelo truncamento da série. Esse erro será da ordem $(\Delta x)^4$. Com a omissão do termo $O(\Delta x)^4$ [3] tem-se para a derivada segunda:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (1.4.12)$$

Ao omitir o termo $(\Delta x)^3$ das eqs. (1.4.9) e (1.4.10), obtém-se para derivada primeira :

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2 \Delta x} \quad (1.4.13)$$

Para as expressões (1.4.12) e (1.4.13) o método torna-se , basicamente, uma diferença aritmética entre os pontos vizinhos.

1.5 - Método das Diferenças Finitas para as Equações de Poisson e Laplace

O desenvolvimento numérico do MDF na resolução das Equações de Laplace e Poisson contém com princípios para sua aplicação :

- (1) Modelagem da região de estudo;
- (2) Obtenção do sistema matricial com as condições de contorno;
- (3) Resolução do sistema matricial.

Ilustra-se na *figura 1.2* como é executada a discretização da região de estudo:

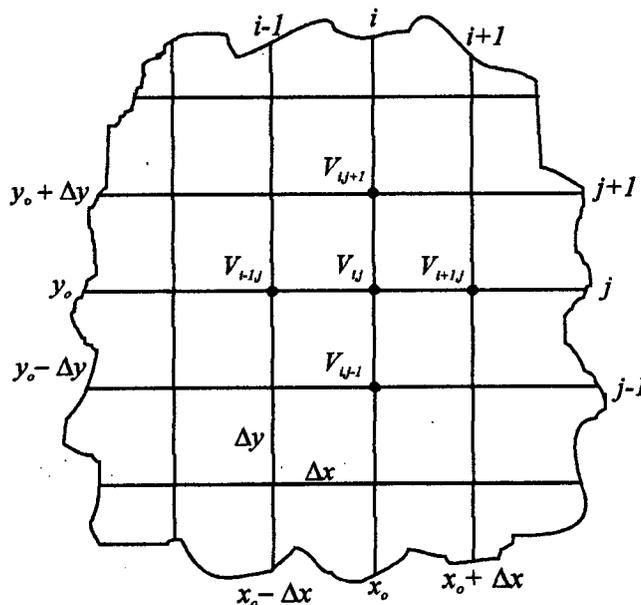


fig. 1.2 - Malha de discretização

Vale lembrar que para utilizar o referido método tem-se de discretizar a região com elementos de geometria regular (quadrados, retângulos ou hexágonos). Serão utilizados elementos quadrados e retangulares (células quadradas e retangulares) pela facilidade de visualização e pela simplicidade encontrada nesse modelo (*figura 1.2*).

Quando se discretiza uma região, ela possui dois tipos de *nós* :

— *nós fixos*;

— *nós livres*.

Os *nós fixos* são os *nós* onde se conhece os valores dos potenciais e estão na fronteira da região em questão. Os *nós livres* são os *nós* onde se pretende determinar seus valores de potenciais e estão no interior da região.

O objetivo será obter a solução dos potenciais dos *nós livres* com uma aproximação em diferenças finitas da Equação de Poisson

$$\nabla^2 A = \mu J \quad (1.5.1)$$

e da Equação de Laplace [4]

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1.5.2)$$

Como este trabalho envolverá problemas bidimensionais, logo se tem :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \mu J \quad (1.5.3)$$

e

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5.4)$$

Derivando $V(x,y)$ no ponto (x_o, y_o) da figura 1.2, obtém-se :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=x_o} &\cong \frac{V(x_o + \Delta x, y_o) - V(x_o - \Delta x, y_o)}{2\Delta x} \\ &= \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

onde Δx é suficientemente pequeno.

Para a derivada segunda de $\frac{\partial V}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x=x_o} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \cong \frac{V'(x_o + \Delta x/2, y_o) - V'(x_o - \Delta x/2, y_o)}{\Delta x} \\ &= \frac{V(x_o + \Delta x, y_o) - 2V(x_o, y_o) + V(x_o - \Delta x, y_o)}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

As eq. (1.5.5) e (1.5.6) são aproximações em diferenças finitas da 1ª e 2ª derivadas parciais de V em relação a x , para $x = x_o$. A eq. (1.5.5) é associado um erro da ordem de (Δx) , e a eq. (1.5.6) tem associado um erro da ordem de $(\Delta x)^2$.

Obtém-se similarmente para coordenada y :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_{y=y_o} &\cong \frac{V(x_o, y_o + \Delta y) - 2V(x_o, y_o) + V(x_o, y_o - \Delta y)}{(\Delta y)^2} \\ &= \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Substituindo (1.5.6) e (1.5.7) em (1.5.4) e fazendo $\Delta x = \Delta y = h$, obtém-se como expressão :

$$-V_{i+1,j} - V_{i-1,j} + 4V_{i,j} - V_{i,j+1} - V_{i,j-1} = 0 \quad (1.5.8)$$

A equação (1.5.8) é o desenvolvimento do algoritmo no Método das Diferenças Finitas para a Equação de Laplace com elementos quadrados, onde o potencial incógnito V_0 é dependente dos valores de potencial dos nós vizinhos $V_{i+1,j}$, $V_{i-1,j}$, $V_{i,j+1}$ e $V_{i,j-1}$.

A figura 1.3 mostra o arranjo de uma célula para eq. (1.5.8), que tem como potencial incógnito $V_{i,j}$:

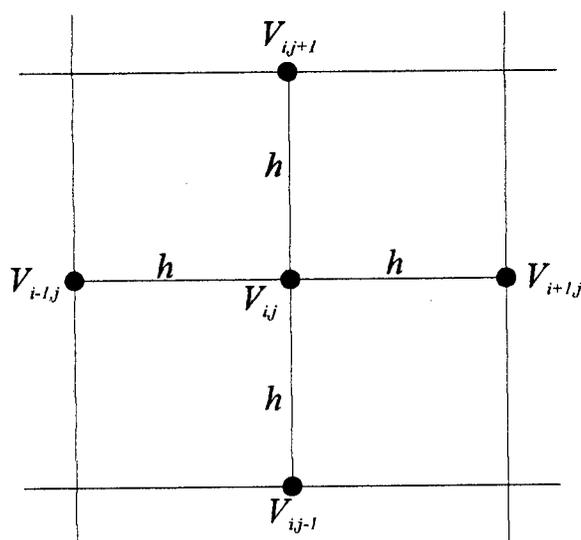


fig.1.3 - Célula básica para o desenvolvimento do algoritmo do MDF

onde h é chamado de tamanho da malha. Se existirem fontes de corrente dentro da malha (fig. 1.2) o problema torna-se uma aplicação da Equação de Poisson e se inclui um termo fonte na eq. (1.5.8) para ser aplicado no algoritmo.

$$-A_{i+1,j} - A_{i-1,j} + 4A_{i,j} - A_{i,j+1} - A_{i,j-1} = -\frac{\mu J}{4} h^2 \quad (1.5.9)$$

1.6 - Formulação do Método das Diferenças Finitas para Elementos Quadrados em Meios Não-Homogêneos

Nesta seção os conceitos apresentados anteriormente são desenvolvidas em uma malha de elementos quadrados possuindo diferentes características constitutivas.

Considerando-se que a indução elétrica normal permanece constante ao atravessar a fronteira entre meios de diferentes permissividades elétricas (*figura 1.4*) [1], em uma célula de quatro elementos pode-se escrever a seguinte expressão para circulação do campo elétrico, como mostrado na *figura 1.5* :

$$\{\bar{D}_{n1} + \bar{D}_{n2} + \bar{D}_{n3} + \bar{D}_{n4}\} = 0 \quad (1.6.1)$$

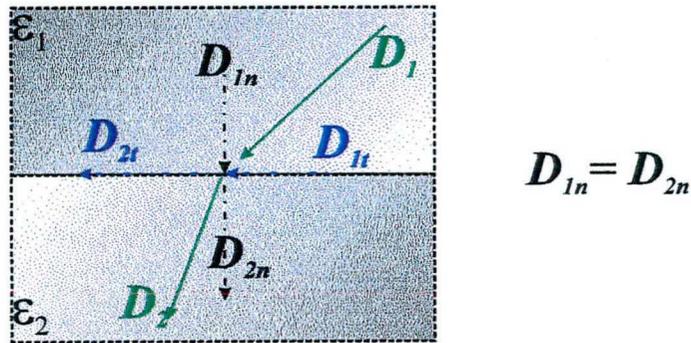


fig. 1.4 - Refração da Indução Elétrica em meios diferentes

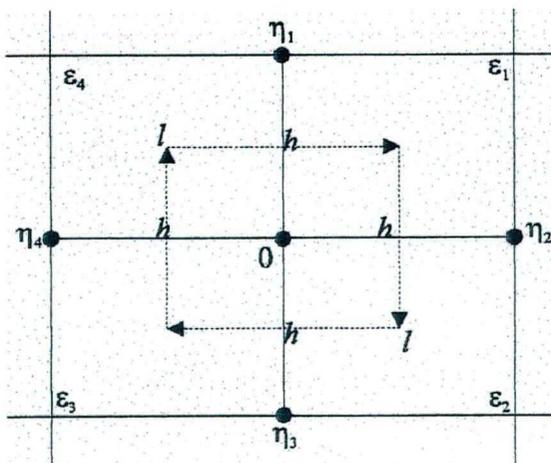


fig. 1.5 - Célula com materiais diferentes em cada elemento

Esta condição é proveniente da Lei de Gauss na forma integral [3]:

$$\oint_l \vec{D} \cdot d\vec{l} = \oint_l \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.6.2)$$

substituindo $\vec{E} = -\nabla V$, tem-se :

$$\oint_l \varepsilon (-\nabla V) \cdot d\vec{l} = \oint_l \varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.6.3)$$

onde $\frac{\partial V}{\partial n}$ é a derivada de V normal ao contorno l . Aplica-se no caminho das interfaces

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ e ε_4 [3] e obtém :

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 \left(\frac{V_1 - V_0}{h} \right) \frac{h}{2} + \varepsilon_2 \left(\frac{V_3 - V_0}{h} \right) \frac{h}{2} + \varepsilon_2 \left(\frac{V_2 - V_0}{h} \right) \frac{h}{2} + \varepsilon_3 \left(\frac{V_4 - V_0}{h} \right) \frac{h}{2} + \\ & \varepsilon_3 \left(\frac{V_3 - V_0}{h} \right) \frac{h}{2} + \varepsilon_4 \left(\frac{V_1 - V_0}{h} \right) \frac{h}{2} + \varepsilon_4 \left(\frac{V_4 - V_0}{h} \right) \frac{h}{2} + \varepsilon_1 \left(\frac{V_2 - V_0}{h} \right) \frac{h}{2} = 0 \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_4}{2} \right) (V_1 - V_0) + \left(\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2} \right) (V_2 - V_0) + \left(\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} \right) (V_3 - V_0) \\ & + \left(\frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_4}{2} \right) (V_4 - V_0) = 0 \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) V_0 - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_4)}{2} V_1 - \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}{2} V_2 \\ & - \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{2} V_3 - \frac{(\varepsilon_4 + \varepsilon_3)}{2} V_4 = 0 \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

ou

$$-\eta_1 V_1 - \eta_2 V_2 + \eta_0 V_0 - \eta_3 V_3 - \eta_4 V_4 = 0 \quad (1.6.7)$$

Sendo :

$$\eta_0 = \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i \quad (1.6.8.a)$$

$$\eta_1 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_4)}{2} \quad (1.6.8.b)$$

$$\eta_2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2} \quad (1.6.8.c)$$

$$\eta_3 = \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{2} \quad (1.6.8.d)$$

$$\eta_4 = \frac{(\varepsilon_3 + \varepsilon_4)}{2} \quad (1.6.8.e)$$

Com as eqs. (1.6.7) e (1.6.8) tem-se o algoritmo matemático em diferenças finitas na Equação de Laplace para o Potencial Escalar Elétrico com elementos quadrados. Para converter o algoritmo do potencial escalar elétrico no potencial vetor magnético na Equação de Poisson (eq. - 1.5.3) se acrescenta o termo fonte, μJ , ao lado direito da formulação (eq. - 1.6.7) e substituem-se as permissividades (ε) por relutividades (ν) nas eqs. (1.6.8). Conforme equações à seguir :

$$\eta_0 A_0 - \eta_1 A_1 - \eta_2 A_2 - \eta_3 A_3 - \eta_4 A_4 = -\frac{\mu J}{4} h^2 \quad (1.6.9)$$

Onde :

$$\eta_0 = \sum_{i=1}^4 \nu_i \quad (1.6.9.a)$$

$$\eta_1 = \frac{(\nu_1 + \nu_4)}{2} \quad (1.6.9.b)$$

$$\eta_2 = \frac{(\nu_1 + \nu_2)}{2} \quad (1.6.9.c)$$

$$\eta_3 = \frac{(\nu_2 + \nu_3)}{2} \quad (1.6.9.d)$$

$$\eta_4 = \frac{(\nu_3 + \nu_4)}{2} \quad (1.6.9.e)$$

1.7 - Formulação do Método em Diferenças Finitas para Elementos Retangulares em Meios Homogêneos

Para ampliar o número de aplicações do MDF procurou-se construir um algoritmo mais genérico, onde foi pretendido desenvolver uma formulação com elementos retangulares em meios homogêneos.

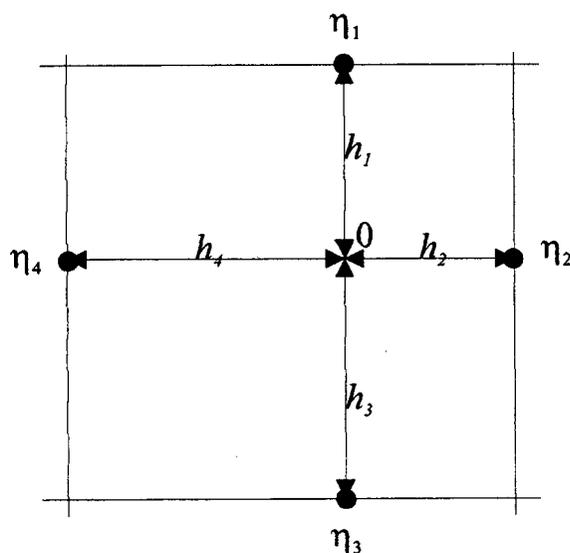


fig. 1.6 - Célula retangular

Com semelhantes premissas do item 1.4, logo se pode fazer uma expansão em Séries de Taylor de $V(x)$ [4]:

$$V(x + \Delta x) = V(x) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right) (\Delta x)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right) (\Delta x)^4 + \dots \quad (1.7.1)$$

ou

$$V(x - \Delta x) = V(x) - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) (\Delta x)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right) (\Delta x)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right) (\Delta x)^4 - \dots \quad (1.7.2)$$

onde Δx é um incremento infinitesimal na direção x .

Tem-se então como incremento de coordenadas por nó :

$$\Delta x_2 = x_2 - x_0 = h_2 \quad \text{e} \quad \Delta x_4 = x_4 - x_0 = h_4 \quad (1.7.3)$$

Fazendo as substituições dos incrementos h_2 e h_4 nas eq. (1.7.1) e (1.7.2), tem-se:

$$\begin{aligned} V_2 = V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 h_2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 (h_2)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right)_0 (h_2)^3 \\ + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right)_0 (h_2)^4 + \dots \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

$$\begin{aligned} V_4 = V_0 - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 h_4 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 (h_4)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right)_0 (h_4)^3 \\ + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right)_0 (h_4)^4 - \dots \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

onde h_2 é o acréscimo para $+\Delta x$ e h_4 é o acréscimo para $-\Delta x$ para os nós η_2 e η_4 .

Similarmente, se V e suas derivadas são funções contínuas em y , segue-se semelhante expansão em Séries de Taylor :

$$\begin{aligned} V_1 = V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 h_1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 (h_1)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}\right)_0 (h_1)^3 \\ + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}\right)_0 (h_1)^4 + \dots \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

$$\begin{aligned} V_3 = V_0 - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 h_3 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 (h_3)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}\right)_0 (h_3)^3 \\ + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}\right)_0 (h_3)^4 + \dots \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

onde h_1 e h_3 são os acréscimos $+\Delta y$ e $-\Delta y$ na direção y para os nós η_1 e η_3 .

Multiplicando o termo $\left(-\frac{h_2^2}{h_4^2}\right)$ na eq. (1.7.5) e somando a eq. (1.7.4), obtém-se:

se:

$$\begin{aligned} \left(V_2 - \frac{h_2^2}{h_4^2} V_4\right) &= \left(1 - \frac{h_2^2}{h_4^2}\right) V_0 + \left(h_2 + \frac{h_2^2}{h_4}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{3!} h_2 (h_2^2 + h_2 h_4) \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right)_0 \\ &\quad + \frac{1}{4!} h_2^2 (h_2^2 - h_4^2) \left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right)_0 \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

Para obter a derivada de 1ª ordem evitando-se erros significativos, pode-se truncar os termos a partir de 3ª ordem (se h_2 e h_4 forem suficientemente pequenos):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 \cong \frac{h_4}{h_2(h_2 + h_4)} V_2 + \frac{h_2 - h_4}{h_2 h_4} V_0 - \frac{h_2}{h_4(h_2 + h_4)} V_4 \quad (1.7.9)$$

para as derivadas em relação a x .

