

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**SISTEMA AUTO-ADAPTATIVO VERSÃO-H E IMPEDÂNCIA DE  
FRONTEIRA EM PROBLEMAS MAGNETODINÂMICOS**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA**

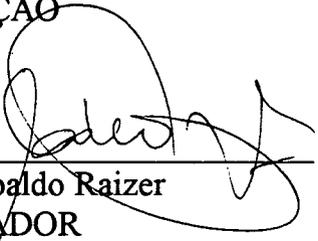
**JOSÉ AIRTON AZEVEDO DOS SANTOS**

**FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO DE 1994**

# SISTEMA AUTO-ADAPTATIVO VERSÃO H E IMPEDÂNCIA DE FRONTEIRA EM PROBLEMAS MAGNETODINÂMICOS

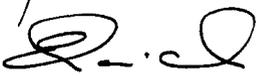
**JOSÉ AIRTON AZEVEDO DOS SANTOS**

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO  
TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA, E APROVADA EM SUA  
FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO



---

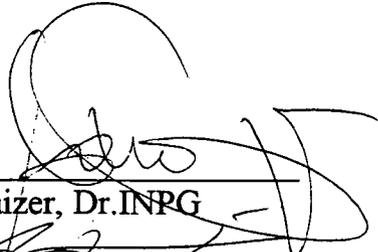
Prof. Adroaldo Raizer  
ORIENTADOR



---

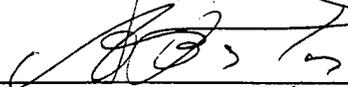
Prof. Enio Valmor Kassick,  
Coordenador do curso de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica

## BANCA EXAMINADORA



---

Adroaldo Raizer, Dr. INPG



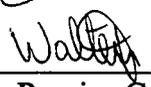
---

João Pedro Assumpção Bastos, Dr.d'ETat



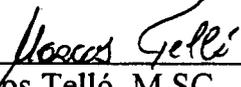
---

Nelson Sadowski, Dr. INPT



---

Walter Pereira Carpes Junior, M. SC.



---

Marcos Telló, M.SC.

A meus Pais

Helcio e Noemy

A minha avó

Laurinda

A minha esposa Dilma.

Ao meu filho Helio que

tanto sofreu pela longa

separação.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Adroaldo Raizer, pela interessada e competente orientação.

Aos funcionários e chefia do GRUCAD, pela atenção e presteza dispensada.

Aos membros da banca examinadora, pelos comentários e sugestões.

Aos meus colegas de curso pelo companheirismo.

Aos meus pais e irmãos, pelo estímulo que sempre demonstraram.

A minha esposa pelo companheirismo, compreensão e constante apoio.

À Universidade Federal de Santa Catarina e à CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao trabalhador brasileiro, pelo financiamento desta pesquisa.

## SUMÁRIO

SIMBOLOGIA	ix
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
INTRODUÇÃO	xiv
CAPÍTULO 1 - CONCEITOS BÁSICOS	1
1.1 - Introdução	1
1.2 - Equações fundamentais	1
1.2.1 - Condições de fronteira na interface entre os materiais	3
1.2.2 - Potencial vetor na solução de problemas magnetodinâmicos	4
1.3 - Equacionamento do problema	4
1.3.1 - Equacionamento utilizando potencial vetor complexo	6
1.3.2 - Condições de contorno na fronteira do domínio de estudo	7
1.3.3 - Descontinuidades entre regiões do domínio	7
1.3.4 - O problema a ser solucionado	8
1.4 - Formulação fraca	9
1.4.1 - Método de Galerkin	11

1.4.2 - Método dos elementos finitos	12
1.5 - Identificação do erro	15
1.6 - Conclusões	16
<b>CAPÍTULO 2 - GERAÇÃO AUTO-ADAPTATIVA</b>	<b>17</b>
2.1 - Introdução	17
2.2 - Análise de erro	17
2.2.1 - Critério de refinamento "a-priori"	18
2.2.2 - Critérios de refinamento "a-posteriori"	19
2.2.3 - Critério baseado em formulações complementares	20
2.2.4 - Critérios baseados na regularidade dos campos	20
2.2.4.1 - Critério baseado na descontinuidade dos campos	20
2.2.4.2 - Critério do teorema de Ampère	22
2.2.4.3 - Critério da perturbação dos campos	23
2.3 - Geração da malha	24
2.3.1 - Algoritmo do programa EFCAD	24
2.4 - Refinamento da malha	26
2.4.1 - Os elementos a serem refinados	27
2.4.1.1 - Refinamento "a-priori"	27

2.4.1.2 - Refinamento "a-posteriori"	27
2.5 - Conclusões	28
<b>CAPÍTULO 3 - CONDIÇÃO DE IMPEDÂNCIA DE FRONTEIRA APLICADA AO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>29</b>
3.1 - Introdução	29
3.2 - Determinação da condição de impedância de fronteira	30
3.3 - Modelagem matemática	32
3.3.1 - A formulação fraca	32
3.3.2 - A formulação de elementos finitos	34
3.3.3 - A matriz de contribuição unidimensional	36
3.4 - Conclusões	38
<b>CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E COMPARAÇÕES</b>	<b>39</b>
4.1 - Introdução	39
4.2 - Refinamento auto-adaptativo	39
4.2.1 - Cabo trifásico	39
4.2.1.1 - Descontinuidades dos campos	41
4.2.1.2 - Teorema de Ampère	42
4.2.1.3 - Perturbação dos campos	43
4.2.1.4 - Refinamento "a-priori" e "a-posteriori"	44

4.2.1.5 - Tabelas	45
4.2.2 - Conclusões	46
4.3 - Condição de impedância de fronteira	47
4.3.1 - Linha de potência	47
4.3.2 - Curvas para o campo tangencial	51
4.3.3 - Conclusões	54
CONCLUSÃO FINAL	56
ANEXO	58
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63

## SIMBOLOGIA

$\vec{A}$	- Potencial vetor
$\vec{A}^*$	- Potencial vetor complexo
$\mathcal{A}^*$	- Solução aproximada
$A_0^*$	- Potencial imposto
$A_0^*$	- Potencial vetor na superfície de separação
$\vec{B}$	- Vetor indução magnética
$B_{ij}$	- Matriz de contribuição local
$c_i$	- Constantes desconhecidas
$C_0$	- Funções contínuas, com derivadas parciais descontínuas
$C$	- índice de Convergência
$\vec{D}$	- Vetor indução elétrica
$D$	- Área do triângulo
$d$	- Comprimento do elemento
$\vec{E}$	- Vetor campo elétrico
$F_j$	- Matriz fonte
$f$	- Frequência

$\vec{H}$	- Vetor campo magnético
$h$	- "tamanho" do elemento
$H_0$	- Espaço com dimensão $n$
$\vec{H}_t$	- Campo magnético tangencial
$\vec{J}$	- Vetor densidade superficial de corrente
$J_n$	- Descontinuidade na interface dos elementos
$\vec{J}_e$	- Vetor densidade de corrente imposta
$\vec{J}_i$	- Vetor densidade de corrente induzida
$K_{ij}$	- Matriz real de contribuição local
$n_e$	- Indicador local de erro
$\vec{n}$	- Vetor normal à superfície
$nno$	- Número de nós
$nnf$	- Número de nós da fronteira $\Gamma_m$
$N_i$	- Funções base
$r_i$	- Componente regular do erro
$r$	- Residual
$R_{ij}$	- Matriz de contribuição local
$Re$	- Real

$t$	- Tempo
$v$	- Função teste
$w$	- Frequência angular
$\rho$	- Densidade volumétrica de carga
$\epsilon$	- Permissividade elétrica
$\mu$	- Permeabilidade magnética
$\sigma$	- Condutividade elétrica
$\Omega$	- Domínio de estudo
$\Gamma$	- Fronteira do domínio
$\Gamma_m$	- Fronteira entre dois meios
$\delta$	- Profundidade de penetração
$\gamma$	- Constante de propagação
$\nabla$	- Operador nabla
$v$	- Relutividade magnética
$[ ]$	- Variação da grandeza no ponto
$\times$	- Produto vetorial
$\cdot$	- Produto escalar

## RESUMO

Neste trabalho estudam-se os conceitos de geração de malhas adaptativas e condição de impedância de fronteira em problemas magnetodinâmicos.

Quatro critérios de erro são apresentados, sendo que um deles é baseado na "profundidade de penetração", e os outros são baseados na análise de valores de campo. É apresentada também, a formulação matemática para condição de impedância de fronteira pelo método de elementos finitos.

Além do estudo teórico, são apresentados e discutidos os resultados obtidos através dos critérios de erro e da condição de impedância de fronteira.

## ABSTRACT

In this work the concepts of adaptive mesh generation and boundary impedance condition in magnetodynamics problems are studied.

Four error criterions are presented. One of them is based on the penetration depth, and the others are based on fields values analysis. It is also presented, a mathematical formulation for the boundary impedance condition by the finite elements method.

Besides the theoretical study, are presented and discussed the results obtained by the error criterions and boundary impedance condition methods are presented and discussed.

## INTRODUÇÃO

Na década de 70, o método dos elementos finitos, que vinha sendo utilizado em problemas de engenharia mecânica já há muitos anos, começou também a ser aplicado a problemas eletromagnéticos, permitindo que as estruturas geometricamente mais complexas pudessem ser analisadas.

O método de elementos finitos é uma técnica geral para a solução de problemas de equações diferenciais com valores de contorno [3,5]. O seu princípio básico consiste na discretização do domínio de estudo, em um certo número de regiões elementares chamadas elementos finitos, caracterizadas por pontos definidos em seus vértices e/ou fronteiras, chamados nós. A coleção de nós é conhecida como malha de elementos finitos. A equação diferencial é então aproximada dentro de cada elemento como uma combinação, geralmente linear ou quadrática, das variáveis da equação definidas em cada nó.

A utilização deste método tornou possível a construção de poderosas ferramentas de cálculo que são aplicadas à modelagem de dispositivos eletromagnéticos [1,4]. Graças à evolução em termos de rapidez de cálculo e capacidade de memória dos computadores, este método permite descrever de maneira cada vez mais concisa o funcionamento destes dispositivos, onde intervêm fenômenos complexos como as correntes induzidas, movimentos relativos, etc. Entretanto, a solução obtida por este método é apenas uma aproximação da solução real, e a precisão da solução calculada pode variar consideravelmente em uma mesma estrutura. Nos últimos anos muitos trabalhos foram desenvolvidos nos campos de avaliação e redução de erros na solução obtida com a técnica de elementos finitos. É muito conhecido o fato segundo o qual bons resultados são atingidos neste sentido, aumentando-se o número de nós ou elementos da

malha. Sabe-se também, que ao refinar-se a malha apenas nas regiões onde o erro é importante, obtém-se melhores taxas de convergência do que refinando-se a malha uniformemente [11,12,13,14].

A aplicação do método de elementos finitos na determinação de campos magnéticos variáveis no tempo apresenta um sério obstáculo, a discretização das regiões com correntes induzidas. Como o campo magnético é rapidamente atenuado nestas regiões a "profundidade de penetração", é em geral muito pequena. Para obter-se bons resultados devemos discretizar a borda destas regiões em elementos muito pequenos [1]. Em se tratando com médias e altas frequências a "profundidade de penetração" é quase desprezível, por isto não podemos usar o método de elementos finitos clássico, o que despenderia muita memória em termos computacionais. Para contornar este problema, uma alternativa viável é a utilização da condição de impedância de fronteira, que permite a retirada das partes condutoras do domínio de estudo [17,18,19,20].

As comprovações das teorias expostas acima, só são possíveis em um ambiente informático essencialmente direcionado para o método de elementos finitos, o que é o caso do programa **EFCAD** [1], suporte lógico para este trabalho.

O **EFCAD** (Eletromagnetic Field Computer Aided Design) desenvolvido no **GRUCAD** ( Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos), é um programa polivalente e confiável, destinado a pesquisa e a indústria. Ele permite a análise de problemas de campos elétricos, magnéticos e térmicos pela técnica numérica de elementos finitos.

Este sistema possui vários módulos (Figura 1), sendo que o módulo utilizado neste trabalho é o módulo **EFCC** (F.E. Complex Eddy Currents Calculation). Este módulo permite o cálculo de correntes induzidas, utilizando a formulação em números complexos, onde as fontes de campo são densidades de correntes variando



# CAPÍTULO 1

## CONCEITOS BÁSICOS

### 1.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são abordados os conceitos básicos, para a formulação matemática de campos magnéticos variáveis no tempo, pelo *método de elementos finitos*.

Inicialmente, são revisadas as equações fundamentais do eletromagnetismo. Em seguida, estuda-se a *formulação fraca* para um problema a ser resolvido, o *método dos elementos finitos* e a identificação do erro neste método.

### 1.2 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

As equações fundamentais do eletromagnetismo são as *equações de Maxwell* [1], que estão representadas abaixo:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.4)$$

onde  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ , e as outras grandezas são:

$\vec{D}$  - vetor indução elétrica ( $C/m^2$ );

$\vec{E}$  - vetor campo elétrico ( $V/m$ );

$\vec{B}$  - vetor indução magnética ( T );

$\vec{H}$  - vetor campo magnético ( A/m );

$\vec{J}$  - vetor densidade superficial de corrente ( A/m<sup>2</sup> );

$\rho$  - densidade volumétrica de carga ( C/m<sup>3</sup> );

$t$  - tempo ( s ).

A estas expressões são acrescentadas relações adicionais denominadas *relações constitutivas*, as quais dependem dos meios onde existe o campo:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.7)$$

onde:  $\epsilon$  - tensor permissividade elétrica do meio ( F/m );

$\mu$  - tensor permeabilidade magnética do meio ( H/m );

$\sigma$  - tensor condutividade elétrica do meio ( S/m ).

Nos casos em que os meios são isotrópicos, os tensores  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  se reduzem aos escalares  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$ . Neste estudo apenas meios isotrópicos e lineares são considerados.

Na faixa de frequência com a qual se trabalha em eletrotécnica, a corrente de deslocamento,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , é muito menor que a corrente de condução  $\vec{J}$ . Em vista disso, pode-se simplificar a equação (1.2)

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (1.8)$$

Neste estudo se está interessado em fenômenos eletromagnéticos variáveis no tempo. Assim as equações relativas à *magnetodinâmica* são as seguintes:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.11)$$

A equação (1.11), é a equação que particulariza o domínio da *magnetodinâmica*, e indica que a variação temporal de  $\vec{B}$  cria um campo elétrico  $\vec{E}$  [1].

### 1.2.1 Condições de fronteira na interface entre os materiais

Na fronteira entre dois meios com características *constitutivas* diferentes, admitindo-se como hipótese que não existam cargas elétricas ou correntes superficiais nos limites entre os meios 1 e 2, verificam-se as seguintes condições de contorno [1,2]:

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \vec{D}_2 \cdot \vec{n} \quad (1.12)$$

$$\vec{E}_1 \times \vec{n} = \vec{E}_2 \times \vec{n} \quad (1.13)$$

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{n} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n} \quad (1.14)$$

$$\vec{H}_1 \times \vec{n} = \vec{H}_2 \times \vec{n} \quad (1.15)$$

onde 1 e 2 representam os meios adjacentes e  $\vec{n}$  e o vetor normal à interface entre os dois meios.

As equações (1.12) e (1.14) estabelecem que a componente normal das induções elétrica e magnética são contínuas na interface entre dois meios diferentes. As equações (1.13) e (1.15) estabelecem que a componente tangencial dos campos elétrico e magnético são contínuas na interface entre dois meios diferentes.

Para as condições de contorno nos limites do domínio, são consideradas as condições de *Dirichlet*, onde o valor do potencial é especificado, e as condições de *Neumann*, onde a derivada do potencial é especificada.