Para a derivada em relação a coordenada y faz-se a mesma implementação que foi feita no parágrafo anterior. Multiplicamos a eq. (1.7.7) por $\left(-\frac{h_1^2}{h_3^2}\right)$ e somando com a eq. (1.7.6), tem-se :

$$\begin{aligned} \left(V_1 - \frac{h_1^2}{h_3^2} V_3\right) &= \left(1 - \frac{h_1^2}{h_3^2}\right) V_0 + \left(h_1 + \frac{h_1^2}{h_3}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 + \frac{1}{3!} h_1 (h_1^2 + h_1 h_3) \left(\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}\right)_0 \\ &\quad + \frac{1}{4!} h_1^2 (h_1^2 - h_3^2) \left(\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}\right)_0 \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

Também, neste termo (eq. 1.7.10) das coordenadas em y , trunca-se os termos a partir de 3ª ordem desde que h_1 e h_3 sejam suficientemente pequenos, tem-se para a coordenada y :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 \cong \frac{h_3}{h_1(h_1 + h_3)} V_1 + \frac{h_1 - h_3}{h_1 h_3} V_0 - \frac{h_1}{h_3(h_1 + h_3)} V_3 \quad (1.7.11)$$

Como se quer obter as derivadas de segunda ordem para as Equações de Poisson e Laplace, ou seja as derivadas de segunda ordem de $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)$ e $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$, faz-se para a coordenada x a multiplicação de $\left(\frac{h_2}{h_4}\right)$ com a eq. (1.7.5) e somando com a eq. (1.7.4), obtendo-se :

$$\begin{aligned} \left(V_2 + \frac{h_2}{h_4}V_4\right) &= \left(1 + \frac{h_2}{h_4}\right)V_0 + \frac{1}{2}h_2(h_2 + h_4)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{1}{3!}h_2(h_2^2 - h_4^2)\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right)_0 \\ &+ \frac{1}{4!}h_2(h_2^2 + h_4^2)\left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right)_0 \end{aligned} \quad (1.7.12)$$

Para a coordenada y faz-se a multiplicação de $\left(\frac{h_1}{h_3}\right)$ e eq. (1.7.7) e soma-se a eq. (1.7.6), obtendo-se :

$$\begin{aligned} \left(V_1 + \frac{h_1}{h_3}V_3\right) &= \left(1 + \frac{h_1}{h_3}\right)V_0 + \frac{1}{2}h_1(h_1 + h_3)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 + \frac{1}{3!}h_1(h_1^2 - h_3^2)\left(\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}\right)_0 \\ &+ \frac{1}{4!}h_1(h_1^2 + h_3^2)\left(\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}\right)_0 \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

Nas equações (1.7.12) e (1.7.13) os coeficientes h_n são considerados suficientemente pequenos de forma que o desprezo dos termos acima de 3^a ordem não implique na geração de erros significativos [4]. Assim tem-se que :

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 \cong \frac{2}{h_2(h_2 + h_4)}V_2 + \frac{2}{h_4(h_2 + h_4)}V_4 - \frac{2}{h_2h_4}V_0 \quad (1.7.15)$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 \cong \frac{2}{h_1(h_1 + h_3)}V_1 + \frac{2}{h_3(h_1 + h_3)}V_3 - \frac{2}{h_1h_3}V_0 \quad (1.7.16)$$

Com isso, pode-se então substituir estas derivadas na Equação de Poisson e Laplace :

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = F_0 \quad (1.7.17)$$

$$\eta_1 V_1 + \eta_2 V_2 + \eta_3 V_3 + \eta_4 V_4 + \eta_0 V_0 = \frac{1}{2} F_0 \quad (1.7.18)$$

Sendo :

$$\eta_1 = \frac{1}{h_1(h_1 + h_3)} \quad (1.7.19.a)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{h_2(h_2 + h_4)} \quad (1.7.19.b)$$

$$\eta_3 = \frac{1}{h_3(h_3 + h_1)} \quad (1.7.19.c)$$

$$\eta_4 = \frac{1}{h_4(h_2 + h_4)} \quad (1.7.19.d)$$

$$\eta_0 = -\left(\frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2 h_4}\right) \quad (1.7.19.e)$$

Para a Equação de Laplace iremos apenas substituir $F_0 = 0$, tomando :

$$\eta_1 V_1 + \eta_2 V_2 + \eta_3 V_3 + \eta_4 V_4 + \eta_0 V_0 = 0 \quad (1.7.20)$$

1.8 - Formulação do Método das Diferenças Finitas para Elementos Retangulares em Meios Não-Homogêneos

Nas seções 1.6 e 1.7 foram obtidas expressões das formulações em diferenças finitas com elementos quadrados em meios não-homogêneos e com elementos retangulares em meios homogêneos. Agora, estas expressões serão associadas de forma a construir um algoritmo de abrangência geral.

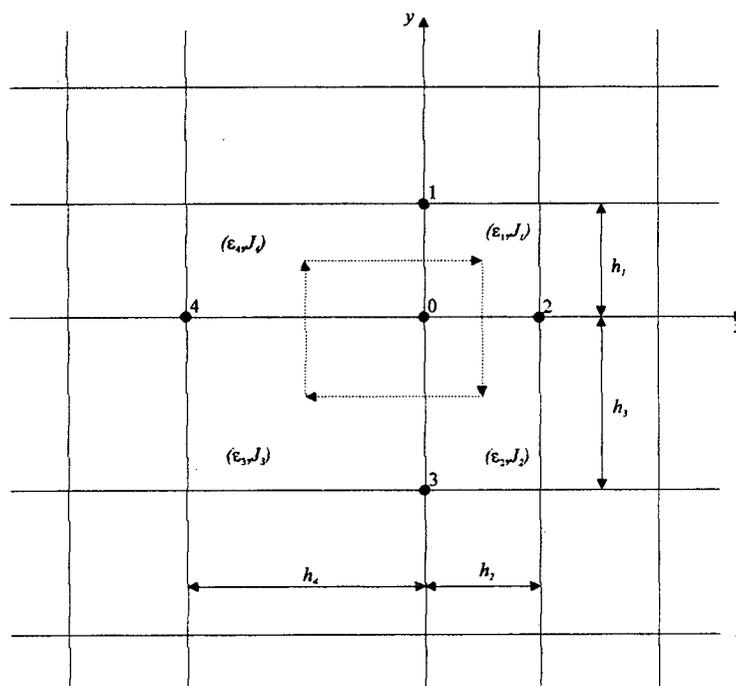


fig. 1.7 - Célula geral

Aplicando novamente o conceito do item 1.6 em que a indução elétrica normal é invariável ao ultrapassar meios de permissividades diferentes, tem-se :

$$\oint_l \vec{D} \cdot d\vec{l} = \oint_l \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.8.1)$$

substituindo $\vec{E} = -\nabla V$, obtém-se :

$$\oint_l \epsilon (-\nabla V) \cdot d\vec{l} = \oint_l \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.8.2)$$

com o percurso do caminho l na *figura 1.7*, obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_1(V_1 - V_0) h_2}{h_1} + \frac{\varepsilon_4(V_1 - V_0) h_4}{h_1} + \frac{\varepsilon_1(V_2 - V_0) h_1}{h_2} + \frac{\varepsilon_2(V_2 - V_0) h_3}{h_2} \\ & + \frac{\varepsilon_2(V_3 - V_0) h_2}{h_3} + \frac{\varepsilon_3(V_3 - V_0) h_4}{h_3} + \frac{\varepsilon_3(V_4 - V_0) h_3}{h_4} + \frac{\varepsilon_4(V_4 - V_0) h_1}{h_4} = 0 \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

$$\begin{aligned} & V_0 \left[\frac{\varepsilon_1}{2} \left(\frac{h_2}{h_1} + \frac{h_1}{h_2} \right) + \frac{\varepsilon_2}{2} \left(\frac{h_3}{h_2} + \frac{h_2}{h_3} \right) + \frac{\varepsilon_3}{2} \left(\frac{h_4}{h_3} + \frac{h_3}{h_4} \right) + \frac{\varepsilon_4}{2} \left(\frac{h_4}{h_1} + \frac{h_1}{h_4} \right) \right] \\ & - V_1 \left[\frac{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_4 h_4}{2h_1} \right] - V_2 \left[\frac{\varepsilon_2 h_3 + \varepsilon_1 h_1}{2h_2} \right] - V_3 \left[\frac{\varepsilon_3 h_4 + \varepsilon_2 h_2}{2h_3} \right] - V_4 \left[\frac{\varepsilon_4 h_1 + \varepsilon_3 h_3}{2h_4} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.8.4)$$

$$\begin{aligned} & V_0 \left[\frac{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_4 h_4}{2h_1} + \frac{\varepsilon_2 h_3 + \varepsilon_1 h_1}{2h_2} + \frac{\varepsilon_3 h_4 + \varepsilon_2 h_2}{2h_3} + \frac{\varepsilon_4 h_1 + \varepsilon_3 h_3}{2h_4} \right] \\ & = V_1 \left[\frac{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_4 h_4}{2h_1} \right] + V_2 \left[\frac{\varepsilon_2 h_3 + \varepsilon_1 h_1}{2h_2} \right] + V_3 \left[\frac{\varepsilon_3 h_4 + \varepsilon_2 h_2}{2h_3} \right] \\ & + V_4 \left[\frac{\varepsilon_4 h_1 + \varepsilon_3 h_3}{2h_4} \right] \end{aligned} \quad (1.8.5)$$

Sendo :

$$\eta_1 = \frac{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_4 h_4}{2h_1} \quad (1.8.6.a)$$

$$\eta_2 = \frac{\varepsilon_2 h_3 + \varepsilon_1 h_1}{2h_2} \quad (1.8.6.b)$$

$$\eta_3 = \frac{\varepsilon_3 h_4 + \varepsilon_2 h_2}{2h_3} \quad (1.8.6.c)$$

$$\eta_4 = \frac{\varepsilon_4 h_1 + \varepsilon_3 h_3}{2h_4} \quad (1.8.6.d)$$

obtem-se entao:

$$(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4)V_0 = \eta_1V_1 + \eta_2V_2 + \eta_3V_3 + \eta_4V_4 \quad (1.8.7)$$

ou

$$\left(\sum_{i=1}^4 \eta_i\right)V_0 = \sum_{i=1}^4 \eta_i V_i \quad (1.8.8)$$

Com a adição da fonte de corrente F_0 :

$$\left(\sum_{i=1}^4 \eta_i\right)A_0 = \sum_{i=1}^4 \eta_i A_i + F_0 \quad (1.8.9)$$

Sendo :

$$F_0 = \frac{1}{4}[J_1 h_1 h_2 + J_2 h_2 h_3 + J_3 h_3 h_4 + J_4 h_4 h_1] \quad (1.8.10)$$

1.9- Condições de Contorno

Na resolução das equações diferenciais são sempre necessárias que, nas aplicações, sejam conhecidas as condições de contorno do problema, também chamadas de condições de fronteira. Estas são fundamentais para a modelagem e solução dos problemas no eletromagnetismo. No MDF utiliza-se usualmente, na fronteira do dispositivo em estudo, duas condições:

- Condição de Dirichlet;
- Condição de Neumann.

Antes de analisar as aplicações de cada condição no contorno (Dirichlet e Neumann) do algoritmo numérico, é necessário compreender, previamente, como é formado o sistema matricial do método.

O sistema matricial é expressado como se segue:

$$[SS].[V] = [VDR]$$

onde :

[SS] → Matriz dos potenciais dos *nós* livres;

[V] → Matriz dos potenciais incógnitos;

[VDR] → Matriz dos potenciais impostos pela fronteira.

1.9.1 - Condições de Dirichlet

São as funções impostas sobre certas regiões do contorno. No MDF a condições de Dirichlet é a imposição de valores de potenciais em certas posições da fronteira.

É mostrado na *figura 1.8* como se deve agir no momento em que uma célula do algoritmo contém potenciais impostos na fronteira.

Na *figura 1.8*, tem-se potenciais de 100 V e 0 V nas fronteiras superior e inferior do domínio. A célula para a formação do algoritmo consiste dos *nós* V_1, V_2, V_3 e V_4 , o *nó* central 0 sendo o ponto inicial para se construir o processo formal de cálculo na demonstração a seguir :

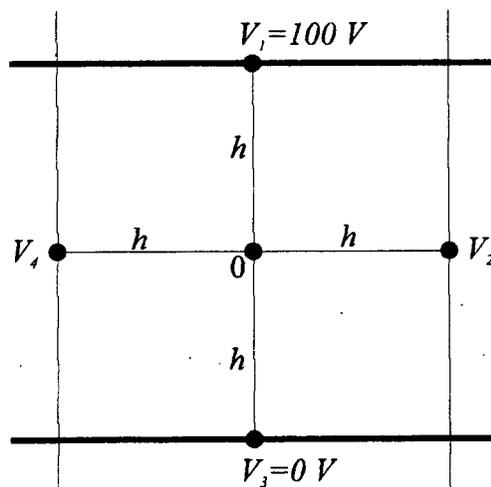


fig. 1.8 - Célula Condição de Dirichlet

Ao desenvolver a formulação com potencial imposto nas fronteiras da célula da *figura 1.8*, obtém-se :

$$4V_0 - V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = 0 \quad (1.9.1)$$

Na observação da *figura 1.8*, os nós 1 e 3 possuem valor de potencial 100 V e 0 V , respectivamente, substitui-se, tendo :

$$4V_0 - 100 - V_2 - 0 - V_4 = 0 \quad (1.9.2)$$

na transposição dos valores numéricos para lado direito da equação, obtém-se :

$$4V_0 - V_2 - V_4 = 100. \quad (1.9.3)$$

Agora, para se ter uma visão global do conceito exposto, é mostrado (*figura 1.9*) em uma *malha 3x3* a imposição de uma maneira mais genérica.

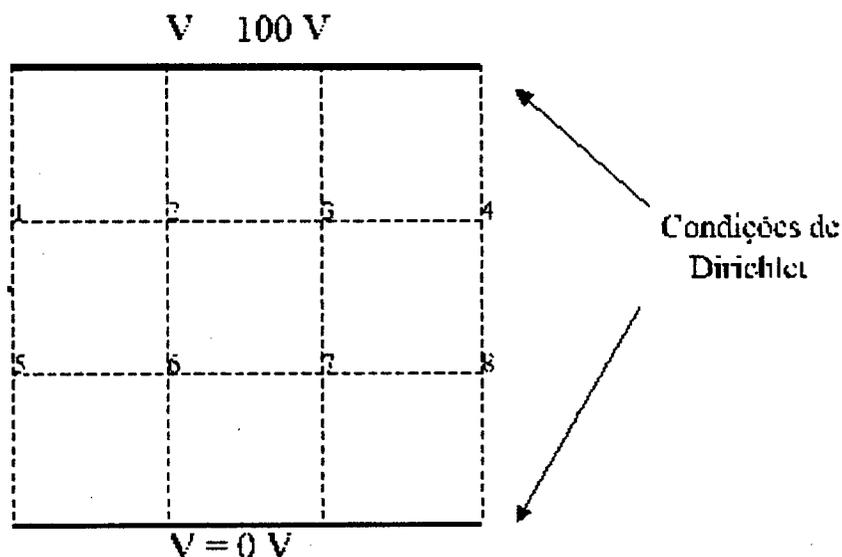


fig. 1.9 - Exemplo ilustrativo da condição de Dirichlet

Formulação para os nós :

$$\begin{aligned}4V_1 - V_2 - V_3 &= 100 \\-V_1 + 4V_2 - V_3 - V_6 &= 100 \\-V_2 + 4V_3 - V_4 - V_7 &= 100 \\-V_3 + 4V_4 - V_8 &= 100 \\-V_1 + 4V_5 - V_6 &= 0 \\-V_2 - V_5 + 4V_6 - V_7 &= 0 \\-V_3 - V_6 + 4V_7 - V_8 &= 0 \\-V_4 - V_7 + 4V_8 &= 0\end{aligned}$$

1.9.2 - Condições de Neumann

Essa condição é aplicada no contorno restante onde se tem a chamada “Condição Natural de Neumann”; é definida na parcela da fronteira para qual a indução normal é constante, normalmente nula.

Para esclarecer o parágrafo anterior, continuar-se-á a usar o exemplo da *figura 1.9*.

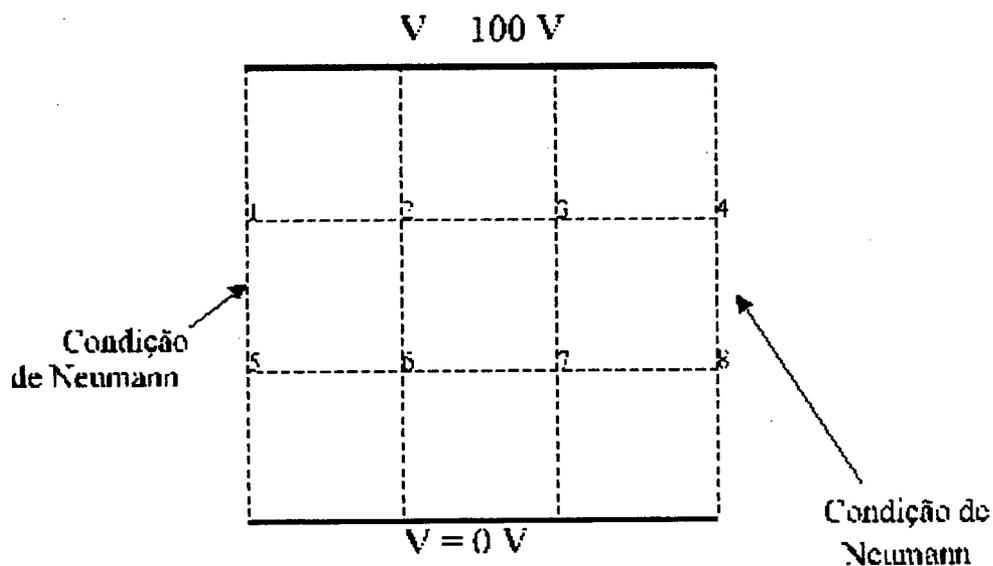


fig. 1.10 - Exemplo ilustrativo para a condição de Neumann

Na figura 1.10 observa-se que os nós 1, 4, 5 e 8 são fronteira e entretanto não possuem potenciais impostos. Nesses nós se tem as condições naturais de Neumann.

Para aplicar as condições de contorno no sistema matricial, isola-se uma célula para fazer a demonstração.

Isolando a célula do nó 1, tem-se :

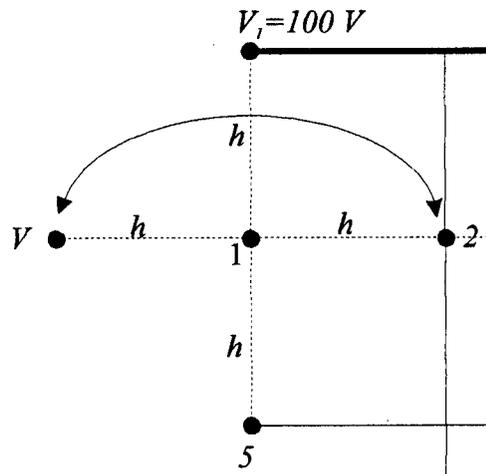


fig. 1.11- Célula isolada para demonstração das Condições de Neumann

aplica-se o algoritmo do MDF nessa célula onde o nó 1 está na fronteira, e aplica-se a formulação na célula :

$$-V_1 + V_2 - 4V_0 - V_3 - V_4 = 0 \quad (1.9.2.1)$$

Substituindo cada potencial por seu valor, fica :

$$-100 + V_2 - 4V_1 - V_5 - V = 0 \quad (1.9.2.2)$$

como esse nó V está fora da fronteira, ele será rebatido simetricamente no nó 2, de onde se tem que :

$$+2V_2 - 4V_1 - V_5 = 100 \quad (1.9.2.3)$$

Esse rebatimento será feito nos *nós* em que forem impostas Condições de Neumann. Corrigindo o exemplo do item 9.1, tem-se como equações :

$$4V_1 - 2V_2 - V_5 = 100$$

$$-V_1 + 4V_2 - V_3 - V_6 = 100$$

$$-V_2 + 4V_3 - V_4 - V_7 = 100$$

$$-2V_3 + 4V_4 - V_8 = 100$$

$$-V_1 + 4V_5 - 2V_6 = 0$$

$$-V_2 - V_5 + 4V_6 - V_7 = 0$$

$$-V_3 - V_6 + 4V_7 - V_8 = 0$$

$$-V_4 - 2V_7 + 4V_8 = 0$$

1.10 - Método de Resolução Numérica

O sistema matricial já com as condições de contorno inseridas nas matrizes [SS] e [VDR] é do tipo $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{B}$, onde :

[A] é a matriz [SS] onde temos os potenciais dos *nós* livres;

[x] é o vetor [V] onde temos os potenciais a calcular;

[B] é o vetor [VDR] onde temos os potenciais impostos de cada célula.

Com a construção do sistema matricial, acima mostrado, parte-se, agora, para a implementação de um método de resolução eficiente e simples de implementar [5]. Procurou-se nesta dissertação empregar o método de Eliminação de Gauss por ser um algoritmo de resolução numérico matricial muito usado pela comunidade científica, pela sua reconhecida eficácia [11].

A base do método consiste em efetivar transformações lineares no sistema matricial de maneira que quando as mesmas estão concluídas, a solução pode ser obtida através de operações simples [1].

Observa-se na equação (1.10.1) o princípio do método da eliminação de Gauss, aplicado a uma matriz de forma banda :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & & \\ & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & \\ & & \vdots & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (1.10.1)$$

A eliminação inicia-se com a primeira linha multiplicada por a_{ii}/a_{11} e subtraída nos termos correspondentes da i -ésima linha [1], onde i assume os valores 2 e 3 na equação (1.10.2).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & & \\ & a_{22}^* & a_{23}^* & a_{24} & & & \\ & a_{32}^* & a_{33}^* & a_{34} & a_{35} & & \\ & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & \\ & & \vdots & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^* \\ b_3^* \\ b_4 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (1.10.2)$$

onde somente os valores marcados por asterisco (*) são modificados, como por exemplo :

$$a_{32}^* = a_{32} - (a_{31}/a_{11})a_{12} \quad (1.10.3)$$

$$b_2^* = b_2 - (a_{21}/a_{11})b_1 \quad (1.10.4)$$

Na segunda etapa, tem-se :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & & \\ & a_{22}^* & a_{23}^* & a_{24} & & & \\ & & a_{33}^{**} & a_{34}^* & a_{35} & & \\ & & a_{43}^* & a_{44}^* & a_{45} & a_{46} & \\ & & \vdots & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^* \\ b_3^{**} \\ b_4^* \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (1.10.5)$$

Onde, por exemplo

$$a_{33}^{**} = a_{33}^* - (a_{32}^*/a_{22}^*)a_{23}^* \quad (1.10.6)$$

Ao aplicar o MDF em um capacitor de placas paralelas, como *figura 1.12* :

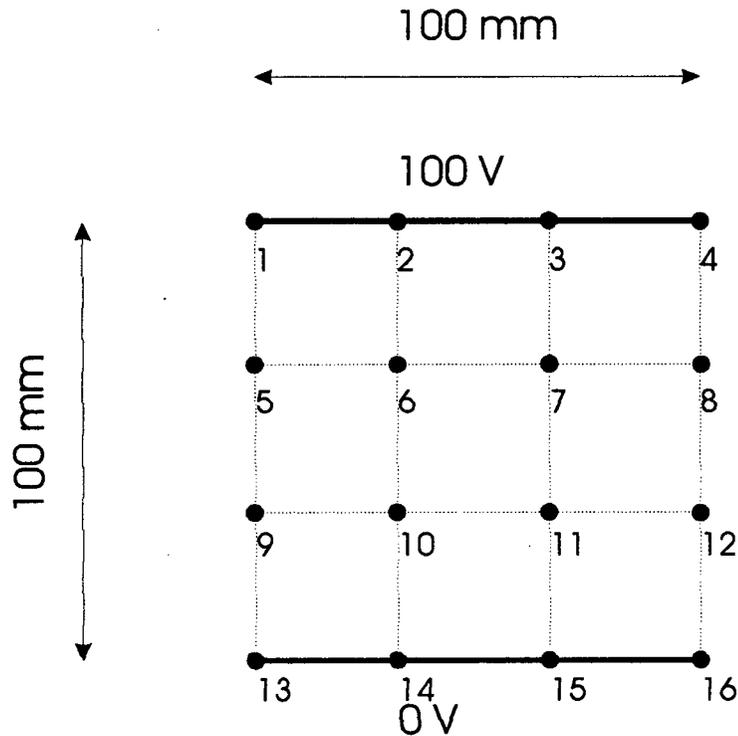


Fig. 1.12 – Exemplo didático da aplicação do MDF em um capacitor de placas paralelas

Obtém-se a partir da eq. (1.5.8) o sistema linear para a solução do problema da *figura 1.12* :

$$\begin{cases} -V_1 + 4V_5 - 2V_6 - V_9 = 0 \\ -V_2 - V_5 + 4V_6 - V_7 - V_{10} = 0 \\ -V_3 - V_6 + 4V_7 - V_8 - V_{11} = 0 \\ -V_4 - 2V_7 + 4V_8 - V_{12} = 0 \\ -V_5 + 4V_9 - 2V_{10} - V_{13} = 0 \\ -V_6 - V_9 + 4V_{10} - V_{11} - V_{14} = 0 \\ -V_7 - V_{10} + 4V_{11} - V_{12} - V_{15} = 0 \\ -V_8 - 2V_{11} + 4V_{12} - V_{16} = 0 \end{cases} \quad (1.10.11)$$

Substitui-se as incógnitas pelos potenciais impostos nos nós:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4V_5 - 2V_6 - V_9 = 100 \\ -V_5 + 4V_6 - V_7 - V_{10} = 100 \\ -V_6 + 4V_7 - V_8 - V_{11} = 100 \\ -2V_7 + 4V_8 - V_{12} = 100 \\ -V_5 + 4V_9 - 2V_{10} = 0 \\ -V_6 - V_9 + 4V_{10} - V_{11} = 0 \\ -V_7 - V_{10} + 4V_{11} - V_{12} = 0 \\ -V_8 - 2V_{11} + 4V_{12} = 0 \end{array} \right. \quad (1.10.12)$$

Com isso transforma-se em um sistema linear de 8 equações e 8 incógnitas num sistema matricial para se aplicar a eliminação de Gauss, obtendo-se :

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \\ V_{10} \\ V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.10.13)$$

Ao observar cuidadosamente o sistema matricial da eq. (1.10.13), $[A] \cdot [x] = [B]$, conclui-se que :

- 1 - A matriz $[A]$ é uma matriz esparsa e não-simétrica;
- 2 - O vetor $[B]$ é composto apenas dos potenciais que possuem condições de contorno impostas.

É importante notar que com a não-simetria da matriz $[A]$, também conhecida como matriz contribuição, o método de eliminação de Gauss armazena uma quantidade maior de termos para a resolução numérica.

1.11 - Conclusão

Este capítulo analisou problemas estáticos no eletromagnetismo conforme proposto nas equações desenvolvidas. Em grande parte deste capítulo pretendeu-se expor a dedução dos algoritmos didaticamente.

Com o algoritmo estático desenvolvido, no próximo capítulo será implementada uma formulação variante no tempo (dinâmica) para o MDF. A nova meta será estudar o Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo, com o intuito de desenvolver todas as equações de Maxwell temporais a partir da teoria das diferenças finitas.

Cap. 2 - Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo

2.1 - Introdução

O *Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo* (MDFDT) para a obtenção dos campos eletromagnéticos é uma poderosa ferramenta devido à simples conceituação e implementação, semelhante às características do MDF. O MDFDT é aplicado na resolução numérica das Equações Temporais de Maxwell, sujeitas às condições de contorno impostas pelo sistema de estudo [3].

O método foi desenvolvido, inicialmente, por K. S. Yee em 1966 no seguinte artigo '*Numerical solution of initial value problems involving Maxwell's equations in isotropic media*' [6], havendo, posteriormente, uma evolução do algoritmo por A. Taflove e outros pesquisadores (Umashankar, Navarro, Nuñez, Brodwin, Choi e etc).

Dentre as várias aplicações do método na Engenharia Elétrica destacam-se :

- ✧ Obtenção das características de espalhadores (scattering);
- ✧ Determinação da seção transversal de radar (RCS) de corpos de forma arbitrária;
- ✧ Análise de antenas e microtiras;
- ✧ Avaliação dos efeitos da radiação de microondas em tecidos vivos ou corpos humanos;
- ✧ Obtenção dos modos de propagação em cavidades ressonantes e em guias de onda, etc.

Neste trabalho é desenvolvido o algoritmo do MDFDT para o estudo dos modos de propagação TE e TM em guias de ondas (*apêndice I*). O guia de onda tem como finalidade confinar as ondas eletromagnéticas de alta frequência em uma região limitada do espaço.

2.2 - Equações Temporais de Maxwell

A partir deste momento, para se construir uma formulação matemática, visando a aplicação em um guia de onda, emprega-se as Equações de Maxwell Temporais, eqs. (1.2.3) e (1.2.3), mostradas a seguir:

$$\nabla_x \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2.1)$$

$$\nabla_x \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.2.2)$$

Para a unicidade da solução, eqs. (2.2.1) e (2.2.2), duas condições devem ser satisfeitas na aplicação do MDFTD :

(1) A condição inicial ($t = 0$) para os campos deve ser especificada sobre todo o domínio de interesse;

(2) As condições de contorno dos campos devem ser conhecidas para $t > 0$.

2.3 - Algoritmo de Yee em Diferenças Finitas

Como exposto no item 2.1, o desenvolvimento inicial para a solução das eqs. (2.2.1) e (2.2.2) foi realizada por Yee, tendo como idéia principal discretizar uma região no espaço e no tempo. Na formulação do método, a obtenção das soluções dos campos (elétricos e magnéticos) são dadas a partir da resolução contínua dos mesmos com os valores de campos adquiridos de iterações anteriores [6].

Em um meio isotrópico, as Equações Temporais de Maxwell podem ser rescritas como :

$$\nabla_x \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.3.1)$$

$$\nabla_x \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.3.2)$$

Onde foram substituídas a indução magnética (\vec{B}) e a indução elétrica (\vec{E}) pelas respectivas relações constitutivas (item 1.2).

Os vetores dos campos das equações (2.3.1) e (2.3.2) podem representar um sistema com 6 equações escalares expressas em um sistema de coordenadas retangulares tridimensionais (x,y,z) [3], ou seja :

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (2.3.3)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (2.3.4)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (2.3.5)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (2.3.6)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (2.3.7)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (2.3.8)$$

Seguindo as notações de Yee [6], definiu-se uma malha na região com $(i,j,k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$ e uma função de espaço e tempo, como :

$$F^n(i, j, k) = F(i\delta, j\delta, k\delta, \Delta t) \quad (2.3.9)$$

Onde $\delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ é o incremento espacial, e Δt é o incremento temporal. Usando aproximação em diferenças finitas, para as derivadas espaciais e temporais, obtém-se como funções em derivadas espaciais e temporais [3]:

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} = \frac{F^n(i+1/2, j, k) - F^n(i-1/2, j, k)}{\delta} + O(\delta^2) \quad (2.3.10.a)$$

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial y} = \frac{F^n(i, j+1/2, k) - F^n(i, j-1/2, k)}{\delta} + O(\delta^2) \quad (2.3.10.b)$$

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial z} = \frac{F^n(i, j, k+1/2) - F^n(i, j, k-1/2)}{\delta} + O(\delta^2) \quad (2.3.10.c)$$

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} = \frac{F^{n+1/2}(i, j, k) - F^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (2.3.10.d)$$

Nesta dissertação estuda-se os campos em guia de onda homogêneos e isotrópicos, ou seja, preenchidos com dielétricos que apresentam ε e μ constantes e $\sigma = 0$. A direção de propagação da onda eletromagnética no interior de um guia é escolhida ao longo do eixo z e, como se assume simetria translacional, a dependência dos campos em z é removida. O problema torna-se bidimensional e as eqs. (2.3.3) a (2.3.8) que regem o domínio de estudo, para guias de onda, são simplificados tornando-se :

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.3.11)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.3.12)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (2.3.13)$$

para os modos TE e

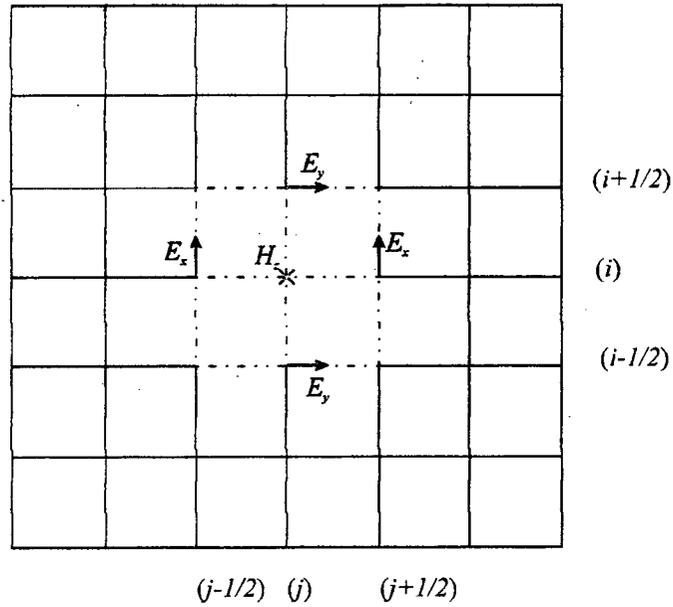
$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.3.14)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.3.15)$$

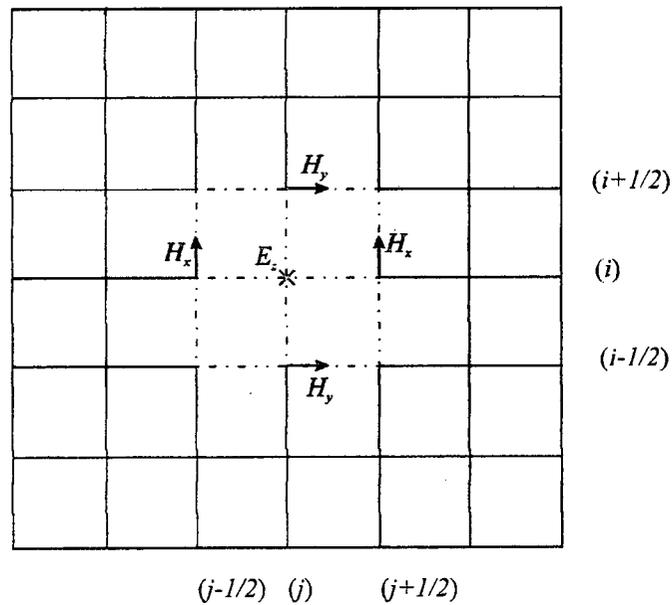
$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (2.3.16)$$

para os modos TM.

As disposições das componentes dos campos nas células básicas utilizadas na discretização da seção transversal do guia são mostrados na *figura 2.1.a e b* :



(a)



(b)

fig. 2.1 - Células básicas utilizadas na análise dos : (a) modos TE; (b) modos TM

As equações recursivas para o cálculo iterativo das componentes dos campos e que são obtidas através do algoritmo MDFDT, transformando as equações diferenciais e equações de diferenças finitas [6], eqs. (2.3.11) a (2.3.16), são :

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = E_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^n(i, j+1) - H_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \quad (2.3.17)$$

$$E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) = E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^n(i, j) - H_z^n(i+1, j)}{\Delta x} \right] \quad (2.3.18)$$

$$H_z^{n+1}(i, j) = H_z^n(i, j) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} - \frac{E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} \right] \quad (2.3.19)$$

para os modos TE, e

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i, j) - E_z^n(i, j+1)}{\Delta y} \right] \quad (2.3.20)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) = H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i, j)}{\Delta x} \right] \quad (2.3.21)$$

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right] \quad (2.3.22)$$

para os modos TM.

2.4 - Precisão e Estabilidade

Para assegurar os resultados computacionais, o incremento espacial δ deve ser pequeno, comparado ao comprimento de onda (geralmente $\leq \lambda/10$) ou a mínima dimensão do espalhamento [3]. Para assegurar a estabilidade do método, o incremento de tempo Δt deve satisfazer à seguinte condição de estabilidade [3]:

$$u_{max} \Delta t \leq \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right]^{-1/2} \quad (2.4.1)$$

onde $u_{max} \Delta t$ é a condição de máxima velocidade de fase da onda dentro do modelo.

Ao utilizar uma célula cúbica $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \delta$, obtém-se :

$$\frac{u_{max} \Delta t}{\delta} \leq \sqrt{n} \quad (2.4.2)$$

onde n é o número de dimensões espaciais.

Como se está trabalhando com células bidimensionais, o incremento temporal (Δt) será efetuado da seguinte forma :

$$\Delta t \leq \frac{l}{v \sqrt{\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{l}{\Delta y}\right)^2}} \quad (2.4.3)$$

onde v é a velocidade de propagação :

$$v = \frac{l}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (2.4.4)$$

2.5 - Condições de Contorno

Uma dificuldade básica, encontrada na aplicação do MDFDT para problemas de espalhamento, é que o domínio dos campos a serem calculados estão abertos ou sem fronteiras [3]. Como o computador não pode armazenar uma quantidade ilimitada de dados, deve-se limitar a região de estudo. Em outras palavras, um contorno artificial deve ser imposto, como na *figura 2.2* para simular numericamente o infinito.

Para se modelar infinito numa aplicação qualquer no MDFDT, a região deve ser larga o bastante para englobar todo o objeto de estudo, e as condições de fronteira devem ser usadas convenientemente para simular a extensão da solução no infinito [3] (*figura 2.2*). Existem várias outras condições de fronteira (contorno) aplicáveis no método, como a *Condição de Irradiação*, *Condição de Absorção de Fronteira*, cada uma com o seu devido uso em determinados problemas.