### 1.2.2) Potencial vetor na solução de problemas magnetodinâmicos

Para abordar um problema no qual existam correntes no domínio de estudo, utiliza-se o Potencial Vetor  $\vec{A}$  tal que:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.16)$$

cuja validade é verificada substituindo-se (1.16) em (1.10).

Agora, substituindo (1.16) em (1.9), e considerando a relação constitutiva (1.6), obtém-se:

$$\nabla \times \nu (\nabla \times \vec{A}) = \vec{J} \quad (1.17)$$

onde  $\nu$  é a relutância magnética tal que  $\nu = 1/\mu$ . A expressão (1.17) representa a *equação de Poisson* relativa ao potencial vetor magnético.

## 1.3 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

Seja o problema a ser resolvido representado esquematicamente pela Figura 1.1, onde a corrente é variável no tempo, e onde existam meios condutores. Tem-se a subregião  $\Omega_1$  não susceptível à passagem de corrente ( $\sigma = 0$ ), e uma subregião  $\Omega_2$ , onde a condutividade é diferente de zero ( $\sigma \neq 0$ ), permitindo assim a criação de correntes induzidas no sentido perpendicular ao plano da figura. Considera-se que a subregião  $\Omega_3$  é constituída de fios muito finos, para que as correntes induzidas possam ser negligenciadas [1,25].

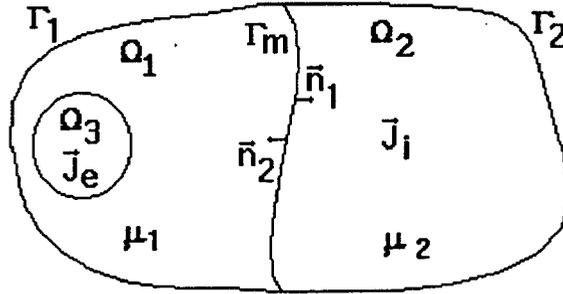


Figura 1.1 Representação de um problema bidimensional hipotético.

A densidade de corrente no domínio  $\Omega$  de estudo é dado por:

$$\vec{J} = \vec{J}_i + \vec{J}_e$$

onde:  $\vec{J}_e$  - densidade de corrente externa imposta na subregião  $\Omega_3$ ;

$\vec{J}_i$  - densidade de corrente induzida na subregião  $\Omega_2$ ;

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3.$$

Observa-se que  $\vec{J}_i = \sigma \vec{E}$ , onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico induzido na subregião  $\Omega_2$ . A partir das equações (1.11) e (1.16) tem-se:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.18)$$

onde os vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{A}$  estão na direção  $o\vec{z}$  (perpendicular ao plano da Figura (1.1)). Portanto, a equação (1.17) assume a forma:

$$\nabla \times \nu (\nabla \times \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{J}_e = 0 \quad (1.19)$$

onde  $\vec{A} = A(t) \vec{k}$ . O primeiro termo da equação (1.19) pode ser igualado à [1]:

$$\nabla \times \nu (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \cdot (\nu \nabla A(t)) \quad (1.20)$$

onde  $A(t)$  é a componente de  $\vec{A}$  na direção  $o\vec{z}$ , portanto um escalar. Então a equação (1.19) pode ser escrita sob a forma escalar:

$$\nabla \cdot (\nu \nabla A(t)) - \sigma \frac{\partial A(t)}{\partial t} + J_e(t) = 0 \quad (1.21)$$

já que  $\vec{J}_e = J_e(t) \vec{k}$ .

### 1.3.1 Equacionamento utilizando o potencial vetor complexo

Nos casos onde a excitação é senoidal e os meios não apresentarem "saturação", é mais conveniente resolver a equação (1.21) no domínio frequência utilizando o **Potencial Vetor Complexo**  $A^*$  [1].

Sendo  $J_e(t)$  a alimentação cossenoidal de pulsação  $\omega$ , tem-se:

$$J_e(t) = J_e \cos(\omega t) \quad (1.22)$$

ou então:

$$J_e(t) = \text{Re}(J_e e^{j\omega t}) \quad (1.23)$$

onde  $j = \sqrt{-1}$ .

A resposta do sistema a esta excitação senoidal será em regime permanente, também senoidal e defasada. Portanto

$$A(t) = A \cos(\omega t + \alpha) = \text{Re}(A^* e^{j\omega t}) \quad (1.24)$$

onde  $A^* = A e^{j\alpha}$ , com  $\alpha$  representando a defasagem de  $A(t)$  em relação  $J_e(t)$ , é a solução da equação (1.21), isto é:

$$\nabla \cdot (\nu \nabla A^* e^{j\omega t}) - \sigma \frac{\partial A^* e^{j\omega t}}{\partial t} + J_e e^{j\omega t} = 0 \quad (1.25)$$

o que dá

$$\nabla \cdot (\nu \nabla A^*) - j\sigma w A^* + J_e = 0 \quad (1.26)$$

### 1.3.2 Condições de contorno na fronteira do domínio de estudo

a) Condição de contorno de *Dirichlet*

$$A^* = A_0^* \quad (1.27)$$

em  $\Gamma_1$ , onde  $A_0^*$  é o valor do potencial imposto.

b) Condição de contorno de *Neumann homogênea*

$$\nu \frac{\partial A^*}{\partial \bar{n}} = 0 \quad (1.28)$$

em  $\Gamma_2$ .

onde: -  $\frac{\partial A^*}{\partial \bar{n}}$  é a derivada direcional de  $A^*$  na direção  $\bar{n}$ ;

- $\Gamma_1$  parcela de  $\Gamma$  onde se impõe condições de contorno de *Dirichlet*;
- $\Gamma_2$  parcela de  $\Gamma$  onde se impõe condições de contorno de *Neumann*;
- $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ ;
- $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

### 1.3.3 Descontinuidades entre regiões do domínio

A equação (1.26) descreve o comportamento do campo nos pontos regulares do domínio de estudo  $\Omega$ , ou seja, nos pontos em que as propriedades constitutivas sejam contínuas. Entretanto, existem pontos de descontinuidade na relutividade magnética. Dentro de cada subregião  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , tem-se  $\nu_1$  e  $\nu_2$  contínuos.

Uma descontinuidade de  $v$  ocorre na interface  $\Gamma_m$  entre os dois meios. Nos pontos sobre  $\Gamma_m$  são válidas as relações (1.14) e (1.15) [6], isto é:

$$[\nabla \times A^*] \cdot \bar{n} = 0 \quad (1.29)$$

$$[v \nabla \times A^*] \times \bar{n} = 0 \quad (1.30)$$

onde  $[ ]$  indica o salto da derivada no limite onde existe a descontinuidade.

As equações acima tem por consequência a continuidade da componente normal e a descontinuidade da componente tangencial de  $\bar{B}$ .

### 1.3.4 O problema a ser solucionado

O problema a ser solucionado é a determinação da função  $A^*$  que satisfaça as seguintes condições:

1 - A equação diferencial parcial nos pontos internos às subregiões, isto é, nos pontos onde não existem descontinuidades:

$$\nabla \cdot (v \nabla A^*) - j\sigma \omega A^* + J_e = 0 \quad (1.31)$$

em  $\Omega_{1,2,3}$ .

2 - A Condição de salto em pontos na interface  $\Gamma_m$  entre  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ :

$$[v \nabla \times A^*] \times \bar{n} = 0 \quad (1.32)$$

3 - A condição de contorno de *Dirichlet* em  $\Gamma_1$ :

$$A^* = A_0^* \quad (1.33)$$

4 - A condição de contorno de *Neumann* homogênea em  $\Gamma_2$ :

$$v \frac{\partial A^*}{\partial \bar{n}} = 0 \quad (1.34)$$

## 1.4 FORMULAÇÃO FRACA

Devido à existência de descontinuidades nas interfaces entre os meios com propriedades constitutivas diferentes, não se pode utilizar o tratamento clássico de equações diferenciais, que exige que a solução satisfaça a equação em todos os pontos do domínio. Para superar esta dificuldade, reformula-se o problema de forma a admitir soluções fracas na solução e em suas derivadas [3]. A *formulação fraca* para o problema pode ser enunciada como segue: determina-se uma função  $A^*$  tal que a equação diferencial (1.26), com apropriadas condições de contorno seja satisfeita em um sentido de "médias ponderadas".

A *formulação fraca* é obtida a partir da definição do residual  $r$ , tal que [3]:

$$r = \nabla \cdot (\nu \nabla A^*) - j\sigma w A^* + J_e \quad (1.35)$$

em cada domínio regular de  $\Omega$ .

Multiplica-se agora  $r$  por uma função suficientemente regular, chamada função teste  $\mathbf{v}$ , integra-se sobre cada subdomínio no qual  $r\mathbf{v}$  é regular e faz-se a média ponderada igual a zero.

$$\int_{\Omega} r \mathbf{v} \, d\Omega = 0 \quad (1.36)$$

ou

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \nabla \cdot (\nu \nabla A^*) \, d\Omega - j \int_{\Omega} \mathbf{v} \sigma w A^* \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} J_e \, d\Omega = 0 \quad (1.37)$$

Integrando o primeiro termo da equação (1.37) por partes sobre  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , e aplicando o teorema da divergência, obtém-se:

$$-\int_{\Omega_1} \nabla \mathbf{v} \cdot (\nu \nabla A^*) \, d\Omega - \int_{\Omega_2} \nabla \mathbf{v} \cdot (\nu \nabla A^*) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} \mathbf{v} \nu \nabla A^* \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 \, d\Gamma + \int_{\partial\Omega_2} \mathbf{v} \nu \nabla A^* \cdot \bar{\mathbf{n}}_2 \, d\Gamma \quad (1.38)$$

onde  $\partial\Omega_1$  e  $\partial\Omega_2$  são as fronteiras das regiões 1 e 2, e  $\bar{n}_1$  e  $\bar{n}_2$  são os vetores normais às respectivas fronteiras.

Somando-se as contribuições do subdomínio  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , obtém-se:

$$-\int_{\Omega_{1,2}} \nabla v \cdot (v \nabla A^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} v v \nabla A^* \cdot \bar{n}_1 d\Gamma + \int_{\partial\Omega_2} v v \nabla A^* \cdot \bar{n}_2 d\Gamma \quad (1.39)$$

Nota-se que as fronteiras  $\partial\Omega_1$  e  $\partial\Omega_2$  são compostas de duas parcelas, uma que não coincide com a fronteira  $\Gamma_m$ , denotada de  $\partial\Omega_1 - \Gamma_m$  e  $\partial\Omega_2 - \Gamma_m$  (Figura 1.2,) e outra que coincide com a fronteira  $\Gamma_m$ .

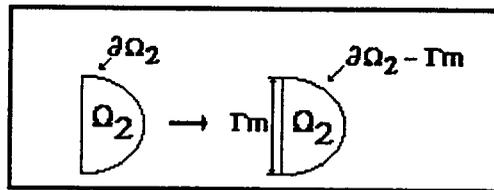


Figura 1.2 Fronteira da região  $\Omega_2$ .

Decompondo as integrais referentes a  $\partial\Omega_1$  e  $\partial\Omega_2$ , da equação (1.39), obtém-se:

$$\begin{aligned} &-\int_{\Omega_{1,2}} \nabla v \cdot (v \nabla A^*) d\Omega + \int_{\Gamma_m} v v \nabla A^* \cdot \bar{n}_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_m} v v \nabla A^* \cdot \bar{n}_2 d\Gamma \\ &+ \int_{\partial\Omega_1 - \Gamma_m} v v \nabla A^* \cdot \bar{n}_1 d\Gamma + \int_{\partial\Omega_2 - \Gamma_m} v v \nabla A^* \cdot \bar{n}_2 d\Gamma \end{aligned} \quad (1.40)$$

Somando-se as integrais relativas a  $\Gamma_m$ , tem-se:

$$\int_{\Gamma_m} v v \nabla A^* \cdot \bar{n}_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_m} v v \nabla A^* \cdot \bar{n}_2 d\Gamma \quad (1.41)$$

Para que (1.30) seja satisfeita, (1.41) tem que desaparecer. Como  $\bar{n}_1 = -\bar{n}_2$  em  $\Gamma_m$ , a equação (1.37) torna-se:

$$-\int_{\Omega} \nabla v \cdot (v \nabla A^*) d\Omega + \int_{\Gamma} v v \nabla A^* \cdot \bar{n} d\Gamma - j \int_{\Omega} v \sigma w A^* d\Omega + \int_{\Omega} v J_e d\Omega = 0 \quad (1.42)$$

onde  $\Gamma = (\partial\Omega_1 - \Gamma_m) \cup (\partial\Omega_2 - \Gamma_m)$ .

Como foi visto na seção (1.3.2), se a condição de fronteira for de *Neumann* homogênea, o termo referente à fronteira desaparecerá. Para a condição de contorno de *Dirichlet*, a função teste  $\mathbf{v}$  é escolhida como pertencente a uma classe de funções teste tal que  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  em  $\Gamma$ . Assim, tem-se:

$$-\int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \nabla A^*) d\Omega - j \int_{\Omega} \mathbf{v} \sigma w A^* d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} J_e d\Omega = 0 \quad (1.43)$$

### 1.4.1 Método de Galerkin

Na seção anterior foi obtida a *formulação fraca* para o problema, ou seja, a equação (1.44) para qualquer  $\mathbf{v}$  em  $H_0$ .

$$-\int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \nabla A^*) d\Omega - j \int_{\Omega} \mathbf{v} \sigma w A^* d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} J_e d\Omega = 0 \quad (1.44)$$

Onde  $H_0$  é definido como uma classe de funções teste para o problema e contém somente as funções que se anulam na fronteira do domínio e cuja derivada tenha seu quadrado integrável [3,4,5]. Já a classe de funções admissíveis a qual pertence a solução  $A^*$ , é composta por funções cuja primeira derivada tenha seu quadrado intregável. A solução  $A^*$  e a função de teste  $\mathbf{v}$  são linearmente independentes e pertencem a um conjunto de dimensões infinita. Desta forma, a procura da solução de (1.44) torna-se extremamente difícil.

O *método de Galerkin* consiste em procurar uma solução aproximada para (1.44) em uma classe de dimensão finita. Desta maneira, utiliza-se um número finito de  $n$  termos linearmente independentes, obtendo a aproximação  $\mathcal{A}_n^*$  de  $A^*$ .

$$\mathcal{A}_n^* = \sum_{i=1}^n c_i N_i \quad (1.45)$$

### 1.4.2 Método dos Elementos Finitos

O *método de Galerkin* fornece uma atraente estratégia para obtenção das soluções aproximadas do problema de contorno, mas não oferece uma maneira sistemática para construção de funções "base"  $N_i$ . Esta situação torna-se crítica quando o domínio é bi ou tridimensional, com as funções  $N_i$  tendo que satisfazer as condições de contorno em regiões com geometria complexa. Estas dificuldades podem ser resolvidas usando o *método de elementos finitos*.

Na aplicação deste método, primeiramente o domínio é particionado ou discretizado em elementos finitos. Sobre cada elemento são identificados certos pontos chamados nós ou pontos nodais. O conjunto de elementos e nós que formam o domínio aproximado do problema é chamado de malha de elementos finitos (Figura 1.3). Uma escolha adequada dos pontos nodais deve ser realizada e as funções de base  $N_i$  são geradas de forma que sejam contínuas nas fronteiras entre os elementos.