Na aplicação para o guia de onda, no modo de propagação TE, considera-se que os campos elétricos na fronteira do dispositivo serão zero (*figura 2.3*):

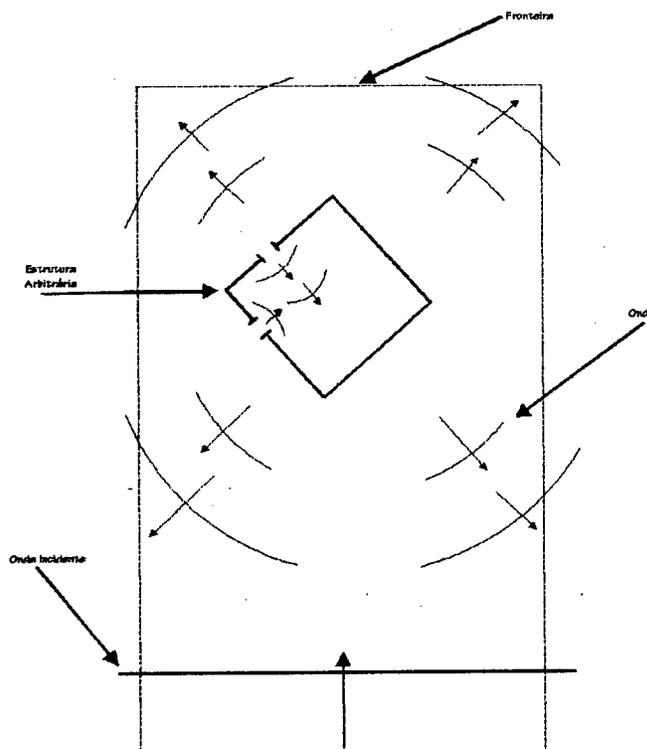


fig. 2.2 - Condições de contorno no modelagem do infinito

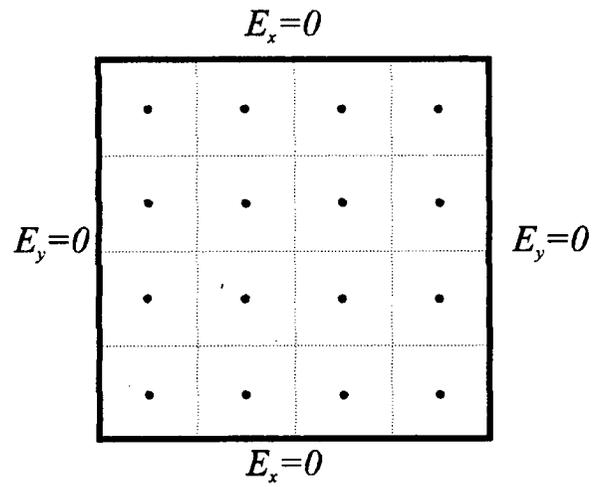


fig. 2.3 - Condição de Contorno para Guias de Onda para modo TE

2.6 - Conclusão

A teoria desenvolvida no capítulo 2 tem o objetivo de analisar problemas dinâmicos no eletromagnetismo que tenham como aplicação a obtenção dos campos (elétricos e magnéticos) em um guia de onda retangular.

A atenção, mostrada neste capítulo, à aplicação em guia de onda é por se constituir de estruturas largamente empregadas para conduzir sinais de alta frequência.

Com os algoritmos desenvolvidos, a próxima fase será simular os problemas mais usados no cotidiano com os algoritmos (MDF e MDFDT), fazendo um estudo detalhado de sua eficiência, aplicabilidade e precisão.

Cap. 3 - Apresentação e Análise de Resultados

3.1 - Introdução

Neste capítulo será analisada a eficiência dos métodos numéricos estudados (MDF e MDFDT). Para fazer esta análise foram implementados dois “softwares”, um para cada método e simulados vários exemplos, testando-se a sua validade.

Foram dois programas computacionais desenvolvidos :

DFCS → Processador na resolução das Equações de Poisson, para o Potencial Vetor Magnético e de Laplace, para o Potencial Escalar Elétrico ;

GUIAS → Processador na obtenção dos campos elétricos e magnéticos no modo TE para guias de ondas (ver apêndice 1).

Ambos os “softwares” (DFCS e GUIAS) usam o sistema polivalente chamado EFCAD (Eletromagnetic Field Computer Aided Designed) na exploração gráfica de resultados.

Neste mesmo capítulo comparam-se os métodos estudados (MDF e MDFDT), através dos programas computacionais, com outros métodos numéricos empregados pela comunidade científica, testando-se assim a sua eficácia.

3.2 - O EFCAD

O EFCAD foi desenvolvido pelo GRUCAD (Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos), do Departamento de Engenharia da Universidade Federal de Santa Catarina. É um conjunto de “softwares” destinados à análise para cálculo de campos eletromagnéticos e térmicos pelo Método dos Elementos Finitos (ver *apêndice 3*).

O EFCAD é dividido em três grandes blocos de programas computacionais:

Pré-Processador → Nesse conjunto deve-se fornecer a estrutura física a ser analisada (formas geométricas, malha, materiais, condições de contorno, fontes de corrente, etc.);

Processador → Nesse grupo é onde realmente se aplica o método numérico para a resolução do problema gerado no pré-processador;

Pós-Processador → Nessa etapa é efetuada a análise visual, onde se tem a interface de resultados gráficos e numéricos com o usuário.

3.3.- Resultados do Método das Diferenças Finitas

Com a dedução completa da formulação do MDF, partiu-se para o desenvolvimento de um software que fosse capaz de resolver problemas relativos à aplicação do método numérico pelas eqs. (1.3.8) e (1.3.10).

Serão mostrados exemplos para o emprego nas soluções das Equações de Poisson e Laplace através do “software” desenvolvido, o DFCS. Na utilização do programa é necessário que o desenho do dispositivo seja criado através de um aplicativo do EFCAD, mais precisamente o módulo gerador de malhas regulares, EFR.

Neste capítulo serão mostradas as vantagens e desvantagens do método utilizado, assim como uma comparação com o Método dos Elementos Finitos e os valores reais de cada modelo.

Utilizou-se três exemplos clássicos para a aplicação do DFCS :

✧ Modelagem de Placas Paralelas → resolução da Equação de Laplace com o Potencial Escalar Elétrico;

✧ Modelagem de um Contactor → resolução da Equação de Poisson com o Potencial Vetor Magnético;

✧ Modelagem de Imãs Permanentes → resolução da Equação de Poisson com o Potencial Vetor Magnético.

3.3.1 - O Software Desenvolvido - DFCS

O DFCS (Diferenças Finitas Caso Estático) é um software de processamento aplicado a resolução dos problemas magnetostáticos e eletrostáticos.

Para a utilização do processador DFCS, é necessário que o problema seja modelado através do programa EFR para que sejam traçadas malhas regulares, pois o MDF só é compatível com problemas aos quais a malha seja regular. A exploração de resultados é feita através do software EFGN, também do sistema EFCAD, onde poderão ser observadas as linhas de equipotenciais do dispositivo, linhas de campos e diversas outras funções.

O programa é compatível com o EFCAD pela disponibilidade dos softwares de pré-processamento (EFR) e pós-processamento (EFGN).

O diagrama de blocos na *figura 3.1* apresenta, de forma simplificada, a estrutura do DFCS.

O primeiro passo do software é a leitura dos dados geométricos da etapa de pré-processamento. Esses dados serão fornecidos pelo malhador EFR. Na entrada de dados do programa DFCS é definido em qual potencial se está modelando o dispositivo (potencial escalar - S ou potencial vetor - V).

O segundo passo é a formação da matriz [SS] conforme a formulação da eq. (1.7.18). Aqui serão considerados os valores dos materiais para cada elemento e a montagem de [SS] é independente do tipo de potencial utilizado.

Com a definição do tipo de potencial em que se está modelando o problema, parte-se para a construção vetor lado direito [VV].

A etapa final do programa é a resolução do sistema matricial [SS] . [x] =[VV] por eliminação de Gauss.

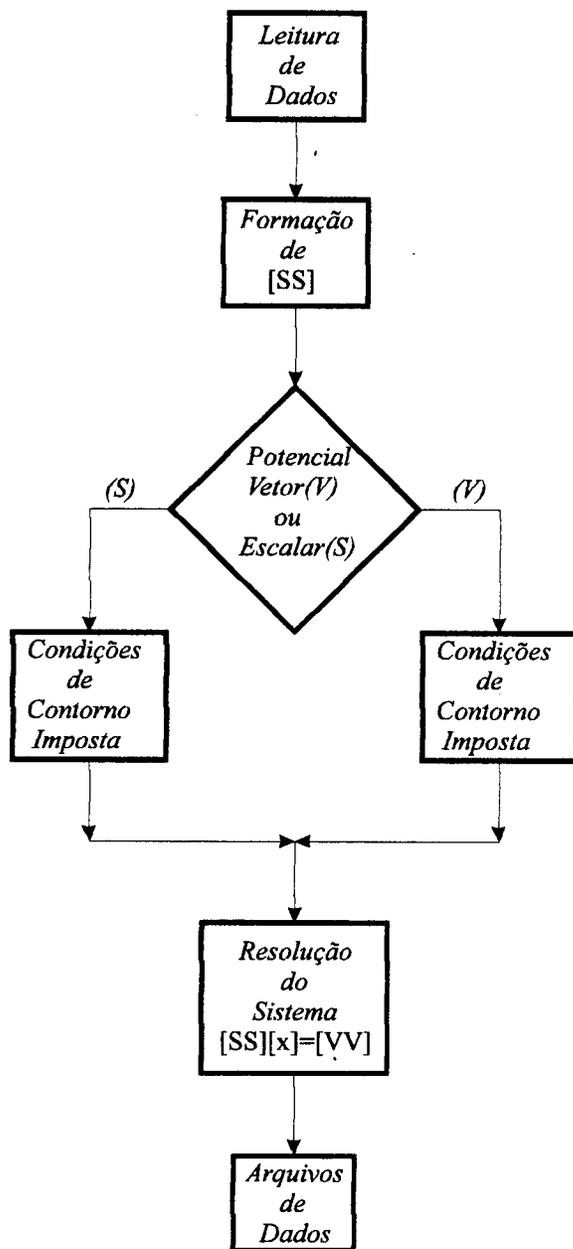


fig. 3.1 - Diagrama de blocos do programa DFCS

3.3.2 - Resultados Obtidos para o DFCS com o Potencial

Escalar

Como primeiro exemplo, na aplicação do DFCS em problemas com potenciais escalares discretizou-se um capacitor de placas paralelas (*figura 3.2*).

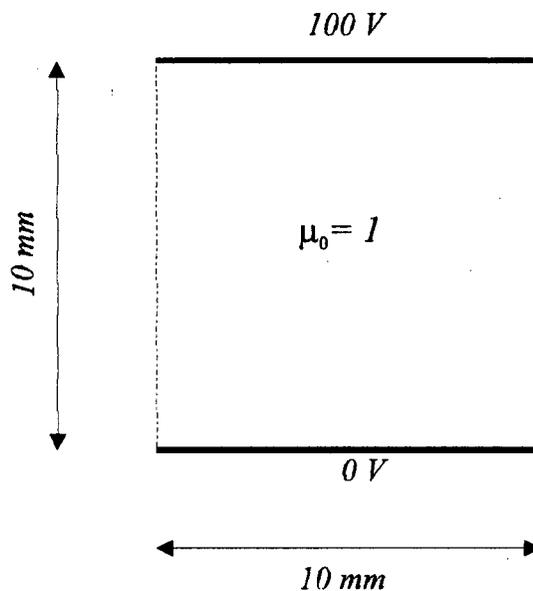


fig. 3.2 - Capacitor de placas paralelas

3.3.2.a - Aplicação para Capacitor de Placas Paralelas

No exemplo mostrado pela *figura 3.2*, foi simulado o capacitor com várias malhas e comparados os resultados de potencial com o EFCS. Verificou-se que os valores de potenciais ficaram bem próximos entre os dois “softwares” (DFCS e EFCS). O tempo de simulação do capacitor, com a malha ilustrada na *figura 3.3*, foi de *0,07 s* através de um PC com microprocessador Pentium 133 MHz - 12 Mb de memória RAM. Ambos os tempos de simulação entre o EFCS e o DFCS foram idênticos, não existindo nenhuma superioridade entre os programas com relação ao tempo de processamento, para a malha da *figura 3.3*.

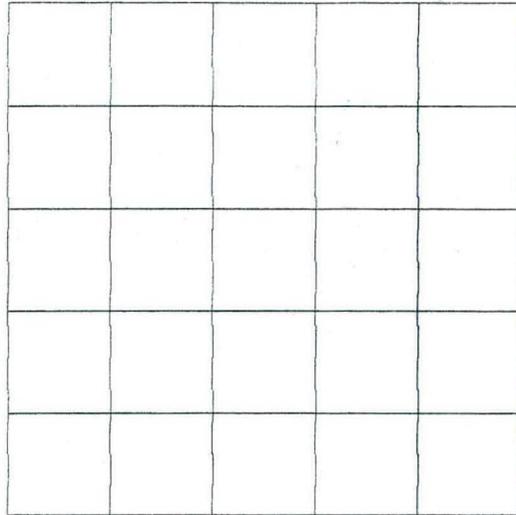


fig. 3.3 - Malha para capacitor de placas paralelas com 25 elementos e 36 nós

No gráfico a seguir são mostradas as linhas de equipotenciais do capacitor obtidas através do programa de pós-processamento EFGN, onde pode ser visto que os potenciais estão caindo linearmente com a distância entre as placas.

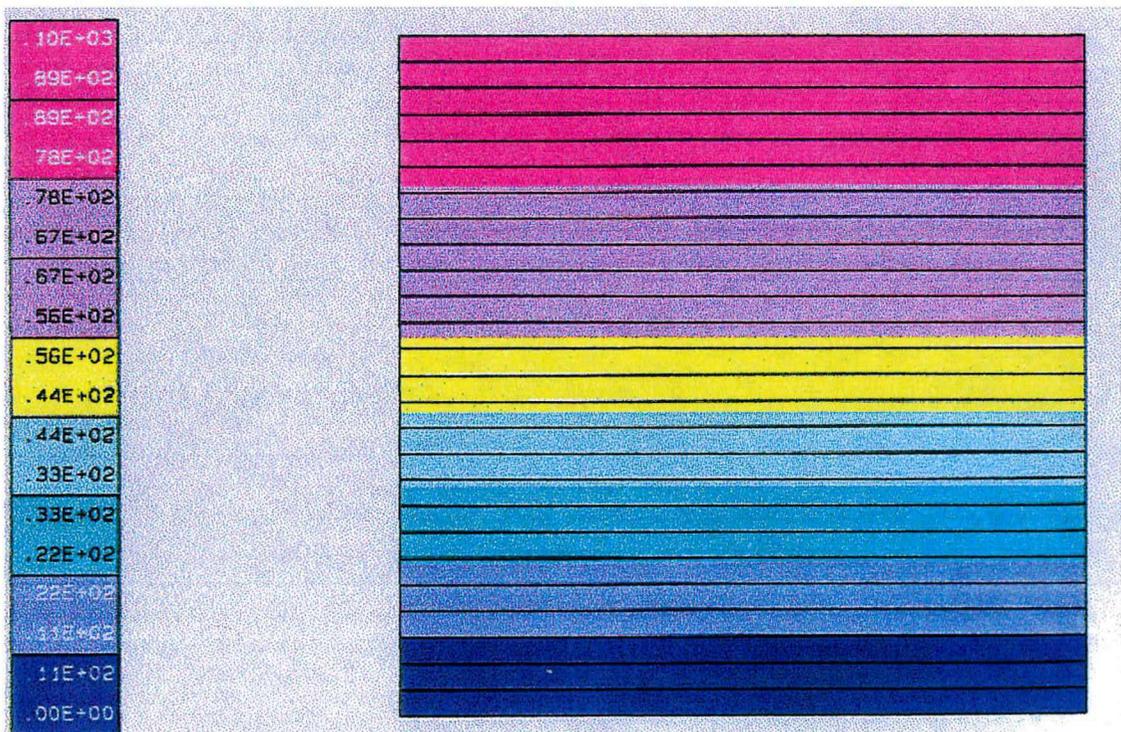


fig. 3.4 - Linhas de equipotenciais entre as placas do capacitor do EFCAD

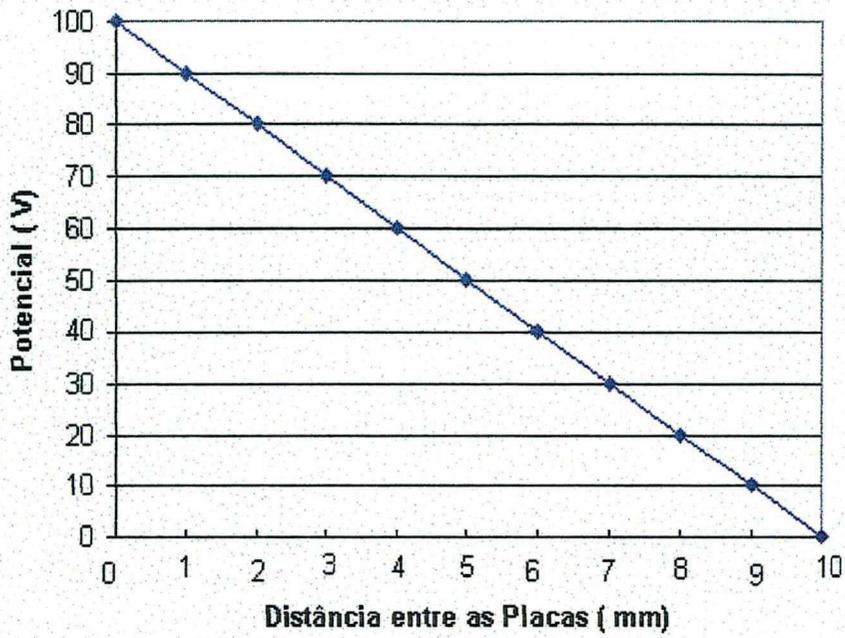


fig. 3.5 - Gráfico dos Potenciais pela distância

E a seguir, para finalizar a apresentação de resultados do capacitor, é mostrada a intensidade de campo em função da distância entre as placas:

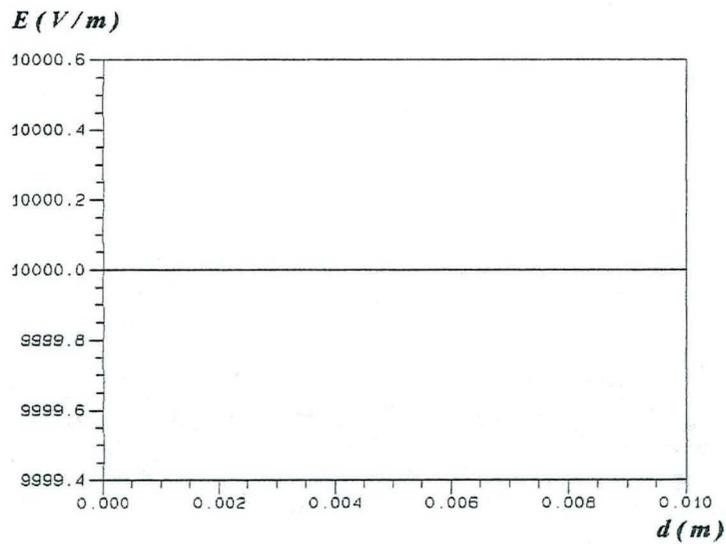


fig. 3.6 - Campo Elétrico x Distância

3.3.3 - Resultados Obtidos para o DFCS com o Potencial

Vetor

Agora serão apresentados os resultados das simulações com o DFCS, resolvendo-se a Equação de Poisson para o Potencial Vetor Magnético, com os seguintes exemplos: um contactor e um problema de ímãs permanentes.

3.3.3.a - Aplicação para um Contactor

Como segundo exemplo a ser simulado, tem-se um contactor (contactor 9 A), (figura 3.7), com valor de densidade de corrente de $J = 7,63 \text{ A/mm}^2$ e valor de permeabilidade do ferro $\mu_r = 1000$.

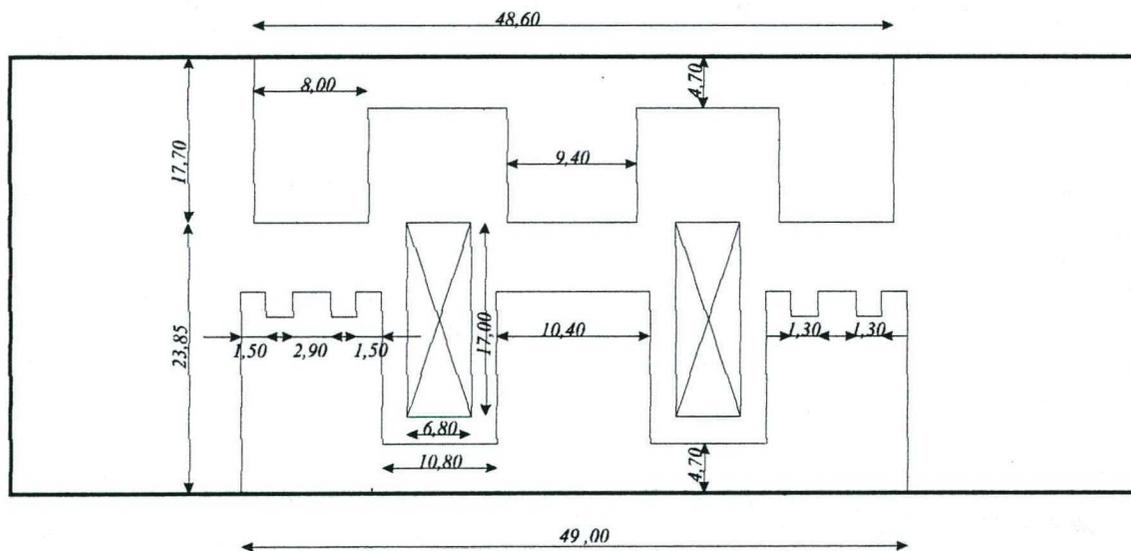


fig. 3.7 - Contactor 9 A

O contactor foi simulado em um PC com microprocessador Pentium 133 MHz - 12 Mb de memória RAM. Para a simulação apresentada neste trabalho, foi utilizada uma malha contendo 200 elementos e 234 nós (figura 3.8) :

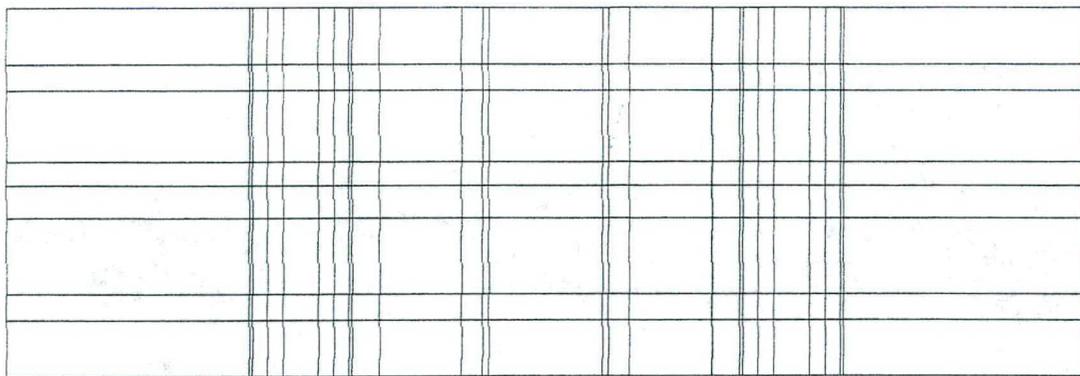


fig. 3. 8 - Malha utilizada na simulação do contactor

Simulado o contactor 9 A pelo programa DFCS, através do EFGN, visualizou-se as linhas de equipotenciais, onde se pode ver, claramente, que as linhas estão concentradas no material ferromagnético. Os potenciais calculados com o programa DFCS foram comparados aqueles obtidos com o processador de elementos finitos do EFCAD, o EFCS, havendo concordância de valores.

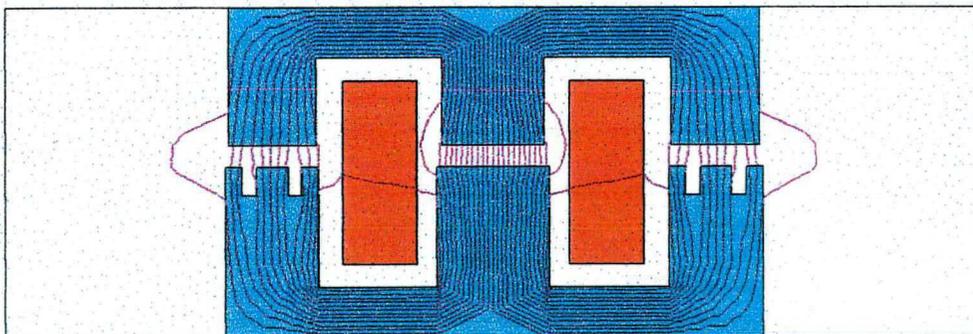


fig. 3.9 - Linhas de equipotenciais para o contactor

Na mesma malha procurou-se calcular o valor da força no entreferro. Para efeito de comparação também foi utilizada a mesma malha no processador EFCS para o mesmo cálculo, observado na *tabela 1* :

	Profundidade	Módulo da Força	Força
EFCS	16,5 mm	0,6595 N/m	10,88 N
DFCS	16,5 mm	0,6595 N/m	10,88 N
Valor Medido	16,5 mm		11 N

Tabela 1 - Tabela comparativa entre o DFCS e o EFCS para a força no contactor

É ilustrado ainda o gráfico, obtido através do EFGN, da pressão no entreferro em função da distância :

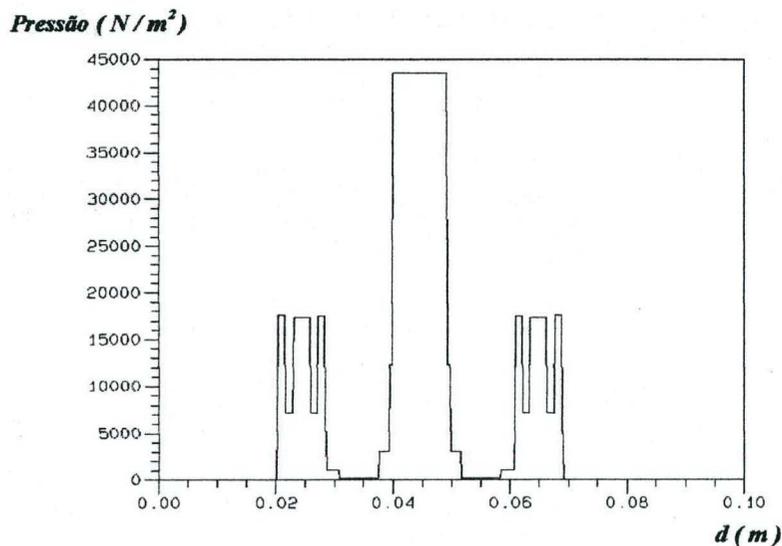


fig. 3.10 - Gráfico da pressão em função da distância

Com relação ao tempo de processamento do contactor pelo programa, utilizou-se 12 s em simulação. Isto se tornou para esse problema, uma limitação do algoritmo do DFCS em relação ao EFCS, onde o processamento do EFCS foi mais veloz em 11 s. Deve-se ao fato que a matriz contribuição [A] ser esparsa e não-simétrica, ocupando uma maior espaço computacional de memória. Ocasionalmente ocasionando uma diminuição da velocidade de resolução numérica.

3.3.3.b - Aplicação para Imãs Permanentes

O último exemplo é a simulação de um problema com imãs permanentes (figura 3.11).

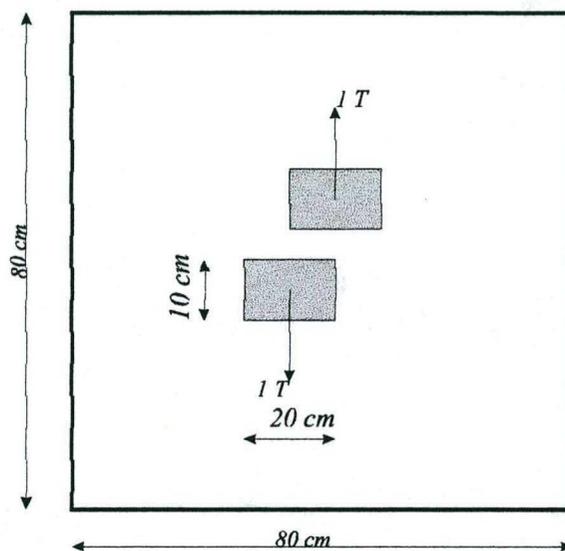


fig. 3.11 - Figura de ímãs permanentes

Foi utilizada uma malha com 900 nós e 841 elementos. O mesmo problema também foi simulado no EFCS .

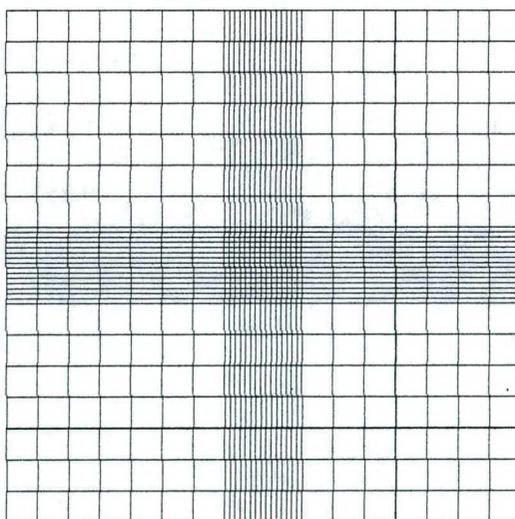


fig. 3.12 - Malha do problema dos ímãs permanentes

Para esse problema também foi utilizado, na simulação, um PC com microprocessador Pentium 133 MHz - 12 Mb de memória RAM.

Na simulação do problema, os valores de potencial entre os softwares DFCS e EFCS foram muito semelhantes a diferença. Abaixo é mostrada a distribuição das linhas de campo elétrico através do pós-processador EFGN (figura 3.13).

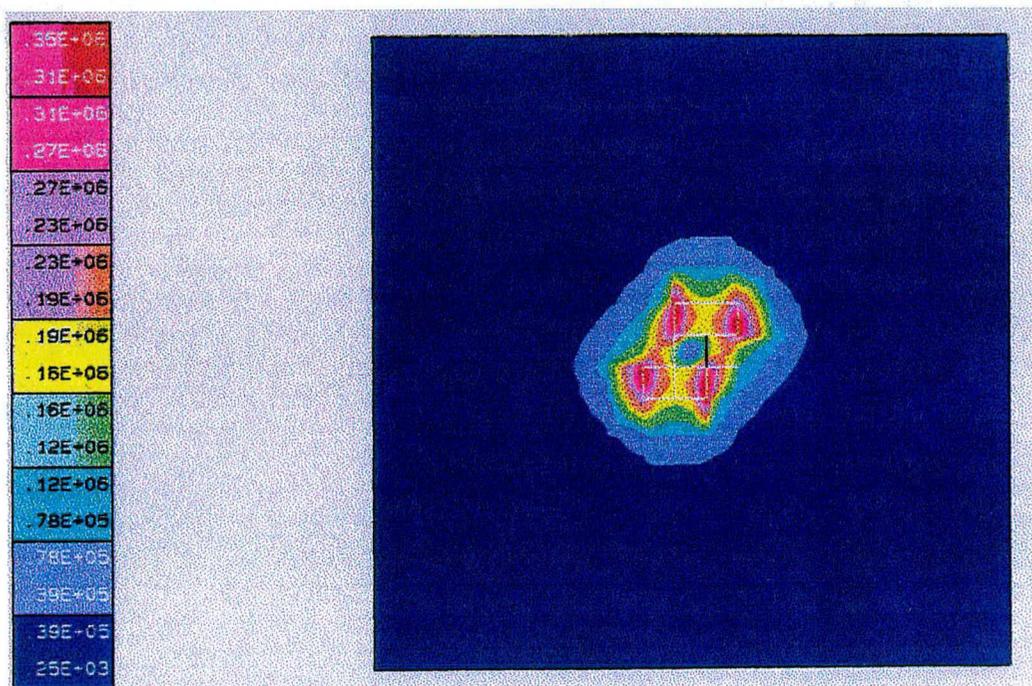


fig. 3.13 - Linhas de Equipotenciais para imãs

Também é ilustrada a curva de indução magnética (B) entre os dois imãs (figura 3.14):

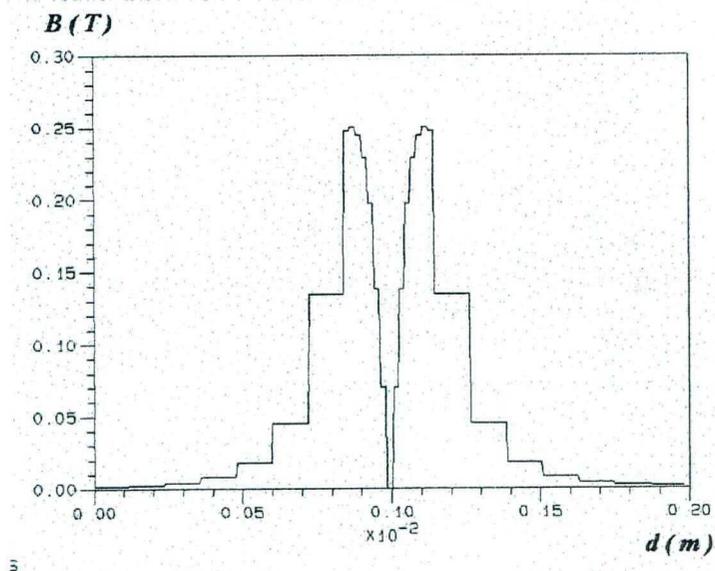


fig. 3.14 - Gráfico da Indução x Distância

Com relação ao tempo de processamento, foi levado 53 s para a simulação dos ímãs permanentes no PC, isto é, um pouco desvantajoso com relação ao EFCS. Nessa simulação, novamente, tem-se uma matriz contribuição $[A]$ esparsa e não-simétrica, ocorrendo, a partir disto, uma maior ocupação espaço computacional de memória e impedindo uma maior velocidade de resolução numérica.

3.3.4 - Conclusão para os Problemas Estáticos

Com as várias simulações para teste de eficiência do software DFCS foram notadas as seguintes características :

➤ nas três aplicações, para as mais variadas malhas, na etapa de processamento, possuíram valores de potenciais (escalar ou vetor) muito semelhantes ao software EFCS, mostrando a convergência de resultados numéricos entre os métodos (elementos finitos e diferenças finitas);

➤ quando é aumentado o número de elementos para um mesmo exemplo, o DFCS deixa um pouco a desejar com relação ao tempo de processamento. O motivo crucial é que o método possui a matriz contribuição $[A]$ não-simétrica, fazendo com que se ocupe mais memória na armazenagem das mesmas, aumentando, assim, o tempo de simulação;

➤ o uso de elementos retangulares dificulta a modelagem em problemas mais complexos com relação à sua geometria. Será bastante útil em futuros estudos a implementação de elementos hexaédricos, tornando assim ao algoritmo do MDF mais maleável à simulação de geometrias mais complexas.

3.4 - Resultados do Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo

Com a dedução completa da formulação do MDFDT, partiu-se para o desenvolvimento de um software que fosse capaz de resolver problemas representados pelas equações (2.3.17) a (2.3.19).

Procurou-se aplicar o algoritmo do MDFDT a um guia de ondas retangular. O software construído foi chamado de GUIAS.

Nos itens subseqüentes, serão mostradas as vantagens e desvantagens do emprego do método utilizado, bem como a comparação dos valores calculados do método com os valores calculados.

3.4.1 - O Software Desenvolvido - GUIAS

Este programa é aplicado ao cálculo dos valores dos módulos de campo elétrico e magnético no interior de um guia de ondas, no decorrer do tempo. Para validar os valores obtidos pelo programa, procurou-se encontrar os modos de propagação do guia de onda, simulados através de uma análise harmônica para os modos de propagação (no software GUIAS simulou-se os guias de onda apenas nos modos de propagação TE) dos valores de campo.

A análise harmônica foi realizada através de um software conhecido como DSN. Esse software é um aplicativo gráfico com diversas funções facilitando a obtenção de resultados gráficos de valores numéricos.

Na *figura 3.15* é mostrado o algoritmo do programa GUIAS. O primeiro passo no programa é a entrada de dados onde se digita o número de elementos na direção x e y , o tamanho do guia em centímetros e o número de passos desejado para a simulação.

Em seguida, impõe valores zero em todos os *nós* da matriz dos campos elétricos e magnéticos. O terceiro passo é a inserção das condições iniciais do problema. O quarto passo é a imposição das condições de contorno ($E_x = 0$ e $E_y = 0$) em toda a fronteira. Logo após se aplica propriamente o algoritmo

desenvolvido no capítulo 2 e, por fim, a armazenagem dos campos em um arquivo de saída para o DSN, chamado de *fft.des*.

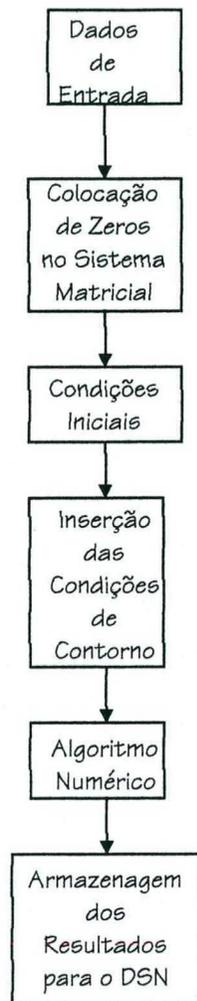


fig. 3.15 - Algoritmo do programa GUIAS

3.4.2 - Resultados Obtidos para Guias de Onda

Foi simulado um guia de onda retangular (*figura 3.16*) utilizando-se diversas malhas. O guia de onda (2 cm x 1 cm) foi excitado com uma função impulsional (ver apêndice II) e após o processamento do software DSN, foi realizada uma análise harmônica para se observar os modos de propagação e, com isso, fazer um estudo geral do algoritmo.

Para se fazer a análise harmônica procede-se da seguinte maneira:

1 - Simula-se o guia de onda, através do programa GUIAS, onde se tem, como dados de entrada, o tamanho da malha, dimensões e número de iterações;

2 - O software GUIAS cria um arquivo chamado *fft.des* para ser usado no programa DSN; esse arquivo é a armazenagem dos valores de campo magnético e elétrico de determinados *nós* do guia;

3 - Com o arquivo (*fft.des*), realiza-se a análise harmônica através do DSN, onde, com intervalo entre as harmônicas (Δf), são obtidas as frequências corretas de propagação dos modos.

É importante esclarecer que sempre se deverá fazer a análise harmônica sobre vários *nós* no DSN, evitando a existência de modos espúrios ou que modos de propagação deixem de ser observados na análise harmônica. No arquivo (*fft.des*), teve-se o cuidado de armazenar, no mínimo, três *nós*, impedindo assim erros de análise.