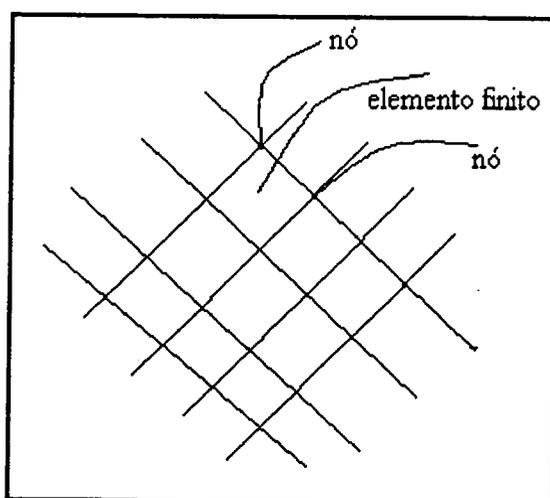
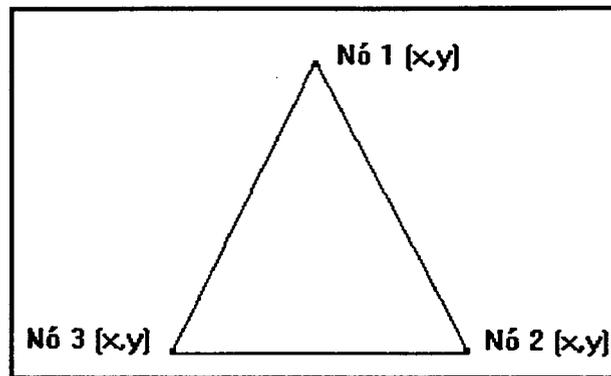


Figura 1.3 Malha de elementos finitos

Neste trabalho é utilizado o elemento finito bidimensional com funções de base lineares obtidas por polinômios de Lagrange com continuidade  $C^0$ . Funções do tipo  $C^0$  são funções contínuas com derivadas parciais descontínuas.

Considerando-se o seguinte elemento finito da Figura 1.4



*Figura 1.4 Elemento finito triangular.*

no qual  $\mathcal{A}^*$  varia linearmente em seu interior, ou seja:

$$\mathcal{A}^*(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (1.46)$$

A equação (1.46) deve ser satisfeita nos três nós do elemento, logo:

$$A_1^* = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 \quad (1.47)$$

$$A_2^* = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 \quad (1.48)$$

$$A_3^* = a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3 \quad (1.49)$$

Resolvendo o sistema para  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  e substituindo os coeficientes em (1.46), encontra-se:

$$\mathcal{A}^*(x, y) = N_1 A_1^* + N_2 A_2^* + N_3 A_3^* \quad (1.50)$$

onde:

$$N_1 = \frac{1}{2D} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (1.51)$$

$$N_2 = \frac{1}{2D} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (1.52)$$

$$N_3 = \frac{1}{2D} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (1.53)$$

sendo que  $N_i$  é igual a 1 sobre o nó  $i$  e igual a zero nos demais nós, e  $D$  é a área do triângulo.

A aproximação de (1.44) por elementos finitos finalmente é obtida

$$-\int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \nabla \mathcal{A}^*) d\Omega - j \int_{\Omega} \mathbf{v} \sigma w \mathcal{A}^* d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} J_e d\Omega = 0 \quad (1.54)$$

onde  $\mathcal{A}^*$  é a solução aproximada de  $A^*$  dada por:

$$\mathcal{A}^* = \sum_{i=1}^{nno} A_i^* N_i \quad (1.55)$$

onde  $nno$  é o número de nós do elemento e  $A_i^*$  é o valor de  $\mathcal{A}^*$  no nó  $i$ .

Substituindo (1.55) em (1.54), obtem-se:

$$-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{nno} \nabla \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \nabla N_i A_i^*) d\Omega - j \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{nno} \mathbf{v} \sigma w N_i A_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} J_e d\Omega = 0 \quad (1.56)$$

Escolhendo a função de teste  $\mathbf{v}$  de modo que  $\mathbf{v}_j = N_j$  e substituindo em (1.56), tem-se:

$$-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{nno} \nabla N_j \cdot (\mathbf{v} \nabla N_i A_i^*) d\Omega - j \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{nno} N_j \sigma w N_i A_i^* d\Omega + \int_{\Omega} N_j J_e d\Omega = 0 \quad (1.57)$$

Retirando o somatório para fora da integral a equação (1.57) transforma-se em:

$$\sum_{i=1}^{nno} \left[ \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot (\nu \nabla N_i A_i^*) d\Omega + j \int_{\Omega} N_j \sigma w N_i A_i^* d\Omega \right] = \int_{\Omega} N_j J_e d\Omega \quad (1.58)$$

o que representando na forma matricial, torna-se:

$$\sum_{i=1}^{nno} (K_{ij} + jB_{ij}) A_i^* = F_j \quad (j = 1, nno) \quad (1.59)$$

Aqui  $K_{ij}$  e  $B_{ij}$  são respectivamente as matrizes real e imaginária de contribuição local, e  $F_j$  é a matriz fonte, sendo elas especificadas abaixo:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_j (\nu \nabla N_i) d\Omega \quad (1.60)$$

$$B_{ij} = \int_{\Omega} N_j \sigma w N_i d\Omega \quad (1.61)$$

$$F_j = \int_{\Omega} N_j J_e d\Omega. \quad (1.62)$$

Finalmente, as matrizes de contribuição local são condensadas em um sistema matricial global onde todos os nós da malha são considerados, assim este sistema é resolvido por um método de resolução de sistema lineares.

## 1.5 IDENTIFICAÇÃO DO ERRO

Reescrevendo a equação (1.41), relativa à fronteira entre dois meios com diferentes relatividades

$$\int_{\Gamma_m} \nu \frac{\partial A^*}{\partial \bar{n}_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_m} \nu \frac{\partial A^*}{\partial \bar{n}_2} d\Gamma \quad (1.63)$$

A aproximação de (1.63) por elementos finitos é [4].

$$\int_{\Gamma_m} N_j \nu \frac{\partial A^*}{\partial \bar{n}_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_m} N_j \nu \frac{\partial A^*}{\partial \bar{n}_2} d\Gamma \quad (1.64)$$

As funções de base  $N_i$  são funções do tipo  $C^0$ , sendo regulares dentro de cada elemento, mas cujas derivadas são descontínuas nas interfaces entre os mesmos. Assim, a expressão (1.64), torna-se:

$$\int_{\Gamma_m} N_j \nu \frac{\partial \mathcal{A}^*}{\partial \bar{n}_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_m} N_j \nu \frac{\partial \mathcal{A}^*}{\partial \bar{n}_2} d\Gamma = \int_{\Gamma_m} J_n d\Gamma \quad (1.65)$$

Como a solução de (1.41) é única [4,6], então  $A^*$  e  $\mathcal{A}^*$  não são iguais, e em geral:

$$\nabla \cdot (\nu \nabla \mathcal{A}^*) - j\sigma w \mathcal{A}^* + J_e = r_i \quad (1.66)$$

O erro então pode ser dividido em duas parcelas:

- $r_i$  a componente regular do erro interna ao elemento  $i$  ;
- $J_n$  a descontinuidade " concentrada" na interface dos elementos.

## 1.6 CONCLUSÕES

Neste capítulo foi apresentada a formulação matemática para campos magnéticos variáveis no tempo. Mostrou-se também como a formulação fraca do problema é resolvida pelo método de elementos finitos, bem como a identificação do erro neste método.

No próximo capítulo serão apresentados quatro critérios de erro, e o processo de geração e refinamento da malha.

# CAPÍTULO 2

## GERAÇÃO AUTO-ADAPTATIVA

### 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão tratados aspectos importantes no que tange à construção de um *sistema auto-adaptativo* para problemas *magnetodinâmicos*.

Em procedimentos *adaptativos*, o modelo de elementos finitos é gerado iterativamente, começando com uma aproximação grosseira para o problema e refinando-a sucessivamente para minimizar o erro na solução. Em um esquema *auto-adaptativo*, o usuário não necessita controlar, ou mesmo estar atento à malha que está sendo desenvolvida. O computador determina onde colocar os elementos e providencia uma melhor qualidade na solução.

Neste trabalho é utilizado um refinamento *auto-adaptativo* Versão *h*. Neste procedimento a ordem das funções de interpolação é mantida constante, enquanto o tamanho dos elementos é progressivamente diminuído. Com esta estratégia consegue-se aumentar o número de elementos em regiões específicas da malha, reduzindo desta forma o erro [4].

A análise de elementos finitos *adaptativa* é baseada no acoplamento de dois diferentes aspectos do *método de elementos finitos*: ( i ) **Geração e Refinamento da malha**, ( ii ) **Análise de erro**.

### 2.2 ANÁLISE DE ERRO

No capítulo anterior foi constatada a existência de erros devido à incapacidade das funções de forma  $N_i$  satisfazerem às condições de fronteira, além do

fato de que a solução obtida é apenas uma aproximação da solução real. Na realidade, existem diferentes fontes de erros na solução obtida com este método, sendo que entre elas pode-se citar [4]:

- a discretização do domínio de estudo;
- a aproximação do potencial por uma função de interpolação de uma determinada ordem  $P$ ;
- a aproximação deficiente nas fronteiras dos elementos, originando descontinuidades que violam as condições de contorno na interface dos elementos;
- o residual resultante dos sistemas de equações. Este erro depende do método utilizado na solução dos sistemas e da precisão alcançada pelo computador utilizado.

Nesta seção serão analisados quatro critérios de erro, um critério de erro "a-priori" e três "a-posteriori". Duas situações são possíveis, uma com o critério de erro "a-priori" sendo utilizado juntamente com qualquer um dos outros três, e a outra, com a utilização apenas de um critério "a-posteriori". O critério de erro "a-priori" atua somente na parte condutora do domínio, enquanto que os critérios "a-posteriori" podem atuar tanto na parte condutora quanto na não condutora. Portanto, quando os critérios de erro "a-priori" e "a-posteriori" forem utilizados conjuntamente, o critério de erro "a-priori" atuará somente na região condutora.

### **2.2.1 Critério de refinamento "a-priori"**

O refinamento "a-priori", que atua somente na parte condutora do domínio de estudo, utiliza o "tamanho" dos elementos da fronteira das regiões condutoras para identificar se estes elementos devem ser ou não refinados. Este refinamento é baseado na comparação entre o "tamanho" dos elementos da fronteira das regiões condutoras e a "profundidade de penetração" (Anexo).

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}} \quad (2.1)$$

O refinamento "a-priori" funciona do seguinte modo:

- a - definir a malha inicial;
- b - estimar o "tamanho" dos elementos da fronteira das regiões condutoras;
- c - se o "tamanho" destes elementos for menor ou igual  $\delta$ , parar o processamento "a-priori", se não refinar estes elementos e voltar ao passo *b*.

### 2.2.2 Critérios de refinamento "a-posteriori"

O gerador de malhas *auto-adaptativas*, no refinamento "a-posteriori", utiliza erros locais, na solução calculada em uma malha inicial (geralmente grosseiramente discretizada), para identificar as regiões que requerem posteriores refinamentos.

O refinamento "a-posteriori" funciona da seguinte forma:

- a - definir a malha inicial;
- b - calcular a solução aproximada nesta malha;
- c - estimar o erro;
- d - se o erro estiver dentro dos limites aceitáveis parar o processamento, se não refinar os elementos e voltar ao passo *b*.

Existem na literatura diferentes critérios para estimação de erros, os quais estão em grande parte divididos em dois grupos: **Métodos Baseados em Formulações Complementares** [7,13,14], e **Método Baseado na Regularidade dos Campos e/ou Potenciais** [8,9,10,11,12].

### 2.2.3 Critério baseado em formulações complementares

Neste critério, os *princípios variacionais complementares* são utilizados para obter duas soluções aproximadas para o problema. A diferença entre as duas soluções provê uma medida de erro que pode ser calculada elemento por elemento. Embora este critério estabeleça de forma elegante um limite superior para o erro na malha, existem alguns inconvenientes na sua utilização, tais como a necessidade de resolver dois sistemas de equações bem como a dificuldade de implementação [13,14].

### 2.2.4 Critérios baseados na regularidade dos campos

Estes critérios baseiam-se na regularidade da solução aproximada e/ou, na análise do comportamento dos campos eletromagnéticos (derivadas da solução) como indicação da precisão alcançada.

Os três critérios de erro "a-posteriori" utilizados neste trabalho são apresentados com detalhes na seqüência.

#### 2.2.4.1 Critério baseado na descontinuidade dos campos

Utilizando as três equações abaixo:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}^* \quad (2.4)$$

A equação (2.3) é satisfeita com a continuidade  $C^0$  de  $\vec{A}^*$ , o que não ocorre na equação (2.2). Esta última resulta em:

$$\nabla \times \vec{H} - \vec{J} = r \quad (2.5)$$

Aplicando-se a equação (2.2) na interface entre duas regiões quaisquer desprovida de densidade de corrente superficial, obtém-se a seguinte condição de fronteira (Figura 2.1):

$$\vec{H}_{t_1} = \vec{H}_{t_2} \quad (2.6)$$

Esta equação deve ser satisfeita na interface entre dois elementos quaisquer. Entretanto, considerando a equação (2.5), tem-se:

$$\vec{H}_{t_1} - \vec{H}_{t_2} = \Delta \vec{H}_t \quad (2.7)$$

onde  $\Delta \vec{H}_t$  é o salto ou descontinuidade na componente tangencial de  $\vec{H}$  na interface entre os elementos 1 e 2.

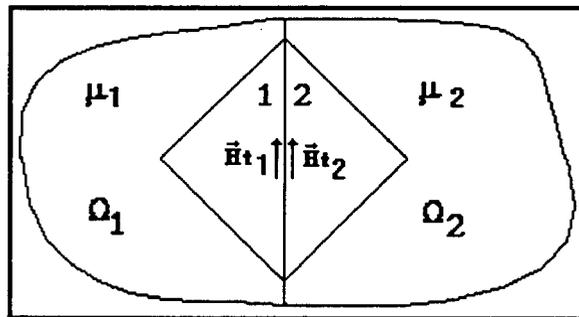


Figura 2.1 Condição de fronteira entre dois elementos vizinhos.

O indicador local de erro é definido por:

$$n_e = \text{Max}_{j=1,3} \left| \int \frac{(\vec{H}_i - \vec{H}_{t_j}) d\Omega}{\sum \vec{B}_i} \right| \quad (2.8)$$

O erro em cada elemento é dado então pela maior descontinuidade entre cada elemento e os de sua vizinhança.

### 2.2.4.2 Critério do teorema de Ampère

O resíduo da equação (2.5), é estimado através da forma integral da equação (2.2) [26]:

$$\int_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Omega} \vec{J} d\Omega \quad (2.9)$$

onde  $\Gamma$  é o contorno e  $\Omega$  é a superfície do elemento.

A equação (2.9) é aplicada sobre o contorno  $\Gamma_i$  e a superfície  $\Omega_i$  do elemento  $i$  (Figura 2.2).

O indicador local de erro é definido por:

$$n_e = \int_{\Gamma_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{\Gamma_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \int_{\Gamma_3} \vec{H}_3 \cdot d\vec{l}_3 - \int_{\Omega_i} \vec{J} d\Omega \quad (2.10)$$

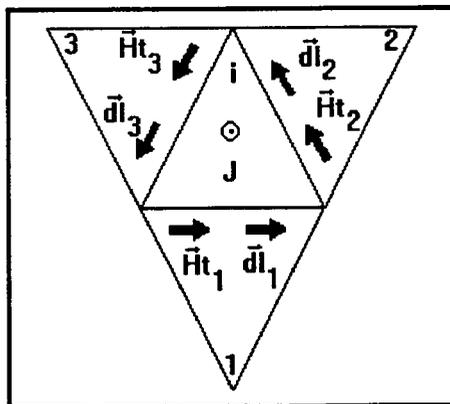


Figura 2.2 Aplicação do teorema de ampère.

### 2.2.4.3 Critério da perturbação dos campos

Este critério analisa a variação no módulo da indução magnética em um mesmo elemento durante o processo iterativo [4,11]. Após obter uma solução em uma malha inicial sem que exista uma solução referente a uma malha anterior, para que a variação de  $|\vec{B}|$  possa ser quantificada, a seleção dos elementos a serem refinados é efetuada, comparando-se o valor de  $|\vec{B}|$  em um elemento com a média calculada nos elementos vizinhos, ou seja, inicialmente o erro é estimado a partir de:

$$|n_e| = |\vec{B}_i - \vec{B}_m| \quad (2.11)$$

onde,  $\vec{B}_i$  é  $|\vec{B}|$  no elemento  $i$ .

$$\vec{B}_m = \frac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n}{n} \quad (2.12)$$

onde  $\vec{B}_m$  é a média de  $|\vec{B}|$  nos elementos vizinhos, e  $n$  é o número de elementos.

Após os elementos terem sido subdivididos uma vez, o erro passa a ser estimado por:

$$|n_e| = |\vec{B}_{K+1} - \vec{B}_K| \quad (2.13)$$

onde  $\vec{B}_k$  é a indução magnética calculada na  $K$ -ésima iteração no elemento  $i$ .

Neste procedimento é considerado que os nós da malha corrente são conectados igualmente na malha anterior. Entretanto, isto é apenas uma aproximação, pois algumas vezes os nós são reconectados de modo a evitar que surjam elementos com ângulos muito pequenos entre os lados adjacentes de um elemento [11].

## 2.3 GERAÇÃO DA MALHA

A geração automática é o mecanismo que permite ao computador, após a estrutura ter sido fornecida pelo operador, discretizar o domínio de estudo construindo um modelo numérico do problema físico automaticamente.

Existe um alto nível de sofisticação nos algoritmos capazes de efetuar este trabalho, pois entre outras coisas, deseja-se que a malha adapte-se perfeitamente a região fornecida pelo operador, sem que no entanto existam elementos distorcidos.

### 2.3.1 Algoritmo do programa EFCAD [1]

Para compreender o algoritmo utilizado no programa EFCAD, deve-se observar a Figura (2.3). O primeiro passo, consiste na obtenção de um segmento padrão na divisão do perímetro de  $R$  em segmentos de comprimento igual ou muito próximo ao segmento padrão (2.3a). Em seguida, são fechados os ângulos agudos existentes (2.3b), iniciando assim a triangularização. Quando todos os ângulos estão fechados, é procurada alguma concavidade existente em  $R$  se encontrada, a região  $R$  é subdividida em duas novas regiões  $R_1$  e  $R_2$  no ponto da concavidade (2.3c).

Novamente, são procurados e fechados novos ângulos agudos que possam ter surgido após a operação anterior (2.3d). A região  $R_1$  está agora totalmente discretizada, enquanto em  $R_2$  não existem ângulos agudos, nem concavidades. O próximo passo, é então calcular o baricentro  $B$  de  $R_2$ , formando o segmento  $BA$  o qual, sendo muito grande deve estar dividido no ponto  $C$ . Novos ângulos agudos são fechados (2.3e), um novo baricentro  $B_1$  é calculado e finalmente os novos nós restantes são unidos a  $B_1$ , finalizando a discretização (2.3f). Obviamente, a dimensão dos elementos e o número dos mesmos na malha depende da extensão do segmento padrão.

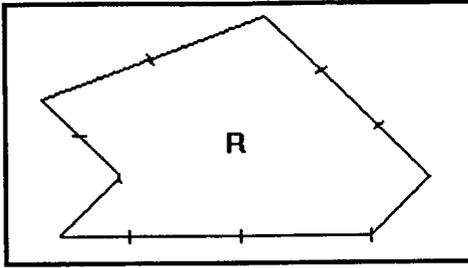


Figura 2.3a Divisão da região em segmentos.

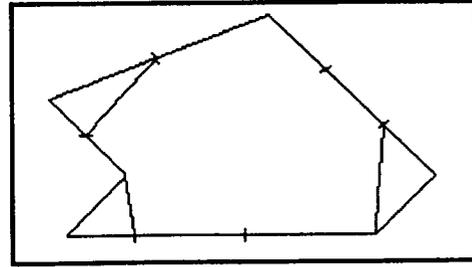


Figura 2.3b Corte de ângulos agudos.

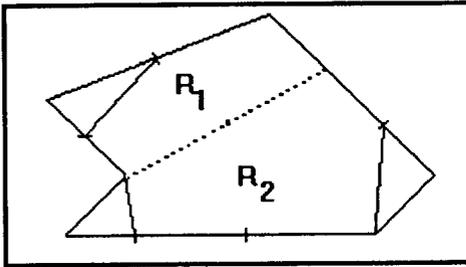


Figura 2.3c Corte na concavidade.

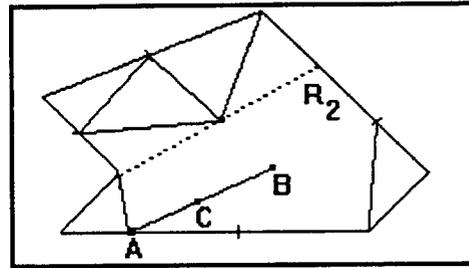


Figura 2.3d Corte de ângulo agudo em  $R_1$  e definição de baricentro em  $R_2$ .

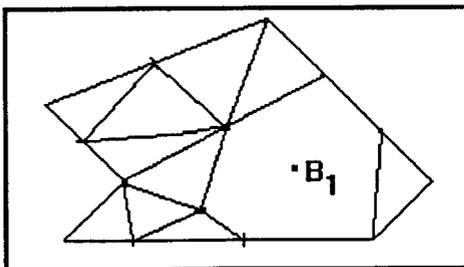


Figura 2.3e Corte de ângulo agudo em  $R_2$  e definição de baricentro  $B_1$ .

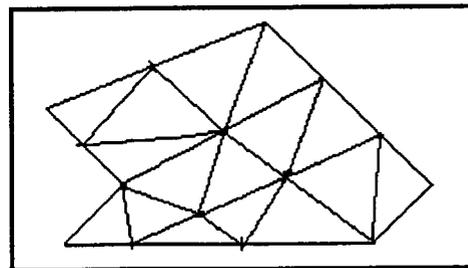
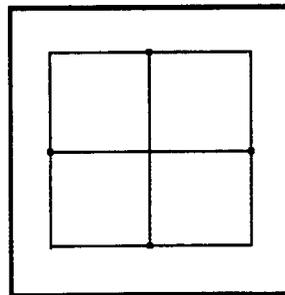


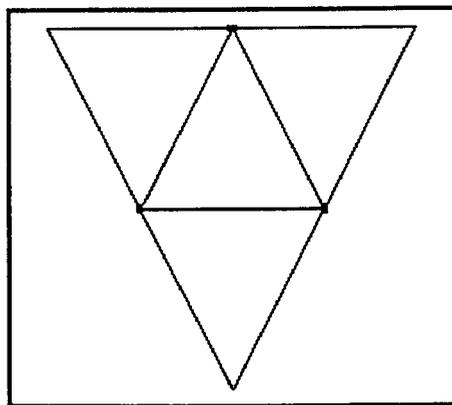
Figura 2.3f Malha final.

## 2.4 REFINAMENTO DA MALHA

O refinamento de um elemento qualquer na malha é efetuado, de maneira geral, através da biseção dos lados do elemento. Ao ser refinado, cada elemento na malha é dividido em quatro elementos menores, através da conexão dos pontos médios dos lados de um quadrilátero ou triângulo (Figura 2.4 e 2.5).



*Figura 2.4 Refinamento de um elemento quadrilateral.*



*Figura 2.5 Refinamento de um elemento triangular.*

## 2.4.1 Os elementos a serem refinados

### 2.4.1.1 Refinamento "a-priori"

Como a "profundidade de penetração" é em geral muito pequena, deve-se discretizar os elementos da fronteira das regiões condutoras, para que sejam menores ou iguais a "profundidade de penetração". Seguindo este raciocínio, é calculado o "tamanho"  $h$  (Figura 2.6) de todos os elementos da fronteira. Em cada iteração os elementos que não satisfizerem à condição

$$h \leq \delta$$

serão escolhidos para serem refinados.

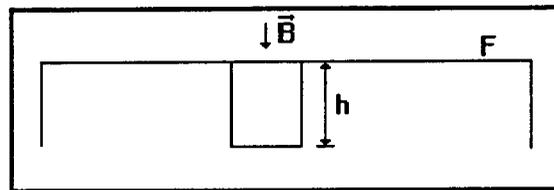


Figura 2.6 Fronteira de uma região condutora

onde:  $F$  - Fronteira da região condutora;

$h$  - "Tamanho" do elemento;

$\vec{B}$  - Indução magnética.

### 2.4.1.2 Refinamento "a-posteriori"

O objetivo do refinamento é fazer o erro em cada elemento aproximadamente constante em toda a malha [4,15]. Seguindo este raciocínio, é calculado um valor médio para o erro em toda a malha, ou seja:

$$\|n_m\| = \sum \frac{\|n_e\|}{n} \quad (2.14)$$

onde:  $n_m$  - é o erro médio na malha;

$n_e$  - é o indicador de erro em cada elemento;

$n$  - é o número de elementos.

Sendo este um processo iterativo, em cada iteração os elementos que não satisfazem a equação (2.15), serão escolhidos para serem refinados.

$$\|n_e\| \leq \|n_m\| * K \quad (2.15)$$

Na equação (2.15),  $K$  é uma função definida externamente que estabelece o limite máximo para  $\|n_e\|$  em cada elemento. Atribuindo-se a unidade ao valor de  $K$ , a cada iteração são refinados os elementos cujo  $n_e$  seja igual ou superior  $\|n_m\|$ . Assim, o erro médio na malha tende a diminuir, ao mesmo tempo em que o módulo do erro por elemento torna-se aproximadamente constante na malha. A interrupção do processo iterativo é efetuada quando o índice de convergência, definido pela equação (2.16), cai abaixo de um valor especificado externamente.

$$C = \frac{\|n_e\|_K - \|n_e\|_{K-1}}{\|n_e\|_K} \quad (2.16)$$

onde:  $K, K-1$  - referem-se respectivamente ao modelo atual e o imediatamente anterior;

$C$  - é o índice de convergência.

## 2.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo foi apresentado o processo de geração e refinamento da malha. Apresentou-se também critérios de erro, que podem ser utilizados para identificar regiões em uma malha de elementos finitos que são mais afetadas pelo erro. Estas regiões são sucessivamente refinadas até uma malha de melhor qualidade ser obtida.

## CAPÍTULO 3

# CONDIÇÃO DE IMPÊDÂNCIA DE FRONTEIRA APLICADA AO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

### 3.1 INTRODUÇÃO

Quando se está trabalhando com médias e altas frequências a "profundidade de penetração" dos campos é muito pequena nas regiões com correntes induzidas, portanto uma malha muito fina é requerida para discretizar estas regiões. A discretização destas regiões através de malhas adaptativas é muito dispendiosa em termos de memória computacional e tempo de processamento. Para superar esta dificuldade será utilizada a *condição de impedância de fronteira* [17,18,19,20,21,22,23]. A *condição de impedância de fronteira* (IBC - Boundary Impedance Condition) é uma condição de fronteira que é aplicada à fronteira das regiões condutoras. A utilização da condição de fronteira permite que regiões com correntes induzidas sejam retiradas do domínio de estudo (Figura 3.1). Assim o número de elementos fica reduzido e o sistema a ser solucionado torna-se menor.

A condição de fronteira utilizada neste trabalho é uma *condição de fronteira de Neumann* não homogênea.

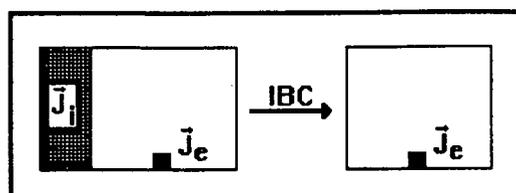


Figura 3.1 Exemplo de aplicação do IBC.

### 3.2 DETERMINAÇÃO DA CONDIÇÃO DE IMPEDÂNCIA

Suponha-se uma onda viajando na direção do eixo  $y$ , conforme Figura 3.2. O campo elétrico  $\vec{E}$  tem somente uma componente  $E_z$  na direção  $z$ , e o campo magnético  $\vec{H}$  tem somente uma componente  $H_x$  na direção  $x$ .

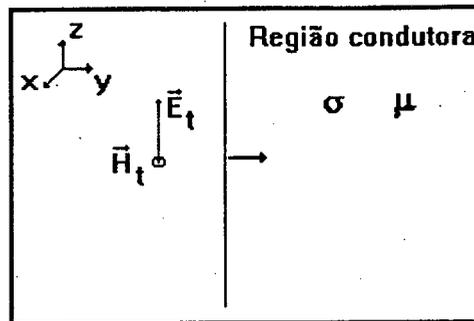


Figura 3.2 Penetração do campo em região condutora semi-infinita.

A equação que descreve o fenômeno na região condutora é:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\nabla \vec{A}^*) = j\omega \sigma \vec{A}^* \quad (3.1)$$

uma vez que  $\vec{A}^* = A^* \vec{k}$  e os campos, para a onda plana uniforme, variam somente com  $y$ , a equação (3.1) torna-se:

$$\frac{d^2 A^*}{d y^2} - j\omega \sigma \mu A^* = 0 \quad (3.2)$$

Definindo-se a constante de propagação como:

$$\gamma^2 = j\omega \sigma \mu \quad (3.3)$$

a equação (3.2) torna-se:

$$\frac{d^2 A^*}{d y^2} - \gamma^2 A^* = 0 \quad (3.4)$$

Uma solução para equação (3.4), para uma onda se propagando na direção  $y$  é [20,21]:

$$A^* = A_o^* e^{-\gamma y} \quad (3.5)$$

onde  $A_o^*$  é o potencial vetor na superfície de separação.

Como tem-se que para potencial vetor:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}^* \quad (3.6)$$

Para uma onda plana viajando na direção  $y$  a única parcela da equação (3.6) que contribui é:

$$\frac{\partial A^*}{\partial y} = B_x \quad (3.7)$$

Seja, a equação (3.8),

$$B_x = \frac{\partial (A_o^* e^{-\gamma y})}{\partial y} = -\gamma A^* \quad (3.8)$$

Como a direção  $y$  é a direção normal então pode-se escrever:

$$B_x = \frac{\partial A^*}{\partial \vec{n}} = -\gamma A^* \quad (3.9)$$

A expressão (3.9), é a condição de impedância de fronteira que será utilizada neste trabalho.

### 3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Considera-se que nesta seção o problema a ser resolvido é idêntico ao do capítulo 1.

A equação que rege o fenômeno no domínio de estudo  $\Omega$  é:

$$\nabla \cdot (\nu \nabla A^*) - j\omega\sigma A^* + J_e = 0 \quad (3.10)$$

onde  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ .

#### 3.3.1 A formulação fraca

A *formulação fraca* é obtida a partir da definição do residual  $r$ , tal que:

$$r = \nabla \cdot (\nu \nabla A^*) - j\omega\sigma A^* + J_e \quad (3.11)$$

em cada domínio regular de  $\Omega$ .

Multiplica-se agora  $r$  por uma função de teste  $v$  suficientemente regular e faz-se a média ponderada igual a zero.

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot (\nu \nabla A^*) d\Omega - j \int_{\Omega} v \sigma \omega A^* d\Omega + \int_{\Omega} v J_e d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

A equação que rege o fenômeno nas regiões não condutoras do domínio de estudo ( $\Omega_1$  e  $\Omega_3$ ) é:

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot (\nu \nabla A^*) d\Omega + \int_{\Omega} v J_e d\Omega = 0 \quad (3.13)$$

Integrando-se o primeiro termo da equação (3.13) por partes e aplicando o teorema da divergência, obtém-se:

$$-\int_{\Omega} \nabla v \cdot (\nu \nabla A^*) d\Omega + \int_{\Gamma_m} v \nu \nabla A^* \cdot \bar{n} d\Gamma + \int_{\Omega} v J_e d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

onde  $\Gamma_m$  representa a fronteira entre as regiões condutora e não condutora.