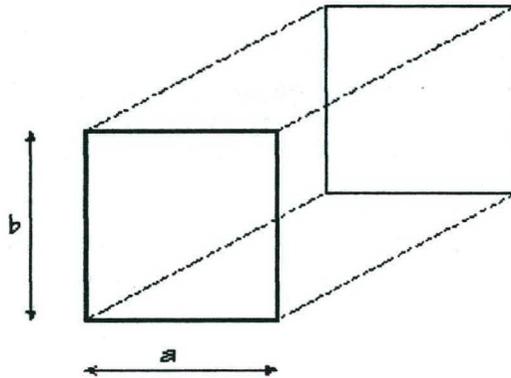


fig. 3.16 - Guia de Onda padrão simulado

O primeiro estudo realizado foi a simulação de um guia de onda retangular para modo TE com uma malha de 10×5 , dimensões do guia de $2 \times 1 \text{ cm}$. O valor, através da eq. (2.4.3), do incremento temporal (Δt) é de $\Delta t = 4,717 \cdot 10^{-12} \text{ s}$.

Nesse primeiro estudo procurou-se observar a relação entre o aumento do número de iterações no software GUIAS, usando uma única malha (malha adotada - malha 10×5), com os valores das frequências dos modos de propagação obtidos através do DSN. Foram feitas comparações com os valores exatos das frequências dos quatro primeiros modos de propagação (tabela 2) encontradas a partir da eq. (3.1).

$$f_{m,n} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (3.1)$$

onde $\begin{cases} m = 1,2,3,\dots \\ n = 0,1,2,3,\dots \end{cases}$

Modos de Propagação	Valores Calculados das Frequências
TE ₁₀	7,4949 GHz
TE ₂₀	14,9898 GHz
TE ₁₁	16,7591 GHz
TE ₂₁	21,1988 GHz

Tabela 2 –Tabela com os valores calculados dos quatro primeiros modos de propagação

Na *tabela 3* é mostrado o erro relativo das frequências nos quatro primeiros modos de propagação, onde é visto que, com o aumento do número de iterações para a simulação da malha, os valores das frequências dos modos de propagação tendem a se aproximar cada vez mais dos valores reais. Observado pelo cálculo do módulo do erro relativo :

Modos	Número de Iterações				
	500	1000	2000	4000	6000
TE ₁₀ (Erro %)	1,82	1,00	0,41	0,30	0,02
TE ₂₀ (Erro %)	1,00	1,00	1,00	1,00	0,77
TE ₁₁ (Erro %)	1,32	0,05	0,05	0,37	0,26
TE ₂₁ (Erro %)	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00
Média Erro %	2,04	1,51	1,36	1,42	1,26

tabela 3 - Média do erro da frequência na malha 10 x 5 nos quatro primeiros modos de propagação

Também nesta primeira etapa (malha 10 x 5) são ilustrados as curvas das análises harmônicas, desenvolvidas através do DSN :

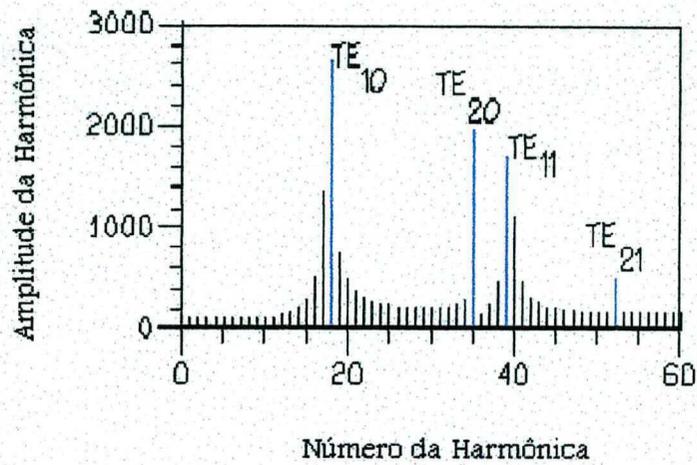


fig. 3.17 - Análise harmônica na malha 10 x 5 para os quatro primeiros modos com 500 iterações tendo $\Delta f = 423,9821$ MHz

1

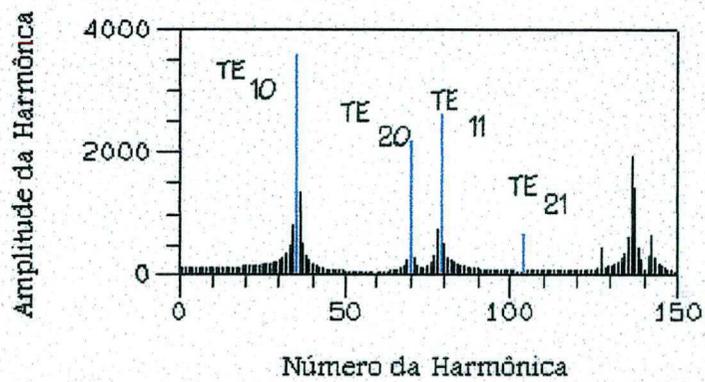


fig. 3.18 - Análise harmônica na malha 10 x 5 para os quatro primeiros modos com 1000 iterações tendo $\Delta f = 211,9906$ MHz

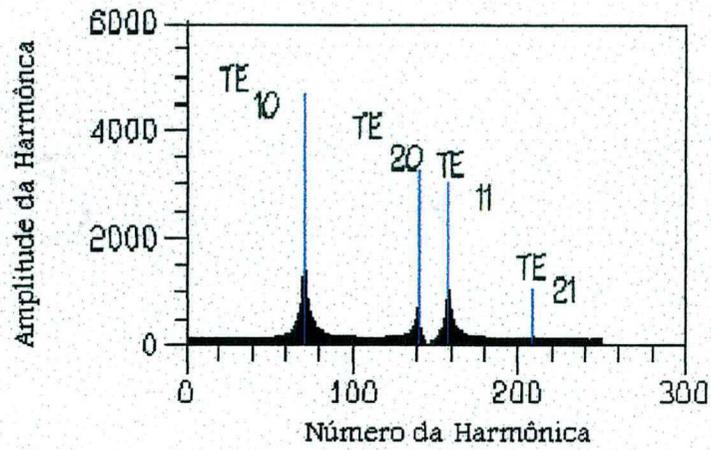


fig. 3.19 - Análise harmônica na malha 10 x 5 para os quatro primeiros modos com 2000 iterações tendo $\Delta f = 105,9953$ MHz

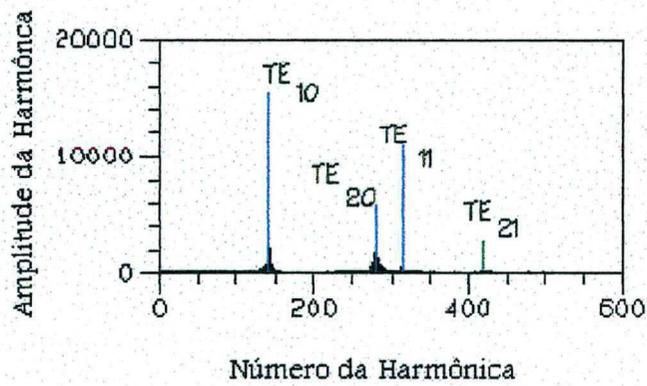


fig. 3.20 - Análise harmônica na malha 10 x 5 para os quatro primeiros modos com 4000 iterações tendo $\Delta f = 52,9975$ MHz

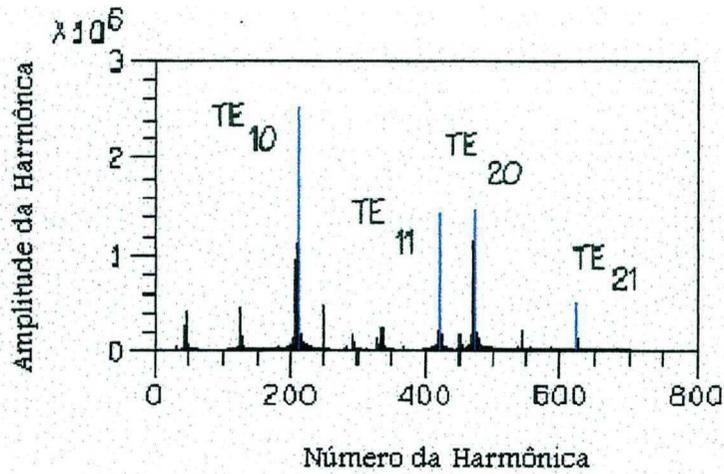


fig. 3.21 - Análise harmônica na malha 10 x 5 para os quatro primeiros modos com 6000 iterações tendo $\Delta f = 35,3318$ MHz

Nas ilustrações das curvas (figs. 3.17 a 3.21), observa-se que o modo de propagação dominante ou o modo de maior energia espectral (amplitude) é o modo TE₁₀ [9].

Como o modo dominante (TE₁₀) é o modo que possui maior energia. Nota-se uma diminuição do erro relativo para o modo com o aumento do número de iterações, verificado na tabela 3.

É importante observar o comportamento do modo TE₂₁, o modo possui pouca energia espectral (figs. 3.17 a 3.21) não existindo diminuição do erro com o aumento do número de iteração, conforme tabela 3.

Nesta segunda fase de estudo reduziu-se o intervalo de tempo (Δt), eq. (3.2), na tentativa de se obter uma maior convergência entre os resultados (tabela 1) e o 'software' GUIAS.

$$\Delta t = \frac{l}{v} \sqrt{\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{l}{\Delta y}\right)^2} \quad (3.2)$$

Nesta análise observou-se o comportamento apenas do modo dominante, para o exemplo foi usado um guia de onda de dimensões 2 x 1 cm e malha 10 x 5. A tabela 4 e as curvas (figs. 3.23 a 3.27) mostram o comportamento do erro relativo para o modo.

Erros Relativos das freqüências (%), para malha 10 x 5, no modo de propagação TE_{10} e com $\Delta t = 4,717 \cdot 10^{-02}$

Número de Iterações	Δt	$\Delta t / 2$	$\Delta t / 3$	$\Delta t / 4$	$\Delta t / 6$	$\Delta t / 8$	$\Delta t / 10$	$\Delta t / 15$
500	1,82	1,82	1,83	9,49	1,83	9,49	13,14	15,15
1000	1,00	1,82	1,82	1,83	1,83	9,49	13,14	15,15
2000	0,41	1,00	2,42	1,82	1,82	1,83	1,00	6,07
4000	0,30	1,00	0,30	1,00	2,42	1,82	1,00	15,15
6000	0,02	0,06	1,00	0,06	1,01	1,82	1,00	1,00
Média do Erro	0,71	1,14	1,47	2,84	1,78	4,89	5,86	10,5

Tabela 4 - Análise do erro relativo para o modo de propagação TE_{10} em uma malha 10 x 5, com a variação do Δt e o número de iterações

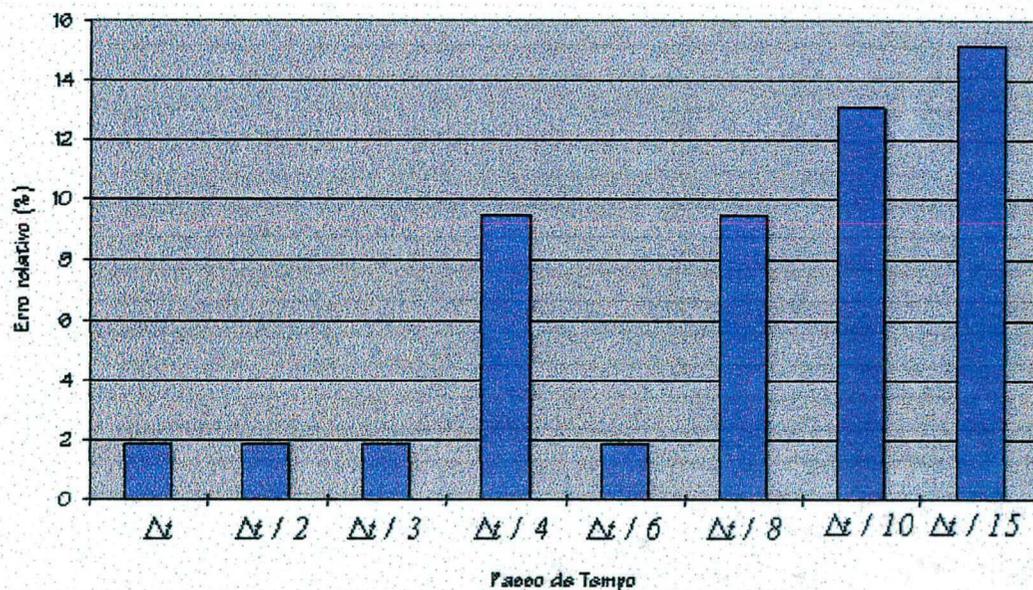


fig. 3.23 - Gráfico ilustrativo do erro relativo para o modo de propagação TE_{10} , para malha 10 x 5 com 500 iterações

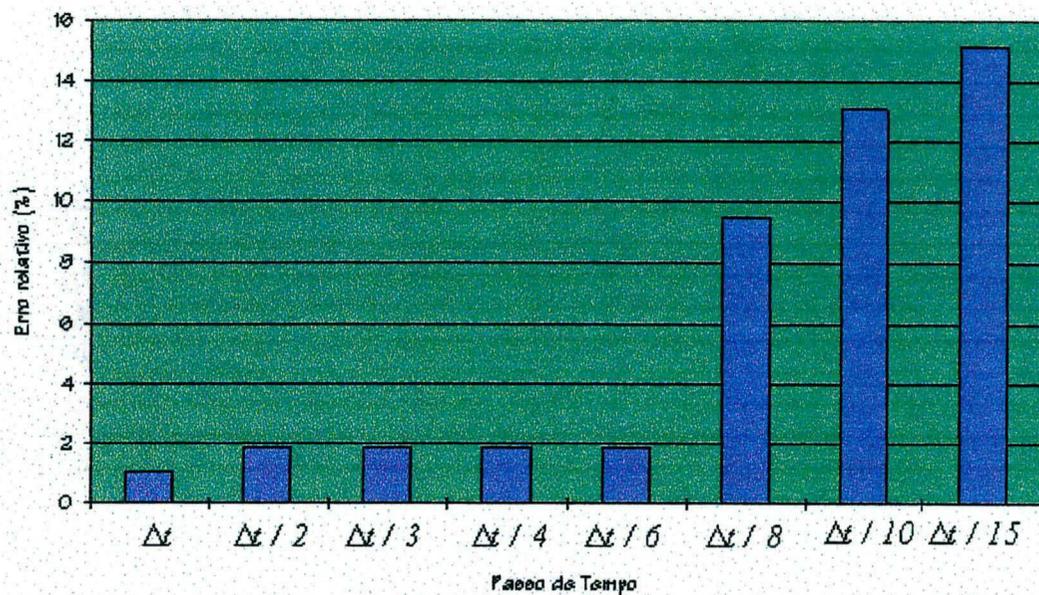


fig. 3.24 - Gráfico ilustrativo do erro relativo para o modo de propagação TE_{10} , para malha 10×5 com 1000 iterações

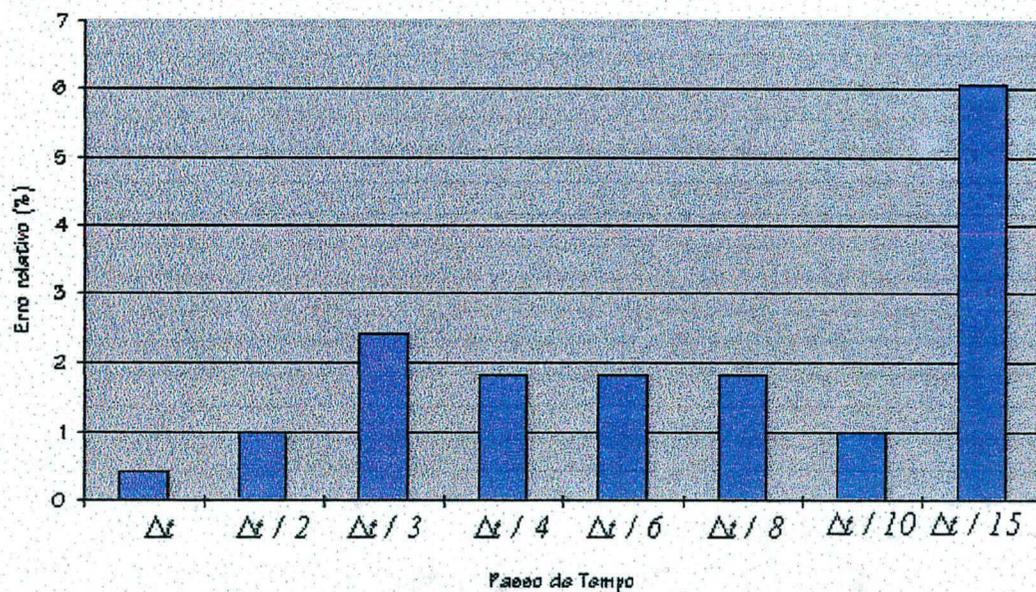


fig. 3.25 - Gráfico ilustrativo do erro relativo para o modo de propagação TE_{10} , para malha 10×5 com 2000 iterações

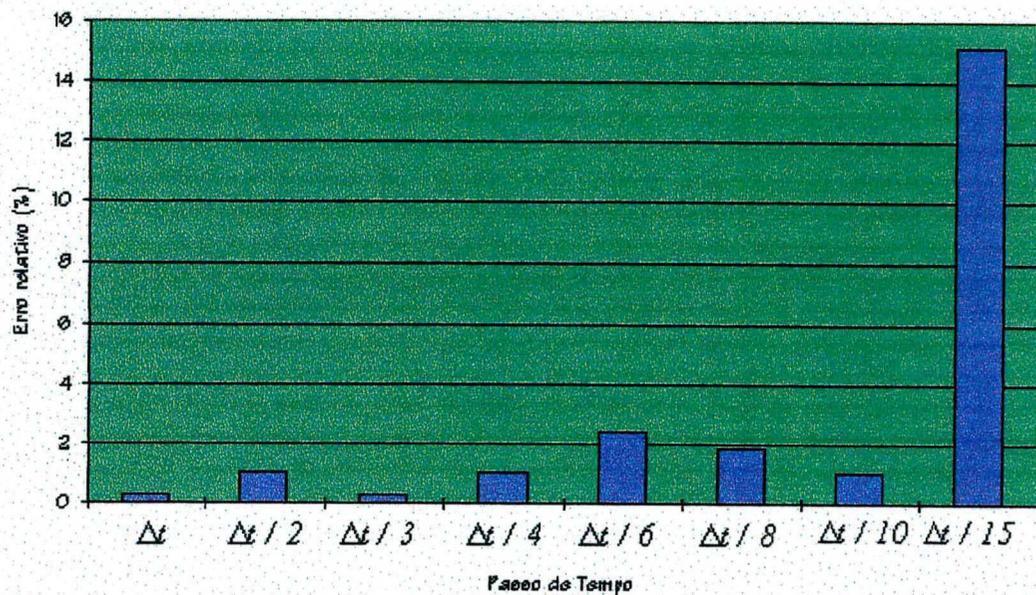


fig. 3.26 - Gráfico ilustrativo do erro relativo para o modo de propagação TE_{10} , para malha 10×5 com 4000 iterações