Considerando-se o segundo termo da equação (3.14):

$$\int_{\Gamma_m} v v_1 \frac{\partial A^*}{\partial \bar{n}} d\Gamma \quad (3.15)$$

onde  $v_1$  é a relutividade magnética na região não condutora ( $\Omega_1$ ).

Este termo será usado como um meio de acoplar as formulações descrevendo o fenômeno em duas áreas condutora e não condutora. Como a continuidade de  $\vec{H}_t$  (tangencial) pode ser assegurada para a fronteira [17,18], então:

$$v_1 \left( \frac{\partial A^*}{\partial \bar{n}} \right)_{nc} = v_2 \left( \frac{\partial A^*}{\partial \bar{n}} \right)_c \quad (3.16)$$

onde:  $v_2$  - relutividade magnética na região condutora ( $\Omega_2$ );

$nc$  - não condutora;

$c$  - condutora.

Então a expressão (3.15), torna-se:

$$\int_{\Gamma_m} v v_2 \frac{\partial A^*}{\partial \bar{n}} d\Gamma \quad (3.17)$$

Como mostra a aproximação unidimensional na seção 3.2, a derivada normal do potencial  $A^*$  é:

$$\frac{\partial A^*}{\partial \bar{n}} = -\gamma A^* \quad (3.18)$$

Com a região condutora retirada do domínio de estudo, a expressão que descreve o fenômeno nas regiões  $\Omega_1$  e  $\Omega_3$  (Equação 3.14) torna-se:

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot (\nabla A^*) d\Omega + \int_{\Gamma_m} v v_2 \gamma A^* d\Gamma = \int_{\Omega} v J_e d\Omega \quad (3.19)$$

### 3.3.2 A formulação de elementos finitos

Como visto no capítulo 1, o *método de elementos finitos* fornece uma técnica geral e sistemática para construir funções bases para a aproximação de *Galerkin* do problema de contorno.

Considerando-se o elemento finito da Figura 3.3:

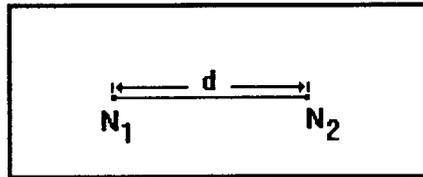


Figura 3.3 Elemento finito unidimensional.

no qual a solução aproximada  $A^*$  é da forma:

$$A^* = a_1 + a_2 \xi \quad (3.20)$$

onde  $\xi$  é uma coordenada local.

A equação (3.20) deve ser satisfeita nos dois nós do elemento, logo:

$$A_1^* = a_1 + a_2 \xi_1 \quad (3.21)$$

$$A_2^* = a_1 + a_2 \xi_2 \quad (3.22)$$

Resolvendo o sistema para  $a_1$  e  $a_2$  e substituindo os coeficientes na equação (3.20), tem-se:

$$\mathcal{A}^* = N_1 A_1^* + N_2 A_2^* \quad (3.23)$$

onde:

$$N_1 = 1 - \frac{\xi}{d} \quad (3.24)$$

$$N_2 = \frac{\xi}{d} \quad (3.25)$$

sendo  $N_i$  igual 1 sobre o nó  $i$  e igual a zero nos demais nós, e  $d$  é o comprimento do elemento.

A aproximação da integral de fronteira da equação (3.19), por elementos finitos é:

$$\int_{\Gamma_m} \mathbf{v} v_2 \gamma \mathcal{A}^* d\Gamma \quad (3.26)$$

onde  $\mathcal{A}^*$  é a solução aproximada de  $A^*$  dada por :

$$\mathcal{A}^* = \sum_{i=1}^{nnf} A_i^* N_i \quad (3.27)$$

onde  $nnf$ , é o número de nós da fronteira  $\Gamma_m$ .

Substituindo a equação (3.27) na equação (3.26), obtém-se:

$$\int_{\Gamma_m} \mathbf{v} v_2 \gamma \sum_{i=1}^{nnf} A_i^* N_i d\Gamma \quad (3.28)$$

e escolhendo a função de teste  $\mathbf{v}$  da forma que  $\mathbf{v}_j = N_j$  e substituindo em (3.28), tem-se:

$$\int_{\Gamma_m} N_j v_2 \gamma \sum_{i=1}^{nnf} A_i^* N_i d\Gamma \quad (3.29)$$

retirando o somatório para fora da integral a equação (3.29), transforma-se:

$$\sum_{i=1}^{nnf} \int_{\Gamma_m} N_j v_2 \gamma A_i^* N_i d\Gamma \quad (3.30)$$

Conseqüentemente a equação a ser integrada em todo domínio de estudo

é:

$$\sum_{i=1}^{nno} \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot (\nu \nabla N_i A_i^*) d\Omega + \sum_{i=1}^{nnf} \int_{\Gamma} N_j \nu_2 \gamma N_i A_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} N_j J_e d\Omega \quad (3.31)$$

onde o primeiro e o terceiro termo foram desenvolvidos no capítulo 1.

A equação (3.31) na forma matricial, torna-se:

$$\sum_{i=1}^{nno} K_{ij} A_i^* + \sum_{i=1}^{nnf} R_{ij} A_i^* = F_j \quad (j=1, nno \text{ e } l=1, nnf) \quad (3.32)$$

Aqui  $K_{ij}$  e  $R_{ij}$  são as matrizes de contribuição local e  $F_j$  é a matriz fonte, sendo elas especificadas abaixo:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot (\nu \nabla N_i) d\Omega \quad (3.33)$$

$$R_{ij} = \int_{\Gamma_m} N_j \nu_2 \gamma N_i d\Gamma \quad (3.34)$$

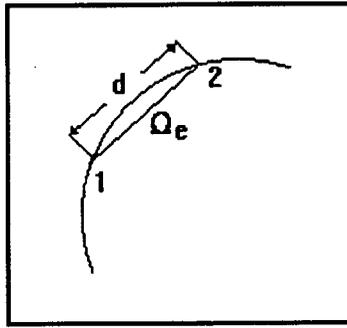
$$F_j = \int_{\Omega} N_j J_e d\Omega \quad (3.35)$$

### 3.3.3 A matriz de contribuição local unidimensional

Considerando-se o elemento  $\Omega_e$ , como mostrado na Figura 3.4, onde 1 e 2 representam os índices nodais. O sistema de coordenada local  $\xi$  do elemento tem sua origem no nó 1. As funções  $N_1$  e  $N_2$ , são dadas em termos de coordenadas local por:

$$N_1 = 1 - \frac{\xi}{d} \quad (3.36)$$

$$N_2 = \frac{\xi}{d} \quad (3.37)$$



*Figura 3.4 Elemento finito unidimensional na fronteira.*

De acordo com a equação (3.34), os coeficientes da matriz para o elemento genérico são:

$$R_{11} = v_2 \gamma \int_0^d N_1 N_1 d\xi = v_2 \gamma \frac{d}{3} \quad (3.38)$$

$$R_{12} = v_2 \gamma \int_0^d N_1 N_2 d\xi = v_2 \gamma \frac{d}{6} \quad (3.39)$$

$$R_{21} = v_2 \gamma \int_0^d N_2 N_1 d\xi = v_2 \gamma \frac{d}{6} \quad (3.40)$$

$$R_{22} = v_2 \gamma \int_0^d N_2 N_2 d\xi = v_2 \gamma \frac{d}{3} \quad (3.41)$$

Então a matriz para o elemento  $\Omega_e$  é:

$$\frac{v_2 \gamma d}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

A matriz de contribuição local unidimensional para cada elemento da fronteira é armazenada em um sistema matricial global, onde todos os nós da malha são considerados.

### 3.4 CONCLUSÕES

*A condição de impedância de fronteira* aplicada ao método de elementos finitos, aplicando a formulação potencial vetor, apresenta as seguintes vantagens:

- a) ganho no tempo de discretização,
- b) sistema menor a ser solucionado e portanto ganho em memória computacional e
- c) ganho no tempo de processamento.

No próximo capítulo será apresentado os resultados obtidos com a geração adaptativa e a condição de fronteira.

# CAPÍTULO 4

## RESULTADOS E COMPARAÇÕES

### 4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados e comentados os resultados obtidos com o *refinamento auto-adaptativo* e com a *condição de impedância de fronteira*. Os resultados obtidos com os critérios de erro serão analisados através da suavização dos campos nas regiões de interesse e da variação da energia magnética a cada iteração para um cabo trifásico. Para testar a validade da *formulação de impedância de fronteira* serão realizadas duas comprovações:

- comparação entre as linhas de campo obtidas com o programa (EFCC), e o programa com a *condição impedância de fronteira* (EFCC + IBC) para uma linha de potência na presença de uma blindagem [18];
- confrontação entre soluções numéricas obtidas para o  $H_t$  (tangencial) na superfície de separação entre uma placa condutora e uma espira. O problema é axi-simétrico e uma fonte de excitação de alta frequência é utilizada [27].

### 4.2 REFINAMENTO AUTO-ADAPTATIVO

#### 4.2.1 Cabo trifásico

Nesta seção o objeto a ser analisado é a estrutura da Figura 4.1, onde temos um cabo trifásico com três condutores e uma blindagem. Os condutores internos possuem um raio de 24.25mm. A blindagem tem um raio interno de 109.5mm, e uma espessura de 16mm. Nos condutores *A* e *B* e na blindagem *C* serão induzidas correntes  $\vec{J}_i$  devido a uma variação temporal da corrente  $\vec{J}_e$ . As regiões condutoras possuem  $\mu_r = 1$

e  $\sigma = 1 \times 10^7$  ( $1/\Omega\text{m}$ ). Inicialmente é apresentado a estrutura do cabo na Figura 4.1, e a malha inicial na Figura 4.2. Em seguida são apresentadas as linhas equipotenciais para as frequências de 100Hz (Figura 4.3), e 1000Hz (Figura 4.4). A malha inicial possui 444 nós e 826 elementos, e a "profundidade de penetração" do campo para 100Hz e 1000Hz são respectivamente 15.90 mm e 5.035 mm.

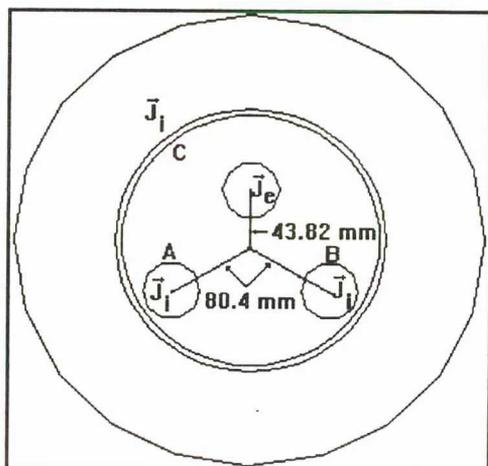


Figura 4.1 Estrutura do cabo.

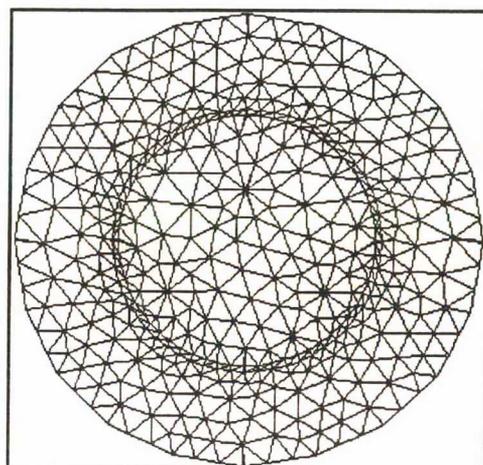


Figura 4.2 Malha inicial.

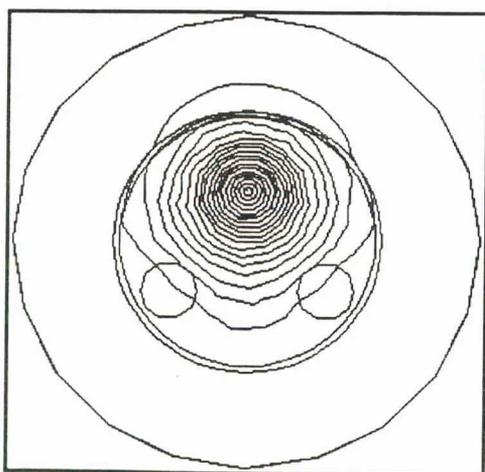


Figura 4.3 Linhas equipotenciais-100Hz.

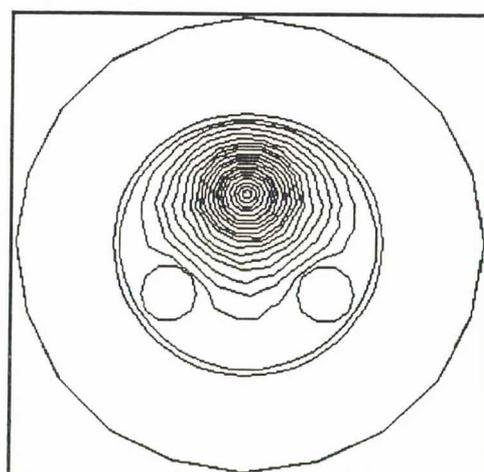


Figura 4.4 Linhas equipotenciais-1000Hz.

### 4.2.1.1 Descontinuidade de campo

As malhas finais obtidas com este critério são mostradas nas Figuras 4.5 e 4.6. Na frequência de 100Hz a malha final possui 1548 elementos e 805 nós, e em 1000Hz possui 3312 elementos e 1667 nós

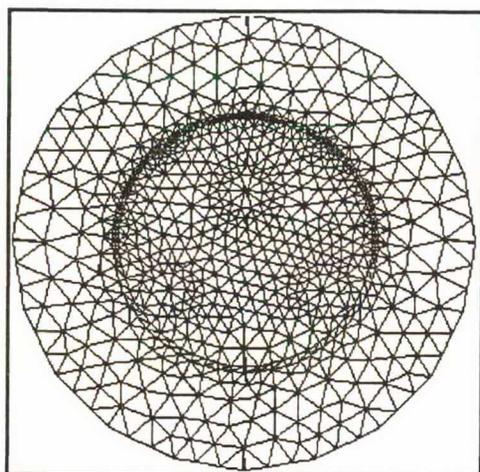


Figura 4.5 Malha final-100Hz.

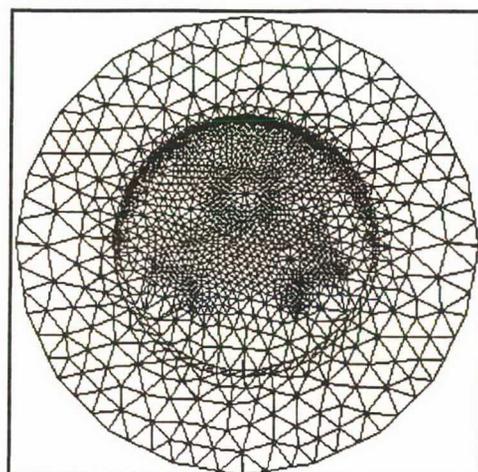


Figura 4.6 Malha final-1000Hz.

As linhas equipotenciais estão mostradas nas Figuras 4.7 e 4.8.

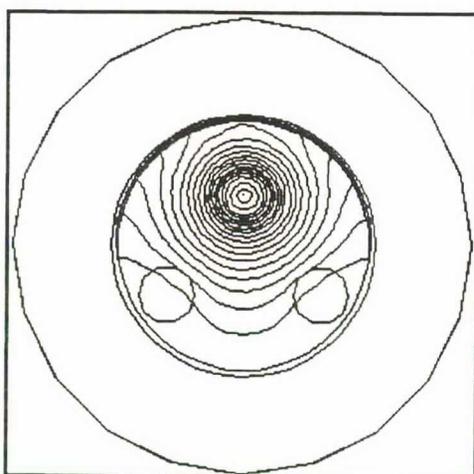


Figura 4.7 Linhas equipotenciais-100Hz.

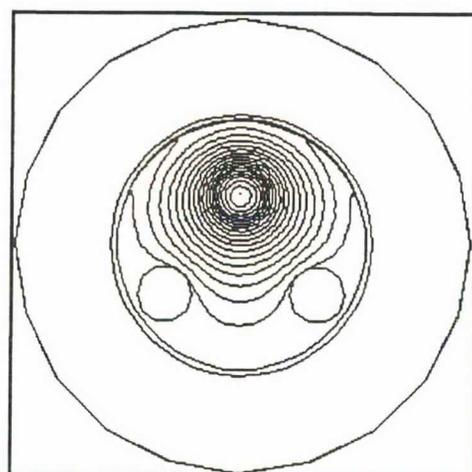
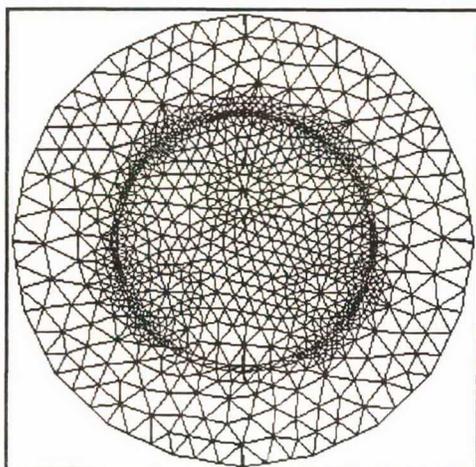


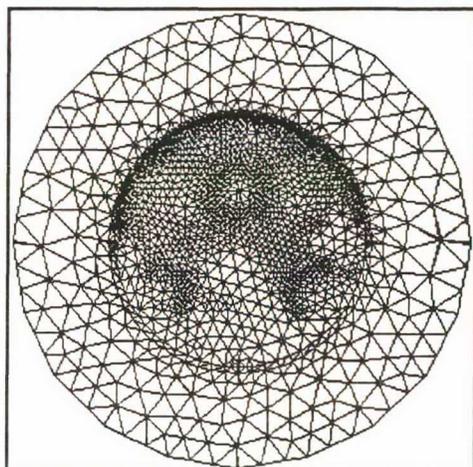
Figura 4.8 Linhas equipotenciais-1000Hz.

#### 4.2.1.2 Teorema de Ampère

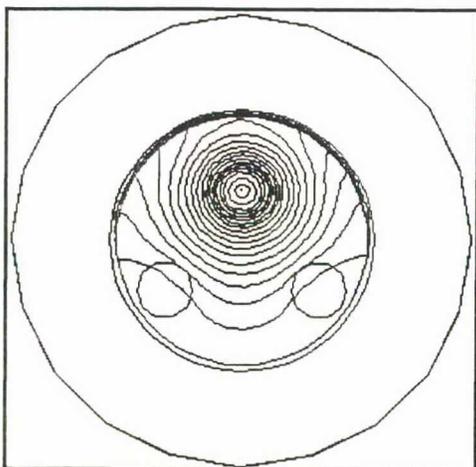
As Figuras 4.9 e 4.10 apresentam as malhas finais refinadas, e as Figuras 4.11 e 4.12 apresentam as equipotenciais relativas a este critério de erro. Na frequência de 100Hz a malha final possui 1930 elementos e 996 nós, e em 1000Hz possui 3396 elementos e 1729 nós.



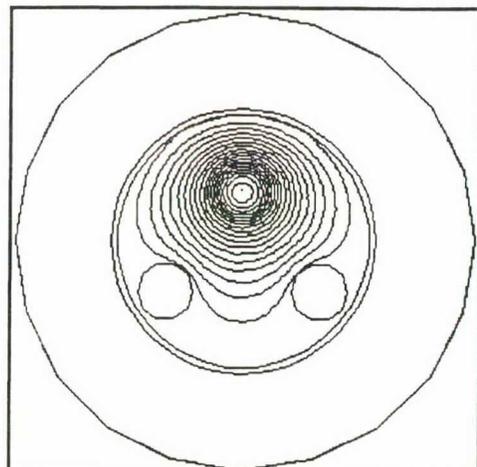
*Figura 4.9 Malha final-100Hz.*



*Figura 4.10 Malha final-1000Hz.*



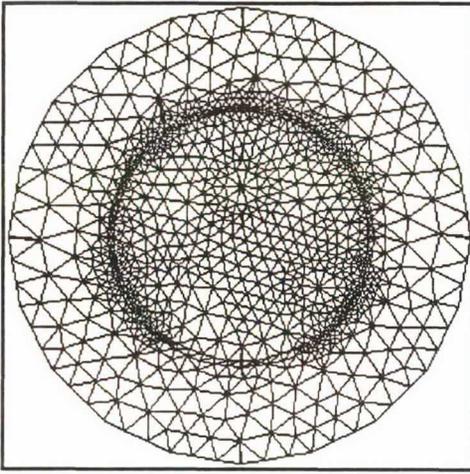
*Figura 4.11 Linhas equipotenciais-100Hz.*



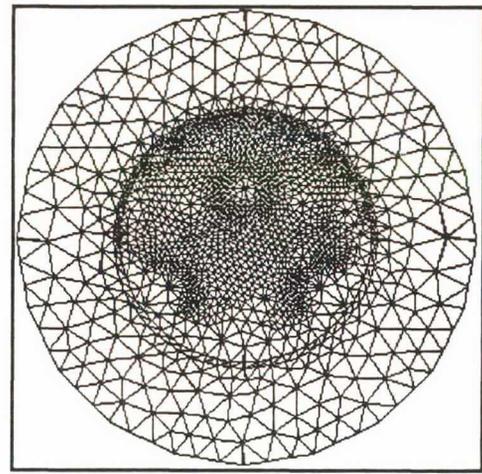
*Figura 4.12 Linhas equipotenciais-1000Hz.*

### 4.2.1.3 Perturbação dos campos

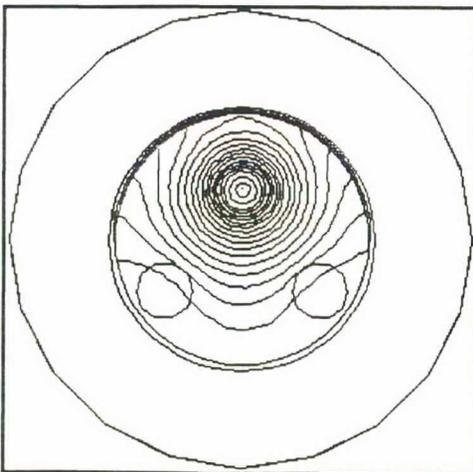
As malhas finais obtidas com este critério são mostradas nas Figuras 4.13 e 4.14, e suas linhas equipotenciais nas Figuras 4.15 e 4.16. Na frequência de 100Hz a malha final possui 1924 elementos e 993 nós, e em 1000Hz possui 2988 elementos e 1530 nós.



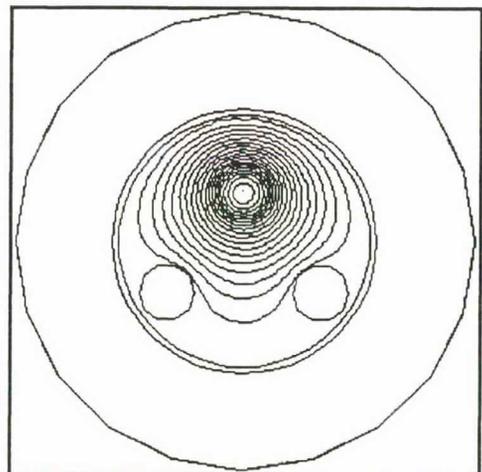
*Figura 4.13 Malha final-100Hz.*



*Figura 4.14 Malha final-1000Hz.*



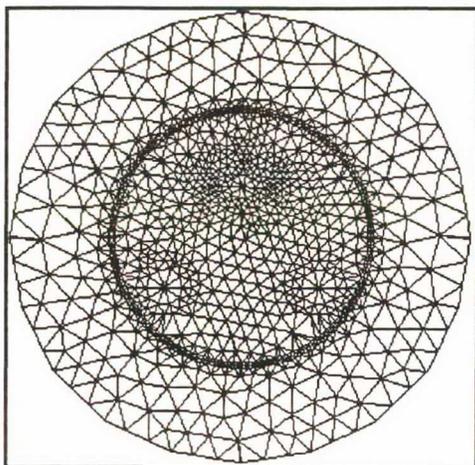
*Figura 4.15 Linhas equipotenciais-100Hz.*



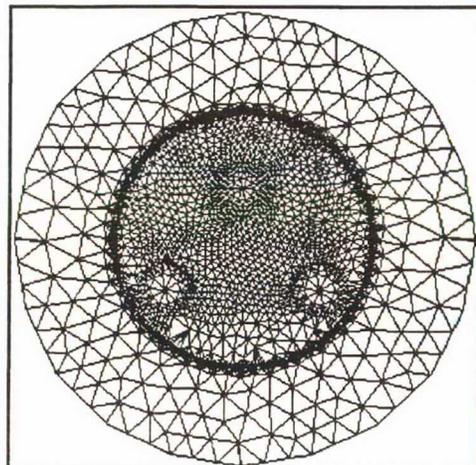
*Figura 4.16 Linhas equipotenciais-1000Hz.*

#### 4.2.1.4 Refinamento "a-priori" e "a-posteriori"

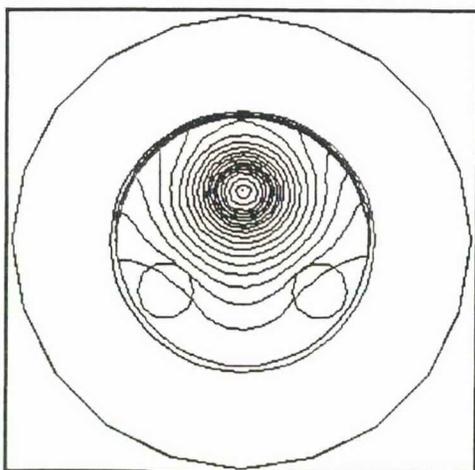
Finalmente, as malhas finais obtidas com este critério são mostradas nas Figuras 4.17 e 4.18, e suas linhas equipotenciais nas Figuras 4.19 e 4.20. Na frequência de 100Hz a malha final possui 1974 elementos e 1018 nós, e em 1000Hz possui 4802 elementos e 2432 nós. Como critério de erro "a-posteriori" é utilizado para este caso a descontinuidade de campo.



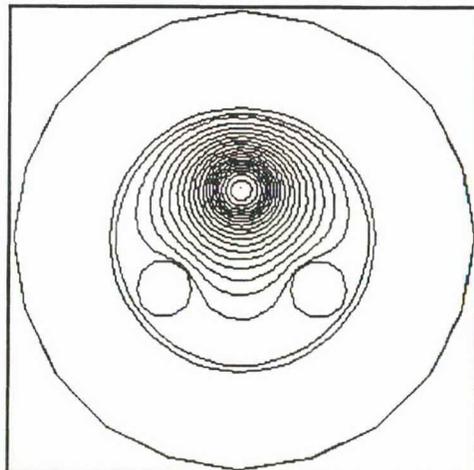
*Figura 4.17 malha final-100Hz.*



*Figura 4.18 malha final-1000Hz.*



*Figura 4.19 Linhas equipotenciais-100Hz.*



*Figura 4.20 Linhas equipotenciais-1000Hz.*

#### 4.2.1.5 Tabelas

A variação de energia magnética a cada iteração do cabo trifásico da seção 4.2.1, para uma frequência de 60Hz é fornecida na Tabela 4.1. A Tabela 4.2 apresenta o número de nós e o tempo de processamento para o cabo nas frequências de 100Hz e 1000Hz.

	Energia (J/m) 1 iteração	Energia (J/m) 2 iteração	Energia (J/m) 3 iteração	Energia (J/m) 4 iteração
<b>Critério 1</b>	$0.6294 \times 10^{-5}$	$0.8490 \times 10^{-5}$	$0.1063 \times 10^{-4}$	$0.1063 \times 10^{-4}$
<b>Critério 2</b>	$0.6294 \times 10^{-5}$	$0.9405 \times 10^{-5}$	$0.1778 \times 10^{-4}$	$0.1778 \times 10^{-4}$
<b>Critério 3</b>	$0.6294 \times 10^{-5}$	$0.1172 \times 10^{-4}$	$0.2399 \times 10^{-4}$	$0.2399 \times 10^{-4}$
<b>Critério 4</b>	$0.6294 \times 10^{-5}$	$0.7872 \times 10^{-5}$	$0.2852 \times 10^{-4}$	$0.2852 \times 10^{-4}$

Tabela 4.1

Frequência (hz)	Critério 1		Critério 2		Critério 3		Critério 4	
	nno	Tempo (s)	nno	Tempo (s)	nno	Tempo (s)	nno	Tempo (s)
100	1018	200	805	166.8	943	180.9	996	175.4
1000	2432	689.3	1667	505	1530	464.4	1729	550

Tabela 4.2

onde: Critério 1 - Critério "a-priori" e "a-posteriori" (Descontinuidade dos campos);

Critério 2 - Descontinuidades dos campos;

Critério 3 - Perturbação dos campos;

Critério 4 - Teorema de Ampère.

### 4.2.2 Conclusões

Como pode ser observado através da análise das malhas e linhas equipotenciais obtidas para o cabo trifásico na seção (4.2.1), os critérios de erro mostraram-se muito eficazes: em relação a suavização dos campos, e na identificação das regiões necessitando refinamento. Através dos resultados obtidos em relação a variação da energia magnética, pode-se concluir que os quatro critérios de erro obtiveram uma boa convergência para a frequência analisada (Tabela 4.1). Através da observação dos valores apresentados pela tabela 4.2, pode-se notar que o critério da descontinuidades dos campos apresentou um melhor resultado que os demais critérios em relação ao número de nós e ao tempo de processamento. Para todos os casos acima considerados, o critério de parada é o mesmo.

A grande dificuldade da utilização de critérios de erro "a-posteriori" está na malha inicial. Uma malha inicial mal definida pode gerar falsas estimativa de erro, e por conseqüência uma malha final incorreta. A proposta inicial deste trabalho foi implementar um critério de erro "a-priori". Este critério teria o objetivo de colocar pelo menos um elemento dentro da "profundidade de penetração". Com isto se conseguiria uma malha inicial de melhor qualidade. Mas a utilização conjunta dos critérios de erro "a-priori" e "a-posteriori" apresentou grandes dificuldades na discretização do domínio de estudo em médias e altas frequências. O grande número de elementos gerados nestas frequências para promover a discretização, depende muita memória computacional e tempo de processamento.

## 4.3 CONDIÇÃO DE IMPEDÂNCIA DE FRONTEIRA

### 4.3.1 Linha de potência

Para fazer uma comparação entre as linhas equipotenciais entre os dois programas, analisar-se-á a estrutura apresentada na Figura 4.21. Primeiro o problema será solucionado utilizando o programa EFCC. Depois esta análise será repetida retirando-se a região condutora do domínio de estudo e aplicando a *condição de impedância de fronteira*.

#### a) EFCC

As Figuras 4.21 e 4.22 apresentam a estrutura a ser estudada e a sua malha. A região condutora possui um  $\mu_r = 1$  e  $\sigma = 10^7$  ( $1/\Omega\text{m}$ ), e a "profundidades de penetração" para às frequências de 3000Hz, 5000Hz e 7000Hz, são respectivamente **2,9mm**, **2,2mm** e **1,8mm**. Para que bons resultados sejam obtidos para as três frequências, é necessário um forte refinamento na fronteira da região condutora, devido ao decaimento exponencial do campo à medida que penetra nesta região.