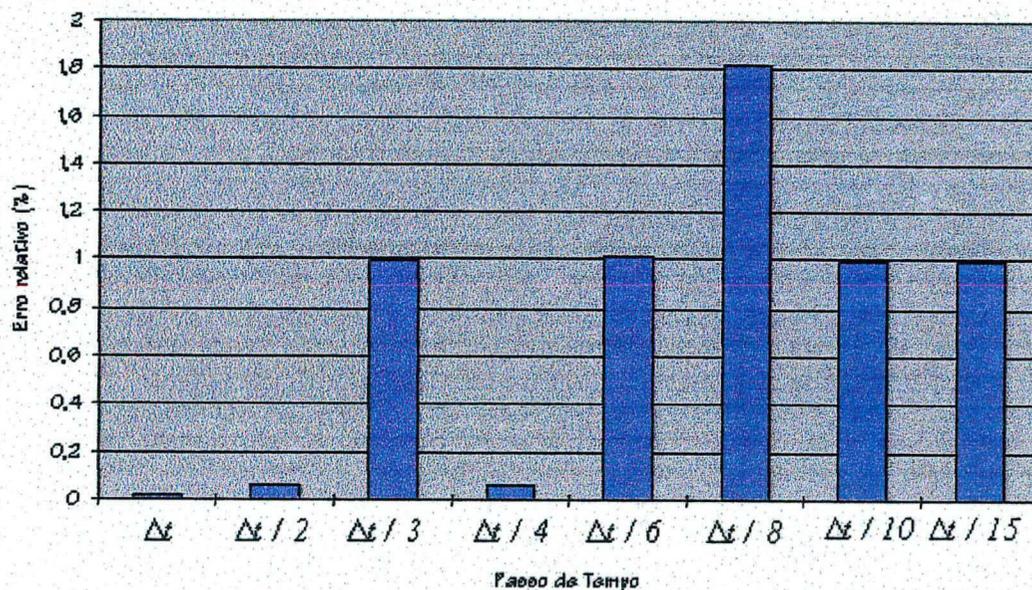


fig. 3.27 - Gráfico ilustrativo do erro relativo para o modo de propagação TE_{10} , para malha 10×5 com 6000 iterações

Observa-se nos gráficos (figs. 3.23 a 3.27) que com uma diminuição muito elevada do passo de tempo o erro relativo aumenta consideravelmente, apesar de ser sugerido na eq. (2.4.3) a diminuição do passo de tempo para o aumento da estabilidade e precisão nas simulações [3].

Na terceira fase deste item, procurou-se analisar o comportamento dos erros relativos das freqüências dos modos de propagação com relação ao número de iterações para diversas malhas. Neste caso continua-se a utilizar o passo de tempo limite eq. (3.1) :

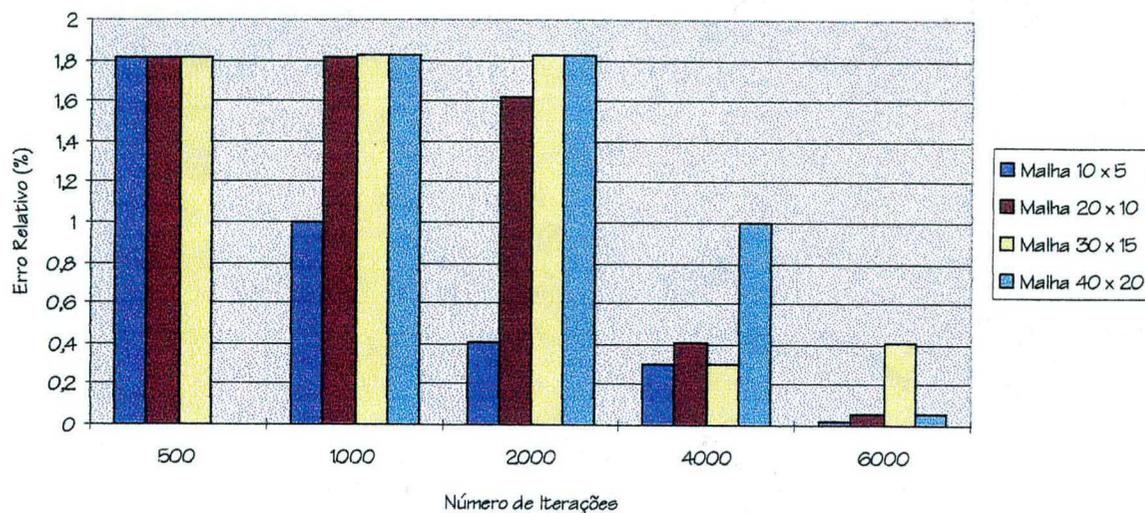


fig. - 3.28- Erro relativo do modo TE_{10} em função da malha e do número de iterações

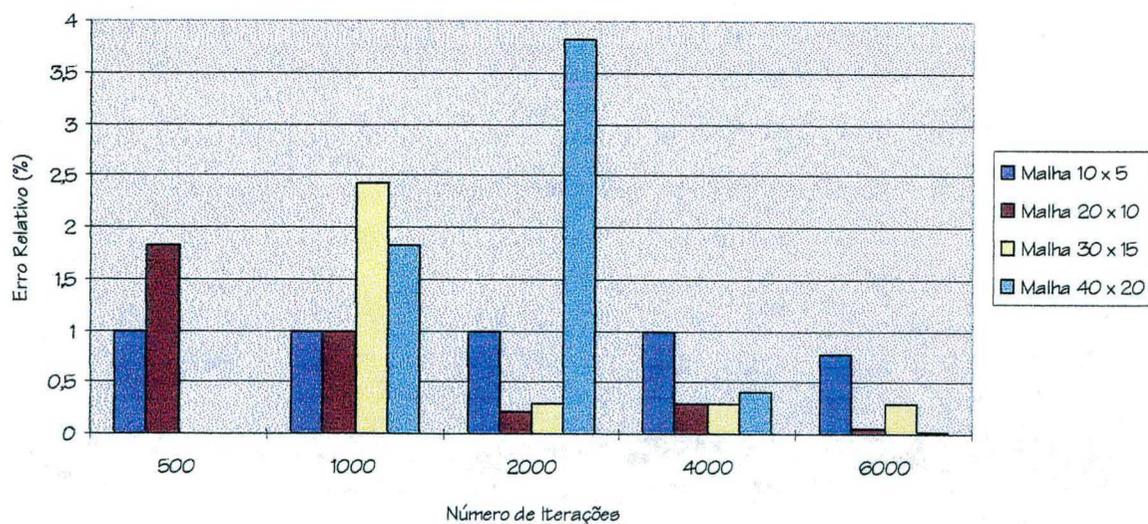


fig. - 3.29- Erro relativo do modo TE_{20} em função da malha e do número de iterações

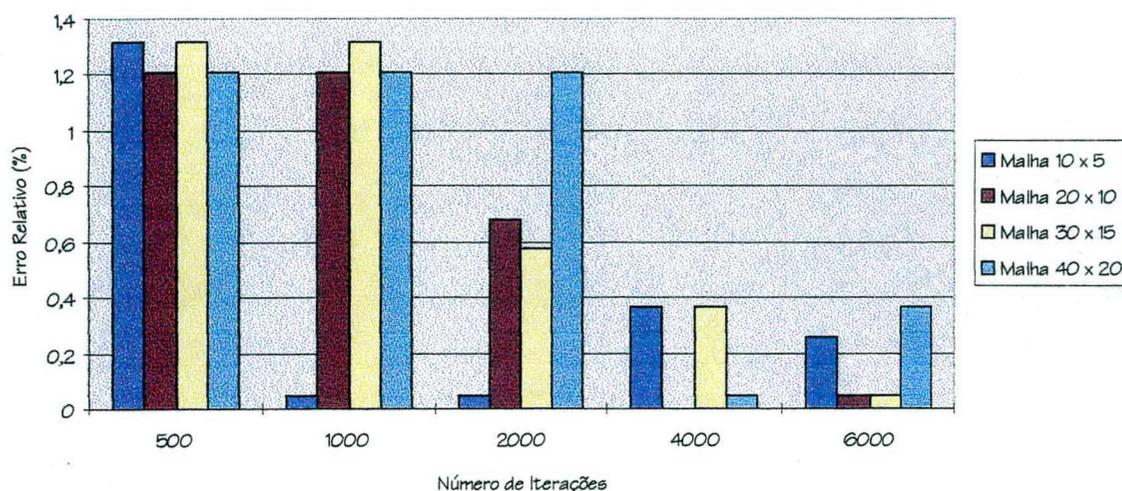


fig. - 3.30 - Erro relativo do modo TE_{11} em função da malha e do número de iterações

Nos gráficos (figs. 3.28 a 3.30) verificou-se que, independente do tamanho da malha, quanto maior o número de iterações menor será o erro relativo aos quatro primeiros modos de propagação simulados pelo programa, faz concluir que quanto maior o número de iterações melhor será o cálculo.

3.3.4 - Conclusão para os Problemas Dinâmicos

Com as várias simulações para teste de eficiência do software DFCS em cada aplicação foram notadas as seguintes características :

➤ Com o aumento do número de iterações tem-se uma maior convergência dos resultados para as frequências dos modos de propagação com os valores medidos.

➤ Com a diminuição muito elevada do Δt do valor limite da equação (2.3.3), os valores das frequências dos modos de propagação tendem a não convergir para valores medidos independente do número de iterações feitas na simulação.

➤ Modelando o problema com muito cuidado, a precisão independerá do tamanho da malha. A precisão do algoritmo dependerá diretamente do número de iterações. Quanto maior for o número de iterações mais próximo se chegará aos valores medidos.

➤ Quanto menor for o espaço entre as harmônicas (Δf), pior será a visualização das mesmas, pois isso poderá acarretar o aparecimento de modos espúrios.

Conclusões Gerais

Apresentou-se neste trabalho um método de análise numérica para o estudo de fenômenos eletromagnéticos estáticos e dinâmicos. Percebeu-se, inicialmente, que o nosso grupo de estudo (GRUCAD) necessitava de um maior desenvolvimento teórico e prático em diferenças finitas, pois sempre se trabalhou com o Método dos Elementos Finitos. Dessa forma, a escolha por este tema possibilitou uma significativa contribuição para a nossa comunidade científica.

No primeiro capítulo, foi elaborado o estudo do Método das Diferenças Finitas para a resolução das Equações de Poisson e Laplace, o qual foi iniciada com a análise de um elemento quadrado homogêneo no interior da região e finalizando com elementos retangulares não-homogêneos. Foi feita uma adaptação do programa EFCAD para poder utilizar a técnica de diferenças finitas, utilizando o malhador regular, o EFR. As características mais marcantes observadas no desenvolvimento do método foram a simplicidade de entendimento e a implementação do algoritmo matemático no programa computacional.

No segundo capítulo, elaborou-se o estudo do Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo para a resolução das Equações Temporais de Maxwell. Inicialmente, partiu-se para o desenvolvimento do método, visando a aplicação do algoritmo matemático em um guia de onda retangular no modo TE.

Com ambos os algoritmos (estático e dinâmico) prontos, partiu-se para a etapa de programação na qual se pudesse resolver os mais variados exemplos possíveis para cada método numérico. Com o desenvolvimento dos programas computacionais concluídos, procurou-se validar e conferir os resultados com os valores medidos ou calculados pela comunidade científica.

O capítulo final mostra os resultados obtidos para cada método. No Método das Diferenças Finitas foram analisados os seguintes exemplos: capacitor de placas paralelas, contactor 9 A e um exemplo de ímãs permanentes. Já para o Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo foi mostrada a simulação de um guia de onda no modo TE.

Ambos os métodos são bastante eficientes na busca de resultados reais. Todas as simulações apresentaram resultados coerentes com os valores tabelados e medidos.

Para trabalhos posteriores recomenda-se o desenvolvimento de :

⇒ Trabalhos com malhas com três dimensões, para obtenção do comportamento dos campos com profundidade.

⇒ Construção de algoritmo no MDF para elementos hexagonais ou ortogonais, com o intuito de flexibilizar a simulação com geometrias complexas.

⇒ Sistemas de resolução matricial mais veloz para o DFCS.

⇒ Equacionamento global para modelagem de outras aplicações em eletromagnetismo.

Apêndice I

Guias de Onda

Em frequências muito elevadas, a potência eletromagnética deve ser transmitida por meio de guias de onda ao invés das linhas de transmissão convencionais [8]. Quando a transmissão ocorre no interior de um condutor oco, tem-se que abandonar os conceitos normais de corrente e tensão e usar os conceitos mais fundamentais de campos eletromagnéticos.

Qualquer configuração de campos eletromagnéticos no interior de um guia de ondas deve satisfazer às condições de contorno impostas nas paredes do guia. No caso ideal em que as paredes são condutoras perfeitas, a componente tangencial do vetor campo elétrico da onda deve se anular sobre elas. Cada configuração de campo, satisfazendo às condições acima apresentadas, caracteriza um modo possível de propagação. Uma análise dos possíveis modos que podem existir em um guia de ondas revela que eles pertencem a um dos tipos fundamentais seguintes :

a) Ondas Magnéticas Transversais (Modo TM ou Tipo E) :

São modos cuja única componente longitudinal (na direção do eixo do guia) de campo é dada pelo campo elétrico da onda ($E_z \neq 0$). Isto significa, portanto, que não existem componentes de campo magnético ao longo da direção de propagação que coincida com a direção do eixo z de coordenadas.

b) Ondas Elétricas Transversais (Modo TE ou Tipo M) :

São modos cuja única componente longitudinal é a do campo magnético da onda ($H_z \neq 0$).

Os modos TE podem ser obtidos da função escalar

$$\Psi_{h,mm} = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad \text{com} \quad \begin{cases} n = 0, 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, 2, \dots \\ n \neq m = 0 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Onde Ψ_h é uma solução da equação de Helmholtz (eq. I.3) e satisfaz a condição de contorno $\frac{\partial \Psi_h}{\partial n} = 0$. A constante de propagação é dada por :

$$\rho_{n,m}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k_0^2 = k_c^2 - k_0^2 \quad (I.2)$$

$$\text{A equação de Helmholtz} \rightarrow (\nabla_T^2 + k_c^2)\Psi_h = 0, \quad k_c^2 = k^2 + \rho^2 \quad (I.3)$$

Para cada conjunto de inteiros (n,m) existe uma equação do problema de contorno, caracterizando um determinado modo; esses modos TE são descritos por $TE_{n,m}$ ou $H_{n,m}$. O comprimento de onda de corte $\lambda_{c_{n,m}}$ para o modo (n,m) é dado por :

$$\lambda_{c_{n,m}} = \frac{2\pi}{k_{c_{n,m}}} = \frac{2ab}{(n^2b^2 + m^2a^2)^{1/2}} \quad (I.4)$$

O modo dominante de propagação (modo com o maior comprimento de onda de corte) é o modo TE_{10} ($m = 1$ e $n = 0$) e seu comprimento de onda de corte é :

$$\lambda_{c_{TE_{10}}} = 2a \quad (I.5)$$

Os modos TM podem ser determinados da função escalar

$$\Psi_{e_{nm}} = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad \text{com} \quad \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (I.6)$$

Onde Ψ_e é uma solução da equação de Helmholtz (eq. I.8) e satisfaz à condição de contorno $\Psi_e = 0$ nas paredes do guia. A constante de propagação é dada por :

$$\rho_{n,m}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k_0^2 \quad (\text{I.7})$$

$$\text{A equação de Helmholtz} \rightarrow (\nabla_T^2 + k_c^2)\Psi_e = 0, \quad k_c^2 = k^2 + \rho^2 \quad (\text{I.8})$$

O modo TM dominante é o modo TM_{11} e seu comprimento de onda de corte $\lambda_{c n,m}$ é dado por :

$$\lambda_{c n,m} = \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \quad (\text{I.9})$$

Apêndice II

Análise Harmônica

A partir do instante em que a excitação é estabelecida na seção transversal de um guia de onda, o campo total da direção z pode ser expresso como a superposição de modos (TE e TM) [7]:

$$\theta_z(x, y, t) = \sum_m C_m \Phi_m(x, y) e^{j2\pi f_m t} \quad (\text{II.1})$$

onde Φ_m é a distribuição espacial do modo m na seção reta do guia, f_m é a autofreqüência ou freqüência de corte do modo e C_m é uma constante complexa que depende das condições iniciais e da excitação utilizada. Normalmente, utiliza-se condições iniciais nulas e uma excitação do tipo impulsional, ou seja, em $t = 0$ faz-se o campo nulo em toda a seção do guia exceto em alguns pontos arbitrariamente escolhidos. Isto porque funções impulsiais possuem energia numa larga faixa de freqüências, a fim de que um grande número de modos possa ser excitado [9]. A maneira pela qual as autofreqüências f_m aparecem na equação (II.1) sugere que a transformada de Fourier (TF) possa ser utilizada para a sua determinação.

Aplicando a TF na equação (II.1) obtém-se:

$$TF\{\theta_z(x, y, t)\} \stackrel{\Delta}{=} F(x, y, f) = 2\pi \sum_m C_m \Phi_m(x, y) \delta[2\pi(f - f_m)] \quad (\text{II.2})$$

O espectro de magnitude correspondente à equação mostrada na *figura II.1*. Pode-se ver que $\theta_z(x, y, t)$ apresenta energia somente nas freqüências correspondentes aos modos.

Obviamente, não se tem disponível o sinal $\theta_z(x, y, t)$ desde que $-\infty$ a $+\infty$, mas somente dentro do intervalo de tempo compreendido pelo processo de simulação, que se inicia em $t = 0$ e termina $t = T = N\Delta t$, onde N é o número total de iterações. Assim, o sinal disponível é $\theta_z(x, y, t) w(t)$, onde $w(t)$ representa a janela temporal

utilizada. A forma da janela retangular bem como seu espectro de magnitude são apresentados na *figura II.2*.