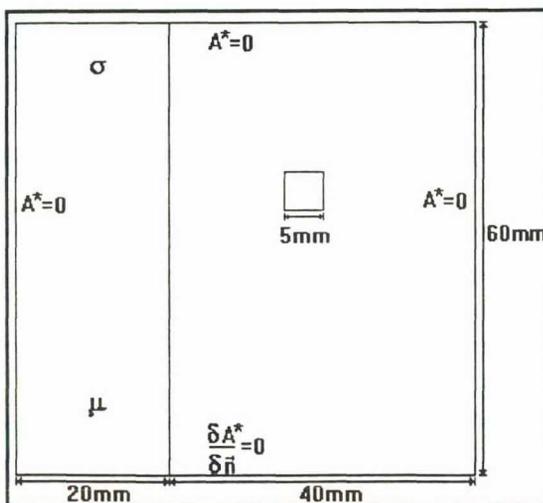


Figura 4.21 Estrutura.

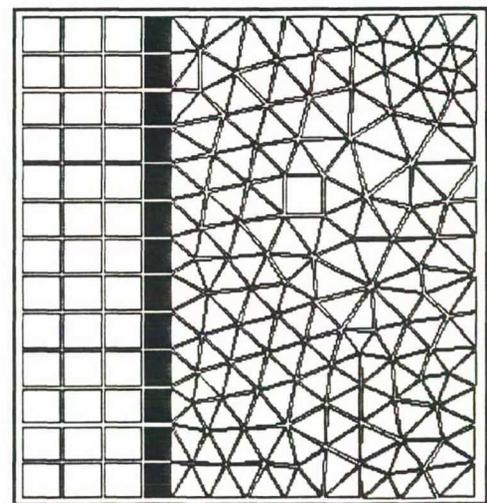
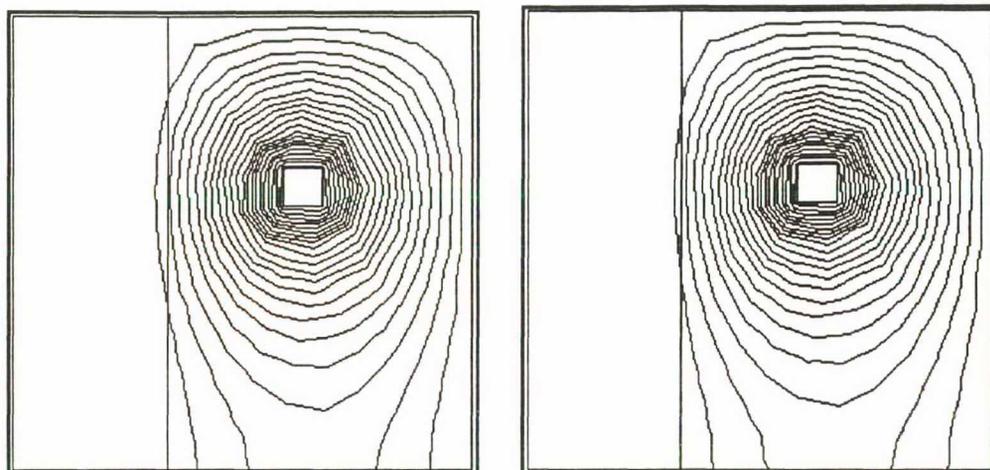
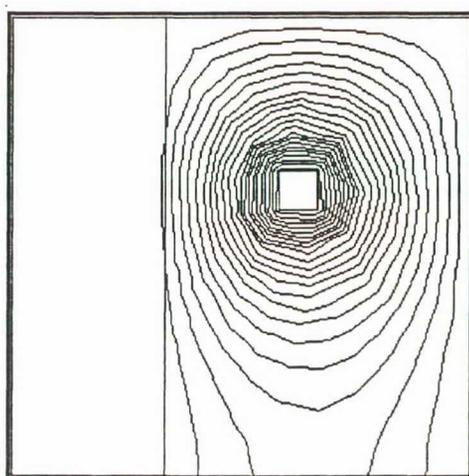


Figura 4.22 Malha.

As linhas equipotenciais são mostradas nas Figuras 4.23, 4.24 e 4.25.



*Figura 4.23 Linhas equipotenciais-3000Hz.      Figura 4.24 Linhas equipotencia-5000Hz*



*Figura 4.25 Linhas equipotenciais-7000Hz.*

b) EFCC + IBC

Nas figuras 4.26 e 4.27, tem-se a estrutura a ser estudada e a malha. As linhas equipotenciais para as três frequências são mostradas nas Figuras 4.28, 4.29 e 4.30.

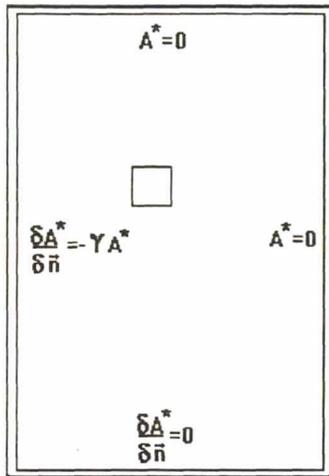


Figura 4.26 Estrutura.

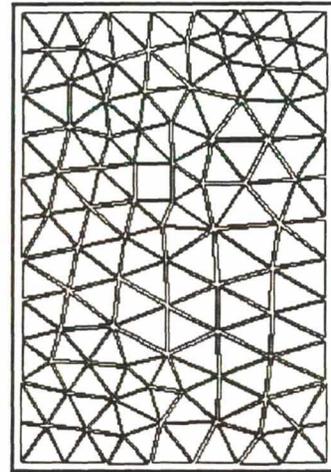


Figura 4.27 Malha.

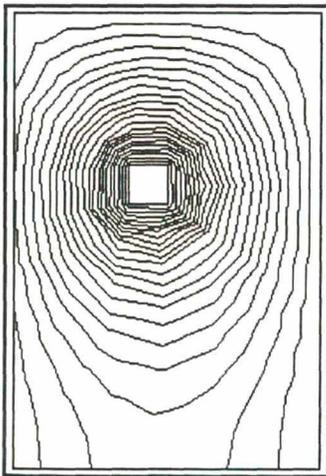


Figura 4.28 Linhas equipotenciais-3000Hz.

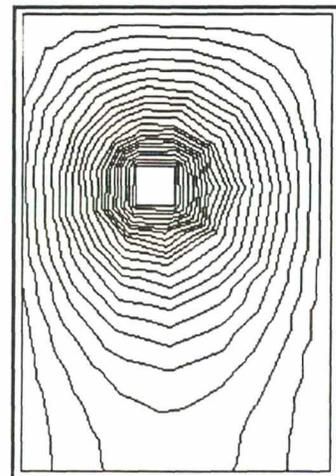


Figura 4.29 Linhas equipotenciais-5000Hz.

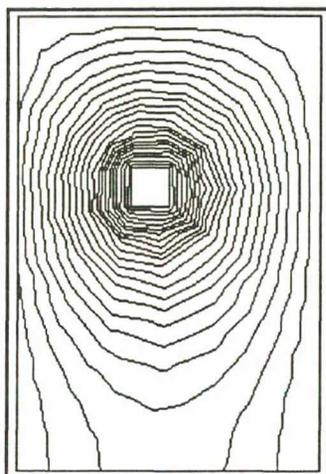


Figura 4.30 Linhas equipotenciais-7000Hz.

Na Tabela 4.3 tem-se o número de nós e elementos, e o tempo de processamento obtidos para os dois programas na frequência de 1000Hz.

	Número de nós	Número de elementos	Tempo de resolução (s)
EFCC	397	464	3
EFCC + IBC	104	169	0.28

Tabela 4.3

### 4.3.2 Curvas para o campo tangencial

O campo magnético tangencial através da superfície de separação entre as regiões condutora e não condutora da estrutura apresentada na Figura 4.31, é utilizado para fazer uma confrontação entre duas soluções numéricas. A solução numérica calculada por Sakellaris [27], para as frequências de 1KHz e 10MHz são apresentadas nas Figuras 4.32 e 4.33. As soluções numéricas obtidas para as duas frequências através do programa com *condição de impedância de fronteira (EFCC + IBC)* são apresentadas respectivamente nas Figuras 4.34 e 4.35. A região condutora possui  $\mu_r = 100$  e  $\sigma = 5 \times 10^6$  ( $1/\Omega\text{m}$ ).

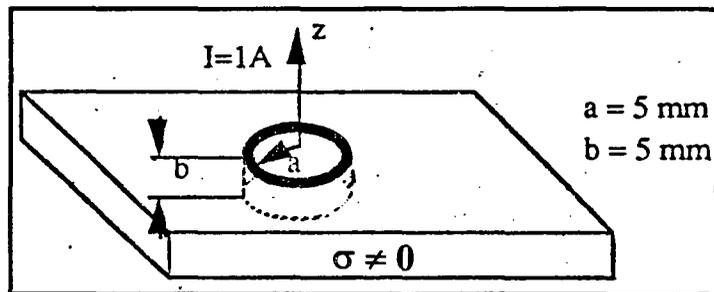


Figura 4.31 Estrutura.

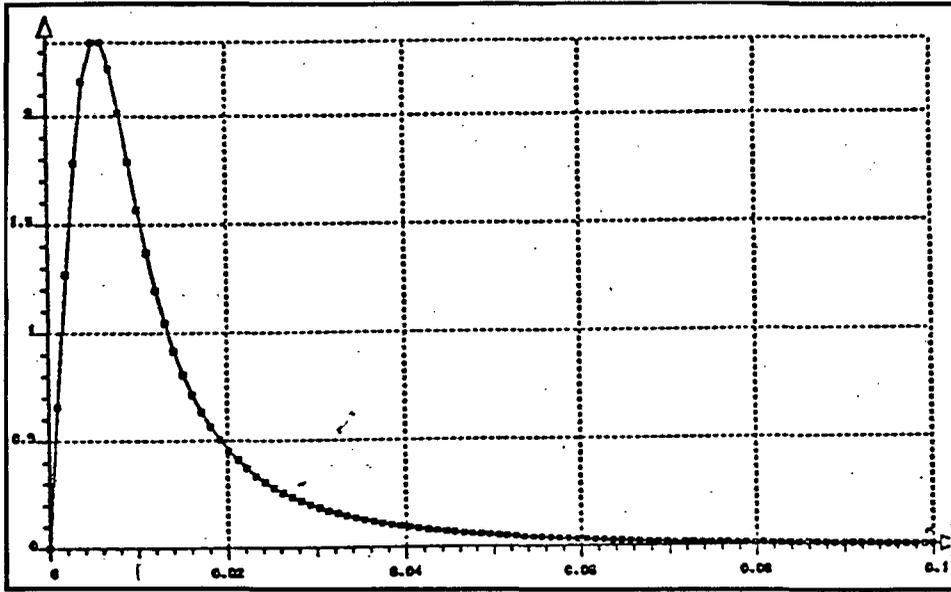


Figura 4.32 Solução numérica (sakellaris) [27]- 1KHz.

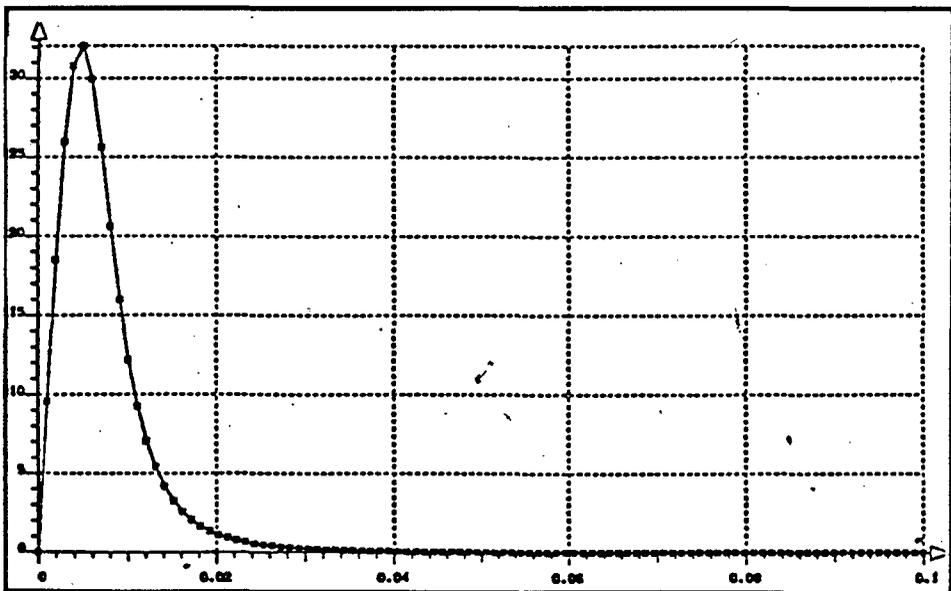
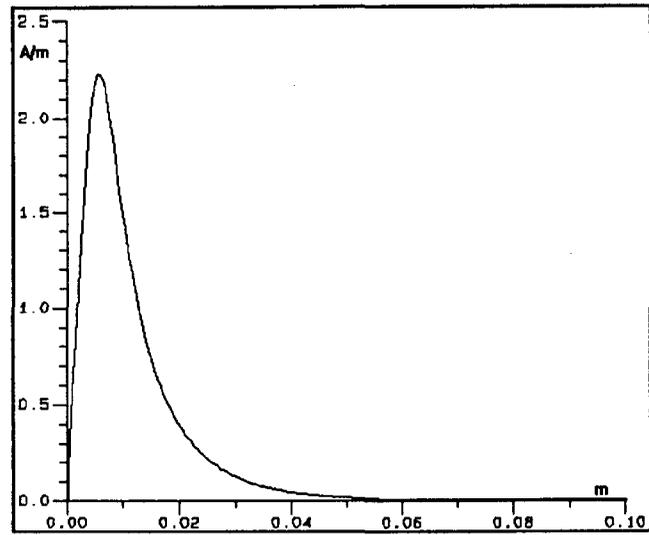
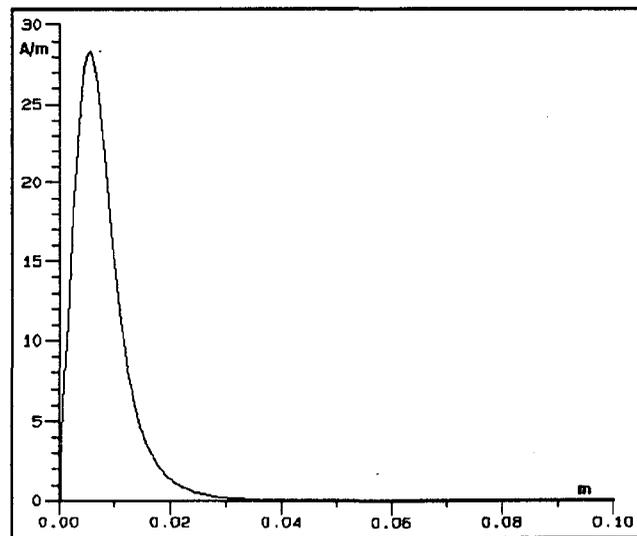


Figura 4.33 Solução numérica (Sakellaris) [27]- 10MHz.



*Figura 4.34 Solução numérica (IBC)- 1KHz.*



*Figura 4.35 Solução numérica (IBC)- 10MHz.*

Na Figura 4.36, tem-se a curva do campo tangencial para a condição de frequência infinita, a qual corresponde ao caso em que o campo não penetra na região condutora (potencial vetor magnético constante na superfície de separação).