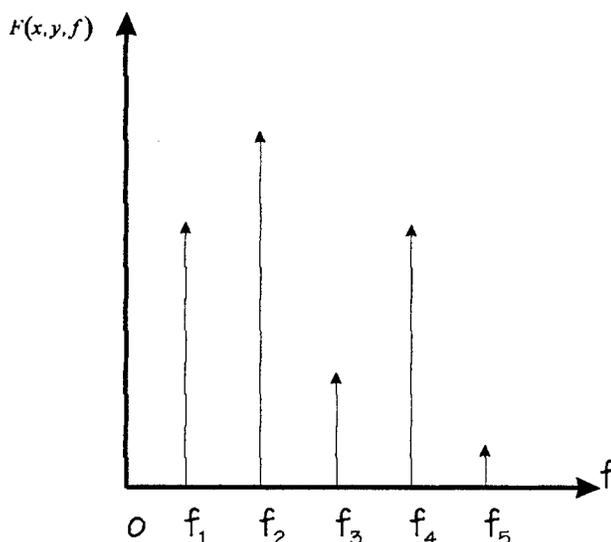
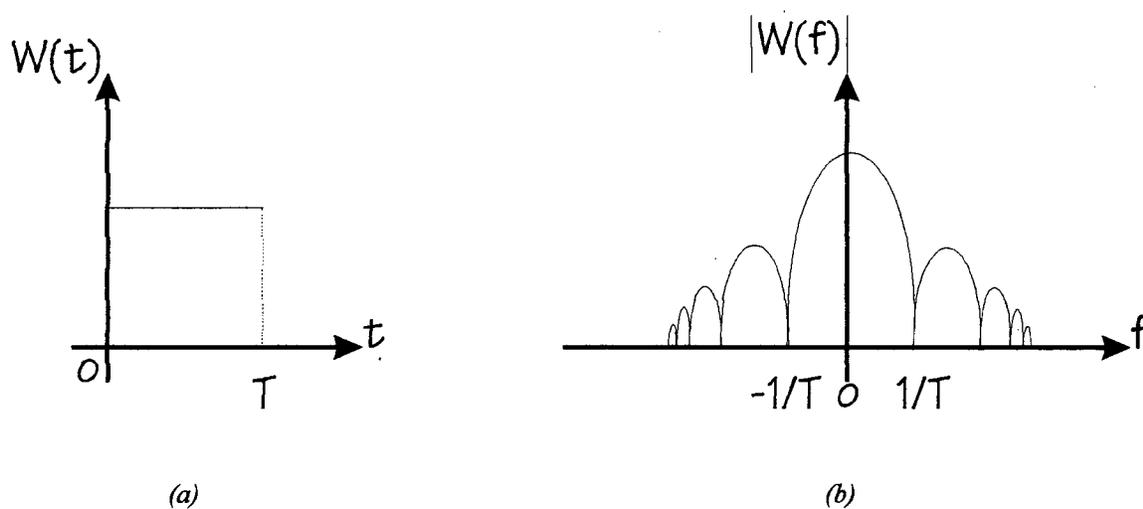


fig. II.1 - Espectro de magnitude de $\theta_z(x, y, t)$



(a)

(b)

fig. II.2 - (a) Janela retangular do sinal disponivel de largura $T = N\Delta t$

(b) Espectro de magnitude correspondente

Dessa forma, a TF do sinal disponivel $\theta_z(x, y, t), w(t)$ é obtida através da convolução entre $F(x, y, f), W(f)$, resultando

$$TF\{\theta_z(x, y, t), w(t)\} \stackrel{\Delta}{=} F_w(x, y, f) = T \sum C_m \Phi_m \cdot Sa[\pi(f_m - f)T] e^{j\pi(f_m - f)T} \quad (II.3)$$

onde $Sa(\cdot)$ é função amostragem, $Sa(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$. O espectro de magnitude correspondente à equação (II.3) é mostrado na *figura II.3*

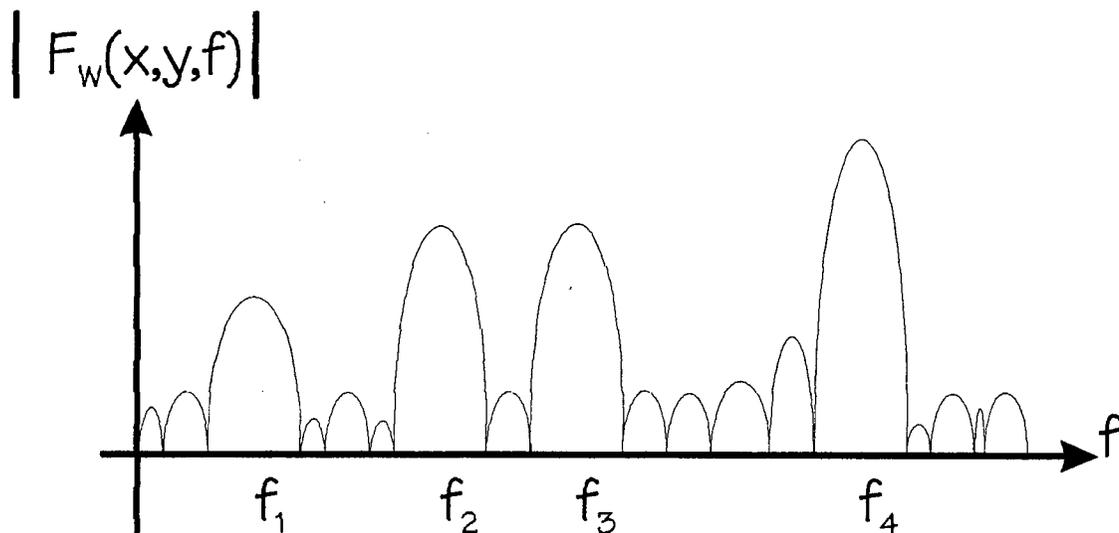


fig. II.3 - Espectro de magnitude de $\theta_z(x, y, t)$ após o janelamento

Desde que os máximos do espectro sejam suficientemente separados, as frequências correspondentes a esses máximos são, aproximadamente, as frequências de corte de cada modo e podem ser obtidas diretamente a partir do espectro.

Assim, a distribuição espacial de um modo de interesse pode ser obtida (a menos de uma constante) a partir da avaliação da TF na autofrequência correspondente a esse modo. Isto deve ser feito para todos os valores de x e y , ou seja, em toda a seção transversal do guia.

Por fim, alguns esclarecimentos adicionais precisam ser feitos. Deve ser lembrado que o algoritmo FD-TD dá como resultado não uma função contínua do tempo $\theta_z(x, y, t)$, mas sim uma série temporal, discreta, $\theta_z(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$. Também, a TF não pode ser computada numa faixa contínua de frequências, mas somente em alguns valores determinados. Portanto, em vez da TF, utiliza-se a transformada discreta de Fourier (DFT), a qual é uma aproximação da primeira. Os valores da DFT correspondem às amostras da TF em cada frequência. Tanto a resolução em frequência (Δf) quanto a máxima frequência (f_{max}), na qual se pode obter

informação, dependem dos parâmetros utilizados na simulação. A partir das características da DFT [10], tem-se :

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} \quad (\text{II.4})$$

e

$$f_{max} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (\text{II.5})$$

Através das equações (II.4) e (II.5), vê-se que a precisão obtida na análise espectral está intimamente ligada às dimensões da célula de discretização espacial utilizada.

Apêndice III

Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) começou a ser desenvolvido na década de 1950 com o objetivo de solucionar problemas ligados à engenharia mecânica, como por exemplo: análise tensorial em estruturas, difusão de calor, escoamento de fluidos, ... Em 1970 P. P. Silvester e M. V. Chari publicaram o artigo '*Finite elements solution of saturable magnetic fields problems*', que propôs a utilização desse método em problemas de eletromagnetismo, incluindo, na sua formulação, a resolução de problemas não-lineares.

A implementação da técnica dos elementos finitos é bastante semelhante à técnica das diferenças finitas, onde o primeiro passo é a modelagem da região de estudo em elementos.

A implementação da técnica de elementos finitos é feita, geralmente, através da utilização do método variacional ou através do método de Galerkin, também conhecido como resíduos ponderados.

Vamos mostrar, a seguir, um breve resumo para o MEF, utilizando-se o método Variacional. Utilizando tipo de elemento triangular *figura III.1*, considera-se que o potencial V varia linearmente dentro do triângulo, segundo a expressão abaixo:

$$V(x,y) = a + bx + cy \quad (III.1)$$

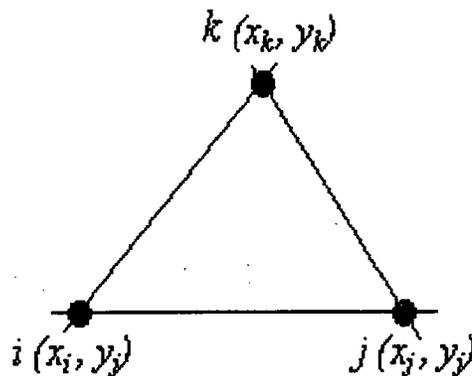


fig.III.1 - Elemento Básico Triangular para o Método dos Elementos Finitos

Nota-se que nos nós i, j, k de um elemento genérico ou problema genérico, os potenciais serão regidos pela equação (III.1), podendo montar o sistema de equações para cada nó nas equações abaixo:

$$\begin{aligned} V_i &= a + bx_i + cy_i \\ V_j &= a + bx_j + cy_j \\ V_k &= a + bx_k + cy_k \end{aligned} \quad (\text{III.2.a.b.c})$$

A solução para esse sistema de equações permite determinar as incógnitas a, b e c , da equação acima, em função de $x_i, x_j, x_k, y_i, y_j, y_k, V_i, V_j$ e V_k , podendo ser feito simplesmente pela utilização da regra de Cramer, abaixo :

$$a = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} V_i & x_i & y_i \\ V_j & x_j & y_j \\ V_k & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad b = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & V_i & y_i \\ 1 & V_j & y_j \\ 1 & V_k & y_k \end{vmatrix}$$

$$c = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & x_i & V_i \\ 1 & x_j & V_j \\ 1 & x_k & V_k \end{vmatrix} \quad \text{onde : } D = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

D é o dobro da área do triângulo.

Substituindo os valores de a, b e c na equação (III.1), através de operações algébricas, ela pode assumir seguinte forma :

$$V(x,y) = \sum_{l=i,j,k} \frac{1}{D} (p_l + q_l x + r_l y) V_l \quad (\text{III.3})$$

onde :

$$\begin{aligned} p_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ q_i &= y_j - y_k \\ r_i &= x_k - x_j \end{aligned}$$

Os termos p_j, q_j, r_j, p_k, q_k e r_k podem ser obtidos por permutações cíclicas dos índices.

Como o nosso objetivo é ainda calcular o campo elétrico \vec{E} , observa-se que como $\vec{E} = -grad V$, é obtido como equação de campo:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} \quad (III.4)$$

onde \vec{i} e \vec{j} são os vetores unitários ortogonais do sistema Oxy .

Utilizando a expressão acima, tem-se:

$$E_x = - \sum_{i=i,j,k} \frac{1}{D} q_i V_i \quad (III.5)$$

e

$$E_y = - \sum_{i=i,j,k} \frac{1}{D} r_i V_i \quad (III.6)$$

que, não dependendo de x e y , são constantes em um elemento.

Outra técnica numérica para o desenvolvimento do MEF é a utilização do Método Variacional. Os princípios do Método Variacional é que, ao invés de resolver diretamente a equação descritiva do fenômeno físico, procura minimizar um certo funcional energético. Este funcional é a energia associada ao campo elétrico presente no domínio de cálculo ou estudo, regido pela seguinte equação:

$$F = \iint_S \frac{1}{2} \epsilon E^2 ds \quad (III.7)$$

onde S é a superfície do domínio em questão. A minimização do funcional deve ser feita em relação aos potenciais dos N nós incógnitos. Obter-se-á a minimização da energia quando as N equações obedecerem à seguinte condição :

$$\frac{\partial F}{\partial V_n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{III.8})$$

A discretização do domínio em M elementos leva-nos a escrever que a energia do sistema será a soma das parcelas de energia nos M elementos:

$$\frac{\partial F}{\partial V_n} = \sum_M \frac{\partial F_m}{\partial V_n} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (\text{III.9})$$

F_m é a energia associada a um elemento "m", diferente de zero no elemento em questão e igual a zero fora dele. Procuremos então obter $\frac{\partial F}{\partial V_n}$. Assumindo que ϵ é constante no elemento conjuntamente com o fato que \vec{E} também o é, podemos escrever que :

$$\frac{\partial F_m}{\partial V_n} = \frac{\partial}{\partial V_n} \iint_S \frac{1}{2} \epsilon E^2 ds = \frac{\partial}{\partial V_n} \left[\frac{1}{2} \epsilon E^2 \iint_S ds \right] = \frac{1}{2} \epsilon \frac{D}{2} \frac{\partial E^2}{\partial V_n} \quad (\text{III.10})$$

Calcula-se então $\frac{\partial E^2}{\partial V_n}$, lembrando que V_n é um dos três potenciais V_i, V_j ou

V_k do elemento m.

O Campo \vec{E} pode ser escrito sob a forma:

$$\vec{E} = -\frac{1}{D} \sum (q_i \vec{i} + r_j \vec{j}) V_i$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{D} \left[(q_i V_i + q_j V_j + q_k V_k) \vec{i} + (r_i V_i + r_j V_j + r_k V_k) \vec{j} \right] \quad (\text{III.11})$$

sendo $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$, tem-se:

$$E^2 = \frac{1}{D^2} \left[(q_i V_i + q_j V_j + q_k V_k)^2 + (r_i V_i + r_j V_j + r_k V_k)^2 \right] \quad (\text{III.12})$$

e

$$\frac{\partial E^2}{\partial V_n} = \frac{2}{D^2} \left[(q_i V_i + q_j V_j + q_k V_k) q_n + (r_i V_i + r_j V_j + r_k V_k) r_n \right] \quad (\text{III.13})$$

que pode ser colocada sob a forma matricial abaixo :

$$\frac{\partial E^2}{\partial V_n} = \frac{2}{D^2} \left[(q_i q_n + r_i r_n) (q_j q_n + r_j r_n) (q_k q_n + r_k r_n) \right] \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Quando se efetuar esta operação para os três nós do triângulo m, é substituído o resultado na equação (III.10) para obter o resultado matricial abaixo:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_m}{\partial V_i} \\ \frac{\partial F_m}{\partial V_j} \\ \frac{\partial F_m}{\partial V_k} \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon}{2D} \begin{bmatrix} q_i q_i + r_i r_i & q_i q_j + r_i r_j & q_i q_k + r_i r_k \\ q_i q_j + r_i r_j & q_j q_j + r_j r_j & q_j q_k + r_j r_k \\ q_i q_k + r_i r_k & q_j q_k + r_j r_k & q_k q_k + r_k r_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Como o objetivo é calcular $\sum_M \frac{\partial F_m}{\partial V_n} = 0$, a matriz de contribuição S(3x3)

acima deve ser “condensada” em uma matriz global SS(NxN) que será multiplicada por um vetor coluna V(N) dos N potenciais incógnitos. Assim o sistema de N equações (III.9) será transformada no sistema matricial [SS].[V]=0

Na resolução em ambos os métodos : Variacional e Resíduos Ponderados, há obrigatoriamente condições de contorno impostas. Essas condições de contorno para o método são as já conhecidas condições de Dirichlet e Neumann.

Referências Bibliográficas

[1] BASTOS, João P. - Eletromagnetismo e Cálculo de Campos - Editora da UFSC - Santa Catarina - 1992

[2] HAYT, Willian. H., Jr. - Eletromagnetismo - Livros Técnicos e Científicos Editora - Rio de Janeiro - 1991

[3] SADIKU, M. N. O. - Numerical Techniques in Eletromagnetics - McGrall-Hill - New York - 1995

[4] ZUO, Pen. B. - Numerical Techniques - McGrall-Hill - New York - 1996

[5] BARROSO, L. C. ; BARROSO, M. M. A. ; CAMPOS, F. F. , Jr ; CARVALHO, M. L. B. & MAIA, M. L. - Cálculo Numérico (com aplicações) - Editora Harbra - São Paulo - 1987

[6] YEE, K. S. - Numerical Solution of Initial Boundary-Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media - IEEE Trans. Ant. Prop. - vol. AP-14, May 1966, pp. 302-307

[7] NAVARRO, E. A. & SUCH, V. - Study of TE and TM Modes in Waveguides of Arbitrary Cross-Section Using an FD-TD Formulation - IEE Proceeding H, Vol. 139, Dez 1992, pp. 491-494

[8] FREIRE ; GABRIEL, F. O. & DINIZ - Ondas Eletromagnéticas - Livros Técnicos e Científicos S.A. - Rio de Janeiro - 1973

[9] BRINGHAM, E. O. - The Fast Fourier Transform and it Applications - Prentice-Hall - 1988

[10] OPPENHEIM, A.V. & SCHAFER, R. W. - Distcret-Time Signal Processing - Englewood Cliffs- New Jersey - Prentice-Hall - 1989

[11] BARROSO, CAMPOS, CARVALHO & MAIA - Cálculo Numérico (com aplicações) - Editora HARBRA - São Paulo - 1987

[12] ANGKAEW, T., MASANORI, M. & KUMAGAI, N. - Finite-elemente analysis of waveguide modes: a novel approach that eliminates spuriours modes - IEEE Trans. - 1987, MTT-35 , (2) - pp. 117-123

[13] GRUNER, L. - Higher order modes in square coaxial lines - IEEE Trans. - 1983, MTT-31, (9) - pp. 770-772

[14] NAVARRO, A., NUÑEZ, M.J. & MARTIN, E. - Finite difference time domain FFT method applied to axially symmetrical electromagnetic resonant devices - IEE Proc. H, 1990, 137, (3) - pp. 193-197

[15] NAVARRO, A., NUÑEZ, M.J. & MARTIN, E. - Study of TE_0 and TM_0 modes in dielectric resonators by finite difference time-domain method coupled with the discrete Fourier transform - IEEE Trans., 1991, MTT-39, (1) - pp. 14-17

[16] TAFLOVE, A. & BRODWIN, M.E. - Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time dependent Maxwell's equations - IEEE Trans. , 1975, MTT-23, (8) - pp. 623-630

[17] ZIVANOVIC, S.S., YEE, K.S. & MEI, K.K. - A subgridding method for the time-domain difference finite method to solve Maxwell's equations - IEEE Trans., 1991, MTT-39, (3) - pp. 471-479

[18] CHOI, D.H & HOENER, W.J.R. - The finite-difference time-domain method and its applications to eigenvalue problems - IEEE Trans., 1986, MTT-34, (12) - pp. 1464-1470

[19] SARMA, M.S. & YAMAMURA, A. - Nonlinear analysis of magnetic bearing for space technology - IEEE Trans., 1979, AES-15, (1) - pp. 134-140

[20] TAFLOVE, A. & UMASHANKAR, K.R. - Review of FD-TD numerical modeling of electromagnetic wave scattering and radar cross section - IEEE Proc., 1989, Vol. 77, (5) - pp. 682-699

[21] SACKS, Z.S., LEE, J.F. - A finite-element time-domain method using prism elements for microwave cavities - IEEE Trans., 1995, EC-37, (4) - pp. 519-527

[22] SHANKAR, V., HALL, W. F. & MOHAMMADIAN, A.H. - A Time-Domain differential solver for electromagnetic scattering problems - IEEE Proc. - 1989, Vol. 77, (5) - pp. 709-721