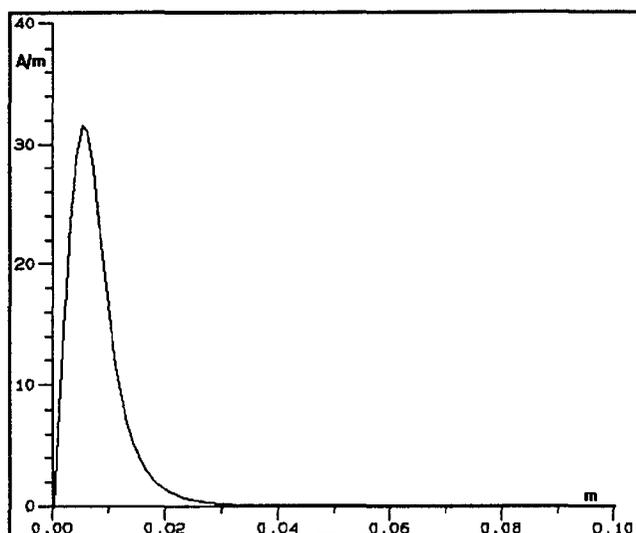


Figura 4.36 Frequência infinita.

### 4.3.3 Conclusões

Através da confrontação entre as linhas equipotenciais para a linha de potência da seção 4.3.1, conclui-se que existe uma boa concordância entre o programa EFCC e o programa com a *condição de impedância de fronteira* (EFCC + IBC). Os resultados numéricos obtidos apresentados na Tabela 4.3, comprovam que a utilização da *impedância de fronteira* torna menor o sistema a ser solucionado e o tempo de processamento.

Com referência a estrutura da Figura 4.31, pode-se notar que existe uma boa concordância entre as curvas obtidas por Sakellaris e o programa (EFCC + IBC) para a

freqüência de 1KHz (Figuras 4.32 e 4.34). Contudo para a freqüência de 10MHz, obteve-se uma pequena diferença entre os dois programas (Figuras 4.33 e 4.35).

Como alternativa para fugir do refinamento das regiões com correntes induzidas em médias e altas freqüências, geralmente era aplicada a condição Dirichlet na superfície de separação (condição de freqüência infinita - Figura 4.36). Pela observação das curvas obtidas para o campo tangencial nas freqüências de 1Khz e 10Mhz (Figuras 4.34 e 4.35), pode-se notar que este tipo de aplicação só consegue bom resultado na freqüência de 10Mhz.

## CONCLUSÃO FINAL

No decorrer deste trabalho foram apresentados os conceitos de geração de malhas auto-adaptativas e impedância de fronteira.

Inicialmente, apresentou-se no Capítulo 1 alguns conceitos fundamentais sobre eletromagnetismo e sobre a solução de problemas magnetodinâmicos pelo método de elementos finitos. Em seguida no Capítulo 2 foram apresentados quatro critérios de erro e o processo de geração e refinamento da malha.

No Capítulo 3, foi apresentada a formulação matemática para condição de impedância de fronteira pelo método de elementos finitos.

O capítulo 4, apresentou os resultados obtidos com a condição de impedância de fronteira e com os critérios de erro. Os valores numéricos obtidos demonstram que a utilização do refinamento adaptativo melhora bastante a qualidade da malha inicial, tornando seu uso muito importante em problemas magnetodinâmicos. Constatou-se que em médias e altas frequências a utilização do procedimento adaptativo aumenta a dimensão da matriz de contribuição global. Este procedimento torna o processo de cálculo muito lento e com grande custo computacional. Foi constatado também, que a condição de impedância de fronteira é uma ferramenta muito útil na modelagem de problemas magnetodinâmicos em médias e altas frequências.

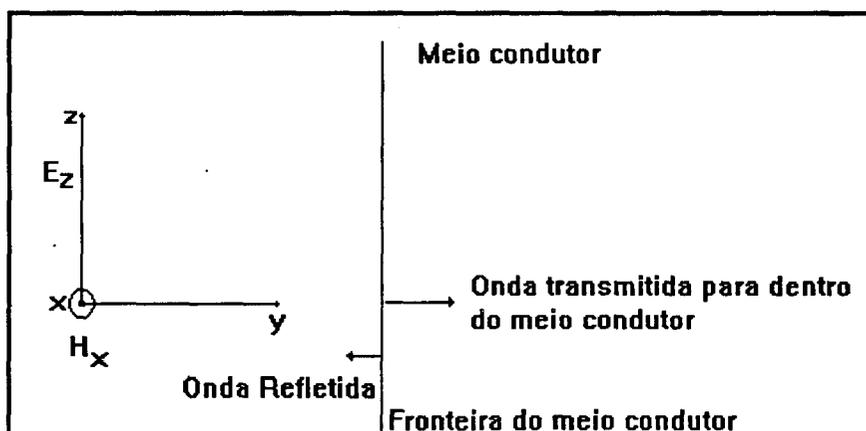
Concluiu-se ainda, que a utilização da condição de impedância de fronteira reduz o tamanho do problema e o tempo de processamento, permitindo a análise de problemas magnetodinâmicos que antes eram de difícil abordagem.

Como sugestão para trabalhos futuros, pode-se citar a utilização da condição de impedância de fronteira em problemas magnetodinâmicos tridimensionais em médias e altas frequências.

## ANEXO

### PROFUNDIDADE DE PENETRAÇÃO

Supondo que uma onda progressiva se choca perpendicularmente à fronteira de um meio condutor, como mostra a Figura 1. Uma parte da energia incidente é refletida, enquanto o restante penetra no meio condutor. A onda refletida no nosso caso é desprezada [24].



*Figura 1 Onda plana entrando em um meio condutor com incidência normal.*

A equação de Maxwell obtida da lei de Ampère é:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (01)$$

ou em coordenadas retangulares:

$$\left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{k} =$$

$$\sigma (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) + \frac{\partial (D_x \vec{i} + D_y \vec{j} + D_z \vec{k})}{\partial t} \quad (02)$$

Para uma onda plana viajando na direção  $y$  as únicas componentes da equação (02) que contribuem são:

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = \sigma E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (03)$$

A equação de *Maxwell* obtida da *lei de Faraday* é:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (04)$$

ou em coordenadas retangulares:

$$\left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k} = -\frac{\partial (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})}{\partial t} \quad (05)$$

Para uma onda plana viajando na direção  $y$ , as únicas componentes da equação (05) que contribuem são:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (06)$$

Derivando a equação (03) em relação a  $y$  e a equação (06) em relação a  $t$ , tem-se:

$$-\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \sigma \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} \right) \quad (07)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_z}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \quad (08)$$

Visto que a ordem de diferenciação é indiferente, o lado esquerdo da equação (07) é igual ao lado esquerdo da equação (08), de modo que:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \quad (09)$$

Admitindo a variação harmônica de  $H_x$  em relação a  $t$ , pode-se escrever:

$$H_x = H_0 e^{j\omega t} \quad (10)$$

Tomando a primeira e a segunda derivada da equação (10) em relação a  $t$  e substituindo estes valores na equação (09), tem-se:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \varepsilon \mu \omega^2 H_x - j\omega \sigma \mu H_x = 0 \quad (11)$$

o qual, reagrupando os termos torna-se:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \mu \varepsilon) H_x = 0 \quad (12)$$

seja

$$\gamma^2 = j\omega \mu \sigma - \omega^2 \mu \varepsilon \quad (13)$$

Então a equação (12), reduz-se a:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \gamma^2 H_x = 0 \quad (14)$$

onde o termo  $\gamma$  é chamada de constante de propagação.

Uma solução da equação (14) para uma onda se propagando na direção positiva  $y$  é [24]:

$$H_x = H_0 e^{-\gamma y} \quad (15)$$

Nos condutores,  $\sigma \gg \omega \varepsilon$ , de modo que a equação (13) se reduz a :

$$\gamma^2 = j\omega \mu \sigma \quad (16)$$

e

$$\gamma \equiv \sqrt{j\omega\mu\sigma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (17)$$

Portanto,  $\gamma$  tem uma parte real e imaginária. Fazendo  $\gamma = \alpha + j\beta$ , vê-se que a parte real  $\alpha$  está associada a atenuação e  $\beta$ , a parte imaginária, esta associada à fase.

Substituindo o valor de  $\gamma$  da equação (17) na equação (15), tem-se:

$$H_x = H_0 e^{\frac{-\sqrt{\omega\mu\sigma}}{\sqrt{2}}y} e^{\frac{-j\sqrt{\omega\mu\sigma}}{\sqrt{2}}y} \quad (18)$$

Na equação (18), o fator de atenuação é dado por:

$$e^{\frac{-\sqrt{\omega\mu\sigma}}{\sqrt{2}}y} \quad (19)$$

e o fator de fase por:

$$e^{\frac{-j\sqrt{\omega\mu\sigma}}{\sqrt{2}}y} \quad (20)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular (rad/s), e  $y$  é a distância (m).

A equação (18), é uma solução da equação da onda para uma onda plana se propagando na direção positiva  $y$  em um meio condutor. Ela dá a variação de  $H_x$  tanto em grandeza como em fase, em função de  $y$ .

Recorrendo à Figura 1, e considerando a onda que penetra no meio condutor, isto é, a onda transmitida. Seja  $y = 0$  na fronteira do meio condutor, de modo que  $y$  aumenta positivamente para dentro do meio condutor.

Seja a equação (18) escrita na forma :

$$H_x = H_0 e^{\frac{-y}{\delta}} e^{-j\frac{y}{\delta}} \quad (21)$$

onde  $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$  e  $f$ , é a frequência.

Em  $y = 0$ ,  $H_x = H_0$  esta é a amplitude do campo na superfície do meio condutor . Agora  $\delta$  na equação (21) tem a dimensão de distância. A uma distância  $y = \delta$ , a amplitude do campo é:

$$|H_x| = H_0 e^{-1} \quad (22)$$

Desse modo,  $H_x$  diminui para 36,8 % do seu valor inicial, enquanto a onda penetra a uma distância  $\delta$ . Será chamado de "profundidade de penetração" o valor  $\delta$ .

Observando a expressão (23):

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (23)$$

notamos que quanto maior a frequência, menor é a penetração do campo, por outro lado, se o meio é ferromagnético ( $\mu \gg \mu_0$ ) menor será a penetração e , finalmente, quanto maior a condutividade menor será  $\delta$ .

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] BASTOS, J. P.A. "Eletromagnetismo e Cálculos de Campo". Editora da UFSC, Florianópolis, 1989.
- [02] SILVESTER, P. "Campos Eletromagnéticos Modernos". Editora Polígono, 1971.
- [03] BECKER, E. B. & CAREY, G.F. & ODEN, J.T. "Finite Elements: an Introduction". Vol. 1 in Texas Finite Elements Series, Englewood Cliffs (New Jersey-USA), Printice Hall, 1981.
- [04] VANTI M. G. "Um sistema Automático para Geração de Malhas Adaptativas". Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, Julho de 1992.
- [05] STRANG, G. & FIX, O. J. "An Analysis of the Finite Element Method". Printice-Hall, 1983.
- [06] MESQUITA, R.C. "Calculo de Campos Tridimensionais usando Elementos Finitos: Magnetoestática". Tese de Doutorado, UFSC, 1990.
- [07] CENDES, Z. J. & SHENTON D. & SHAHNASSER, H. "Magnetic Field Computation using Delaunay Triangulation and Complementary Finite Element Methods". IEEE Trans. on Magn., vol. 19, number 6, pp. 2551-2554, November, 1983.
- [08] BABUSKA, I. & RHEINBOLDT, W. C. "A-Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method". Int. J. Numer. Methods Ing., vol. 12, pp. 1597-1615, 1978.

- [09] COULUMB, J-L. "2D and 3D Mesh Generation. Experiment with the Delaunay's Tessellation". Journées sur la Generation Automatique et L'adaptation de maillages, Grenoble-France, October 1987.
- [10] FERNANDES, P. & GIDIRNO, P. & MOLFINO P. & MOLINARI, G. & REPETTO, M. "A Comparison of Adaptive Strategies for Mesh Refinement based on "A-posteriori" Local Error Estimation Procedures". IEEE Trans. on Magn., vol. 26, number 2, pp. 795-798, March, 1990.
- [11] HOOLE, S.R.H. & JAYAKUMARAN, S. & HOOLE, N. R. G. "Flux Density and Energy Perturbations in Adaptive Finite Element Mesh Generation". IEEE Trans. on Magn., vol. 24, number 1, pp. 322-325, January, 1988.
- [12] RAIZER, A. & MEUNIER, G. & COULOMB, J. L., "An Approach for Automatic Adaptive Mesh Refinement in Finite Computation of Magnetics Fields". IEEE Trans. on Magn., vol 19, number 6, pp. 2311-2316, November, 1983.
- [13] PENNAM, J. & FRASER, J. R. "Dual and Complementary Energy Methods in Electromagnetism". IEEE Trans. on Magn., vol 19, number 6, pp. 2311-2316, November, 1983.
- [14] RIKABI, S., "An Error - Based Approach to Complementary Formulations of Statics Fields Solutions". Intern. J. Methods Eng., vol 26, 1988.
- [15] LYRA, P. R. M. "Uma Estratégia de Refinamento Auto-Adaptativo do Método dos Elementos Finitos Aplicado a Problemas Bidimensionais Regidos pela Equação de Campo". Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1988.

- [16] VANTI, M. G. & BASTOS, J.P.A.. "Um Sistema Automático para Geração de Malhas Adaptativas". Anais do Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo Aplicado, pp. 413-421, Junho, 1992.
- [17] RAIZER, A. & MEUNIER, G. & SAKELLARIS J. & DARCHERIF, A. "The Impedance Boundary Condition Applied to the Finite Element Method Using the Magnetic Vector Potencial as State Variable: A Rigorous Solutions for Hight Frequency Aximetric Problems". IEEE Trans. on Magn., vol. 28, number 2, pp. 1643-1646, March, 1988.
- [18] RAIZER, A. & SAKELLARIS, J. & DARCHERIF, A. "On the Use of the Surface Impedance Concept in Shielded and Multiconductor Cable Characterization by Finite Element Method". IEEE Trans. on Magn., vol 28, number 2, March, 1991.
- [19] HOOLE, S.H.R. "The Natural Finite Element Formulation of the Impedance Boundary Conditions in Shielding Structures". Journal of Applied Phisics, vol 61, pp. 3863-3865, 1988.
- [20] SUBMARIAN, S. & HOOLE, S. R. H. "The Impedance Boundary Condition in Element Vector Potencial Formulation". IEEE Trans. on Magn., vol 24, pp. 2503-2505, 1988.
- [21] SUBMARIAN, S. & HOOLE, S. R. H. "The Impedance Boundary Element - Vector Potencial Formulation". IEEE Trans. on Magn., vol 5, number 3, pp. 2503-2505, November, 1988.
- [22] GYMESE, M. & LAVERS, D. "Impedance Boundary Condition for Multiply Connected Domains with Exterior Circuit Conditions". IEEE Trans. on Magn., vol 24, pp. 2101-2105, November, 1989.

- [23] FAWZI, T. & BURKLE, P. E. "On the Use of the Impedance Boundary Condition in Eddy Currents Problems". IEEE Trans. on Magn., vol 21, number 5, pp.1835-1840, September, 1985.
- [24] KRAUS & CARVER "Eletromagnetismo". Editora Guanabara, Rio de Janeiro, 1993.
- [25] CHARI, M. K V. "Finite-Element Solution of the Eddy-Current problem in Magnetic Structures". IEEE Trans. on Pas., pp. 62-72, 1974.
- [26] RAIZER A. "Maillage Auto-adaptatif dans les Logiciels de Calcul de Champs Eletromagnetique Bidimensionnel et Tridimensionnel". Tese de Doutorado, Institute Polytechnique de Glenoble, 1991.
- [27] SAKELLARIS I. "Modelisation des Regions Minces en Presence de Courants de Focault". Tese de Doutorado, Institute Polytechnique de Grenoble, 1992.